מבחן במבוא ללוגיקה (80423)

תשס"ו **מועד א'**

המורה: פרופ א. ריפס **משך הבחינה: 3 שעות**

לא ניתן לצבור יותר מ 100 נקודות.

חלק ראשון: ענו על 2 שאלות מתוך 3 השאלות הבאות (כל שאלה 20 נקודות).

✓ 1. נסחו והוכיחו את משפט הדדוקציה.

2. הוכיחו כי לכל תיאוריה T יש הרחבה לתיאוריה T' שהיא שלמה, כלומר לכל נוסחה סגורה A מתקיים בדיוק אחד מהשניים: $\vdash_{T'} A$ או $\vdash_{T'} \neg A$.

✓ 3. נסחו והוכיחו את משפט הסגור.

חלק שני: ענו על 2 שאלות מתוך 3 השאלות הבאות (כל שאלה 20 נקודות).

✓ 1. הוכיחו את כללי הדיסטריביוטיביות:

✓ א. אם $\vdash A \to B$ אז $\vdash \forall xA \to \forall xB$.

✓ ב. אם $\vdash A \to B$ אז $\vdash \exists xA \to \exists xB$.

✓ 2. האם ניתן לבטא את הקשרים הלוגיים: $\leftrightarrow, \not\to, \wedge, \vee, \neg$ באמצאות קבוצות הקשרים הבאות:

✓ א. $\{\wedge, \leftrightarrow\}$

✓ ב. $\{\to, \neg\}$

3. בנו מבנה $M = \langle |M|, < \rangle$, המתאים לשפה בעלת יחס דו מקומי יחיד $<$, המקיים את האקסיומות של יחס הסדר החלקי ובנוסף גם את הנוסחאות הבאות:

א. $\forall x \forall y \exists z \left((x < z \vee x = z) \wedge (y < z \vee y = z) \right)$.

ב. $\neg \forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$.

חלק שלישי: ענו על 3 שאלות מתוך 4 השאלות הבאות (כל שאלה 7 נקודות).
ענו האם הטענות הבאות נכונות או לא, נמקו תשובותיכם!

1. האם קיימת תיאוריה T כך שבקבוצת המבנה של כל מודל שלה יש אין סוף איברים?

✓ 2. יהיו a שם עצם ו-x, y, z משתנים. האם $(a_x[y])_y[z] = a_x[z]$?

✓ 3. האם הנוסחה $A \wedge B$ היא גרירה טאוטולוגית של הנוסחה $A \vee B$?

✓ 4. נניח כי תיאוריה T כוללת את סימני החיבור והכפל כסימני פונקציות דו מקומית. נסתכל במבנים $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle, \langle \mathbb{C}, +, \times \rangle$ האם הנוסחה $\forall x \exists y (x = y \times y)$ מבחינה בין מבנים אלו?

בהצלחה!

הגדרה:

מהרכבת שתי הטענות נעשה שימוש

בטענה הבאה:

אם $\vdash A \to B$ ו- $\vdash B \to C$ אז $\vdash A \to C$.

הוכחה: נראה ש $A \to C$ יכיר C אוטולוגית

של $A \to B$ ושל $B \to C$ ואז הטענה תנבע מהשפה

הטאוטולוגיה.

נניח ש $V(A \to C) = F$. אזי חייב להתקיים $V(C) = F$

אבל $V(A) = T$. כי ש $V(A \to B) = T$ חייב

להתקיים $V(B) = T$. אבל אז $V(B \to C) = F$

בסתירה. $\Leftarrow$ אם $V(A \to B) = T$ וגם $V(B \to C) = T$

חייב להתקיים $V(A \to C) = T$, כלומר $A \to C$

יכיר C אוטולוגית של $A \to B$ ושל $B \to C$. משל"

מבחן במבוא ללוגיקה

חלק שני:

(1) 3 נ"ל: כללי הדיסטריבוטיביות:

(ב) אם $\vdash A \to B$ אז $\vdash \exists x A \to \exists x B$

הוכחה:

לפי אקסיומת ההכלה $\vdash B_x[a] \to \exists x B$

נבחר במקום a את x ונקבל $\vdash B_x[x] \to \exists x B$

כלומר $\vdash B \to \exists x B$ (*)

נתון ש- $\vdash A \to B$ (**). לכן לפי משפט הטאוטולוגיה

$\vdash A \to \exists x B$ (שהרי לו אירה טאוטולוגית

של (*) ו-(**)).

x כמובן לא חופשי ב $\exists x B$ ולכן ניתן להשתמש

בכלל הכנסת הכמת $\exists$. נקבל $\vdash \exists x A \to \exists x B$,

כנדרש ☺

20/20

(ג) אם $\vdash A \to B$ אז $\vdash \forall x A \to \forall x B$

הוכחה:

לפי משפט ההכלה $\vdash \forall x A \to A_x[a]$*. ניקח

במקום a את x ונקבל $\vdash \forall x A \to A_x[x]$ כלומר

$\vdash \forall x A \to A$. נתון ש- $\vdash A \to B$ ולכן לפי

משפט הטאוטולוגיה $\vdash \forall x A \to B$. ברור

ש- x לא מופיע באופן חופשי ב- $\forall x A$ ולכן ניתן

להשתמש בכלל הכנסת כמת $\forall$. נקבל $\vdash \forall x A \to \forall x B$,

כנדרש ☺

* ר' הוכחה במטלה II

הסבר למה שעשה.

בשביל להראות שניתן לבטא קשר באמצעות קשרים אחרים יש להראות שפונק' האמת שמתקבלות הן זהות. הדבר עשה ע"י בדיקה של כל הקלטים האפשריים של פונק' אמת אלה, והשוואה בשני הביטויים שאנחנו בודקים.

2 — ב) נראה שניתן לבטא את הקשרים הבאים באמצעות קבוצת הקשרים $\{\neg, \rightarrow\}$.

- נראה ש $A \vee B$ זהה ל: $\neg A \rightarrow B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$	$A \vee B$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

- נראה ש $A \wedge B$ זהה ל- $\neg(\neg A \vee \neg B)$

ומאחר שאת $\vee$ אנחנו יודעים לבטא ע"י $\neg, \rightarrow$

אז $A \wedge B$ יהיה גם הוא ניתן לביטוי באמצעותם.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	$A \wedge B$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

- נראה ש $A \leftrightarrow B$ זהה ל $A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$.

מאחר שאת $\wedge$ אנחנו ראינו שניתן לבטא בעזרת $\neg$ ו- $\rightarrow$ אז נגדיר שגם את $\leftrightarrow$ ניתן להביע רק.

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$	$A \leftrightarrow B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

וכמובן $\neg A$ הוא $\neg A$ ו-

$A \rightarrow B$ הוא $A \rightarrow B$

ב) טענה: לא ניתן לבטא את הקשר הלוגי $\neg$ באמצעות הקשרים $\leftrightarrow$ ו- $\wedge$.

הוכחה: נראה לאמצעו פונק' אמת H שהיא הרכבה לשהי' של $H_\leftrightarrow$ ו- $H_\wedge$ רק ש $H = H_\neg$. בפרט נראה ש $H(T) = F$.

נשים לב ש $H_\leftrightarrow(T,T)=T$ וכן $H_\wedge(T,T)=T$

נטען ששום הרכבה של $H_\leftrightarrow$ ו- $H_\wedge$ לא תיתן ערך שקר לקלט אמת.

נראה זאת באינדוקציה על ההרכבה. נניח שיש לנו H', H'' שהן הרכבות של $H_\leftrightarrow$ ו- $H_\wedge$ והן מקיימות $H'(T) = T = H''(T)$ לפי הנ"ל. נראה שכל הרכבה שנמשיך לעשות עדיין תיתן ערך אמת. יש שתי אופציות

$$H(T) = H_\wedge(H'(T), H''(T)) \overset{\text{הנ"ל}}{=} H_\wedge(T,T) = T$$

$$H(T) = H_\leftrightarrow(H'(T), H''(T)) \overset{\text{הנ"ל}}{=} H_\leftrightarrow(T,T) = T$$

בכל אופן קיבלנו $H(T) = T$.

$\Leftarrow$ בכל הרכבה שנעסה לעשות לא נצליח לקבל $H(T) = F$. ומכאן הטענה

לכן לא נוכל לבטא את $\neg$ ע"י $\leftrightarrow$ ו- $\wedge$, כי לא נצליח ל"ה קשר מורכב שפונק' האמת שלו תתלכד עם פונק' האמת של $\neg$.

אם בכל קלט טוב יותר. האינדוקציה היא על ההרכבה. בכל אופן $H = H_\wedge(H', H'')$ או ש- $H = H_\leftrightarrow(H', H'')$. במקרה ש H' ו- H'' הורכבו בתהליך קצר יותר ניתן להחיל עליהן את הנחת האינדוקציה.

תלק שלישי:

(2) יהיו a שם ו- x, y, z משתנים.

טענה: לא נכון ש- $(a_x[y])_y[z] = a_x[z]$

הוכחה: נראה דוגמה נגדית.

נניח ש- a הוא y. כלומר ש a הוא שם כי לפי הגדרה משתנה הוא שם. כעת לא מופיע x ב- a ולכן אין מה להציב בעצם. כלומר $a_x[z]$ הוא a, כי y ו- $a_x[y]$ הוא a, כי y. אבל במקרה לה $(a_x[y])_y[z]$ הוא $a_y[z]$ כלומר $y_y z$ כי z. אבל y הוא אינו z.

(3) האם הנוסחה $A \wedge B$ מגדירה טאוטולוגיות של $A \vee B$? לפי משפט שלמדנו D מגדירה טאוטולוגיות של C אמ"מ $C \to D$ טאוטולוגיה.

נבדוק, אם כן, אם הנוסחה $A \wedge B \to A \vee B$ (*) טאו':

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \vee B \to A \wedge B$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

מכאן נובע שזו אינה טאוטולוגיה. מדוע? נוסחה D היא טאוטולוגיה אם לכל הערכה v של הנוסחאות האלמנטריות והרחבה של הערכה זו לכל הנוסחאות באופן המקובל מתקיים $v(D) = T$. לכל הערכה כזו מתקבל איזשהו ערך אמת ל- A ואיזשהו ערך אמת ל- B. ע"י בדיקה של כל הערכים האפשריים אנחנו בעצם מכסים את כל האפשרויות. מאחר שקיבלנו ש- $v(*)$ לא תמיד אמת, $A \wedge B$ אינה מגדירה טאוטולוגיות של $A \vee B$.

(4) תהי T תיאוריה הכוללת את סימני היחס והכפל כסימני פונקציות דו-מקומיים. נסתכל במבנים $\langle \mathbb{R},+,\times\rangle$, $\langle \mathbb{C},+,\times\rangle$ נטען שהנוסחה $\forall x\exists y(x=y\times y)$ מבחינה בין המבנים.

הוכחה: נסמן את $\langle \mathbb{R},+,\times\rangle$ ע"י $\mathcal{R}$

$\langle \mathbb{C},+,\times\rangle$ ע"י $\mathcal{C}$.

ואת הנוסחה $\forall x\exists y(x=y\times y)$ נסמן ע"י D.

נטען ש- $\mathcal{C}(D)=T$ ואילו $\mathcal{R}(D)=F$.

(1) ראינו בכיתה ש- $\mathcal{A}(\forall xA)=T$ אמ"מ לכל $a\in|\mathcal{A}|$ $A_x[a]=T$.

וכן לפי הגדרה $\mathcal{A}(\exists xB)=T$ אמ"מ קיים $a\in|\mathcal{A}|$ כך ש- $A_x[a]=T$.

מכאן נובע ש $\mathcal{C}(D)=T$ אמ"מ לכל $z\in\mathbb{C}$ קיים $\xi\in\mathbb{C}$ כך ש- $z=\xi\times\xi$. אבל זה נובע מכך ש- $\mathbb{C}$ הוא שדה סגור אלגברית.

7

(2) באותו אופן $\mathcal{R}(D)=T$ אמ"מ לכל $a\in\mathbb{R}$ קיים $b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a=b\times b$. אבל זה לא נכון. למשל עבור $a=-1\in\mathbb{R}$ לא קיים $b\in\mathbb{R}$ שמקיים $b\times b=-1$.

(את זה הוכחנו באינפ').

מכאן נובע שהנוסחה אכן מבחינה בין המבנים. מש"ל

<u>כלל הניתוק</u>: אם $\vdash A \to B$ ו- $\vdash A$

אז $\vdash B$.

<u>הוכחה</u>: $\vdash A \to B$ פירוש $\vdash \neg A \vee B$ (*)

$\vdash A$. לפי מש' ההכחה $\vdash B \vee A$.

לפי אקסיומת השלילה הנמנע $\vdash \neg B \vee B$

לכן לפי כלל התיק $\vdash A \vee B$ (**)

כעת מכלל התיק מ-(*) ו-(**)

$\vdash B \vee B$. לפי כלל הצמצום $\vdash B$.

משל ☺

מדוע יש שתי אפשרויות?

המלה שלי מריחה טאוטולוגיות כולל בתוכו את 3 כללי היסק הראשונים. ואילו לכלל הכנסת כמת יש להתייחס בנפרד.

מבוא ללוגיקה - המשך...

חלק ראשון:

(1) **משפט הדדוקציה:**

תהי T תיאוריה, תהי B נוסחה ב-T ו-$A_1,\dots,A_n$ נוסחאות סגורות ב-T. אזי

$$\vdash_{T[A_1,\dots,A_n]} B \iff \vdash_T A_1 \to \dots \to A_n \to B$$

הוכחה:

נוכיח ראשית עבור המקרה ש-$n=1$. צ"ל נראה שאם A סגורה אזי $\vdash_T A\to B$ אומ' $\vdash_{T[A]} B$.

($\Leftarrow$) אם $\vdash_T A\to B$ אז בוודאי $\vdash_{T[A]} A\to B$ שהרי רק הוספנו אקסיומה. כמו כן ברור ש $\vdash_{T[A]} A$. לכן לפי כלל הניתוק $\vdash_{T[A]} B$.

($\Rightarrow$) נוכיח כיוון זה באינדוקציה על תהליך ההסקה של B ב-$T[A]$. אם תהליך ההסקה היה באורך 1 אזי או ש-B היא A או ש-B היא אקסיומה ב-T. במקרה הראשון $\vdash_T A\to A$ שהרי שלו אקסיומת השלישי הנמנע - $\neg A \vee A$. במקרה השני אם B אקסיומה ב-T אז לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T A\to B$ שהרי $\vdash_T B$ ולפי כלל ההרחבה $\vdash_T \neg A \vee B$ כלומר $\vdash_T A\to B$.

כעת נניח לכל נוסחה שתהליך ההסקה שלה ב-$T[A]$ היה קצר משל B. אזי יש שתי אפשרויות:

(א) B היא גרירה טאוטולוגית של $C_1,\dots,C_m$. אזי לפי הנחת האינדוקציה $\vdash_T A\to C_1, \dots, \vdash_T A\to C_m$, שהרי תהליך ההסקה של C_i, לכל $1\le i\le m$, היה קצר יותר. אבל $A\to B$ היא גרירה טאוטולוגית של $A\to C_1, \dots, A\to C_m$. שהרי אם אלה מתקיימים אז לפי נכון

זה מעבר שנעשה פעמים רבות בבחינה
אם נרצה לראות בכל לאת:

A	C	D	$A \to C \to D$	$C \to A \to D$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

מתקבלים אותם ערכי אמת לכל הטבלה אם שרות
של A, C, D $\Leftarrow$ $C \to A \to D$ מרירה טאוטולוגיות
של $A \to C \to D$

ש- $A \to C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ ומאחר ש- B אינה טאוטולוגית
של $C_1, \ldots, C_m$ אז $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m \to B$ ולפי ההנחה
שרשמתי מעמוד הראשון של המבחן במחברת I
$A \to B$ היא אינה טאוטולוגית. ולכן לפי
משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T A \to B$.

(ב) B הוסקה ע"י כלל הכנסת כמת $\exists$. כלומר B
היא $\exists x C \to D$ והיא הוסקה מ- $C \to D$ כאשר ב- D
לא מופיע x באופן חופשי. אזי לפי הנחת האינדוקציה
$\vdash_T A \to C \to D$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T C \to A \to D$.
A סגורה ו- D לא מופיע x באופן חופשי $\Leftarrow$ ניתן
להשתמש בכלל הכנסת כמת. כלומר $\vdash_T \exists x C \to A \to D$
ובאותו אופן כמו קודם לפי משפט הטאוטולוגיה
$\vdash_T A \to \exists x C \to D$ כלומר $\vdash_T A \to B$.

עד כאן הראנו את המשפט לאקרה ש- $n=1$.
נמשיך באינדוקציה. נניח שהטענה נכונה עבור n ונראה
עבור $n+1$. $A_1, \ldots, A_{n+1}$ סגורות.
נרצה להוכיח ש $\vdash_{T[A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}]} B \iff \vdash_T A_1 \to \ldots \to A_n \to A_{n+1} \to B$
לפי הנחת האינדוקציה
$\vdash_{T[A_1, \ldots, A_n]} A_{n+1} \to B \iff \vdash_T A_1 \to \ldots \to A_n \to (A_n \to B)$
משום ש $A_1, \ldots, A_n$ סגורות.
אם נסמן $T' = T[A_1, \ldots, A_n]$ נוכל להשתמש בהנחת
האינדוקציה ונראה כי $\vdash_{T'[A_{n+1}]} B \iff \vdash_{T'} A_{n+1} \to B$
ולכן $\vdash_{T'[A_{n+1}]} B \iff \vdash_T A_1 \to \ldots \to A_n \to (A_{n+1} \to B)$
כלומר $\vdash_{T[A_1, \ldots, A_{n+1}]} B \iff \vdash_T A_1 \to \ldots \to A_{n+1} \to B$

מ"ש

לשם ההוכחה נזכור מספר טענות:

א) כלל ההכללה: אם $\vdash A$ אז $\vdash \forall x A$

הוכחה: אם $\vdash A$ אז לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg\forall x A \to A$. משום שב- $\neg\forall x A$ לא מופיע x באופן חופשי, ניתן להשתמש בכלל הנסת כמת $\forall$ ונקבל $\vdash \neg\forall x A \to \forall x A$ כלומר $\vdash \neg\forall x A \vee \forall x A$ לפי משפט הטאוג ולפי כלל הדמצים $\vdash \forall x A$.

ב) משפט ההכלבה: $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \to A_{x_1 \dots x_n}[a_1, \dots, a_n]$

$\vdash A_{x_1 \dots x_n}[a_1, \dots, a_n] \to \exists x_1 \dots \exists x_n A$

הוכחה: נראה רק את החלק שנשתמש בו.

לפי אקסיומת ההכלבה $\vdash \neg A \to \exists x A$. לפי טאוטולוגיה $\vdash \neg\exists x \neg A \to A$, כלומר $\vdash \forall x A \to A$.

כלומר ניתן לרשום יחס $\vdash \forall x_n A \to A$. ובאותו אופן $\vdash \forall x_{n-1} \forall x_n A \to \forall x_n A, \dots, \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \to \forall x_2 \dots \forall x_n A$. כעת לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \to A$.

נזכור את כלל ההכלבה: אם $\vdash A$ אז $\vdash A_{x_1 \dots x_n}[c_1, \dots, c_n]$

לכן בשימוש בכלל ההכלבה $\vdash (\forall x_1 \dots \forall x_n A \to A)_{x_1 \dots x_n}[a_1, \dots, a_n]$

כלומר $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \to A_{x_1 \dots x_n}[a_1, \dots, a_n]$

(3) משפט הסגור:

ראשית נגדיר סגור מהו:

תהי A נוסחה ויהיו $x_1,\dots,x_n$ המשתנים המופיעים בה באופן חופשי. אזי סגור של A הוא נוסחה

$$\forall x_1 \dots \forall x_n A$$

משפט הסגור אומר:

תהי A נוסחה ותהי A' סגור שלה. אזי $\vdash A$ אמ"מ $\vdash A'$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש $\vdash A$. אזי לפי כלל ההכללה אם $x_1,\dots,x_n$ משתנים אז $\vdash \forall x_n A$. שוב לפי כלל ההכללה $\vdash \forall x_{n-1} \forall x_n A$. אני מניחה שברור, בשימוש n פעמים בכלל ההכללה נקבל $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A$ כלומר $\vdash A'$.

($\Rightarrow$) נניח ש $\vdash A'$. כלומר $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A$.

לפי משפט ההצבה $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \to A_{x_1 \dots x_n}[a_1,\dots,a_n]$

ניקח x_i במקום a_i לכל $1 \le i \le n$ ונקבל

$$\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n A \to A$$

כאת לפי כלל הניתוק $\vdash A$.

הראנו את שני הכיוונים. מש"ל