מבוא ללוגיקה מתמטית

נכתב ונערך ע"י דינה זליגר

מבוסס על הרצאותיו של פרופ' איליה ריפס

סמסטר א' תשס"ו

תנאי שימוש

Please read the following important legal information before reading or using these notes. The use of these notes constitutes an agreement to abide by the terms and conditions below, just as if you had signed this agreement.

A. THE SERVICE.

The following notes ("The service") are provided by Dina Zil's Notes-Heaven ("Notes-Heaven").

B. DISCLAIMER OF WARRANTIES; LIMITATION OF LIABILITY.

Notes-Heaven does not endorse content, nor warrant the accuracy, completeness, correctness, timeliness or usefulness of any opinions, advice, content, or services provided by the Service.

YOU AGREE THAT USE OF THE SERVICE IS ENTIRELY AT YOUR OWN RISK. THE SERVICE PROVIDED IS PROVIDED "AS IS," WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND. NOTES-HEAVEN EXPRESSLY DISCLAIMS ALL WARRANTIES OF ANY KIND, WHETHER EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING WITHOUT LIMITATION: ANY WARRANTIES CONCERNING THE ACCURACY OR CONTENT OF INFORMATION OR SERVICES. NOTES-HEAVEN MAKES NO WARRANTY THAT THE SERVICE WILL MEET YOUR REQUIREMENTS, OR THAT THE SERVICE WILL BE ERROR FREE; NOR DOES NOTES-HEAVEN MAKE ANY WARRANTY AS TO THE RESULTS THAT MAY BE OBTAINED FROM THE USE OF THE SERVICE OR AS TO THE ACCURACY OR RELIABILITY OF ANY INFORMATION OBTAINED THROUGH THE SERVICE. YOU UNDERSTAND AND AGREE THAT ANY DATA OBTAINED THROUGH THE USE OF THE SERVICE IS DONE AT YOUR OWN DISCRETION AND RISK AND THAT YOU WILL BE SOLELY RESPONSIBLE FOR ANY DAMAGE TO YOUR GPA.

NEITHER NOTES-HEAVEN NOR ANY OF ITS PARTNERS, AGENTS, AFFILIATES OR CONTENT PROVIDERS SHALL BE LIABLE FOR ANY DIRECT, INDIRECT, INCIDENTAL, SPECIAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES ARISING OUT OF USE OF THE SERVICE OR INABILITY TO GAIN ACCESS TO OR USE THE SERVICE OR OUT OF ANY BREACH OF ANY WARRANTY.

C. INDEMNIFICATION.

You agree to indemnify and hold Notes-Heaven, its partners, agents, affiliates and content partners harmless from any dispute which may arise from a breach of terms of this Agreement. You agree to hold Notes-Heaven harmless from any claims and expenses, including reasonable attorney's fees and court costs, related to your violation of this Agreement.

D. OWNERSHIP RIGHTS.

The materials provided by the Service may be downloaded or reprinted for personal use only. You acknowledge that the Service contains information that is protected by copyrights, trademarks, trade secrets or other proprietary rights, and that these rights are valid and protected in all forms, media and technologies existing now or hereafter developed. You may not modify, publish, transmit, participate in the transfer or sale, create derivative works, or in any way exploit, any of the Content, in whole or in part. You may not upload, post, reproduce or distribute Content protected by copyright, or other proprietary right, without obtaining permission of the owner of the copyright or other proprietary right.

E. NO COPYING OR DISTRIBUTION.

You may not reproduce, copy or redistribute the design or layout of this service, individual elements of the design, Notes-Heaven logos or other logos appearing on this service, without the express written permission of Notes-Heaven, Inc. Reproduction, copying or redistribution for commercial purposes of the service is strictly prohibited without the express written permission of Notes-Heaven, Inc.

If you have any questions about this statement or the practices of this service you can contact

Dina Zeliger
dinazil@notes-heaven.tk

תוכן העניינים

פתח דבר

סטודנטים יקרים,

עבודה רבה הושקעה בהכנת מסמך זה. אך בכל זאת נפלו מספר טעויות. אבקש לקרוא את המסמך בזהירות ולא להתייחס למה שכתוב שם כתורה משמיים. בהקשר זה עלי לציין מספר הערות שיש להתייחס אליהן בקריאת המסמך.
הראשונה, בהגדרה של פירוש נוסחאות במבנים אני משתמשת בסימון $\mathfrak{A}(A \vee B) = \mathfrak{A}(A) \vee \mathfrak{A}(B)$. *ברורה כמובן הכוונה אך נכון יותר לרשום* $\mathfrak{A}(A \vee B) = H_{\vee}(\mathfrak{A}(A), \mathfrak{A}(B))$ *כאשר* $H_{\vee}$ *היא פונקציית האמת של קשר האיווי. כך גם לגבי שאר המקרים.*
השנייה, במקומות רבים אני משתמשת בקשרים הלוגיים גם כדי להביע רעיונות בעברית. למשל, הטענה (18) רשום

$$\left(\mathfrak{A}(\neg\exists x \neg A) = T\right) \Leftrightarrow \left(\forall a \in |\mathfrak{A}| \ \mathfrak{A}(A_x[i_a]) = T\right)$$

גם כאן ברורה הכוונה ובכל זאת כדי למנוע דו משמעויות ולהפריד הפרדה גמורה בין העולם של השפה לבין העולם שלנו שבו אנחנו מדברים ***על*** *השפה בעברית עדיף להשתמש במילים. כלומר עדיף לרשום:*

$\left(\mathfrak{A}(\neg\exists x \neg A) = T\right)$ *אמ"מ לכל איבר* $a \in |\mathfrak{A}|$ *מתקיים* $\mathfrak{A}(A_x[i_a]) = T$

באותו הקשר, פעמים רבות השתמשתי בניסוח כדוגמת "אם $A = B \vee C$*". סימן השוויון כאן הוא שוויון בין נוסחאות, בין מילים, כלומר המחרוזת שרשומה מצד שמאל היא ממש אותה המחרוזת שרשומה מצד ימין. ניתן היה לפתור בעיה זו ע"י כתיבה כזאת* $A \equiv B \vee C$ *אך הדבר לא נעשה, שכן, כמו בכל המקרים הקודמים, הכוונה הייתה ברורה. ובכל זאת עדיף פשוט להשתמש במילים: עדיף הניסוח* A *היא מהצורה* $B \vee C$.

לצערי לא הצלחתי להביא את המסמך לתצורה האופטימלית. ולכן אחזור ואומר, התייחסו לדברים בזהירות ובמחשבה!!

כמה מילות עידוד לקראת המבחן, יונתן אמר שמבחן יהיה ברמה של המבחן לדוגמה (ר' נספח 3) ובכמה רמות מתחת לרמה שאנחנו רגילים לפתור בתרגילים. אין הדבר אומר כי ניתן לנהוג בשאננות[1] *ובכל זאת כשאני ראיתי את המבחן נפלה עלי תחושת הקלה רבה.*

ובכן לא נותר מה לומר עוד, חוץ מבהצלחה! מי יתן וכולנו נקבל 100 במבחן!

דינה זליגר

נ.ב. ברצוני להודות לכל הסטודנטים שקראו, העירו הערות והאירו רעיונות במהלך כתיבת מסמך זה.

[1] זכרו את מלחמת יום כיפור...

1. לוגיקה מתמטית – מהי?

בניגוד למדעים רבים, מתמטיקה היא לא מדע שמסתמך על תצפיות. בכדי שמתמטיקאי יקבל משהו בתור עובדה הוא צריך להיות מוכח באופן ריגורוזי. אבל לא כל דבר ניתן להוכיח. ישנן עובדות שאנחנו פשוט מקבלים אותן כמו שהן, ללא ההוכחה – אלה הן **האקסיומות**. כל הדברים האחרים שמוכיחים על סמך האקסיומות הם **משפטים**. כנ"ל לגבי מושגים. ישנם מושגים בסיסיים שאנחנו פשוט "מבינים" ללא הגדרה וכל שאר המושגים והרעיונות שאנחנו משתמשים בהם מוגדרים באמצעות המושגים הבסיסיים האלה.

ישנן שתי דרכים לבחון את המשפטים. דרך אחת היא להסתכל על המשפט (theorem) כמשפט (sentence), כלומר כעצם תחבירי ולבחון את התכונות התחביריות שלו (המישור הסינטקטי). דרך אחרת היא לבחון את המשפט מבחינת המשמעות שלו, הרעיונות שעליהם הוא מדבר ומה הוא טוען לגביהם (המישור הסמנטי). על פני השטח נראה שטוב יותר לעבוד במישור הסמנטי, אל בהמשך נגלה שלא בהכרח כך הדבר ואף להפך – המחקר במישור הסינטקטי פשוט יותר ומביא לתוצאות כלליות יותר. המשפטים עלולים לפעמים להיות מסובכים וקשים מאוד להבנה. אם נבחן אותם מבחינת המבנה ולא מבחינת המשמעות נוכל פעמים רבות לגלות תכונות רבות שלהם אף ללא פירוש המשמעות של המשפט. המישור הסינטקטי הוא קונקרטי ומביא לתוצאות קונקרטיות, אך כדי לעבוד איתו רוב ההוכחות שנשתמש בהן יהיו קונקרטיות גם הן, כלומר, הוכחות שיראו קיום ע"י בנייה ממש ולא ע"י טענה שאי-קיום יביא לסתירה.

2. האינדוקציה המתמטית

כרגע זה עוד לא אומר לנו הרבה אבל במהלך קריאת הסיכום נוכל לשים לב שנעשה שימוש נרחב בעקרונות אינדוקציה למיניהם. יש שני עקרונות שאנחנו מכירים עוד מימי התיכון ומהקורסים של שנה א'.

עיקרון האינדוציה הרגילה:

תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי n. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. *בסיס האינדוקציה:* הטענה $P(0)$ נכונה.
2. *שלב האינדוקציה:* לכל $n>0$, נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת את נכונות הטענה $P(n)$.

אז $P(n)$ תקפה לכל מספר טבעי n.

עיקרון האינדוקציה המלאה:

תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי n. אם לכל n מתקיים שנכונות הטענה $P(k)$ לכל $k<n$ גוררת את נכונות הטענה $P(n)$ אז הטענה $P(n)$ נכונה לכל טבעי n.

נשים לשב שבעיקרון האינדוקציה המלאה לא נדרש בסיס לאינדוקציה. זו משהו שקשה לנו מאוד לעכל באופן אינטואיטיבי אך הדבר נכון ובעצם בסיס האינדוקציה מתקיים כאן באופן ריק.

ניתן להראות את שקילות שני העקרונות הנ"ל. כמו כן הם שקולים לעיקרון המינימום† אך לא השתמשנו בו בשום מקום בקורס ולכן לא נפרט בנושא.

† *לכל תת קבוצה של הטבעיים קיים איבר מינימלי.*

כמו כן, כמו קודם, מה שנאמר עכשיו כנראה לא יהיה ברור כל שך אך יש לזכור זאת בעת קריאה של החומר. עיקרון האינדוקציה מזמין אותנו להשתמש בו לא רק למטרות סטנדרטיות כגון הוכחת תכונות של מספרים טבעיים.

הגדרות רבות שנראה בקורס הן הגדרות רקורסיביות ולכן יהיה לנו נוכח להוכיח משפטים על עצמים אלה באינדוקציה. למשל תופעה לנו הוכחות באינדוקציה על בנייה ל שמות עצם ונוסחאות, הוכחות באינדוקציה על תהליך ההסקה. כל אלה מתבססים על אותו עיקרון:

1. נוכיח שתכונה מתקיימת לעצם בסיסי כלשהו.
2. נוכיח שבעקבות כל תהליך "חוקי" שנוכל לעשות עם עצם זה נשמרת התכונה הזאת.

מכן ינבע שתכונה נכונה לכל עצם.

אל דאגה אם לא הבנתם כלום כרגע. ההבנה תבוא עם קריאת הטקסט.

3. האריתמטיקה של פיאנו

האקסיומות של פיאנו (לצורך הדיון בפרק זה נסמן את האקסיומה ה- i -ית ב- Ai)

3. קיים 0
4. לכל x קיים עוקב Sx
5. אם $Sx=Sy$ אז $x=y$
6. לא קיים x כך ש- $Sx=0$
7. לכל $x\neq 0$ קיים y כך ש- $Sy=x$
8. $x+0=x$
9. $x+Sy=S(x+y)$
10. $x\cdot 0=0$
11. $x\cdot Sy=x\cdot y+x$
12. $\neg x<0$
13. $x<Sy\leftrightarrow x=y\vee x<y$
14. $x<y\vee x=y\vee y<x$

נוכיח כל מיני טענות שנובעות מאקסיומות פיאנו. כל מבנה שמקיים את האקסיומות האלה יקיים את המשפטים שנוכיח. למשל, המספרים הטבעיים הם מבנה שמתקיימות בו האקסיומות של פיאנו ולכן מתקיימים לגביהם כל המשפטים שתכף נוכיח.

(לצורך דיון זה נסמן את המשפט ה- i -י ב- Ti)

<u>משפט 1</u>: $0+x=x$

<u>הערה</u>: המשפט הזה לא ברור משום שקומוטטיביות היא לא אחת מהאקסיומות.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על x :

1. בסיס האינדוקציה: עבור $x=0$ לפי $A6$ נקבל $0+0=0$
2. הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור x
3. שלב האינדוקציה: נוכיח עבור העוקב Sx :

$$0+Sx\overset{A7}{=}S(0+x)\overset{IH}{=}Sx$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל x . ☺

<u>משפט 2</u>: $Sx+y=S(x+y)$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על y :

1. עבור $y=0$ נקבל $Sx+0\overset{A6}{=}Sx\overset{A6}{=}S(x+0)$
2. נניח עבור y ונוכיח לעוקב שלו:

$$Sx+Sy\overset{A7}{=}S\left(Sx+y\right)\overset{IH}{=}S\left(S\left(x+y\right)\right)\overset{A7}{=}S\left(x+Sy\right)$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל y . ☺

<u>משפט 3</u>: $x+y=y+x$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על y :

3. עבור $y=0$ נקבל $x+0\overset{A6}{=}x\overset{T1}{=}0+x$
4. נניח עבור y ונוכיח לעוקב שלו:

$$x+Sy\overset{A7}{=}S\left(x+y\right)\overset{IH}{=}S\left(y+x\right)\overset{T2}{=}Sy+x$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל y . ☺

<u>משפט 4</u>: $\left(x+y\right)+z=x+\left(y+z\right)$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על z :

1. $\left(x+y\right)+0\overset{A6}{=}x+y\overset{A6}{=}x+\left(y+0\right)$
2. נניח עבור z . אזי

$$\left(x+y\right)+Sz\overset{A7}{=}S\left(\left(x+y\right)+z\right)\overset{IH}{=}S\left(x+\left(y+z\right)\right)\overset{A7}{=}$$
$$\overset{A7}{=}x+S\left(y+z\right)\overset{A7}{=}x+\left(y+Sz\right)$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה עבור כל z . ☺

<u>משפט 5</u>: $0\cdot x=0$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על x :

1. $0\cdot 0\overset{A8}{=}0$
2. נניח עבור x . אזי $0\cdot Sx\overset{A9}{=}0\cdot x+0\overset{HI}{=}0+0\overset{A6}{=}0$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל x . ☺

<u>משפט 6</u>: $Sx\cdot y=x\cdot y+y$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על y :

1. $x\cdot 0+0\overset{A8}{=}0+0\overset{A6}{=}0\overset{A8}{=}Sx\cdot 0$
2. נניח עבור y ונוכיח ל- Sy :

$$Sx\cdot Sy\overset{A9}{=}Sx\cdot y+Sx\overset{IH}{=}\left(x\cdot y+y\right)+Sx\overset{A7}{=}$$
$$\overset{A7}{=}S\left(\left(x\cdot y+y\right)+x\right)\overset{T4}{=}S\left(x\cdot y+\left(y+x\right)\right)$$
$$x\cdot Sy+Sy\overset{A9}{=}\left(x\cdot y+x\right)+Sy\overset{A7}{=}$$
$$\overset{A7}{=}S\left(\left(x\cdot y+x\right)+y\right)\overset{T4}{=}S\left(x\cdot y+\left(x+y\right)\right)\overset{T3}{=}$$
$$\overset{T3}{=}S\left(x\cdot y+\left(y+x\right)\right)$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל y . ☺

<u>משפט 7</u>: $x\cdot y=y\cdot x$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על y :

1. $0\cdot x\overset{T5}{=}0\overset{A8}{=}x\cdot 0$
2. נניח שהמשפט נכון עבור y ונוכיח שהוא נכון גם לעוקב שלו:

$$x\cdot Sy\overset{A9}{=}x\cdot y+x\overset{IH}{=}y\cdot x+x\overset{T6}{=}Sy\cdot x$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל y . ☺

<u>משפט 8</u>: $x\cdot\left(y+z\right)=x\cdot y+x\cdot z$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על z :

1. $x\cdot\left(y+0\right)\overset{A6}{=}x\cdot y\overset{A6}{=}x\cdot y+0\overset{A8}{=}x\cdot y+x\cdot 0$
2. נניח עבור z . אז:

$$x\cdot\left(y+Sz\right)\overset{A7}{=}x\cdot S\left(y+z\right)\overset{A9}{=}$$
$$\overset{A9}{=}x\cdot\left(y+z\right)+x\overset{IH}{=}\left(x\cdot y+x\cdot z\right)+x\overset{T4}{=}$$
$$\overset{T4}{=}x\cdot y+\left(x\cdot z+x\right)\overset{A9}{=}x\cdot y+x\cdot Sz$$

ולכן לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל z . ☺

<u>משפט 9</u>: $\left(x\cdot y\right)\cdot z=x\cdot\left(y\cdot z\right)$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על z :

1. $x\cdot\left(y\cdot 0\right)\overset{A8}{=}x\cdot 0\overset{A8}{=}0\overset{A8}{=}\left(x\cdot y\right)\cdot 0$
2. נניח את נכונות הטענה ל- z . אזי:

$$\left(x\cdot y\right)\cdot Sz\overset{A9}{=}\left(x\cdot y\right)\cdot z+x\cdot y\overset{IH}{=}x\cdot\left(y\cdot z\right)+x\cdot y\overset{T8}{=}$$
$$\overset{T8}{=}x\cdot\left(y\cdot z+y\right)\overset{A9}{=}x\cdot\left(y\cdot Sz\right)$$

מעיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל z . ☺

בזאת הוכחנו את כל התכונות הרגילות שאנחנו מכירים על הטבעיים.

4. <u>שפות פורמליות</u>

ניזכר אילו מרכיבים היו באקסיומות פיאנו:

- קבוע אפס (שניתן להתייחס אליו כפונקציה 0-מקומית)
- פונקציה חד-מקומית S - העוקב
- פונקציות דו-מקומיות $+$, $\cdot$
- יחס דו מקומי $<$ - "קטן מ-"

אבל בעזרת מרכיבים אלה לא נוכל להביע יותר מדי רעיונות. לשם כך יש סימנים שמאפשרים לכתוב רעיונות באופן פורמלי ולקשר בין משפטים שונים. קשרים לוגיים הם סימנים שמבטאים יחסים בין משפטים:

- $\neg$ שלילה (negation)
- $\wedge$ גימום (conjunction)
- $\vee$ איווי (disjunction)
- $\rightarrow$ גרירה
- $\leftrightarrow$ שקילות

גימום, איווי, גרירה ושקילות הם קשרים דו-מקומיים ואילו שלילה הוא קשר לוגי חד-מקומי.

ישנם גם קשרים לוגיים 0-מקומיים והם מחזירים ערכים קבועים:

- $\top$ אמת
- $\bot$ שקר

נראה שניתן להביע את כל הקשרים באמצעות $\left\{\rightarrow,\bot\right\}$:

קשר	**ביטוי באמצעות** $\left\{\rightarrow,\bot\right\}$
שלילה $\neg P$	$P\rightarrow\bot$
איווי $P\vee Q$	$\left(P\rightarrow\bot\right)\rightarrow Q$
גימום $P\wedge Q$	$\left(\left(\left(P\rightarrow\bot\right)\rightarrow\bot\right)\rightarrow\left(Q\rightarrow\bot\right)\right)\rightarrow\bot$
שקילות $P\leftrightarrow Q$	$\left(P\rightarrow Q\right)\wedge\left(Q\rightarrow P\right)$ ובמקום סימן הגימום נשתמש בביטוי השקול שלמעלה
אמת $\top$	$\bot\rightarrow\bot$

ניתן לבדוק את כל הזהויות שבטבלה באמצעות טבלאות אמת. בתור דוגמה, נאמת את הביטוי שהצגנו לאיווי:

P	Q	$P \vee Q$	$P \to \bot$	$(P \to \bot) \to Q$
אמת	אמת	**אמת**	שקר	**אמת**
אמת	שקר	**אמת**	שקר	**אמת**
שקר	אמת	**אמת**	אמת	**אמת**
שקר	שקר	**שקר**	אמת	**שקר**

אנחנו רואים שהביטויים נותנים את אותו ערך לכל ערך התחלתי של P ושל Q. לכן הם שקולים.

ישנן אלטרנטיבות אחרות: ניתן להציג את כל הקשרים באמצעות למשל $\{\vee, \neg\}$:

- גרירה: $(\neg P) \vee Q$
- גימום: $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$
- שקילות: $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

נשים לב שלא נתנו ייצוג לקשרים ה-0-מקומיים $\top$ ו-$\bot$. למעשה, זה בלתי אפשרי משום שהקשרים שבחרנו להביע באמצעותם את השאר הם דו-מקומיים. הביטוי $P \vee (\neg P)$ מחזיר תמיד ערך אמת אך הוא חד-מקומי!!

לסיכום, כאשר מנסחים שפה פורמלית יש להחליט אילו קשרים לוגיים נכניס לשפה כסמלים בסיסיים וכל שאר הקשרים יהיו קיצורים של ביטויים שמופיעים בהם אך ורק הסמלים הבסיסיים.

<u>הגדרה</u>: **משתנה בוליאני** P הוא משתנה שיכול לקבל אך ורק אחד מהערכים – אמת (שנסמן ב-T) ושקר (שנסמן ב-F). כלומר $P \in \{T, F\}$.

<u>הגדרה</u>: **פונקציה בוליאנית** n-מקומית היא פונקציה שמקבלת כקלט n משתנים בוליאניים ומחזירה ערך בוליאני – אמת או שקר.

<u>טענה 10</u>: יש 2^{2^n} פונקציות בוליאניות n-מקומיות.

<u>הסבר</u>: הפונקציה היא n-מקומית והיא בוליאנית. לכן יש 2^n אפשרויות לסדרות של קלט. לכל סדרה כזאת יש שתי אופציות לפלט. ככה מתקבלות 2^{2^n} פונקציות שונות. ☺

<u>משפט 11</u>: כל פונקציה בוליאנית n-מקומית $f(P_1, ..., P_n)$ ניתן להציג כאיווי של גימום של המשתנים הבוליאניים או שלילתם.

<u>משמעות</u>: אם השפה שלנו מורכבת רק מהקשרים שלילה איווי וגימום נוכל לבטא בעזרתם כל פונקציה בוליאנית שנרצה ולא נצטרך להכניס לשפה קשרים לוגיים נוספים. למעשה, נדמה לי שבמיתוג מוכיחים שאי אפשר לוותר על השלילה. אבל אם חוץ מהשלילה נכניס לשפה עוד קשר שבעזרתו ובעזרת השלילה נוכל לבטא את האיווי והגימום אז נקבל מערכת שלמה של קשרים, כלומר לא נזדקק לקשרים נוספים ונוכל לבטא כל פונקציה בוליאנית שנרצה!

<u>הוכחה</u>: לפונקציה f יש 2^n קלטים אפשריים. נסתכל על טבלת הערכים של הפונקציה. בטבלה כזאת יש 2^n שורות (בהתאם למספר הקלטים האפשריים) ובכל שורה יש או ערך "אמת" או ערך "שקר". נניח שהפונקציה החזירה ערך "אמת" בשורות $\{L_\alpha\}_{\alpha \in \{1, ..., 2^n\}}$. לכל שורה L_α, נניח שהקלטים $\{P_i\}_{i=1}^n$ קיבלו ערכי אמת $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$. נגדיר אז $Q_\alpha = P_1^{\delta_1} \wedge ... \wedge P_n^{\delta_n}$ כאשר $P_i^{\delta_i} = \begin{cases} P_i & \varepsilon_i = T \\ \neg P_i & \varepsilon_i = F \end{cases}$ לכל $1 \le i \le n$.

ברור ש-Q_α מקבל ערך "אמת" אמ"מ הפונקציה החזירה ערך "אמת" לאותו רצף של קלטים. נסתכל על $Q_{\alpha_1} \vee ... \vee Q_{\alpha_k}$ כאשר $1 \le k \le 2^n$. ביטוי זה מחזיר ערך "אמת" אמ"מ הפונקציה f מחזירה ערך "אמת". וביטוי זה הוא איווי של גימומים. ☺

<u>דוגמה</u>: נגדיר פונקציה בוליאנית f 3-מקומית ע"י הטבלה הבאה:

	P_1	P_2	P_3	$f(P_1, P_2, P_3)$
1	**אמת**	**אמת**	**אמת**	**אמת**
2	**אמת**	**אמת**	**שקר**	**אמת**
3	אמת	שקר	אמת	**שקר**
4	**אמת**	**שקר**	**שקר**	**אמת**
5	שקר	אמת	אמת	**שקר**
6	שקר	אמת	שקר	**שקר**
7	שקר	שקר	אמת	**שקר**
8	**שקר**	**שקר**	**שקר**	**אמת**

השורות שבהן הפונקציה מקבלת ערך אמת מודגשות. נפעל לפי האלגוריתם המתואר בהוכחה:

שורה 1:

$$(P_1, P_2, P_3) = (T, T, T) \Rightarrow (P_1^{\delta_1}, P_2^{\delta_2}, P_3^{\delta_3}) = (P_1, P_2, P_3)$$

כלומר $Q_1 = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$

שורה 2:

$$(P_1, P_2, P_3) = (T, T, F) \Rightarrow (P_1^{\delta_1}, P_2^{\delta_2}, P_3^{\delta_3}) = (P_1, P_2, \neg P_3)$$

כלומר $Q_2 = P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$

שורה 4:

$$(P_1, P_2, P_3) = (T, F, F) \Rightarrow (P_1^{\delta_1}, P_2^{\delta_2}, P_3^{\delta_3}) = (P_1, \neg P_2, \neg P_3)$$

כלומר $Q_4 = P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$

שורה 8:

$$(P_1, P_2, P_3) = (F, F, F) \Rightarrow (P_1^{\delta_1}, P_2^{\delta_2}, P_3^{\delta_3}) = (\neg P_1, \neg P_2, \neg P_3)$$

כלומר $Q_8 = \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$

לכן נקבל בסופו של דבר:

$$f(P_1, P_2, P_3) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_4 \vee Q_8 =$$
$$= (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3)$$

<u>הגדרה</u>: פונקציה בוליאנית n-מקומית $f(P_1, ..., P_n)$ נקראת **טאוטולוגיה** אם לכל ערך אמת של $P_1, ..., P_n$ מתקבל ערך "אמת".

<u>דוגמה</u>: $P \vee (\neg P)$ היא טאוטולוגיה.

<u>הערה</u>: לכל פונקציה בוליאנית ניתן לבדוק אם היא טאוטולוגה או לא: יש להציב את 2^n האופציות למשתנים ולבדוק מה הפלט שלה. משום שמספר הקלטים גדל באופן אקספוננציאלי זה לא פרקטי כל כך, אבל מה שחשוב לנו הוא שקיים אלגוריתם סופי לבדיקה.

אנחנו נבחר כקונבנציה להשתמש בקשרים $\{\neg, \vee\}$. ראינו שניתן להביע באמצעותם כל קשר לוגי דו-מקומי אחר. כמו כן ראינו שניתן להציג כל פונקציה בוליאנית באמצעות איווי וגימום ולכן גם באמצעות האיווי והשלילה.

כעת אנחנו יודעים לקשר בין חלקי משפט. אבל נרצה גם להביע באיזשהו אופן קיום והכללה. לשם כך קיימים הכמתים:

- כמת של קיום: $\exists x A$ - קיים x כך ש-A ($\exists xist$)
- כמת של הכללה: $\forall x A$ - לכל x מתקיים A ($\forall ll$)

בשפה נוכל להסתפק בכמת אחת בלבד. נשים לב שלומר $\exists x A$ זה כמו להגיד $\neg \forall x \neg A$ ולומר $\forall x A$ זה כמו להגיד $\neg \exists x \neg A$. יותר קל להבין זאת בעזרת דוגמה:

- $\exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$: **יש** יום בשבוע ($\exists x$) שיירד בו גשם ($A$)
  $\Leftrightarrow$ **לא** נכון ש**כל** יום בשבוע ($\neg \forall x$) **לא** יירד גשם ($\neg A$)

- $\neg\exists x\neg A \Leftrightarrow \forall xA$: **בכל** יום בשבוע ($\forall x$) יירד גשם (A) $\Leftrightarrow$
לא נכון **שיש** יום בשבוע ($\neg\exists x$) שבו **לא** יירד גשם ($\neg A$)
אנחנו נבחר להשתמש בכמת של הקיום ונביע באמצעותו את הכמת הכולל.

בשפה פורמלית יש גם משתנים לא בוליאניים שאותם נסמן בד"כ באותיות x, y, z ואינדקסים תחתונים. נניח שיש אינסוף משתנים. כלומר, לא יכול לקרות מצב שבו נרצה להשתמש במשתנה ואין לנו כזה.

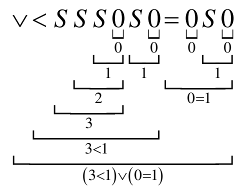
<u>לסיכום</u>: בשפה יש:
1. החלק הלוגי:
   a. קשרים
   b. כמתים
2. החלק הלא לוגי
   a. משתנים
   b. פונקציות
   c. יחסים

<u>הגדרה</u>: **שם עצם**
1. כל משתנה הוא שם עצם.
2. אם f סימן פונקציה n-מקומית ו- $u_1,...,u_n$ שמות עצם אזי $fu_1...u_n$ שם עצם (ייתכן גם המקרה ש- $n=0$ ואז מדובר בקבוע)

<u>דוגמה</u>: באריתמטיקה של פיאנו 0 הוא קבוע, כלומר פונקציה 0-מקומית ולכן הוא שם עצם. S פונקציה חד-מקומית ולכן $S0$ שם עצם ומכאן שגם $SS0$. $+$ היא פונקציה דו מקומית ולכן $+S0SS0$. גם $\cdot$ היא פונקציה דו-מקומית ולכן $\cdot + S0SS0S0$ שם עצם. ההגדרה בעצם נותנת אלגוריתם רקורסיבי לבנייה של שמות עצם בשפה.

<u>הגדרה</u>: **נוסחה**
1. נניח ש- p סימן יחס n-מקומי ו- $u_1,...,u_n$ שמות עצם. אזי $pu_1...u_n$ נקרא **נוסחה אטומית**. נוסחה אטומית היא נוסחה.
2. אם A, B נוסחאות אזי $\vee AB$ נוסחה.
3. אם A נוסחה אזי $\neg A$.
4. אם A נוסחה ו- x משתנה אזי $\exists xA$ נוסחה.

<u>דוגמה</u>:



בהמשך נראה שתמיד ניתן לשחזר אחורה בצורה חד-חד-ערכית את הסימנים הבלתי קריאים לבני אנוש האלה. ואם כבר בסימנים בלתי קריאים לבני אנוש עניינו, מילה של מוטיבציה: אנחנו נראה שאת רוב המשפטים מוכיחים באינדוקציה על בניית הנוסחה ואז הצמצום בסימנים יעזור לנו, משום שניוותר עם מספר אופציות מצומצם ולא נצטרך להוכיח ל**כל** האוסף הרחב של סימנים שהיינו יכולים להכניס לשפה.

<u>הגדרה</u>: **היגד** הוא או שם עצם או נוסחה.

נשים לב שכל ההיגדים שהגדרנו קודם (שמות עצם ונוסחאות) הוגדרו באותו אופן. הגדרנו מהו היגד בסיסי שלא ניתן לפירוק[‡] ולאחר מכן באופן רקורסיבי: אם v סמל של השפה ו- $v_1,...,v_n$ היגדים מאותו הסוג אזי $vv_1...v_n$ היגד גם הוא. חשוב לשים לב שלא כל n מתאים לכל סמל v בשפה וכמובן v צריך גם להתאים לסוג ההיגד:

- אם v משתנה אזי $n=0$
- אם v פונקציה אזי n הוא מספר המקומות בה
- אם v יחס אזי n הוא מספר המקומות בו
- אם v שלילה $\neg$ אזי $n=1$
- אם v איווי $\vee$ אזי $n=2$
- אם v כמת קיום $\exists$ אזי $n=2$.

לכאורה לא השגנו כלום בהגדרה הזו של היגד, ולמעשה גם לא נשתמש בזה יותר מדי. מה שאנחנו אמורים להסיק מההערה הזו הוא איזו שיטה כללית להוכחה של תכונות של היגדים. כאשר נרצה להוכיח דבר מה שקשור בשמות עצם או בנוסחאות פעמים רבות נוכיח זאת באינדוקציה על בניית ההיגד. אבל לפי מה שכתבנו כאן לאינדוקציה הזאת יש מתכון קבוע: ראשית בתור בסיס אינדוקציה נראה את הטענה להיגד הבסיסי שאינו ניתן לפירוק. לאחר מכן נניח שהטענה נכונה לכל היגד שתהליך הבנייה שלו היה קצר יותר מההיגד המדובר ולבסוף נוכיח לגבי ההיגד עצמו ע"י כך שנעבור על כל האופנים שבהם הוא יכול היה להיבנות. אם מה שנאמר פה לא ברור עכשיו, אל דאגה, לאחר מספר (רב!!) של הוכחות מסוג זה, העניין יהיה ברור.

<u>דוגמה</u>: $0=0$ אינו היגד ואין שום צורה שנוכל להגיע לביטוי זה ע"י הכללים שהגדרנו. לעומת זאת, $=00$ הוא היגד. במקרה זה v הוא סימן השוויון $=$. השוויון הוא יחס דו מקומי ולכן אחריו עומדים שני שמות עצם, כלומר שני היגדים.

אלגוריתם לבדיקה אם הביטוי $\alpha\alpha_1...\alpha_k$ הוא היגד:
1. לבדוק את α:
   a. אם α סימן 0-מקומי אזי $\alpha\alpha_1...\alpha_k$ אינו היגד.
   b. אחרת לבדוק מהו מספר המקומות של α - n
      i. לחלק את $\alpha_1...\alpha_k$ ל- n חלקים בכל צורה אפשרית. לכל חלוקה לבצע את הבדיקה.[§]

<u>הגדרה</u>: בהינתן שפה, **מילה** היא רצף של סימנים כלשהם מהשפה (לאו דווקא בעל משמעות).
<u>דוגמה</u>: $0=0$ הוא לא היגד אבל זו מילה! כך גם $++0+S\cdot 0$.

<u>הגדרה</u>: יהיו w_1, w_2 מילים בשפה. נאמר שהן **ניתנות להשוואה** אם מתקיים אחד מהבאים:
1. w_1 היא רישא של w_2
2. w_2 היא רישא של w_1

<u>טענה 12</u>: יהיו $v_1,...,v_n,v_1',...,v_n'$ ($0<n$) היגדים כך שהמילים $v_1...v_n$ ו- $v_1'...v_n'$ ניתנות להשוואה. אזי $v_1=v_1',...,v_n=v_n'$.
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על האורך של האורך של $v_1...v_n$.
1. אם האורך של $v_1...v_n$ הוא 1 אזי $n=1$ ו- v_1 הוא רק סמל 0-מקומי v. אם v_1' רישא של $v_1=v$ אזי ברור שגם v_1' הוא v. אם $v_1=v$ רישא של v_1' אזי v_1' מתחיל ב- v שהוא סמל 0-מקומי ולכן $v_1'=v$. כלומר $v_1=v_1'$.
2. נניח שהטענה נכונה לכל מילה שקצרה מ- $v_1...v_n$ ונוכיח ל- $v_1...v_n$. מאחר ש- $v_1...v_n$ ו- $v_1'...v_n'$ ניתנות להשוואה גם v_1 ו- v_1' ניתנות להשוואה. כמן כן, הן מתחילות באותו הסימן u (אחרת הן לא יכולות להיות ניתנות להשוואה). נניח ש- u הוא סימן k-מקומי ($0\le k$). אזי ניתן לכתוב $v_1=uu_1...u_k$ ו-

[‡] משתנה במקרה של שם עצם ונוסחה אטומית במקרה של נוסחה.

[§] למעשה האלגוריתם הזה לא כ"כ טוב באחר שיש לבדוק גם אם סוג ההיגדים מתאים לסמלים ואם כל ההיגדים הם מאותו סוג. אבל אם אנחנו יודעים ששני תנאים אלה מתקיימים אזי האלגוריתם עובד נכון.

$v_1' = uu_1'...u_k'$. אזי $u_1...u_k$ ו- $u_1'...u_k'$ ניתנות להשוואה[**]. אבל הן קצרות מ- $v_1...v_n$ ולכן ניתן להחיל לגביהן את הנחת האינדוקציה: קיבלנו ש- $u_1 = u_1',...,u_k = u_k'$. לכן $v_1 = v_1'$.
לכן $v_2...v_n$ ו- $v_2'...v_n'$ ניתנות להשוואה. אבל $v_2...v_n$ קצרה מ- $v_1...v_n$. לכן לפי הנחת האינדוקציה $v_2 = v_2',...,v_n = v_n'$.
לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $0 < n$. ☺

<u>משפט 13</u>: כל היגד מתפרש באופן חד-ערכי.
<u>הוכחה</u>: יהיו a,b שני היגדים כך ש- $a = b$. מאחר שהם היגדים ניתן לרשום $a = vv_1...v_n$ ו- $b = uu_1...u_m$ כאשר n,m הם מספרי המקומות של הסמלים v,u בהתאמה. מאחר ש- $a = b$ $u = v$ ולכן $m = n$. כלומר $a = vv_1...v_n$ ו- $b = vu_1...u_n$. אזי $v_1...v_n = u_1...u_n$. בפרט הם ניתנים להשוואה. אזי לפי טענה (12) $v_1 = u_1,...,v_n = u_n$. כלומר ניתן לקרוא את a ואת b באופן יחיד. ☺

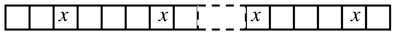
<u>טענה 14</u>: יהי u היגד ו- v סמל המופיע בתוך u. אזי ההופעה של v ב- u פותחת הופעה של היגד ב- u.
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על האורך של u:
1. אם $l(u) = 1$ [††] אזי $u = v$ וסיימנו.
2. נניח לכל היגד שקצר מ- u ונוכיח עבור u. u היגד ולכן נוכל לרשום אותו באופן הבא: $u = zz_1...z_n$ כאשר z סמל n-מקומי ו- $z_1,...,z_n$ היגדים. אם $v = z$ סיימנו. אחרת v מופיע באיזה היגד z_i כאשר $1 \le i \le n$. אבל ברור ש- $l(z_i) < l(u)$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה ההופעה של v בתוך z_i פותחת הופעה של היגד חדש. כלומר ההופעה של v ב- u פותחת הופעה של היגד ב- u.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל היגד u. ☺

<u>משפט 15</u>: יהי $uv_1...v_n$ היגד כאשר u סמל n-מקומי ו- $v_1,...,v_n$ היגדים. יהי v היגד שמופיע ב- $uv_1...v_n$. אזי ההופעה של v ב- $uv_1...v_n$ היא כל $uv_1...v_n$ או ש- v מופיע כולו בתוך איזה v_i $1 \le i \le n$.
<u>הוכחה</u>: ישנן שתי אפשרויות:
הראשונה, v מתחיל באותו ה- u הראשון ב- $uv_1...v_n$. אזי $v = uv_1'...u_n'$. v ניתנת להשוואה עם $uv_1...v_n$ ולכן לפי טענה (12) $v_1 = v_1',...,v_n = v_n'$. כלומר $v = uv_1...v_n$.
האפשרות השנייה היא שהאות הפותחת של v נמצאת בתוך איזה v_i כאשר $1 \le i \le n$. נניח שאות זו היא סמל m-מקומי w. אזי ניתן לכתוב $v = wa_1...a_m$. ולפי טענה 14 w פותח הופעה של היגד $ww_1...w_m$ ב- v_i. v ו- $ww_1...w_m$ ניתנים להשוואה ולכן $a_1 = w_1,...,a_m = w_m$, כלומר v נמצא כולו בתוך v_i. ☺

5. <u>הצבה</u>

נניח ש- A נוסחה ו- x משתנה שמופיע בה בכל מיני מקומות:



נניח a שם עצם. מה יקרה אם בכל מקום שבו מופיע x נחליף אותו ב- a?

<u>הגדרה</u>: יהיו A נוסחה ו- x משתנה. הופעה של x בתוך A נקראת **קשורה** אם הוא מופיע ב- A בחלק שצורתו $\exists xB$ (כאשר B נוסחה). אחרת ההופעה נקראת **חופשית.** x נקרא משתנה **קשור** (**חופשי**) ב- A אם קיימת הופעה **קשורה** (**חופשית**) שלו ב- A.

<u>דוגמה</u>:

$$\underbrace{\vee \underbrace{= x\, \underbrace{S \underbrace{S0}_{1}}_{2}}_{x=2}\ \underbrace{\exists x \underbrace{= \underbrace{Sx}_{x+1} \underbrace{S\underbrace{S0}_{1}}_{2}}_{x+1=2}}_{\exists x(x+1=2)}}_{(x=2)\vee(\exists x(x+1=2))}$$

בדוגמה זו x גם קשור וגם חופשי. ההופעה הקשורה מסומנת בכתום וההופעה החופשית מסומנת בכחול.

נחזור לשאלה המקורית שלנו: מה קורה כאשר מציבים שם עצם במקום משתנה? ובכן, מסתבר שהתשובה תלויה בסוג ההופעה של המשתנה.

<u>טענה 16</u>: יהיו b ו- a שמות עצם. אם נחליף ב- b את אחת ההופעות של המשתנה x ב- a נקבל שם עצם c.
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על הבניה של שם העצם b.
1. אם b הוא משתנה ומופיע בו x אזי $b = x$. אחרי ההחלפה של x ב- a נקבל $c = a$ שהוא שם עצם. אם לא מופיע x אזי $b = y$ כאשר y משתנה ששונה מ- x ואז נקבל $c = y$ וגם הוא שם עצם.
2. נניח שהטענה נכונה לכל שם עצם שתהליך הבנייה שלו היה קצר יותר משל b ונוכיח עבור b. נניח בה"כ ש- x אכן מופיע בתוך b כי אחרת אין בעצם איפה להציב ואנחנו נשארים עם אותו שם העצם b ללא שינוי. אם $b = fb_1...b_n$ כאשר f סימן פונקציה n-מקומי ו- $b_1,...,b_n$ שמות עצם. x מופיע בתוך איזה b_i $1 \le i \le n$ אשר תהליך הבנייה שלו היה קצר יותר משל b ולכן ניתן להחיל עליו את הנחת האינדוקציה. לאחר ההחלפה התקבל שם עצם c_i. אזי $c = fb_1...b_{i-1}c_ib_{i+1}...b_n$ שם עצם.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל שם עצם b. ☺

<u>טענה 17</u>: יהיו A נוסחה, x משתנה ו- a שם עצם. אם נציב את a במקום הופעה חופשית של x תתקבל נוסחה.
<u>הערה</u>: מדוע חשוב שההצבה מתבצעת רק במקום ההופעות החופשיות של x? – אחרת מתקבלת מילה חסרת משמעות. למשל נניח $A \equiv \exists x(x = fx)$. נציב במקום ההופעה הראשונה של x את a, שאינו משתנה, ונקבל $A' \equiv \exists a(x = fx)$. המילה הזאת אינה היגד שכן, לפי ההגדרה של נוסחה לאחר כמת חייב להופיע משתנה.
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על בניית הנוסחה A:
1. אם A נוסחה אטומית אזי $A = pb_1...b_n$ כאשר p סימן יחס מקומי ו- $b_1,...,b_n$ שמות עצם. אם x מופיע ב- A אזי קיים $1 \le i \le n$ כך ש- x מופיע בתוך b_i. אזי לפי טענה (16) אחרי ההחלפה של x ב- a בתוך b_i נקבל שם עצם c_i. אזי $A' = pb_1...b_{i-1}c_ib_{i+1}...b_n$ נוסחה אטומית.

[**] כי v_1 ו- v_1' ניתנות להשוואה ואם נוריד מהן את האות הראשונה המילים שיוותרו גם הן יהיו ניתנות להשוואה

[††] אם w מילה $l(w)$ מסמל את האורך של w - כלומר, את מספר האותיות ב- w. למשל $l(+0S0\cdot) = 5$.

2. נניח שהטענה נכונה לכל נוסחה שתהליך הבנייה שלה קצר מזה של A. כמו כן, נניח ש-x אכן מופיע ב-A אחרת ההצבה לא תשנה דבר.
   a. אם $A=\vee BC$ כאשר B,C נוסחאות. גם B וגם C נבנות בתהליך קצר יותר מאשר A ולכן ניתן להחיל עליהן את הנחת האינדוקציה. אם x מופיע ב-B אחרי ההצבה נקבל נוסחה B' ואז $A'=\vee B'C$ נוסחה. באותו אופן אם x מופיע ב-C לאחר ההצבה נקבל נוסחה C' ואז $A'=\vee BC'$ נוסחה.
   b. אם $A=\neg B$ כאשר B נוסחה אזי תהליך הבנייה של B קצר יותר מזה של A ולכן ניתן להחיל עליה את הנחת האינדוקציה. הצבת a במקום x ב-B תיתן לנו נוסחה B' ואז $A'=\neg B'$ נוסחה.
   c. אם $A=\exists yB$ כאשר B נוסחה ניתן להחיל עליה את הנחת האינדוקציה ולכן לאחר ההצבה נקבל נוסחה B' ואז $A'=\exists yB'$ נוסחה. נשים לב שאם $A=\exists xB$ אזי אין הופעות חופשיות של x בתוך A.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל נוסחה A. ☺

ראינו שהצבה של שם עצם במקום משתנה חופשי נותנת לנו היגד חוקי. אבל האם המשמעות של ההיגד נשארת זהה?

<u>הגדרה:</u> הצבה של שם עצם a במקום הופעה חופשית של משתנה x בנוסחה A נקראת **מותרת** אם לכל משתנה y שנמצא ב-a, אף חלק של A מהצורה $\exists yB$ לא מכיל הופעה חופשית של x.

<u>סימון:</u> נסמן ב-$A_x[a]$ את הנוסחה המתקבלת ע"י הצבה מותרת של שם העצם a במקום כל ההופעות החופשיות של משתנה x בנוסחה A. $A_{x_1,...,x_n}[a_1,..,a_n]$ היא הנוסחה המתקבלת מ-A ע"י החלפת כל ההופעות החופשיות של $x_1,...,x_n$ ב-$a_1,...,a_n$ בהתאמה, כאשר ההצבה של a_i במקום x_i היא מותרת לכל $1\le i\le n$.

<u>הערה:</u> ההצבה הזאת נעשית בקריאה אחת. כלומר עוברים תו-תו על הנוסחה A וכל פעם שנתקלים במשתנה x_i כלשהו מחליפים אותו בשם העצם a_i המתאים, ולא חוזרים אחורה.

כעת נעבור לשפה של בני אדם, נשתמש בכל הקשרים והכמתים שאנחנו מכירים וגם נרשום את הסימנים בסדר שאנחנו רגילים אליו. כמו כן, ננסה להשתמש בכמה שפחות סוגריים ולשם כך נגדיר סדר פעולות סימנים (כמו סדר פעולות חשבון). הסדר הוא (מהקושר יותר לקושר פחות):
1. שלילה
2. גימום
3. איווי
4. גרירה
5. שקילות

למשל, $A\vee\neg B\wedge C=A\vee\left(\left(\neg B\right)\wedge C\right)$

כאשר יש רצף פעולות שוות חוזק נקרא אותן כאילו הסוגריים מתרכזות מצד ימין.

למשל, $A\to B\to C\to D=A\to\left(B\to\left(C\to D\right)\right)$.

6. <u>מבנים</u>

<u>הגדרה:</u> תהי L שפה. **מבנה** $\mathfrak{A}$ לשפה L הוא קבוצה $|\mathfrak{A}|$ שעליה מוגדרות פונקציות ויחסים כדלהלן:

לכל סימן פונקציה n-מקומית f שבשפה L מוגדרת פונקציה $f_{\mathfrak{A}}:|\mathfrak{A}|^n\to|\mathfrak{A}|$. כאשר $n=0$ f היא בעצם קבוע ו-$f_{\mathfrak{A}}\in|\mathfrak{A}|$.

לכל סימן יחס n-מקומי p שבשפה L מוגדר יחס $p_{\mathfrak{A}}:|\mathfrak{A}|^n\to\{T,F\}$ (פונקצייה בוליאנית n-מקומית). אם $n=0$ אזי $p_{\mathfrak{A}}$ קבוע ומתקיים $p_{\mathfrak{A}}\in\{T,F\}$.

<u>הגדרה:</u> תהי שפה L ויהי $\mathfrak{A}$ מבנה לשפה. לכל $a\in|\mathfrak{A}|$ נגדיר פונקציה 0-מקומית (כלומר קבוע) i_a שנקראת **השם** של a ומקיימת $\left(i_a\right)_{\mathfrak{A}}=a$. את השפה המורחבת נסמן ע"י $L(\mathfrak{A})$.

חשוב להבין שבמבנה הפונקציות והיחסים הם בעצם האופן שבו אנחנו מפרשים את הסימנים של השפה. השפה רק אומרת שיש לנו פונקציות ויחסים ובמבנה אנחנו רואים מה הן עושות. כמובן, בכל מבנה זה יכול להיות אחרת. נשאלת אפוא השאלה, איך אנחנו מפרשים שמות עצם ונוסחאות?

<u>שמות עצם:</u>
1. אם i_a שם של $a\in|\mathfrak{A}|$ אזי נפרש $\mathfrak{A}(i_a)=\left(i_a\right)_{\mathfrak{A}}=a$.
2. אם שם העצם אינו שם של איבר, אזי שם העצם הוא $fb_1..b_n$ כאשר f סימן פונקציה n-מקומית ו-$b_1,...,b_n$ שמות עצם. אז נפרש את השם העצם ב-$\mathfrak{A}$ באופן הבא:

$$\mathfrak{A}\left(fb_1..b_n\right)=f_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}(b_1),...,\mathfrak{A}(b_n)\right)\in|\mathfrak{A}|.$$

<u>הגדרה:</u> נוסחה תיקרא **סגורה** אם אין בה אף משתנה חופשי.

<u>נוסחאות:</u>
1. יהי p סימן יחס n-מקומי בשפה L ויהיו $b_1,...,b_n$ שמות עצם בשפה ללא משתנים. אזי הנוסחה האטומית הסגורה מתפרשת כך:

$$\mathfrak{A}\left(pb_1..b_n\right)=p_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}(b_1),...,\mathfrak{A}(b_n)\right)\in\{T,F\}.$$

יהיו A,B נוסחאות סגורות. אזי נפרש באופן הבא:

2. $\mathfrak{A}(\neg A)=\neg\mathfrak{A}(A)$
3. $\mathfrak{A}(\vee AB)=\vee\mathfrak{A}(A)\mathfrak{A}(B)$
4. $\mathfrak{A}(\exists xA)=T$ אם קיים $a\in|\mathfrak{A}|$ כך ש-$\mathfrak{A}\left(A_x[i_a]\right)=T$.

תהי A נוסחה עם משתנים חופשיים $x_1,...,x_n$. אזי נאמר ש-$\mathfrak{A}(A)=T$ אם לכל הצבה של איברים $a_1,...,a_n\in|\mathfrak{A}|$ מתקיים $\mathfrak{A}\left(A_{x_1,...,x_n}\left[i_{a_1},...,i_{a_n}\right]\right)=T$.

<u>דוגמה</u>
בשפה של האריתמטיקה של פיאנו המבנה הסטנדרטי הוא הטבעיים עם הפונקציות והיחסים הרגילים. אז: $|\mathfrak{N}| = \{0,1,2,...\} = \mathbb{N}$ ו-

$$0_{\mathfrak{N}} = 0$$
$$n \in |\mathfrak{N}|, i_n \in L(\mathfrak{N}), \mathfrak{N}(i_n) = (i_n)_{\mathfrak{N}} = n$$
$$S_{\mathfrak{N}} : |\mathfrak{N}| \to |\mathfrak{N}|, S_{\mathfrak{N}}(n) = n+1$$
$$+_{\mathfrak{N}} : |\mathfrak{N}|^2 \to |\mathfrak{N}|, (n,m) \mapsto n+m$$
$$\cdot_{\mathfrak{N}} : |\mathfrak{N}|^2 \to |\mathfrak{N}|, (n,m) \mapsto n \cdot m$$
$$=_{\mathfrak{N}} : |\mathfrak{N}|^2 \to \{T,F\}, =_{\mathfrak{N}}(n,m) = \begin{cases} T & n=m \\ F & n \neq m \end{cases}$$
$$<_{\mathfrak{N}} : |\mathfrak{N}|^2 \to \{T,F\}, <_{\mathfrak{N}}(n,m) = \begin{cases} T & n<m \\ F & m \leq n \end{cases}$$

<u>טענה 18</u>: תהי B נוסחה שאין בה משתנים חופשיים מלבד אולי x. אזי
$$\left(\mathfrak{A}(\neg\exists x\neg A) = T\right) \Leftrightarrow \left(\forall a \in |\mathfrak{A}|\ \mathfrak{A}(A_x[i_a]) = T\right)$$
<u>הסבר</u>: הטענה הזאת אומרת שהכמת הכולל פועל כפי שאנחנו מצפים ממנו. זה מסביר לנו מדוע באמת יכולנו לעשות את הזיהוי בין $\forall xA$ לבין $\neg\exists x\neg A$.
<u>הוכחה</u>: לפי הגדרת פירוש של נוסחאות שהן שלילה נקבל ש- $\mathfrak{A}(\neg\exists x\neg A) = \neg\mathfrak{A}(\exists x\neg A)$. אזי
$$\mathfrak{A}(\neg\exists x\neg A) = T \Leftrightarrow \mathfrak{A}(\exists x\neg A) = F \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \neg\left(\exists a \in |\mathfrak{A}|\ \mathfrak{A}(\neg A_x[i_a]) = T\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \neg\left(\exists a \in |\mathfrak{A}|\ \mathfrak{A}(A_x[i_a]) = F\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall a \in |\mathfrak{A}|\ \mathfrak{A}(A_x[i_a]) = T$$
קיבלנו את הדרוש. ☺

<u>טענה 19</u>: יהיו B,C נוסחאות ללא משתנים חופשיים. אזי
$$\left(\mathfrak{A}(\neg\vee\neg B\neg C) = T\right) \Leftrightarrow \left(\left(\mathfrak{A}(B) = T\right) \wedge \left(\mathfrak{A}(C) = T\right)\right)$$
<u>הסבר</u>: טענה זו מאפשרת לנו לעשות את הזיהוי בין $\wedge BC$ לבין $\neg\vee\neg B\neg C$. כלומר כמת הגימום אכן פועל באופן שאנו מצפים ממנו.
<u>הוכחה</u>: באותו אופן כמו בטענה (18) כל המעברים נעשים ע"י הגדרה של פירוש נוסחאות במבנה:
$$\mathfrak{A}(\neg\vee\neg B\neg C) = T \Leftrightarrow \neg\mathfrak{A}(\vee\neg B\neg C) = T \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{A}(\vee\neg B\neg C) = F \Leftrightarrow \left(\mathfrak{A}(\neg B) = F \wedge \mathfrak{A}(\neg C) = F\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\neg\mathfrak{A}(B) = F\right) \wedge \left(\neg\mathfrak{A}(C) = F\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{A}(B) = T \wedge \mathfrak{A}(C) = T$$
קיבלנו את המבוקש. ☺

<u>טענה 20</u>: יהיו $B_1,...,B_n$ נוסחאות. אזי
$$\mathfrak{A}(B_1 \vee ... \vee B_n) = T \Leftrightarrow \exists 1 \leq i \leq n\ \mathfrak{A}(B_i) = T$$
<u>הערה</u>: נשים לב שכאן הנוסחה כתובה בסדר הכמתים שאנחנו רגילים אליו ולא כך שהכמתים מופיעים לפני הנוסאות. זה לא משפיע כלל על ההוכחה שגם אותה ניתן היה לכתוב באופן המעוות אבל זה קריא יותר ככה.

<u>הוכחה</u>: (אני כתבתי את ההוכחה הזאת בעצמי ולא עשינו את זה בכיתה לכן יש לקרוא אותה בערבון מוגבל)
באינדוקציה על n:
1. אם $n=2$ אזי לפי ההגדרה של פירוש $\mathfrak{A}(B \vee C)$ נקבל $\mathfrak{A}(B_1 \vee B_2) = \mathfrak{A}(B_1) \vee \mathfrak{A}(B_2)$. ואז נקבל את המבוקש: $\left(\mathfrak{A}(B_1 \vee B_2) = T\right) \Leftrightarrow \left(\mathfrak{A}(B_1) = T \vee \mathfrak{A}(B_2) = T\right)$.
2. נניח עבור n נוסחאות ונוכיח עבור $n+1$ נוסחאות: $B_1 \vee ... \vee B_n \vee B_{n+1}$ הוא בעצם $B_1 \vee (B_2 \vee ... \vee B_n \vee B_{n+1})$. נסמן (לשם קיצור) $D = B_2 \vee ... \vee B_{n+1}$ ונשים לב ש- D היא איווי של n נוסחאות ולכן ניתן להחיל לגביה את הנחת האינדוקציה. כעת $\mathfrak{A}(B_1 \vee ... \vee B_{n+1}) = \mathfrak{A}(B_1 \vee D)$ ולכן נקבל כמו במקרה (1) ש- $\mathfrak{A}(B_1 \vee D) = T \Leftrightarrow \mathfrak{A}(B_1) = T \vee \mathfrak{A}(D) = T$.
אם $\mathfrak{A}(B_1) = T$ סיימנו כי אז $i=1$. אחרת $\mathfrak{A}(D) = T$. אבל אז לפי הנחת האינדוקציה קיים $2 \leq i \leq n+1$ כך ש- $\mathfrak{A}(B_i) = T$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n נוסחאות. ☺

<u>טענה 21</u>: יהיו $B_1,...,B_n$ נוסחאות. אזי
$$\mathfrak{A}(B_1 \wedge ... \wedge B_n) = T \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n\ \mathfrak{A}(B_i) = T$$
<u>הוכחה</u>: באופן דומה להוכחה של טענה (20) ובשימוש בטענה (19).

<u>טענה 22</u>: יהי b שם עצם ללא משתנים ויהי c שם עצם ללא משתנים מלבד אולי x. אם $\mathfrak{A}(b) = a \in |\mathfrak{A}|$ אזי $\mathfrak{A}(c_x[b]) = \mathfrak{A}(c_x[i_a])$.
<u>משמעות</u>: הטענה בעצם אומרת ששמות האיברים מתנהגים באופן שבו אנחנו מצפים. כלומר אם מציבים שם של איבר התוצאה זהה למה שמתקבל אם מציבים את שם העצם שמתפרש כאיבר הזה.
<u>דוגמה</u>: נגדיר בשפה של האריתמטיקה של פיאנו
$$c = +\cdot SS0xSSSSSSS0$$
$$b = SSSSS0$$
ונסתכל על הפירוש הסטנדרטי במבנה של הטבעיים $\mathfrak{N}$.
$\mathfrak{N}(b) = 5$. לכן $c_x[b] = c = +\cdot SS0\underline{SSSSS0}SSSSSSS0$ ו- $c_x[i_5] = c = +\cdot SS0\underline{i_5}SSSSSSS0$. כעת נפרש את זה במבנה הטבעיים:
$$\mathfrak{N}(c_x[b]) = 2\cdot 5 + 7 = 17$$
$$\mathfrak{N}(c_x[i_5]) = 2\cdot\mathfrak{N}(i_5) + 7 = 2\cdot 5 + 7 = 17$$
<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על תהליך הבניה של c:
1. אם $c = x$ אז $c_x[b] = b$ וגם $c_x[i_a] = i_a$ ולכן נקבל $\mathfrak{A}(c_x[b]) = \mathfrak{A}(b) = a = \mathfrak{A}(i_a) = \mathfrak{A}(c_x[i_a])$.
2. אם ב- c אין משתנים אזי הוא לא משתנה בהצבה וכמובן שהטענה נכונה כי אז $\mathfrak{A}(c_x[b]) = c = \mathfrak{A}(c_x[i_a])$.
3. נניח שהטענה נכונה לכל שם עצם שתהליך הבניה שלו היה קצר יותר משל c ונוכיח עבור c. האופציה היחידה שנשאר לנו לטפל בה היא כאשר $c = fb_1...b_n$ כאשר f פונקציה n-מקומית ו- $b_1,...,b_n$ משתנים. משתנים אלה נוצרו בתהליך קצר יותר משל c ולכן ניתן להחיל עליהם את הנחת האינדוקציה. אז נקבל בשימוש בהנחת האינדוקציה:

$$\mathfrak{A}\left(c_x[b]\right) \overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(\left(fb_1...b_n\right)_x[b]\right) \overset{definition}{=}$$
$$\overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(f\left(b_1\right)_x[b]...\left(b_n\right)_x[b]\right) \overset{definition}{=}$$
$$\overset{definition}{=} f_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}\left(\left(b_1\right)_x[b]\right),...,\mathfrak{A}\left(\left(b_n\right)_x[b]\right)\right) \overset{IH}{=}$$
$$\overset{IH}{=} f_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}\left(\left(b_1\right)_x[i_a]\right),...,\mathfrak{A}\left(\left(b_n\right)_x[i_a]\right)\right) \overset{definition}{=}$$
$$\overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(f\left(b_1\right)_x[i_a]...\left(b_n\right)_x[i_a]\right) \overset{definition}{=}$$
$$\overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(\left(fb_1...b_n\right)_x[i_a]\right) \overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(c_x[i_a]\right)$$

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל שם עצם c. ☺

<u>טענה 23</u>: תהי C נוסחה שאין בה משתנים חופשיים מלבד אולי x ויהי b שם עצם שאין בו משתנים. אם $\mathfrak{A}(b)=a$ אזי מתקיים $\mathfrak{A}\left(C_x[b]\right)=\mathfrak{A}\left(C_x[i_a]\right)$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נשים לב שמשום שב- b אין משתנים ההצבה היא תמיד מותרת. כמו כן נשים לב שאם אין ב- C את המשתנה x אז ההצבה לא משנה את הנוסחה וממילא הטענה מתקיימת. נניח אז שקיים משתנה חופשי x בנוסחה C.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על הבנייה של C:

1. אם C נוסחה אטומית אזי C מהצורה $pb_1...b_n$ כאשר p סימן יחס n-מקומי ו- $b_1,...,b_n$ שמות עצם. משום שב- C אין משתנים חופשיים מלבד x אזי ב- $b_1,...,b_n$ אין משתנים כלל מלבד x (בחלק מהם או בכולם). אזי

$$\mathfrak{A}\left(C_x[b]\right) \overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(\left(pb_1...b_n\right)_x[b]\right) \overset{definition}{=}$$
$$\overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(p\left(b_1\right)_x[b]...\left(b_n\right)_x[b]\right) \overset{definition}{=}$$
$$\overset{definition}{=} p_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}\left(\left(b_1\right)_x[b]\right),...,\mathfrak{A}\left(\left(b_n\right)_x[b]\right)\right) \overset{T22}{=}$$
$$\overset{T22}{=} p_{\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{A}\left(\left(b_1\right)_x[i_a]\right),...,\mathfrak{A}\left(\left(b_n\right)_x[i_a]\right)\right) \overset{definition}{=} \mathfrak{A}\left(C_x[i_a]\right)$$

2. נניח עבור כל נוסחה שתהליך הבנייה שלה היה קצר מזה של C ונוכיח עבור C.

a. אם $C=\neg D$. מאחר שב- C אין משתנים חופשיים חוץ מאשר x גם ב- D אין משתנים חופשיים חוץ מאשר x ולכן ניתן להחיל עליה את הנחת האינדוקציה. כלומר נקבל שמתקיים $\mathfrak{A}\left(D_x[b]\right)=\mathfrak{A}\left(D_x[i_a]\right)$. אזי נקבל עבור C:

$$\mathfrak{A}\left(C_x[b]\right)=\mathfrak{A}\left(\neg D_x[b]\right)=\neg\mathfrak{A}\left(D_x[b]\right)\overset{IH}{=}$$
$$\overset{IH}{=}\neg\mathfrak{A}\left(D_x[i_a]\right)=\mathfrak{A}\left(\neg D_x[i_a]\right)=\mathfrak{A}\left(C_x[i_a]\right)$$

b. אם $C=\vee DE$. ב- C אין משתנים חופשיים פרט ל- x ולכן גם ב- D,E אין משתנים חופשיים פרט ל- x. לכן ניתן להחיל עליהן את הנחת האינדוקציה. אזי נקבל שמתקיים הדבר הבא:

$$\mathfrak{A}\left(C_x[b]\right)=\mathfrak{A}\left(\left(\vee DE\right)_x[b]\right)=$$
$$=\mathfrak{A}\left(\vee D_x[b]E_x[b]\right)=$$
$$=\vee\mathfrak{A}\left(D_x[b]\right)\mathfrak{A}\left(E_x[b]\right)\overset{IH}{=}$$
$$\overset{IH}{=}\vee\mathfrak{A}\left(D_x[i_a]\right)\mathfrak{A}\left(E_x[i_a]\right)=$$
$$=\mathfrak{A}\left(\vee D_x[i_a]E_x[i_a]\right)=$$
$$\mathfrak{A}\left(\left(\vee DE\right)_x[i_a]\right)=\mathfrak{A}\left(C_x[i_a]\right)$$

c. אם $C=\exists yD$. אם $y=x$ אזי אין משתנים חופשיים ב- C ולכן ההצבה לא משנה את הנוסחה. ממילא אז מתקיים $\mathfrak{A}\left(C_x[b]\right)=\mathfrak{A}\left(C_x[i_a]\right)$. אם $y\neq x$ משום שב- C אין משתנים חופשיים מלבד x אזי ב- D אין משתנים חופשיים מלבד x. לכן ניתן להחיל עליה את הנחת האינדוקציה ולקבל:

$$\mathfrak{A}\left(C_x[b]\right)=\mathfrak{A}\left(\left(\exists yD\right)_x[b]\right)=\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[b]\right)$$
$$\mathfrak{A}\left(C_x[i_a]\right)=\mathfrak{A}\left(\left(\exists yD\right)_x[i_a]\right)=\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[i_a]\right)$$

נראה כעת שמתקיים: $\left(\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[b]\right)=T\right)\Leftrightarrow\left(\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[i_a]\right)=T\right)$:

$(\Rightarrow)$ מהגדרה
$$\left(\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[b]\right)=T\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists a'\in|\mathfrak{A}|\left(\mathfrak{A}\left(D_{x,y}[b,i_{a'}]\right)=T\right)$$

לפי הנחת האינדוקציה: $\mathfrak{A}\left(D_{x,y}[b,i_{a'}]\right)=\mathfrak{A}\left(D_{x,y}[i_a,i_{a'}]\right)$. לכן $\exists a'\in|\mathfrak{A}|\left(\mathfrak{A}\left(D_{x,y}[i_a,i_{a'}]\right)=T\right)$. כי בעצם קיבלנו: $\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[i_a]\right)=T$

$(\Leftarrow)$ מהגדרה
$$\left(\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[i_a]\right)=T\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\exists a''\in|\mathfrak{A}|\left(\mathfrak{A}\left(D_{x,y}[i_a,i_{a''}]\right)=T\right)$$

אבל לפי הנחת האינדוקציה: $\mathfrak{A}\left(D_{x,y}[i_a,i_{a''}]\right)=\mathfrak{A}\left(D_{x,y}[b,i_{a''}]\right)$. ולכן: $\mathfrak{A}\left(\exists yD_x[b]\right)=T$ כמו קודם.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל נוסחה. ☺

7. <u>אקסיומות לוגיות</u>

ישנן נוסחאות שתתפרשנה כנכונות בכל מבנה. נוסחאות אלה נקראות אקסיומות לוגיות. ניזכר שבסעיף שפות פורמליות הגדרנו טאוטולוגיה. אקסיומות לוגיות הן לא בהכרח טאוטולוגיות! נעמוד על ההבדלים בהמשך.

<u>משפט 24</u> (**כלל הנאותות לאקסיומות לוגיות**): תהי A נוסחה ו- $x,x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ משתנים. אזי הנוסחאות הבאות הן אקסיומות לוגיות (כלומר הן נכונות בכל מבנה):

1. השלישי הנמנע: $\neg A\vee A$
2. אקסיומת ההצבה: $A_x[a]\rightarrow\exists xA$
3. אקסיומת הזהות: $x=x$
4. אקסיומות השוויון:

$$x_1=y_1\to\ldots\to x_n=y_n\to fx_1\ldots x_n=fy_1\ldots y_n$$
$$x_1=y_1\to\ldots\to x_n=y_n\to px_1\ldots x_n\to py_1\ldots y_n$$

<u>הוכחה</u>: יהי $\mathfrak{A}$ מבנה. נראה שכל הנוסחאות הנ"ל נכונות:

1. לפי הגדרה:
$$\mathfrak{A}(\neg A\vee A)=\mathfrak{A}(\neg A)\vee\mathfrak{A}(A)=\neg\mathfrak{A}(A)\vee\mathfrak{A}(A)=T$$
2. נניח ש- $\mathfrak{A}(A_x[a]\to\exists xA)=F$. אזי $\mathfrak{A}(\exists xA)=F$ * בזמן ש- $\mathfrak{A}(A_x[a])=T$ **. מ-(*) לא קיים $b\in|\mathfrak{A}|$ כך ש- $\mathfrak{A}(A_x(i_b))=T$. אבל מ-(**) ומטענה (23) אם $\mathfrak{A}(a)=a'$ וב- A אין משתנים חופשיים מלבד אולי x אזי $T=\mathfrak{A}(A_x[a])=\mathfrak{A}(A_x[i_{a'}])$. וזאת סתירה. אם ב- A יש משתנים חופשיים מלבד x מאחר ש- $\mathfrak{A}(A_x[a])=T$ הנוסחה נכונה גם לכל הצבה במשתנים. אזי אם המשתנים הם $x_1,...,x_n$ נסתכל על $A_{x_1,...,x_n}[i_{a_1},...,i_{a_n}]$ כאשר $a_1,...,a_n\in|\mathfrak{A}|$ ואז נחזור למקרה שבו אין בנוסחה משתנים חופשיים מלבד אולי x.
3. $x=x$ היא נוסחה אטומית עם משתנה חופשי x. לפי הגדרה נוסחה מתפרשת במבנה כנכונה אם היא מתפרשת כנכונה להצבה של כל שם של איבר ב- $|\mathfrak{A}|$. אם כן, יהי $a\in|\mathfrak{A}|$ ושמו i_a. אזי $(x=x)_x[i_a]\equiv(i_a=i_a)$. אז לפי הגדרה של פירוש נוסחה $(\mathfrak{A}(x=x)=T)\Leftrightarrow\forall a\in|\mathfrak{A}|\ \mathfrak{A}(i_a=i_a)=T$. אבל זה כמובן נכון בכל מבנה מהגדרת סימן השוויון.
4. נראה שהנוסחאות נכונות לכל הצבה של שמות של איברים מ- $|\mathfrak{A}|$. יהיו $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in|\mathfrak{A}|$ איברים ששמותיהם $i_{a_1},...,i_{a_n},i_{b_1},...,i_{b_n}$ בהתאמה. נפרש את הנוסחאות במבנה $\mathfrak{A}$:
$$\mathfrak{A}\left(i_{a_1}=i_{b_1}\to\ldots\to i_{a_n}=i_{b_n}\to fi_{a_1}\ldots i_{a_n}=fi_{b_1}\ldots i_{b_n}\right)$$
$$\mathfrak{A}\left(i_{a_1}=i_{b_1}\to\ldots\to i_{a_n}=i_{b_n}\to pi_{a_1}\ldots i_{a_n}\to pi_{b_1}\ldots i_{b_n}\right)$$
ברור שזה נכון לכל מבנה ולכל שמות של איברים.

קיבלנו שכל הנוסחאות הנ"ל מתפרשות כנכונות בכל מבנה. כלומר הן אקסיומות לוגיות. ☺

<u>משפט 25</u> (**כללי היסק**):
1. כלל ההרחבה: מ- A נובע $B\vee A$
2. כלל הצמצום: מ- $A\vee A$ נובע A
3. כלל האסוציאטיביות: $A\vee(B\vee C)$ נובע $(A\vee B)\vee C$
4. כלל החתך: מ- $A\vee B$ ו- $\neg A\vee C$ נובע $B\vee C$
5. כלל הכנסת $\exists$: אם x אינו חופשי ב- B אז מ- $A\to B$ נובע $\exists xA\to B$

<u>משמעות</u>: מה שהמשפט הזה אומר בעצם הוא שאם הצלחנו להסיק נוסחה ממערכת אקסיומות אז היא תהיה נכונה בכל מבנה שמקיים את הנוסחאות האלה. שהרי המשפט בעצם אומר שאם במבנה נכון התנאי של כלל ההיסק אז גם המסקנה של כלל ההיסק היא נכונה.

<u>הוכחה</u>: יהי $\mathfrak{A}$ מבנה כלשהו.

1. נראה ש- $(\mathfrak{A}(A)=T)\Rightarrow(\mathfrak{A}(B\vee A)=T)$. אם $\mathfrak{A}(A)=T$ אזי A נכונה לכל הצבה של שמות איברים במקום המשתנים החופשיים בה. נניח ש- A',B' הן הנוסחאות שהתקבלו מהצבת שמות של איברים במקום משתנים חופשיים ב- A,B בהתאמה. אזי:
$$\mathfrak{A}(B'\vee A')=\mathfrak{A}(B')\vee\mathfrak{A}(A')=T$$
כלומר לכל הצבה של שמות איברים קיבלנו שאם $\mathfrak{A}(A')=T$ אז גם $\mathfrak{A}(B'\vee A')=T$.
2. נראה ש- $(\mathfrak{A}(A\vee A)=T)\Rightarrow(\mathfrak{A}(A)=T)$. כמו קודם תהי A' הנוסחה המתקבלת מהצבת שמות של איברים במשתנים החופשיים של A. אזי $\mathfrak{A}(A'\vee A')=\mathfrak{A}(A')\vee\mathfrak{A}(A')$. אם $\mathfrak{A}(A')=F$ נקבל ש- $\mathfrak{A}(A')\vee\mathfrak{A}(A')=F$, כלומר $\mathfrak{A}(A'\vee A')=F$ בסתירה להנחה. ולכן $\mathfrak{A}(A')=T$. מכאן ש- $\mathfrak{A}(A)=T$.
3. נראה ש-
$$(\mathfrak{A}(A\vee(B\vee C))=T)\Rightarrow(\mathfrak{A}(A\vee(B\vee C))=T)$$
יהיו A',B',C' כמו קודם. אזי:
$$\mathfrak{A}(A'\vee(B'\vee C'))=T\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mathfrak{A}(A')\vee(\mathfrak{A}(B')\vee\mathfrak{A}(C'))=T\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\mathfrak{A}(A')=T)\vee(\mathfrak{A}(B')\vee\mathfrak{A}(C')=T)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\mathfrak{A}(A')=T)\vee(\mathfrak{A}(B')=T\vee\mathfrak{A}(C')=T)$$
אם $\mathfrak{A}(A')=T$ אזי
$$\mathfrak{A}((A'\vee B')\vee C')=\mathfrak{A}(A'\vee B')\vee\mathfrak{A}(C')=$$
$$=(\mathfrak{A}(A')\vee\mathfrak{A}(B'))\vee\mathfrak{A}(C')=T$$
באותו אופן אם $\mathfrak{A}(B')=T$ או $\mathfrak{A}(C')=T$ אז $(\mathfrak{A}(A')\vee\mathfrak{A}(B'))\vee\mathfrak{A}(C')=T$. ולכן גם מתקיים הדרוש $\mathfrak{A}((A\vee B)\vee C)=T$.
4. נראה שאם $(\mathfrak{A}(A\vee B)=T)\wedge(\mathfrak{A}(\neg A\vee C)=T)$ אז $\mathfrak{A}(B\vee C)=T$. יהיו A',B',C' כמו קודם. מהנתון $(\mathfrak{A}(A'\vee B')=T)\wedge(\mathfrak{A}(\neg A'\vee C')=T)$. נזכור ש-
$$*\ \mathfrak{A}(A'\vee B')=\mathfrak{A}(A')\vee\mathfrak{A}(B')$$
$$**\ \mathfrak{A}(\neg A'\vee C')=\neg\mathfrak{A}(A')\vee\mathfrak{A}(C')$$
אם $\mathfrak{A}(A')=T$ אז $\neg\mathfrak{A}(A')=F$ ואז כדי שיתקיים (**) חייב להתקיים $\mathfrak{A}(C')=T$ ולכן $\mathfrak{A}(B'\vee C')=T$. אם $\mathfrak{A}(A')=F$ אזי כדי שיתקיים (*) חייב להיות $\mathfrak{A}(B')=T$ ולכן $\mathfrak{A}(B'\vee C')=T$. לכן $\mathfrak{A}(B\vee C)=T$.
5. נניח ש- x אינו חופשי ב- B ונראה ש- $(\mathfrak{A}(A\to B)=T)\Rightarrow(\mathfrak{A}(\exists xA\to B)=T)$. נניח בשלילה שקיימת הצבה של שמות איברים A',B' כך ש- $\mathfrak{A}(A'\to B')=T$ אבל $\mathfrak{A}(\exists xA'\to B')=F$. אזי $\mathfrak{A}(B')=F$ אבל $\mathfrak{A}(\exists xA')=T$. כלומר קיים $a\in|\mathfrak{A}|$ כך ש- $A'_x[i_a]=T$. ב- B' לא מופיע x באופן חופשי ולכן $(A'\to B')_x[i_a]=(A'_x[i_a]\to B')$. אבל נוסחה זו נכונה לכל הצבה ולכן $\mathfrak{A}(B')=T$. אבל זו סתירה. לכן $(\mathfrak{A}(A\to B)=T)\Rightarrow(\mathfrak{A}(\exists xA\to B)=T)$.

בזאת הראינו שכל כללי ההיסק אכן נכונים בכל מבנה. ☺

<u>הגדרה</u>: **תורה** (או **מערכת פורמלית**) T מורכבת מהרכיבים הבאים:
1. שפה פורלית
2. אקסיומות לוגיות
3. אקסיומות לא לוגיות – קבוצה של נוסחאות כלשהן
4. כללי ההיסק שהגדרנו לעיל.

<u>הערה</u>: האקסיומות הלא לוגיות אינן בהרכה נכונות. למעשה, בהינתן קבוצה של אקסיומות לא לוגיות נרצה למצוא את המבנים שבהם הן מתפרשות כנכונות, אם קיימים כאלה בכלל.

<u>סימון</u>: אם ניתן להסיק את הנוסחה A מתוך האקסיומות הלוגיות בשימוש בכללי ההיסק בלבד נסמן $\vdash A$. אם ניתן להסיק את הנוסחה A מתוך האקסיומות של תורה T נסמן $\vdash_T A$.

8. <u>משפט הטאוטולוגיה</u>

<u>הגדרה</u>: **נוסחאות אלמנטריות** הן נוסחאות אטומיות ונוסחאות מהצורה $\exists xB$ כאשר B נוסחה כלשהי.

תהי $V(A)$ פונקציית אמת המוגדרת באופן שרירותי על כל הנוסחאות האלמנטריות. ניתן להרחיב את V לכל הנוסחאות באופן הבא (אשר נקרא האופן המקובל): בהינתן נוסחאות כלשהן A,B נגדיר:

$$V(A\vee B)=V(A)\vee V(B)$$
$$V(\neg A)=\neg V(A)$$

<u>הגדרה</u>: יהיו $A_1,\ldots,A_n,B$ נוסחאות ונניח שלכל הערכה V שעבורה $V(A_1)=T,\ldots,V(A_n)=T$ גם $V(B)=T$. B נקראת אז **גרירה טאוטולוגית** של $A_1,\ldots,A_n$.

<u>דוגמה</u>:

$$A_1\equiv C_1$$
$$A_2\equiv C_1\to C_2$$
$$B\equiv C_2$$

ברור ש- B היא גרירה טאוטולוגית של A_1 ו- A_2.

<u>הגדרה</u>: נוסחה B נקראת **טאוטולוגיה** אם היא מקבלת ערך אמת עבור כל הערכה V.

<u>הערה</u>: מההגדרה נובע שנוסחה אלמנטרית לא יכולה להיות טאוטולוגיה. שהרי אמרנו שלנוסחאות האלמנטריות קובעים ערכי אמת שירורותיים. בפרט נוכל לקבוע להן ערך שקר.

<u>טענה 26</u>: B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,\ldots,A_n$ אמ"מ $A_1\to\ldots\to A_n\to B$ טאוטולוגיה.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש- B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,\ldots,A_n$. כלומר אם $V(A_1)=T,\ldots,V(A_n)=T$ אז $V(B)=T$.* תהי V הערכה כלשהי של הנוסחאות האלמנטריות. נניח ש- $V_1,\ldots,V_n$ הם ערכי האמת שהתקבלו עבור $A_1,\ldots,A_n$ ע"י הרחבת V לכל הנוסחאות באופן המקובל. אם $V_1=T,\ldots,V_n=T$ אזי מ-(*) $V(B)=T$ ולכן $A_1\to\ldots\to A_n\to B$ נכונה. אם לא כל $V_1,\ldots,V_n$ הם אמת אזי קיים $1\le i\le n$ מינימלי כך ש- $V_i=F$. אזי:

$$V\left(A_i\to\left(A_{i+1}\to\ldots\to A_n\to B\right)\right)=T$$

וכן $V(A_1)=\ldots=V(A_{i-1})=T$ לכן $A_1\to\ldots\to A_n\to B$ תקבל ערך אמת. כלומר בכל מקרה היא אמיתי ולכן טאוטולוגיה.

($\Rightarrow$) נניח ש- $A_1\to\ldots\to A_n\to B$ טאוטולוגיה. ונניח ש- $V(A_1)=T,\ldots,V(A_n)=T$ אזי כדי ש- $A_1\to\ldots\to A_n\to B$ תהיה נכונה חייב להיות $V(B)=T$ כי אחרת תתקבל סתירה. ולכן B גרירה טאוטולוגית של $A_1,\ldots,A_n$. ☺

<u>טענה 27</u>: לכל נוסחה A קיים אלגוריתם סופי אשר מאפשר לקבוע אם היא טאוטולוגיה או לא.

<u>הוכחה</u>: נוכיח שלכל נוסחה מהצורה $B=A_1\vee\ldots\vee A_n$ קיים אלגוריתם סופי לקביעה אם היא טאוטולוגיה או לאו. אזי הטענה תתקבל עבור $n=1$.

נוכיח באינדוקציה על סכום האורכים של $A_1,\ldots,A_n$, כלומר על $\sum_{i=1}^{n} l(A_i)$:

1. אם $\sum_{i=1}^{n} l(A_i)=1$ אזי $l(B)=1$ והיא סימן יחס 0-מקומי. אם סימן היחס הוא T אזי זו טאוטולוגיה. אחרת B לא טאוטולוגיה.
2. נניח עבור נוסחאות שבהן סכום האורכים קצר מאשר ב- B. בשלב הראשון נניח שכל A_i כאשר $1\le i\le n$ אלמנטריות או שלילה של אלמנטריות. נטען ש- B טאוטולוגיה אמ"מ קיימים $1\le i,j\le n$ כך ש- $A_j=\neg A_i$:

($\Leftarrow$) נניח שלא קיימים $1\le i,j\le n$ כאלה. אזי נגדיר הערכה של הנוסחאות האלמנטריות באופן הבא: $V(A)=F$ אם $A=A_i$ עבור $1\le i\le n$ כלשהו, אחרת נגדיר $V(A)=T$. אזי ברור שנקבל ש- $V(A_1\vee\ldots\vee A_n)=F$ בסתירה לכך ש- B טאוטולוגיה.

($\Rightarrow$) אם קיימים $1\le i,j\le n$ כאלה נניח בה"כ ש- $i<j$ אזי

$$V\left(A_1\vee\ldots\vee A_i\vee\ldots\vee A_j\vee\ldots\vee A_n\right)=$$
$$V(A_1)\vee\ldots\vee V(A_i)\vee\ldots\vee V(A_j)\vee\ldots\vee V(A_n)=$$
$$=V(A_1)\vee\ldots\vee V(A_i)\vee\ldots\vee\neg V(A_i)\vee\ldots\vee V(A_n)=T$$

כלומר B טאוטולוגיה.

אם לא כל A_i כאשר $1\le i\le n$ אלמנטריות או שלילה של אלמנטריות אזי קיים $1\le i\le n$ כך ש- A_i אינה אלמנטריות או שלילתה. נשים לב ש-

$$V\left(A_1\vee\ldots\vee A_n\right)=V\left(A_i\vee\ldots\vee A_n\vee A_1\vee\ldots\vee A_{i-1}\right)$$

ולכן ניתן להניח בה"כ ש- A_1 אינה אלמטרית או שלילה של כזאת. במקרה זה A_1 היא או $C\vee D$ או $\neg\neg C$ או $\neg(C\vee D)$ כאשר C,D נוסחאות כלשהן. נבדוק מה קורה במקרים אלה:

a. אם $A_1=C\vee D$. אזי $B=(C\vee D)\vee A_2\vee\ldots\vee A_n$. ברור ש-

$$V\left((C\vee D)\vee A_2\vee\ldots\vee A_n\right)=$$
$$=V\left(C\vee D\vee A_2\vee\ldots\vee A_n\right)$$

לכן הבעיה הצטמצמה לבדיקה האם הנוסחה $C\vee D\vee A_2\vee\ldots\vee A_n$ היא טאוטולוגיה או לא. אבל על נוסחה זו ניתן להחיל את הנחת האינדוקציה ולכן הדבר אפשרי.

b. אם $A_1=\neg\neg C$. אזי $B=(\neg\neg C)\vee A_2\vee\ldots\vee A_n$. ברור ש-

$$V\left((\neg\neg C)\vee A_2\vee\ldots\vee A_n\right)=V\left(C\vee A_2\vee\ldots\vee A_n\right)$$

לכן הבעיה הצמצמה לבדיקה האם הנוסחה $C\vee A_2\vee\ldots\vee A_n$ היא טאוטולוגיה או לא. אבל על

נוסחה זו ניתן להחיל את הנחת האינדוקציה ולכן הדבר אפשרי.

c. אם $A_1 = \neg(C \vee D)$. אזי הנוסחה B היא מהצורה $\neg(C \vee D) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$. ברור ש-

$$V\left(\neg(C \vee D) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n\right) =$$
$$= V\left((\neg C \wedge \neg D) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n\right) =$$
$$= V\left(\neg C \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n\right) \wedge V\left(\neg D \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n\right)$$

אז $\neg(C \vee D) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ טאוטולוגיה אמ"מ $\neg C \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n, \neg D \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ טאוטולוגיות
אבל במקרים אלה כבר טיפלנו בסעיף (b).

בכל מקרה מצאנו תהליך סופי לבדיקה אם $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ היא טאוטולוגיה או לא. כפי שכבר נאמר למעלה הטענה מתקבלת מהמקרה $n = 1$. ☺

<u>מסקנה 28</u>: קיים תהליך סופי לקביעה האם B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1, \ldots, A_n$.

<u>הוכחה</u>: לפי טענה (26) B גרירה טאוטולוגית של $A_1, \ldots, A_n$ אמ"מ $A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ טאוטולוגיה. לפי טענה (28) קיים תהליך סופי לבדיקה האם נוסחה זו היא טאוטולוגיה וכך מתקבלת הטענה. ☺

<u>משפט 29</u> (**משפט הטאוטולוגיה**): אם B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1, \ldots, A_n$ ו- $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n$ אזי $\vdash B$.

<u>הוכחה</u>: ההוכחה תעשה מאוחר יותר ותסתמך על תוצאה של המשפט.

<u>תוצאה 30</u>: אם B טאוטולוגיה אזי $\vdash B$.

<u>הוכחה</u>: B היא טאוטולוגיה אם היא גרירה טאוטולוגית של קבוצה ריקה של נוסחאות. לכן התוצאה נובעת ממשפט הטאוטולוגיה באופן ריק. ☺

כעת נוכיח כמה למות שיעזרו לנו בהסקת משפט הטאוטולוגיה מהמסקנה שלו.

<u>למה 31</u>: אם $\vdash A \vee B$ אזי $\vdash B \vee A$

<u>הוכחה</u>: $\neg A \vee A$ אקסיומה ולכן $\vdash \neg A \vee A$. לפי כלל החתך בהינתן ש- $\vdash A \vee B$ נובע ש- $\vdash B \vee A$. ☺

<u>למה 32</u> (שגם לה נקרא כלל האסוציאטביות):

אם $\vdash (A \vee B) \vee C$ אז $\vdash A \vee (B \vee C)$

<u>הוכחה</u>: נתון ש- $\vdash (A \vee B) \vee C$

לפי למה (31) $\vdash C \vee (A \vee B)$

לפי כלל האסוציאטיביות $\vdash (C \vee A) \vee B$

לפי למה (31) $\vdash B \vee (C \vee A)$

לפי כלל האסוציאטיביות $\vdash (B \vee C) \vee A$

ושוב לפי למה (31) נקבל את הדרוש $\vdash A \vee (B \vee C)$. ☺

<u>משפט 33</u> (**כלל הניתוק Modus Ponens**): אם $\vdash A, \vdash A \to B$ אזי $\vdash B$

<u>הוכחה</u>: נתון ש- $\vdash A$

מכלל ההרחבה: $\vdash B \vee A$

מלמה (31): $\vdash A \vee B$

נתון ש- $\vdash A \to B$ כלומר $\vdash \neg A \vee B$

מכלל החתך: $\vdash B \vee B$

מכלל הצמצום: $\vdash B$. ☺

<u>מסקנה 29</u>: **משפט הטאוטולוגיה**

<u>הוכחה</u>: נניח $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n$ וכן B גרירה טאוטולוגית של נוסחאות אלה. אזי לפי טענה (26) $A_1 \to \ldots \to A_n \to B$ טאוטולוגיה. ואז לפי תוצאה (30) $\vdash A_1 \to \ldots \to A_n \to B$. כעת נשתמש בכלל הניתוק n פעמים:

$$1)\quad \vdash A_1 \wedge \left(\vdash A_1 \to (A_2 \to \ldots \to A_n \to B)\right) \Rightarrow \Rightarrow \left(\vdash A_2 \to \ldots \to A_n \to B\right)$$

$$2)\quad \vdash A_2 \wedge \left(\vdash A_2 \to (A_3 \to \ldots \to A_n \to B)\right) \Rightarrow \Rightarrow \left(\vdash A_3 \to \ldots \to A_n \to B\right)$$

$$\vdots$$

$$n\text{-}1)\quad \vdash A_{n-1} \wedge \left(\vdash A_{n-1} \to (A_n \to B)\right) \Rightarrow \left(\vdash A_n \to B\right)$$

$$n)\quad \vdash A_n \wedge \left(\vdash A_n \to B\right) \Rightarrow \left(\vdash B\right)$$

קיבלנו את מה שרצינו. ☺

הוכחנו את משפט הטאוטולוגיה בהסתמך על התוצאה שלו (שכל טאוטולוגיה היא יכיחה). אם נצליח להוכיח תוצאה זו ללא שימוש במשפט הטאוטולוגיה נקבל הוכחה למשפט. לצורך הוכחה זו נוכיח ראשית מספר טענות עזר ולמות.

<u>טענת עזר 34</u>: יהיו $A_1, \ldots, A_n$ נוסחאות. אם $\vdash A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_m}$ כאשר $1 \le i_1, \ldots, i_m \le n$ אז $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על m.

1. אם $m = 1$ אזי $\vdash A_{i_1}$. לפי כלל ההרחבה נקבל $\vdash (A_{i_1+1} \vee \ldots \vee A_n) \vee A_{i_1}$. אז לפי למה (31) נקבל $\vdash A_{i_1} \vee (A_{i_1+1} \vee \ldots \vee A_n)$ כלומר $\vdash A_{i_1} \vee \ldots \vee A_n$. כעת אם נשתמש בכלל ההרחבה $i - 1$ פעמים כמו קודם נקבל את הטענה: $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_{i_1 - 1} \vee A_{i_1} \vee \ldots \vee A_n$.
2. אם $m = 2$ אזי $\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2}$. אם $i_1 = i_2$ לפי כלל הצמצום נקבל $\vdash A_{i_1}$ ואז נחזור למקרה (1). נניח אז ש- $i_1 \ne i_2$. אם $i_2 < i_1$ לפי למה (31) $\vdash A_{i_2} \vee A_{i_1}$. לכן ניתן להניח בה"כ שקיימים $1 \le i < j \le n$ כך ש- $\vdash A_i \vee A_j$. נראה באינדוקציה על n ש- $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$.
   a. כאשר $n = 2$ ברור שהטענה נכונה.
   b. נניח למספר שקטן מ- $2 \le n$ ונראה עבור n:
      i. אם $i = 1$ אז בעצם $\vdash A_1 \vee A_j$. נסמן $B = A_3 \vee \ldots \vee A_n$. בלשון זו צריך להוכיח ש- $\vdash A_1 \vee A_2 \vee B$.
         1. אם $j = 2$ לפי ההנחה $\vdash A_1 \vee A_2$. אזי לפי כלל ההרחבה $\vdash B \vee A_1 \vee A_2$ ולפי למה (31) $\vdash A_1 \vee A_2 \vee B$.
         2. אם $3 \le j$ אזי לפי הנחת האינדוקציה $\vdash A_1 \vee B$. לפי למה (31) וכלל ההרחבה $\vdash A_2 \vee (B \vee A_1)$. לפי כלל האסוציאטביות ולמה (31) נקבל את הדרוש: $\vdash A_1 \vee A_2 \vee B$.
      ii. אם $i \ge 2$ אזי לפי הנחת האינדוקציה $\vdash A_2 \vee \ldots A_n$. לפי כלל ההרחבה נקבל את הדרוש: $\vdash A_1 \vee \ldots A_n$.

3. כעת נניח לכל מספר שקטן מ- $3 \le m$ ונראה עבור m: נגדיר $A = A_1 \vee \ldots \vee A_n$. נתון ש- $\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee A_{i_3} \vee \ldots \vee A_{i_m}$ כלומר $\vdash A_{i_1} \vee \left(A_{i_2} \vee \left(A_{i_3} \vee \ldots \vee A_{i_m}\right)\right)$. לפי כלל האסוציאטיביות כלומר $\vdash \left(A_{i_1} \vee A_{i_2}\right) \vee \left(A_{i_3} \vee \ldots \vee A_{i_m}\right)$ כלומר $\vdash \left(A_{i_1} \vee A_{i_2}\right) \vee A_{i_3} \vee \ldots \vee A_{i_m}$. בנוסחה זו יש $m-2$ סימני איווי ולכן לפי הנחת האינדוקציה $\vdash \left(A_{i_1} \vee A_{i_2}\right) \vee A_1 \vee \ldots \vee A_n$ כלומר $\vdash \left(A_{i_1} \vee A_{i_2}\right) \vee A$.

לפי למה (31) $\vdash A \vee \left(A_{i_1} \vee A_{i_2}\right)$

לפי כלל האסוציאטיביות $\vdash \left(A \vee A_{i_1}\right) \vee A_{i_2}$

לפי הנחת האינדוקציה $\vdash \left(A \vee A_{i_1}\right) \vee A$

לפי למה (31) וכלל האסוציאטיביות $\vdash \left(A \vee A\right) \vee A_{i_1}$

לפי הנחת האינדוקציה $\vdash \left(A \vee A\right) \vee A$

לפי כלל האסוציאטיוביות $\vdash A \vee \left(A \vee A\right)$

לפי כלל ההרחבה $\vdash A \vee \left(A \vee \left(A \vee A\right)\right)$

לפי כלל האסוציאטיביות $\vdash \left(A \vee A\right) \vee \left(A \vee A\right)$

לפי כלל הצמצום פעמיים $\vdash A$

בזאת, אחרי הוכחה מייגעת במיוחד הוכחנו את הדרוש. ☺

<u>טענת עזר 35</u>: אם $\vdash A \vee B$ אז $\vdash \neg\neg A \vee B$

<u>הוכחה</u>:

לפי אקסיומת השלישי הנמנע $\vdash \neg\neg A \vee \neg A$

לפי למה (31) $\vdash \neg A \vee \neg\neg A$

נתון $\vdash A \vee B$

לפי כלל החתך $\vdash B \vee \neg\neg A$

לפי למה (31) $\vdash \neg\neg A \vee B$. ☺

<u>טענת עזר 36</u>: אם $\vdash \neg A \vee C$ וגם $\vdash \neg B \vee C$ אז $\vdash \neg\left(A \vee B\right) \vee C$

<u>הוכחה</u>:

מאקסיומת השלישי הנמנע $\vdash \neg\left(A \vee B\right) \vee \left(A \vee B\right)$

לפי למה (31) $\vdash \left(A \vee B\right) \vee \neg\left(A \vee B\right)$

לפי כלל האסוציאטיביות $\vdash A \vee B \vee \neg\left(A \vee B\right)$

נתון ש- $\vdash \neg A \vee C$

לפי כלל החתך $\vdash \left(B \vee \neg\left(A \vee B\right)\right) \vee C$

לפי כלל האסוציאטיביות $\vdash B \vee \left(\neg\left(A \vee B\right) \vee C\right)$

נתון ש- $\vdash \neg B \vee C$

לפי כלל החתך $\vdash \left(\neg\left(A \vee B\right) \vee C\right) \vee C$

לפי כלל האסוציאטיביות $\vdash \neg\left(A \vee B\right) \vee \left(C \vee C\right)$

לפי טענת עזר (34) $\vdash \neg\left(A \vee B\right) \vee C$. ☺

<u>למה 37</u>: לכל $2 \le n$ אם $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ טאוטולוגיה אז $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$

<u>הוכחה</u>: נוכיח באופן דומה להוכחה של טענה (27). נוכיח באינדוקציה על $\sum_{i=1}^{n} l\left(A_i\right)$.

1. מה הבסיס כאן?
2. בשלב הראשון נניח שכל הנוסחאות הן אלמנטריות או שלילה של אלמנטריות. אזי לפי האלגוריתם מטענה (27) קיימים $1 \le i, j \le n$ כך ש- $A_i = \neg A_j$. $\neg A_j \vee A_j$ אקסיומה ולכן $\vdash A_i \vee A_j$. כעת לפי טענת עזר (34) $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$.

אם לא כל הנוסחאות הן אלמנטריות או שלילה של אלמנטריות קיים $1 \le i \le n$ כך ש- A_i היא או $B \vee C$ או $\neg\neg B$ או $\neg\left(B \vee C\right)$. לפי טענת עזר (34) $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$ אמ"מ $\vdash A_i \vee \ldots \vee A_n \vee A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1}$. לכן בה"כ נניח כי A_1 אינה אלמנטרית או שלילה של אלמנטרית.

a. כאשר $A_1 = B \vee C$ צריך להראות שהנוסחה $B \vee C \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ יכיחה. אבל זה נכון לפי הנחת האינדוקציה שהרי סכום אורכי הנוסחאות כאן קטן באחד.

b. אם $A_1 = \neg\neg B$ ברור שאם $\neg\neg B \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ טאוטולוגיה אז גם $B \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ טאוטולוגיה. לפי טענת עזר (35) $\vdash \neg\neg B \vee A_2 \ldots \vee A_n$ אם $\vdash B \vee A_2 \ldots \vee A_n$ אבל זה נכון מהנחת האינדוקציה.

c. אם $A_1 = \neg\left(B \vee C\right)$. אזי יש להראות שהנוסחה $\neg\left(B \vee C\right) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ ניתנת להוכחה. אם הנוסחה $\neg\left(B \vee C\right) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ היא טאוטולוגיה אז או קיים $2 \le i \le n$ כך ש- $V\left(A_i\right) = T$ או שגם $V\left(B\right) = F$ וגם $V\left(C\right) = F$. בכל מקרה נקבל שתי הנוסחאות $\neg B \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ ו- $\neg C \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ הן טאוטולוגיות. מטענת עזר (36) אם נראה ש- $\vdash \neg B \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ וגם $\vdash \neg C \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ ינבע הדרוש. אבל שני תנאים אלה נובעים מהנחת האינדוקציה.

קיבלנו את הדרוש. ☺

כעת נחזור להוכחת הדרוש.

<u>תוצאה 30</u>: אם B טאוטולוגיה אזי $\vdash B$.

<u>הוכחה</u>: אם B טאוטולוגיה אזי גם $B \vee B$ טאוטולוגיה. לפי למה (37) $\vdash B \vee B$. לפי כלל הצמצום $\vdash B$. ☺

וכבר ראינו איך תוצאה זו גוררת את משפט הטאוטולוגיה. כלומר שתי הטענות הבאות שקולות:

1. אם $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n$ ו- B גרירה טאוטולוגית של $A_1, \ldots, A_n$ אזי $\vdash B$.
2. אם B טאוטולוגיה אזי $\vdash B$.

נשים לב שבכל ההוכחות שלנו השתמשנו רק באקסיומת השלישי הנמנע ובכללי ההיסק פרט לכלל הכנסת $\exists$. משמעות הדבר היא שכל האמור לעיל נכון גם בכל תורה שבה האקסיומה הלוגית היחידה היא השלישי הנמנע ולא קיים בה כלל הכנסת $\exists$.

<u>דוגמה</u>:

אם $\vdash A \to B$ אזי $\vdash \neg B \to \neg A$. נראה ש- $\neg B \to \neg A$ גרירה טאוטולוגית של $A \to B$. לפי טענה (26) מספיק להראות ש- $C = \left(A \to B\right) \to \left(\neg B \to \neg A\right)$ טאוטולוגיה. נראה זאת ע"י שימוש בטבלאות אמת:

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$	C
אמת	אמת	**אמת**	שקר	שקר	**אמת**	**אמת**
אמת	שקר	**שקר**	שקר	אמת	**שקר**	**אמת**
שקר	אמת	**אמת**	אמת	שקר	**אמת**	**אמת**
שקר	שקר	**אמת**	אמת	אמת	**אמת**	**אמת**

כעת לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg B \to \neg A$.

כעת נכניס גם את הכמתים לטענות שלנו. נזכור את כלל הכנסת $\exists$: אם ב- B x לא מופיע כמשתנה חופשי אז מ- $\vdash A \to B$ נובע $\vdash \exists xA \to B$

<u>טענה 38</u> (**כלל הכנסת** $\forall$): אם ב- A לא מופיע x באופן חופשי אזי מ- $\vdash A \to B$ נובע $\vdash A \to \forall xB$.
<u>הוכחה:</u> בעצם יש להראות שמ- $\vdash A \to B$ נובע $\vdash A \to \neg\exists x\neg B$.
לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg B \to \neg A$
ב- A לא מופיע x כמשתנה חופשי ולכן ניתן להשתמש בכלל הכנסת $\exists$: $\vdash \exists x\neg B \to \neg A$
לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg\neg A \to \neg\exists x\neg B$
ושוב לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A \to \neg\exists x\neg B$. ☺

<u>טענה 39</u> (**כלל ההכללה**): אם $\vdash A$ אז $\vdash \forall xA$
<u>הוכחה:</u> נתון ש- $\vdash A$. לפי משפט הטאוטולוגיה לכל נוסחה B מתקיים $\vdash B \to A$. בפרט זה נכון עבור $B = \neg\forall xA$. ב- B זאת x לא מופיע כמשתנה חופשי משום שהוא קשור ע"י $\forall$. לכן לפי כלל הכנסת $\forall$ $\vdash \neg\forall xA \to \forall xA$. נחליף את הקשר גרירה ונקבל $\vdash \neg\neg\forall xA \vee \forall xA$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \forall xA \vee \forall xA$ ולפי כלל הצמצום $\vdash \forall xA$. ☺
<u>הערה:</u> נשים לב שלא נכון ש- $\vdash A \to \forall xA$ אלא אם כן A סגורה!!

<u>טענה 40</u>: אם $\vdash A$ אזי $\vdash A_x[b]$ כאשר x משתנה ו- b שם עצם.
<u>הוכחה:</u> נתון ש- $\vdash A$.
לפי כלל ההכללה $\vdash \forall xA$, כלומר $\vdash \neg\exists x\neg A$.
לפי אקסיומת ההצבה לכל נוסחה C $\vdash C_x[b] \to \exists xC$. בפרט זה נכון עבור $C = \neg A$. כלומר $\vdash \neg A_x[b] \to \exists x\neg A$.
$A_x[b]$ גרירה טאוטולוגית של $\neg A_x[b] \to \exists x\neg A$ ו- $\neg\exists x\neg A$ ולכן לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A_x[b]$. ☺

<u>טענה 41</u> (**כלל ההצבה**): אם $\vdash A$ אז $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots,b_n]$ כאשר $x_1,\dots,x_n$ משתנים ו- $b_1,\dots,b_n$ שמות עצם.
<u>הוכחה:</u> יהיו $y_1,\dots,y_n$ משתנים שלא מופיעים לא ב- A ולא ב- $b_1,\dots,b_n$. נשתמש n פעמים בכלל ההצבה:

1) $\vdash A_{x_1}[y_1]$

2) $\vdash A_{x_1,x_2}[y_1,y_2]$

$\vdots$

n) $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[y_1,\dots,y_n]$

נשתמש שוב n פעמים בכלל ההצבה:

1) $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[y_1,\dots,y_n] \Rightarrow \vdash \left(A_{x_1,\dots,x_n}[y_1,\dots,y_n]\right)_{y_1}[b_1]$

2) $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,y_2,\dots,y_n] \Rightarrow \vdash \left(A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,y_2,\dots,y_n]\right)_{y_2}[b_1]$

$\vdots$

n) $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots b_{n-1},y_n] \Rightarrow \vdash \left(A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots b_{n-1},y_n]\right)_{y_n}[b_n]$

כלומר $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots,b_n]$. ☺

<u>הסבר:</u> למה הוכחנו את הטענה בדרך הכביכול עקומה הזאת? אם היינו מתחילים מכך שמ- $\vdash A$ נסיק $\vdash A_{x_1}[b_1]$ לא היינו להמשיך ולהסיק את $\vdash A_{x_1,x_2}[b_1,b_2]$ משום שיכול להיות ש- x_2 מופיע ב- b_1. זה נובע מההבדל שבהצבה בקריאה אחת או באיטרציות. לפי הגדרה הצבה של מספר משתנים מתבצעת בקריאה אחת. אבל כלל ההצבה נכון להצבה של משתנה אחד בלבד וכאשר אנחנו משתמשים בו באינדוקציה אנחנו בעצם משתמשים בו באיטרציות מה שיוצר את הבעייתיות הזאת. כלומר יכול להיות שבאיטרציה מתקדמת "נדרוס" את מה שהצבנו באיטרציה קודמת.

<u>משפט 42</u> (**משפט ההצבה**): יהיו נוסחה A, משתנים $x_1,\dots,x_n$ ושמות עצם $b_1,\dots,b_n$. אזי:
1. $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots,b_n] \to \exists x_1\dots\exists x_nA$
2. $\vdash \forall x_1\dots\forall x_nA \to A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots,b_n]$

<u>הוכחה:</u>
1. לפי אקסיומת ההצבה לכל נוסחה C $\vdash C \to \exists xC$. בפרט עבור $C = A$ ו- $x = x_n$. כלומר $\vdash A \to \exists x_nA$. באותו אופן $\vdash \exists x_nA \to \exists x_{n-1}\exists x_nA, \dots, \vdash \exists x_2\dots\exists x_nA \to \vdash \exists x_1\exists x_2\dots\exists x_nA$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A \to \exists x_1\dots\exists x_nA$ ואז לפי כלל ההצבה $\vdash A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots,b_n] \to \exists x_1\dots\exists x_nA$.
2. באותו אופן מאקסיומת ההצבה $\vdash \neg C \to \exists x\neg C$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash \neg\exists x\neg C \to C$. כלומר $\vdash \forall xC \to C$. בפרט אם ניקח $C = A, x = x_n$ נקבל $\vdash \forall x_nA \to A$. כמו קודם לאחר $n-1$ צעדים נוספים נקבל $\vdash \forall x_1\dots\forall x_nA \to A$. אז לפי כלל ההצבה $\vdash \forall x_1\dots\forall x_nA \to A_{x_1,\dots,x_n}[b_1,\dots,b_n]$. ☺

<u>משפט 43</u> (**כלל הדיסטריביוטיביות**): אם $\vdash A \to B$ אז $\vdash \exists xA \to \exists xB$ ו- $\vdash \forall xA \to \forall xB$
<u>הוכחה:</u> לפי אקסיומת ההצבה $\vdash B \to \exists xB$. בשילוב עם $\vdash A \to B$ נקבל ממשפט הטאוטולוגיה ש- $\vdash A \to \exists xB$. ב- $\exists xB$ x משתנה קשור ולכן ניתן להשתמש בכלל הכנסת $\exists$ ונקבל $\vdash \exists xA \to \exists xB$.
באופן דומה, כבר ראינו מספר פעמים איך מאקסיומת ההצבה נובע ש- $\vdash \forall xA \to A$ ואז בשילוב עם $\vdash A \to B$ לפימשפט הטאוטולוגיה $\vdash \forall xA \to B$. ב- $\forall xA$ x קשור ולכן ניתן להשתמש בכלל הכנסת $\forall$: $\vdash \forall xA \to \forall xB$. ☺

<u>הגדרה:</u> תהי נוסחה A ויהיו $x_1,\dots,x_n$ כל המשתנים שיש להם הופעה חופשית ב- A. הנוסחה $\forall x_1\dots\forall x_nA$ נקראת **הסגור** של A.

<u>טענה 44</u>:
1. $\vdash \forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$
2. $\vdash \exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
3. $\vdash \exists x\forall yA \to \forall y\exists xA$ אבל לא בכיוון ההפוך.

<u>הוכחה:</u> בעיקרון יש את זה בתרגיל. אולי אח"כ אוסיף את ההוכחה.

<u>משפט 45</u> (**משפט הסגור**): תהי A' הסגור של A. אזי $\vdash A$ אמ"מ $\vdash A'$.
<u>הוכחה:</u>
($\Leftarrow$) אם $\vdash A$ אזי בשימוש n פעמים בכלל ההכללה נקבל $\vdash A'$.
($\Rightarrow$) נניח $\vdash A'$. אזי לפי משפט ההצבה $\vdash \forall x_1\dots\forall x_nA \to A_{x_1,\dots,x_n}[x_1,\dots,x_n]$ כלומר $\vdash A' \to A$ ולפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A$. ☺

<u>סימון:</u> תהא T מערכת פורמלית. ויהיו $A_1,\dots,A_n$ נוסחאות. נסמן ב- $T[A_1,\dots,A_n]$ את המערכת הפורמלית המתקבלת מ- T ע"י הוספת $A_1,\dots,A_n$ בתור אקסיומות חדשות.

<u>משפט 46</u> (**משפט הדדוקציה**): יהיו A,B נוסחאות וב- A אין משתנים חופשיים. אזי $\vdash_T A\to B$ אמ"מ $\vdash_{T[A]} B$.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) נניח ש- $\vdash_T A\to B$. אזי ברור ש- $\vdash_{T[A]} A\to B$. כמו כן $\vdash_{T[A]} [A]$. אזי לפי כלל הניתוק $\vdash_{T[A]} B$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $\vdash_{T[A]} B$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על ההיסק של B ב- $T[A]$:

1. כאשר אורך ההיסק הוא 1 אזי מתקיים אחד מהבאים:
   a. B זהה ל- A. אזי לפי אקסיומת השלישי הנמנע $\vdash_T \neg A\vee A$ כלומר $\vdash_T A\to B$.
   b. B אקסיומה ב- T, כלומר $\vdash_T B$. אזי לפי כלל ההרחבה $\vdash_T \neg A\vee B$ כלומר $\vdash_T A\to B$.
2. נניח שהטענה נכונה לכל נוסחה C שההיסק שלה ב- $T[A]$ קצר מזה של B.
   a. אם B גרירה טאוטולוגית של $C_1,\dots,C_m$ ולכל C_i יש ב- $T[A]$ היסק קצר יותר מאשר זה של B. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash_T A\to C_1,\dots,\vdash_T A\to C_m$. $A\to B$ היא גרירה טאוטולוגית של $A\to C_1,\dots,A\to C_m$ ולכן לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T A\to B$.
   b. אם B מתקבלת מהטלת כמת, כלומר B היא מהצורה $\exists xD\to C$ כאשר ב- C לא מופיע x בתור משתנה חופשי. כלומר השלב האחרון בהסקת B היה שמ- $\vdash_{T[A]} D\to C$ נובע $\vdash_{T[A]} \exists xD\to C$. לכן ההיסק של $D\to C$ היה קצר יותר וניתן להכיל על נוסחה זו את הנחת האינדוקציה: $\vdash_T A\to(D\to C)$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T D\to(A\to C)$. A סגורה וב- C לא מופיע x באופן חופשי ולכן ניתן להשתמש בכלל הכנסת $\exists$ $\vdash_T \exists xD\to(A\to C)$ ולפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T A\to(\exists xD\to C)$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל נוסחה. ☺

<u>משפט 47</u> (**משפט הדדוקציה**): אם ב- $A_1,\dots,A_n$ אין משתנים חופשיים אז $\vdash_T A_1\to\dots\to A_n\to B$ אמ"מ $\vdash_{T[A_1,\dots,A_n]} B$

<u>הוכחה:</u> הוכחנו את משפט הדדוקציה (משפט 46) למקרה של נוסחה אחת בלבד. ההוכחה של משפט זה מתבצעת אינדוקציה על n.

<u>משפט 48</u> (**משפט הקבועים**): תהי תורה T. תהי A נוסחה עם משתנים חופשיים $x_1,\dots,x_n$. יהיו $c_1,\dots,c_n$ קבועים חדשים ושונים זה מזה שכלל לא מופיעים בשפה. תהי T' המערכת הפורמלית המתקבלת מהוספת הקבועים החדשים לשפה של T. אזי $\vdash_T A$ אמ"מ $\vdash_{T'} A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) נניח $\vdash_T A$. אזי גם $\vdash_{T'} A$. לפי כלל ההצבה $\vdash_{T'} A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $\vdash_{T'} A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$. נסתכל על ההיסק של $A_{x_1,\dots,x_n}[c_1,\dots,c_n]$ ב- T'. ניקח משתנים $y_1,\dots,y_n$ מהשפה המקורית שכלל אינם מופיעים בהיסק ובמהלך כל ההיסק נחליף את c_i ב- y_i לכל $1\le i\le n$. כל האקסיומות שאינן לוגיות אינן מכילות את $c_1,\dots,c_n$ משום שהם לא היו בשפה המקורית ולכן תהליך ההחלפה לא משפיע עליהן. אמנם לאחר ההחלפה כל האקסיומות הלוגיות הופכות לאקסיומות לוגיות ב- T. לכן $\vdash_T A_{x_1,\dots,x_n}[y_1,\dots,y_n]$ ולפי כלל ההצבה $\vdash_T A$. ☺

<u>משפט 49</u> (**משפט השקילות**): אם $\vdash B_1\leftrightarrow B_1',\dots,\vdash B_n\leftrightarrow B_n'$ ונוסחה A' מתקבלת מ- A ע"י מספר החלפות של B_1 ב- B_1',..., ושל B_n ב- B_n' אזי $\vdash A\leftrightarrow A'$

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה על המבנה של A.

1. אם A היא B_i עבור איזה $1\le i\le n$ ו- A' היא B_i' אזי הטענה ברורה.
2. אם A נוסחה אטומית אזי או שמדובר במקרה (1) שוב או שאין כלל מקום להחלפה ואז A' זהה ל- A ולפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A\leftrightarrow A'$.
3. נניח עבור נוסחה שתהליך הבנייה שלה קצר מזה של A.
   a. אם A היא שלילה $\neg C$ אזי או שמדובר במקרה (1) או ש- A' היא $\neg C'$. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash C\leftrightarrow C'$ ולפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash\neg C\leftrightarrow\neg C'$.
   b. אם A היא איווי $C\vee D$ אזי או שנחזור למקרה (1) או ש- A' היא $C'\vee D'$. לפי הנחת האינדוקציה מתקיים $\vdash C\leftrightarrow C',\vdash D\leftrightarrow D'$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash C\vee D\leftrightarrow C'\vee D'$.
   c. אם A היא $\exists xC$ אזי או שמדובר במקרה (1) או ש- A' היא $\exists xC'$. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash C\leftrightarrow C'$. כלומר $\vdash C\to C'$ וכן $\vdash C'\to C$ לפי כלל הדיסטריביוטיביות $\vdash\exists xC\to\exists xC'$ וכן $\vdash\exists xC'\to\exists xC$ ולכן לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash\exists xC\leftrightarrow\exists xC'$.

לפי עיקרון האינדוקציה המשפט נכון לכל נוסחה. ☺

<u>משפט 50</u> (**משפט הוריאנט**): אם y לא מופיע ב- B אז $\vdash\exists xB\leftrightarrow\exists yB_x[y]$

<u>הוכחה:</u> לפי משפט ההצבה $\vdash B_x[y]\to\exists xB$. משום שב- $\exists xB$ אין ל- y הופעות חופשיות ניתן להשתמש בכלל הכנסת $\exists$ ולקבל $\vdash\exists yB_x[y]\to\exists xB$.

נסמן $B'=B_x[y]$. לפי אקסיומת ההצבה $\vdash B'_y[x]\to\exists yB'$. לפי כלל הכנסת כמת $\vdash\exists xB'_y[x]\to\exists yB'$. y לא מופיע ב- B ולכן $B'_y[x]=(B_x[y])_y[x]=B$. ולכן קיבלנו בעצם $\vdash\exists xB\to\exists yB_x[y]$.

$\exists xB\leftrightarrow\exists yB_x[y]$ היא גרירה טאוטולוגית של $\exists yB_x[y]\to\exists xB$ ושל $\exists xB\to\exists yB_x[y]$. ולכן לפי משפט הטאוטולוגיה נקבל את הדרוש: $\vdash\exists xB\leftrightarrow\exists yB_x[y]$. ☺

<u>משפט 51</u> (**משפט הסימטריה**): יהיו a,b שמות עצם. אם $\vdash a=b$ אז $\vdash b=a$.

<u>הוכחה:</u> ניקח משתנים x,y. לפי אקסיומת השוויון אם ניקח את p להיות יחס השוויון אזי $\vdash x=y\to x=x\to(x=x\to y=x)$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash x=x\to x=y\to y=x$. אבל $\vdash x=x$ כי זו אקסיומה ולכן לפי כלל הניתוק $\vdash x=y\to y=x$. לפי משפט ההצבה $\vdash a=b\to b=a$. נתון ש- $\vdash a=b$ ולכן לפי כלל הניתוק $\vdash b=a$. ☺

<u>הערה:</u> למפקפקים בכך ש- $x = x \to x = y \to y = x$ * היא גרירה טאוטולוגית של $x = y \to x = x \to (x = x \to y = x)$ ** נעשה טבלת אמת:

**	*	$y = x$	$x = x$	$x = y$
אמת	**אמת**	אמת	אמת	אמת
שקר	**שקר**	שקר	אמת	אמת
אמת	**אמת**	אמת	שקר	אמת
אמת	**אמת**	שקר	שקר	אמת
אמת	**אמת**	אמת	אמת	שקר
אמת	**אמת**	שקר	אמת	שקר
אמת	**אמת**	אמת	שקר	שקר
אמת	**אמת**	שקר	שקר	שקר

<u>משפט 52</u> (**משפט השוויון**): יהיו שמות עצם $b_1,...,b_n,b_1',...,b_n'$ וכן יהיו שם עצם c ונוסחה A. נניח $\vdash b_1 = b_1',...,\vdash b_n = b_n'$.

1. אם c' מתקבל מ- c ע"י מספר החלפות של b_i ב- b_i' אז $\vdash c = c'$.
2. אם A' מתקבלת מ- A ע"י מספר החלפות של b_i ב- b_i' כאשר המשתנים שב- b_i וב- b_i' לא קשורים הן לפני והן אחרי ההחלפה, אז $\vdash A \leftrightarrow A'$.

<u>הוכחה:</u>

1. נוכיח באינדוקציה על המבנה של c:

אם c זהה ל- b_i כלשהו אז c' זהה ל- b_i' אם התבצעה החלפה. משום שנתון ש- $\vdash b_i = b_i'$ גם $\vdash c = c'$. אם לא התבצעה החלפה c נשאר כמו שהוא ולפי אקסיומת הזהות $\vdash c = c$. בהמשך נניח ש- c הוא לא אחד מה- b_i שהרי כבר טיפלנו במקרה זה.

נניח לכל שם עצם שתהליך הבנייה שלו היה קצר מזה של c.

a. אם c הוא משתנה והנחנו שהוא אינו אחד מה- b_i אזי c' זהה ל- c משום שאין מה להחליף. ואז כמובן $\vdash c = c$.

b. אחרת c הוא מהצורה $fc_1...c_m$ כאשר $c_1,...,c_m$ שמות עצם שתהליך הבנייה שלהם קצר יותר. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash c_1 = c_1',...,\vdash c_m = c_m'$ כאשר לכל $1 \le j \le m$ c_j' מתקבל מ- c_j ע"י מספר החלפות של b_i ב- b_i'. לפי אקסיומת השוויון:

$$\vdash x_1 = y_1 \to ... \to x_m = y_m \to fx_1...x_m = fy_1...y_m$$

לפי כלל ההצבה:

$$\vdash c_1 = c_1' \to ... \to c_m = c_m' \to fc_1...c_m = fc_1'...c_m'$$

לפי כלל הניתוק משום ש- $\vdash c_1 = c_1',...,\vdash c_m = c_m'$ נקבל $\vdash fc_1...c_m = fc_1'...c_m'$, כלומר $\vdash c = c'$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל שם עצם.

2. נוכיח באינדוקציה על המבנה של A:

אם A נוסחה אטומית מהצורה $pc_1...c_m$ אזי A' היא מהצורה $pc_1'...c_m'$. לפי סעיף (1) $\vdash c_1 = c_1',...,\vdash c_m = c_m'$. לפי אקסיומת השוויון בשילוב עם כלל ההצבה $\vdash c_1 = c_1' \to ... \to c_m = c_m' \to pc_1...c_n \to pc_1'...c_m'$. כלומר $\vdash c_1 = c_1' \to ... \to c_m = c_m' \to A \to A'$. לפי כלל הניתוק $\vdash A \to A'$.

לפי משפט הסימטריה אם $\vdash c_1 = c_1',...,\vdash c_m = c_m'$ אז $\vdash c_1' = c_1,...,\vdash c_m' = c_m$ ובאותו האופן בעזרת אקסיומת השוויון, כלל ההצבה וכלל הניתוק נקבל $\vdash A' \to A$. כעת לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A \leftrightarrow A'$.

נניח לכל נוסחה שתהליך הבנייה שלה היה קצר מזה של A.

a. אם A היא $\neg C$ אזי A' היא $\neg C'$. לגבי C' ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה שהרי תהליך הבנייה שלה קצר יותר ואם ב- A, A' המשתנים לא היו קשורים אזי כמובן גם ב- C, C' הם חופשיים. לכן $\vdash C \leftrightarrow C'$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A \leftrightarrow A'$.

b. אם A היא $B \vee C$ אזי A' היא $B' \vee C'$ וכמו קודם אם ב- A, A' המשתנים לא היו קשורים אזי כמובן גם ב- $B \vee C, B' \vee C'$ הם חופשיים. לכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל $\vdash B \leftrightarrow B', \vdash C \leftrightarrow C'$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A \leftrightarrow A'$.

c. אם A היא $\exists xC$ כאשר x לא מופיע באף b_i (אם הוא מופיע אז הוא קשור וזה נוגד את הנחות המשפט) אזי A' היא $\exists xC'$. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash C \leftrightarrow C'$. כלומר $\vdash C \to C'$ וגם $\vdash C' \to C$. לפי כלל הדיסטריביוטיביות $\vdash \exists xC \to \exists xC'$ וגם $\vdash \exists xC' \to \exists xC$. כלומר $\vdash \exists xC \leftrightarrow \exists xC'$ שזה בדיוק מה שרצינו $\vdash A \leftrightarrow A'$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל נוסחה A. ☺

<u>מסקנה 53</u>: אם c שם עצם ו- $b_1,...,b_n,b_1',...,b_n'$ שמות עצם אזי

$$\vdash b_1 = b_1' \to ... \to b_n = b_n' \to c[b_1,...,b_n] = c[b_1',...,b_n']$$

<u>הוכחה:</u> נחליף כל משתנה שמופיע באיזה b_i או b_i' בקבוע חדש. נניח שמ- b_i, b_i', c מתקבלים שמות העצם d_i, d_i', h בהתאמה. אזי צריך להוכיח $d_1 = d_1' \to ... \to d_n = d_n' \to h[d_1,...,d_n] = h[d_1',...,d_n']$. לפי משפט הדדוקציה אם נוסיף את $c_i = c_i'$ בתור אקסיומה יהיה מספיק להוכיח $h[d_1,...,d_n] = h[d_1',...,d_n']$. אבל זה נכון לפי משפט השוויון. ☺

<u>מסקנה 54</u>:

$$\vdash b_1 = b_1' \to ... \to b_n = b_n' \to (A[b_1,...,b_n] \leftrightarrow A[b_1',...,b_n'])$$

<u>הוכחה:</u> כנ"ל

<u>מסקנה 55</u>: אם x לא מופיע בשם עצם b ו- A נוסחה אזי $\vdash A_x[b] \leftrightarrow \exists x(x = b \wedge A)$

<u>הוכחה:</u> נסתכל על הנוסחה $x = b \wedge A$. לפי כלל ההצבה אם נציב b במרום x נקבל $\vdash (b = b \wedge A_x[b]) \to \exists x(x = b \wedge A)$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A_x[b] \to \exists x(x = b \wedge A)$.

ממסקנה (54) $\vdash x = b \to (A \leftrightarrow A_x[b])$. בפרט מתקיים $\vdash x = b \to A \to A_x[b]$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash (x = b \wedge A) \to A_x[b]$. נתון ש- x לא מופיע בשם עצם b ולכן ניתן להשתמש בכלל הכנסת $\exists$: $\vdash \exists x(x = b \wedge A) \to A_x[b]$.

הוכחנו את שני הכיוונים ולפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash A_x[b] \leftrightarrow \exists x(x = b \wedge A)$. ☺

9. צורת קידומת נורמלית

הגדרה: נאמר שנוסחה A' היא **וריאנט** של A אם A' מתקבלת ע"י סדרה של החלפות של חלקי A שנראים כך $\exists xB$ ב $\exists y B_x[y]$ כאשר y אינו חופשי ב- B.

הגדרה: נאמר שנוסחה היא **פתוחה** אם לא מופיעים בה כמתים.

הגדרה: נאמר ש- A היא **בצורת קידומת נורמלית** (**prenex form**) כאשר היא מהצורה $Q_1x_1...Q_mx_mB$ כאשר כל $Q_i \in \{\exists,\forall\}$, המשתנים $x_1,...,x_n$ הם שונים ו- B פתוחה. $Q_1x_1...Q_mx_m$ נקרא **הקידומת** והיא יכולה להיות ריקה. כלומר, נוסחה פתוחה היא בצורת קידומת נורמלית.

נשאלת השאלה האם לכל נוסחה ניתן למצוא נוסחה שקולה בצורת דיקומת נורמלית. לשם כך נגדיר מספר פעולות שנקראות פעולות קידומת נורמלית:

1. החלפת A בוריאנט שלה
2. החלפת חלק ב- A מהצורה $\neg QxB$ ב- $Q'x\neg B$ כאשר
$$Q'=\begin{cases}\exists & Q=\forall\\ \forall & Q=\exists\end{cases}$$
3. החלפת חלק ב- A מהצורה $QxB\vee C$ ב- $Qx(B\vee C)$ אם x אינו חופשי ב- C
4. החלפת חלק ב- A מהצורה $B\vee QxC$ ב- $Qx(B\vee C)$ אם x אינו חופשי ב- B.

טענה 56: תהי A נוסחה ותהי A' הנוסחה שהתקבלה מ- A ע"י פעולת קידומת נורמלית. אזי $\vdash A\leftrightarrow A'$.

הוכחה:
1. נובע ממשפט הוריאנט (50).
2. כדי להראות ש- $\vdash A\leftrightarrow A'$ לפי משפט השקילות מספיק להראות ש- $\vdash \neg QxB \leftrightarrow Q'x\neg B$. כלומר יש להראות ש- $\vdash \neg\exists xB\leftrightarrow \forall x\neg B$ ו- $\vdash \neg\forall xB \leftrightarrow \exists x\neg B$. כלומר $\vdash \neg\exists xB \leftrightarrow \neg\exists x\neg\neg B$* ו- $\vdash \neg\neg\exists x\neg B\leftrightarrow \exists x\neg B$**. (**) נכון לפי משפט הטאוטולוגיה. ואילו (*) נכון לפי משפט השקילות, שכן לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash B\leftrightarrow\neg\neg B$.
3. כמו בסעיף (2) לפי משפט השקילות מספיק להראות ש- $\vdash QxB\vee C\leftrightarrow Qx(B\vee C)$. נראה לדוגמה שמתקיים $\vdash \exists xB\vee C\leftrightarrow \exists x(B\vee C)$. לפי משפט הטאוטולוגיה מספיק להוכיח:
   a. $\vdash \exists xB\to\exists x(B\vee C)$: שהרי $\vdash B\to B\vee C$ זו טאוטולוגיה. כעת לפי כלל הדיסטריביוטיביות (43) $\vdash \exists xB\to \exists x(B\vee C)$.
   b. $\vdash C\to\exists x(B\vee C)$: לפי אקסיומת ההצבה $\vdash (B\vee C)\to\exists x(B\vee C)$. ולפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash C\to\exists x(B\vee C)$.
   c. $\vdash \exists x(B\vee C)\to \exists xB\vee C$: לפי אקסיומת ההצבה $\vdash B\to\exists xB$. לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash B\vee C\to \exists xB\vee C$. וכעת לפי כלל הכנסת $\exists$ (נתון ש- x אינו חופשי ב- C והוא גם אינו חופשי ב- $\exists xB$) $\vdash \exists x(B\vee C)\to\exists xB\vee C$.

   לכן $\vdash \exists xB\vee C\leftrightarrow \exists x(B\vee C)$.

   באופן זהה מוכיחים ש- $\vdash \forall xB\vee C\leftrightarrow \forall x(B\vee C)$
4. נובע מיידית מסעיף (3) ובשימוש בלמה (31).

בכך הראנו שכל פעולת קידומת נורמלית נותנת נוסחה שקולה ל- A. ☺

טענה 57: כל נוסחה A ניתן להפוך לנוסחה בצורת קידומת נורמלית ע"י סדרה של פעולות קידומת נורמלית.

הוכחה: באינדוקציה על בניית הנוסחה:
1. אם A נוסחה אטומית אזי היא כבר בצורת קידומת נורמלית.
2. אם $A=\neg B$. לפי הנחת האינדוקציה אפשר להפוך את B לנוסחה בצורת קידומת נורמלית B'. כך $\neg B$ הופכת ל- $\neg B'$. אבל נוסחה זו ניתן להפוך לנוסחה בצורת קידומת נורמלית ע"י סדרה של פעולות מסוג (2).
3. אם $A=B\vee C$ אזי לפי הנחת האינדוקציה ניתן להפוך את B,C לצורת קידומת נורמלית B',C'. בגלל פעולה (1) ניתן להניח כי המשתנים שמופיעים בקידומת של B' שונים מהמשתנים המופיעים בקידומת של C' ושכל המשתנים האלה שונים מהמשתנים החופשיים ב- B',C'. וכך $B\vee C$ הופכת ל- $B'\vee C'$. כעת ע"י פעולות (3) ו-(4) ניתן להפוך נוסחה זו לנוסחה בצורת קידומת נורמלית.
4. אם $A=\exists xB$. לפי הנחת האינדוקציה ניתן להפוך את B לנוסחה בצורת קידומת נורמלית B' וכן בכלל פעולה (1) ניתן להניח כי x שונה מהמשתנים המופיעים בנוסחה זו. לכן $\exists xB'$ היא נוסחה בצורת קידומת נורמלית.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל נוסחה A. ☺

מסקנה 58: לכל נוסחה A קיימת נוסחה A' כך ש- $\vdash A\leftrightarrow A'$ ו- A' מהצורה $Q_1x_1...Q_mx_mB$ כאשר $Q_i\in\{\exists,\forall\}$ וב- B אין כמתים.

הוכחה: זו מסקנה ישירה של המשפטים האחרונים.

10. משפט השלמות

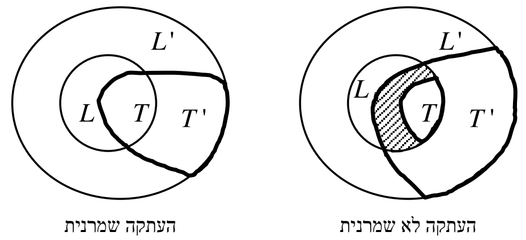
משפט השלמות הוא למעשה השיא של הקורס ויש מקום לדיון פילוסופי עמוק שנימנע ממנו בסיכומים אלה (למרות שלדעתי דווקא זהו החלק המעניין...).

בכל אופן, דיברנו על מערכות פורמליות. במערכת פורמלית מלבד השפה יש אקסיומות לוגיות ואקסיומות לא לוגיות שנקבעות באופן שרירותי. משפט הוא נוסחה שניתנת להסקה בשימוש באקסיומות הלוגיות והאקסיומות הלא לוגיות של המערכת הפורמלית שלנו. האם קיימת דרך גנרית (סינטקטית) לדעת האם נוסחה כלשהי היא משפט או לאו? ובכן, בוודאי שלא, אחרת לא כל הבעיות המתמטיות היו נפתרות בבת אחת. לא קיימת דרך לדעת אם נוסחה היא משפט או לא רק מהסתכלות עליה. בכל זאת, ננסה לתת אפיון כלשהו של משפטים, מערכות פורמליות והקשר שלהם למציאות, קרי למבנים שמפרשים אותם.

הגדרה:
1. נאמר שהשפה L' היא **הרחבה** של השפה L אם כל מה שנמצא ב- L נמצא גם ב- L'.
2. תהי T מערכת פורמלית עם השפה L ותהי T' מערכת פורמלית עם השפה L' שהיא הרחבה של L. נאמר ש- T' היא **הרחבה** של T אם כל משפט ב- T הוא משפט ב- T'.
3. נאמר ש- T ו- T' **שקולות** אם יש להן אותה שפה וכל אחת מהן היא הרחבה של השנייה (כלומר יש להן אותם המשפטים).

הערה: בהינתן שתי מערכות פורמליות שקולות לא נוכל להסיק כי יש להן אותן אקסיומות. שכן יכול להיות שאחת מהאקסיומות הלא לוגיות נובעת מן האחרות. כלומר רשימת האקסיומות הלא לוגיות אינה חייבת להיות מינימלית.

הגדרה: יהיו T,T' תיאוריות עם שפות L,L' בהתאמה כך ש- T' הרחבה של T. נאמר שההרחבה **שמרנית** (**conservative**) אם לכל נוסחה A כך ש- $\vdash_{T'} A$ ושהיא כתובה בשפה L מתקיים $\vdash_T A$.



העתקה לא שמרנית העתקה שמרנית

משפטים שכתובים ב- L והם ב- T' אבל לא ב- T

תהי תיאוריה T ותהי Γ קבוצה של נוסחאות מהשפה L של התיאוריה. ברור ש- $T[\Gamma]$ הרחבה של T.

משפט 59 (**משפט הדדוקציה**): תהי Γ קבוצת נוסחאות ב- T ותהי A נוסחה ב- T. אזי $\vdash_{T[\Gamma]} A$ אמ"מ $\vdash_T B_1 \to \ldots \to B_n \to A$ כאשר $B_1,\ldots,B_n$ סגורים של נוסחאות ב- Γ.

הוכחה:
($\Leftarrow$) נניח כי $\vdash_{T[\Gamma]} A$. נסתכל בהוכחה של A ב- $T[\Gamma]$. יהיו $B_1,\ldots,B_n$ הסגורים של האקסיומות הלא לוגיות שמופיעות בתהליך ההסקה. לפי משפט הסגור (45) $\vdash_{T[B_1,\ldots,B_n]} A$ אבל כעת לפי משפט הדדוקציה (47) $\vdash_T B_1 \to \ldots \to B_n \to A$.
($\Rightarrow$) נניח ש- $\vdash_T B_1 \to \ldots \to B_n \to A$ כאשר $B_1,\ldots,B_n$ סגורים של נוסחאות ב- Γ. אזי לפי משפט הסגור $\vdash_{T[\Gamma]} B_1,\ldots,\vdash_{T[\Gamma]} B_n$ וכמובן $\vdash_{T[\Gamma]} B_1 \to \ldots \to B_n \to A$. אזי בשימוש בכלל הניתוק n פעמים נקבל $\vdash_{T[\Gamma]} A$. ☺

למה טוב המשפט הזה? נסמן T התיאוריה הריקה ותהי Γ קבוצה של נוסחאות. אזי $T[\Gamma]$ היא התיאוריה שיש בה רק את הנוסחאות Γ בתור אקסיומות לא לוגיות. כעת לפי המשפט אנחנו יודעים מתי ניתן להוכיח את A ב- $T[\Gamma]$ - כאשר $\vdash_T B_1 \to \ldots \to B_n \to A$ כאשר כל B_i כנ"ל.

למעשה המשפט הזה דומה מאוד למשפט הדדוקציה רק שבמשפט הדדוקציה ההנחה היא שנוסאות סגורות ואילו כאן משתמשים בסגורים כדי להשיג את הסגירות. בכלל חושב לשים לב שיש הרבה משפטים שמדברים על הסקה אבל מתייחסים רק לנוסחאות סגורות. אך אל דאגה, משפטים כמו משפט הקבועים ומשפט הסגור מאפשרים לנו להתמודד גם עם נוסחאות שמופיעים בהן משתנים חופשיים!

הגדרה: נאמר שב- $T[\Gamma]$ יש **סתירה** כאשר $\vdash_{T[\Gamma]} B \wedge \neg B$ עבור נוסחה כלשהי B.

הערה: נשים לב שאם ב- $T[\Gamma]$ יש סתירה אזי לכל נוסחה A קיים $\vdash_{T[\Gamma]} A$. שהרי כל נוסחה A היא גרירה טאוטולוגית של $B \wedge \neg B$ ולכן לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_{T[\Gamma]} A$.

משפט 60: ב- $T[\Gamma]$ יש סתירה אמ"מ ב- T יש משפט מהצורה $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ כאשר כל A_i היא סגור של נוסחה מ- Γ.

הוכחה:
($\Leftarrow$) נניח כי ב- $T[\Gamma]$ יש סתירה. כלומר $\vdash_{T[\Gamma]} B \wedge \neg B$. לפי משפט הדדוקציה קיימות $A_1,\ldots,A_n$ שהן סגורים של נוסחאות מ- Γ כך ש- $\vdash_T A_1 \to \ldots \to A_n \to B \wedge \neg B$. אבל $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ היא גרירה טאוטולוגית של $A_1 \to \ldots \to A_n \to B \wedge \neg B$ שהרי אם נוסחה זו היא אמיתית אזי חייב להיות $1 \le i \le n$ כך ש- A_i היא שקרית. לכן לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$.
($\Rightarrow$) לפי משפט הסגור $\vdash_{T[\Gamma]} A_1,\ldots,\vdash_{T[\Gamma]} A_n$ ואם $\vdash_T \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$ אז ברור ש- $\vdash_{T[\Gamma]} \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n$. אזי לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_{T[\Gamma]} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge (\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n)$ אבל זו סתירה. ☺

הגדרה: נאמר שמערכת פורמלית T היא **עקיבה** אם אין בה סתירה.

הגדרה: נאמר שמבנה $\mathfrak{M}$ לתיאוריה T הוא **מודל** אם כל המשפטים ב- T נכונים ב- $\mathfrak{M}$.

משפט 61 (**משפט השלמות**): מערכת פורמלית T היא עקיבה אמ"מ קיים לה מודל.

כיוון אחד של המשפט ($\Rightarrow$) טריוויאלי ולמעשה כבר הוכחנו אותו כאשר דיברנו על הנאותות של האקסיומות וכללי ההיסק.
להוכחת הכיוון השני נצטרך לעבוד מעט (בלשון המעטה) קשה יותר.

מאחר שנתונה לנו רק התיאוריה יש לבנות את המודל ממנה – כלומר מחומרים סינטקטיים. בה"כ נניח כי ב- T יש קבוע. אחרת נוסיף קבועים באופן מלאכותי ולפי משפט הקבועים לא יקרה שום דבר נורא.
נגדיר מבנה $\mathfrak{A}$ (שייקרא מבנה קנוני ל- T) באופן הבא:
יהיו a,b שמות עצם ללא משתנים ב- T. נגדיר יחס $a \sim b \Leftrightarrow \vdash_T a=b$. קל להיווכח כי $\sim$ הוא יחס שקילות:
רפלקסיביות: ברור ש- $\vdash_T a=a$
סימטריות: אם $\vdash_T a=b$ אז לפי משפט הסימטריה (51) $\vdash_T b=a$
טרנזיטיביות: אם $\vdash_T a=b, \vdash_T b=c$ לפי משפט השוויון (52) $\vdash_T a=c$.
נגדיר את הקבוצה של המבנה $|\mathfrak{A}|$ להיות קבוצת כל מחלקות השקילות של $\sim$ ונסמן ע"י a° את מחלקת השקילות של a.
כעת כדי להשלים את הגדרת המבנה נגדיר את הפונקציות והיחסים באופן הבא:
$$f_{\mathfrak{A}}(a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ) = (fa_1\ldots a_n)^\circ$$
$$p_{\mathfrak{A}}(a_1^\circ,\ldots,a_n^\circ) \Leftrightarrow \vdash_T pa_1\ldots a_n$$
נראה שאלה מוגדרים היטב. כלומר נראה שההגדרה אינה תלויה בנציג שנבחר עבור מחלקות השקילות. נניח כי $a_i^\circ = b_i^\circ$ עבור $1 \le i \le n$.
אזי לפי ההגדרה $\vdash_T a_i = b_i$. לכן לפי משפט השוויון
$$\vdash_T fa_1\ldots a_n = fb_1\ldots b_n$$
$$\vdash_T pa_1\ldots a_n \leftrightarrow pb_1\ldots b_n$$
כלומר
$$(fa_1\ldots a_n)^\circ = (fb_1\ldots b_n)^\circ$$
$$\vdash_T fa_1\ldots a_n \Leftrightarrow \vdash_T fb_1\ldots b_n$$
זאת אומרת, הפונקציות והיחסים אכן מוגדרים היטב.
כעת נראה שלכל שם עצם ללא משתנים a $\mathfrak{A}(a) = a^\circ$. נראה זאת באינדוקציה על הבנייה של a:

1. אין בסיס אינדוקציה כי זו אינדוקציה שלמה
2. אם a הוא מהצורה $fa_1...a_n$ אזי על $a_1,...,a_n$ ניתן להחיל את הנחת האינדוקציה ואז:

$$\mathfrak{A}(fa_1...a_n)=f_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(a_1),...,\mathfrak{A}(a_n))=$$
$$=f_{\mathfrak{A}}(a_1^\circ,...,a_n^\circ)=a^\circ$$

לפי עיקרון האינדוקציה לכל a ללא משתנים מתקיים $\mathfrak{A}(a)=a^\circ$.

מכאן נובע שלכל נוסחה אטומית סגורה A, $\mathfrak{A}(A)=T\Leftrightarrow\vdash_T A$.

שהרי אם $A=pa_1...a_n$ כאשר p אינו סימן השוויון אז

$$\mathfrak{A}(A)=T\Leftrightarrow p_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(a_1),...,\mathfrak{A}(a_n))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p_{\mathfrak{A}}(a_1^\circ,...,a_n^\circ)\Leftrightarrow\vdash_T A$$

אם A היא $a=b$ אז

$$\mathfrak{A}(A)=T\Leftrightarrow\mathfrak{A}(a)=\mathfrak{A}(b)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^\circ=b^\circ\Leftrightarrow a\sim b\Leftrightarrow\vdash_T A$$

הראינו שכל נוסחה אטומית סגורה היא נכונה במבנה אמ"מ ניתן להוכיח אותה בתיאוריה. אבל זה לא נכון לכל הנוסחאות הסגורות משתי סיבות" הראשונה, יכול להיות שאין בתיאוריה מספיק קבועים בשפה‡‡; השנייה, יכול להיות שהמשפטים אינם קובעים את האמיתות של כל נוסחה§§.

<u>הגדרה</u>: נאמר שתיאוריה T היא בעלת **תכונת הנקין** אם לכל נוסחה סגורה $\exists xA$, קיים קבוע e בשפה של T כך ש- $\vdash_T\exists xA\to A_x[e]$.

<u>הגדרה</u>: נוסחה A בתיאוריה T היא **אינה ניתנת להכרעה** אם לא A ולא $\neg A$ הן משפטים ב- T. אחרת A **ניתנת להכרעה**. תיאוריה T נקראת **שלמה** אם כל נוסחה סגורה A היא ניתנת להכרעה.

<u>הערה</u>: נעיר רק שיהיה זה אבסורד לגרוש שכל נוסחה תהיה ניתנת להכרעה. למשל לא $x=0$ וגם לא $x\neq 0$ נכונות לכל שם עצם שנציב במקום x. ברור אם כן, שלא ניתן לדרוש שנוסחאות פתוחות יהיו ניתנות להכרעה.

<u>למה 62</u>: תהי T תורה שלמה בעלת תכונת הנקין. $\mathfrak{A}$ המבנה הקנוני ל- T. תהי A נוסחה סגורה ב- T. אזי $\mathfrak{A}(A)=T\Leftrightarrow\vdash_T A$.

<u>הוכחה</u>: נוכיח באינדוקציה על הבנייה של A:
1. עבור נוסחה אטומית המשפט כבר הוכח.
2. אם $A=\neg B$ אז

$$\mathfrak{A}(A)=T\overset{def}{\Leftrightarrow}\mathfrak{A}(B)=F\overset{IH}{\Leftrightarrow}\nvdash_T B\Leftrightarrow$$
$$\underset{T\text{ is complete}}{\Leftrightarrow}\vdash_T\neg B\Leftrightarrow\vdash_T A$$

3. אם $A=B\vee C$ נוכיח את שני כיווני הטענה:

($\Leftarrow$) נניח כי $\vdash_T A$ כלומר $\vdash_T B\vee C$. נניח בשלילה כי $\mathfrak{A}(A)=\mathfrak{A}(B\vee C)=F$ אזי $\mathfrak{A}(B)=\mathfrak{A}(C)=F$. כלומר $\nvdash_T B,\nvdash_T C$. מאחר ש- T שלמה $\vdash_T\neg B,\vdash_T\neg C$. אזי לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_T\neg A$ כלומר $\nvdash_T A$ בסתירה להנחה.

($\Rightarrow$) נניח כי $\mathfrak{A}(A)=T$. אזי $\mathfrak{A}(B)=T$ או $\mathfrak{A}(C)=T$. לפי הנחת האינדוקציה אחת מ- B,C היא משפט ב- T. לכן לפי משפט הטאוטולוגיה A משפט ב- T, כלומר $\vdash_T A$.

4. אם $A=\exists xB$ אז $\mathfrak{A}(A)=T\Leftrightarrow\mathfrak{A}(B_x[i_{a^\circ}])=T$ עבור איזה $a^\circ\in|\mathfrak{A}|$. מאחר ש- $\mathfrak{A}(a)=a^\circ$ והוא ללא משתנים נובע מטענה (23) ש- $\mathfrak{A}(A)=T\Leftrightarrow\mathfrak{A}(B_x[a])=T$. לפי הנחת האינדוקציה $\mathfrak{A}(B_x[a])=T\Leftrightarrow\vdash_T B_x[a]$ עבור איזה שם עצם a ללא משתנים. נראה ש- $\vdash_T A\Leftrightarrow\vdash_T B_x[a]$:

($\Leftarrow$) אם $\vdash_T A$ אז מאחר ש- T היא תורת הנקין קיים e כך ש- $\vdash_T\exists xB\to B_x[e]$ כלומר $\vdash_T A\to B_x[e]$ וכעת לפי כלל הניתוק $\vdash_T B_x[e]$.

($\Rightarrow$)לפי אקסיומות ההצבה $\vdash_T B_x[a]\to A$ ולכן לפי כלל הניתוק $\vdash_T A$.

הראנו ש- $\vdash_T A\Leftrightarrow\vdash_T B_x[a]$ ולכן $\mathfrak{A}(A)=T\Leftrightarrow\vdash_T A$.

לפי עיקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל נוסחה A. ☺

<u>מסקנה 63</u>: אם T תורת הנקין שלמה אזי המבנה הקנוני שלה הוא מודל שלה.

<u>הוכחה</u>: יהי $\mathfrak{A}$ המבנה הקנוני של T. נראה שלכל A כך ש- $\vdash_T A$ מתקיים $\mathfrak{A}(A)=T$. יהי A' הסגור של A. לפי משפט הסגור $\vdash_T A'$. הסגור הוא נוסחה סגורה ולכן לפי למה (62) $\mathfrak{A}(A')=T$. לכן $\mathfrak{A}(A)=T$. ☺

כעת ברור כי אם נוכל למצוא הרחבה שהיא בעלת תכונת הנקין ושלמה אזי נקבל את משפט השלמות.

<u>למה 64</u>: לכל תיאוריה T ניתן למצוא הרחבה שמרנית שלה T_c כך ש- T_c תורת הנקין.

<u>הוכחה</u>: נרחיב את T ע"י הוספת קבועים ואקסיומות חדשים באופן האינדוקטיבי הבא:
1. לכל נוסחה בשפה L מהצורה $\exists xB$ נגדיר שם עצם $e_{\exists xB}$ ונכניס אותו לשפה ואת אקסיומת הנקין $\exists xB\to B_x[e_{\exists xB}]$ נכניס לתורה. לשפה המורחבת נקרא L_1 ולתורה המורחבת נקרא T_1.
2. נניח שבנינו כבר את L_n ואת T_n. לכל נוסחה $\exists xD$ ב- T_n שאינה ב- T_{n-1} נגדיר קבוע $e_{\exists xD}$ ואקסיומה $\exists xD\to D_x[e_{\exists xD}]$ ונכניס אותם לשפה ולתורה וכך נקבל L_{n+1} ו- T_{n+1}.

L_c היא האיחוד של כל השפות ואילו T_c היא האיחוד של כל התיאוריה (איחוד אינסופי של כל $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$).

לפי הבנייה של T_c ברור שהיא בעלת תכונת הנקין. נטען שזו הרחבה שמרנית של T.

נסמן ב- T' את התורה שמתקבלת מהוספת הקבועים החדשים בלבד, כלומר ללא האקסיומות החדשות. לפי משפט הקבועים T' היא הרחבה שמרנית של T. לכן מספיק להראות שכל נוסחה A של T שהיא משפט של T_c היא משפט של T' (כלומר ש- T_c היא הרחבה שמרנית של T'). נניח ש- $B_1,...,B_k$ הן אקסיומות הנקין שהשתמשנו בהן בהסקה של A ב- T_c. לפי משפט הדדוקציה (47) $\vdash_{T'}B_1\to...\to B_k\to A$.

כעת נוכיח באינדוקציה על k: אם $k=0$ אין מה להוכיח. נניח אם כן כי $0<k$. משום שסדר האקסיומות אינו חשוב, נניח בה"כ כי רמת הקבועים החדשים ב- B_1 גדולה או שווה לרמת הקבועים ב- $B_2,...,B_k$.

B_1 היא $\exists xC\to C_x[e_{\exists xC}]$ ו- $e_{\exists xC}$ אינו נמצא באף אחד מ- A, $B_2,...,B_k$. לכן לפי משפט הקבועים ניתן להחליפו במשתנה החדש

‡‡ כלומר יכול להיות שנוסחה מסויימת אומרת שקיים שם עצם עם תכונה מסויימת אך לא קיים סמל בשפה שמתאים לשם עצם זה ולכן כפי שיצרנו את המבנה לא קיים בקבוצת המבנה איבר מתאים.

§§ כלומר יכול להיות שקיימת נוסחה A כך שלא היא עצמה ושלא שלילתה משפטים בתיאוריה.

y. נקבל אז $\vdash_{T'} (\exists xC \to C_x[y]) \to B_2 \to \dots \to B_k \to A$. לפי כלל הכנסת $\exists$ נקבל:

$$\vdash_{T'} \exists y(\exists xC \to C_x[y]) \to B_2 \to \dots \to B_k \to A$$

לפי משפט הוריאנט (50) $\vdash_{T'} \exists xC \to \exists yC_x[y]$ ולפי משפט על הפעולות של צורת קידומת נורמלית $\vdash_{T'} \exists y(\exists xC \to C_x[y])$. לכן לפי כלל הניתוק $\vdash_{T'} B_2 \to \dots \to B_k \to A$. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash_{T'} A$. אבל T' הרחבה שמרנית של T ולכן $\vdash_T A$. ☺

כעת יש לנו דרך לקבל תיאוריות הנקין. נשאר למצוא דרך לקבל תיאוריות שלמות. לצורך זה נצטרך להשתמש במשפט מתורת הקבוצות אשר נשתמש בו ללא הוכחה.

<u>הגדרה</u>: תהי E קבוצה. ותהי $J \subset 2^E$. נאמר ש- J היא **מאופיינת סופית** אם לכל תת קבוצה $A \subset J$, $A \in J$ אמ"מ כל תת קבוצה סופית של A היא ב- J. קבוצה A ב- J נקראת **איבר מקסימלי** ב- J אם לא קיימת $B \in J$ כך ש- $A \subset B$.

<u>למה 65</u> (**למת טייכמולר***-טיוקי**): תהי $Q \subset 2^I$ מאופיינת סופית. אזי יש ב- Q לפחות איבר מקסימלי אחד.

<u>משפט 66</u> (**משפט לינדנבאום**†††): אם T עקיבה אזי קיימת לה הרחבה שלמה עם אותה השפה.

<u>הוכחה</u>: תהי I קבוצת כל הנוסחאות הסגורות בשפה של T. נגדיר

$$Q = \{S : S \subset I \text{ st. } T[A] \text{ is consistent}\} \subset 2^I$$

קבוצה זו היא מאופיינת סופית שכן תהליך הסקת סתירה הוא סופי. כלומר אם בכל קבוצה סופית אין סתירה אז אין סתירה בכלל.

לפי הלמה של טייכמולר-טיוקי קיימת קבוצה מקסימלית $M \subset Q \subset I$ כך שב- $T[M]$ אין סתירה. נטען ש- $T[M]$ שלמה. נניח ש- A לא משפט ב- $T[M]$. אזי בגלל המקסימליות ב- $T[M \cup \{A\}]$ יש סתירה. לכן לפי משפט (60) ב- $T[M]$ ניתן להסיק את $\neg A$. ☺

סיימנו להוכיח את משפט השלמות. קחו קצת זמן לעכל את זה...

בזאת תם ונשלם החומר של מבוא ללוגיקה מתמטית 1

בהצלחה לכולם במבחן!!

טענות, מאנות, ת"ש, מינ', כלכלה – יש לפנות לדינה בדואר אלקטרוני:
dinazil@notes-heaven.tk

*** צעיר גרמני נלהב שהתגייס לצבא הנאצי ומאז נעלמו עקבותיו. עליו נאמר שלפעמים רשע וגאונות הולכים ביחד. שכן, לפני שנעלמו עקבותיו הספיק להגיע לתוצאות רבות וחשובות.

††† צעיר יהודי שנספה בשואה.

נספח 1 – סיכום ההגדרות

האקסיומות של פיאנו (נסמן את האקסיומה ה- i-ית ב- Ai)

1. קיים 0
2. לכל x קיים עוקב Sx
3. אם $Sx = Sy$ אז $x = y$
4. לא קיים x כך ש- $Sx = 0$
5. לכל $x \neq 0$ קיים y כך ש- $Sy = x$
6. $x + 0 = x$
7. $x + Sy = S(x + y)$
8. $x \cdot 0 = 0$
9. $x \cdot Sy = x \cdot y + x$
10. $\neg x < 0$
11. $x < Sy \leftrightarrow x = y \vee x < y$
12. $x < y \vee x = y \vee y < x$

<u>הגדרה</u>: **משתנה בוליאני** P הוא משתנה שיכול לקבל אך ורק אחד מהערכים – אמת (שנסמן ב- T) ושקר (שנסמן ב- F). כלומר $P \in \{T, F\}$.

<u>הגדרה</u>: **פונקציה בוליאנית** n-מקומית היא פונקציה שמקבלת כקלט n משתנים בוליאניים ומחזירה ערך בוליאני – אמת או שקר.

<u>הגדרה</u>: פונקציה בוליאנית n-מקומית $f(P_1, ..., P_n)$ נקראת **טאוטולוגיה** אם לכל ערך אמת של $P_1, ..., P_n$ מתקבל ערך "אמת".

<u>הגדרה</u>: **שם עצם**

1. כל משתנה הוא שם עצם.
2. אם f סימן פונקציה n-מקומית ו- $u_1, ..., u_n$ שמות עצם אזי $fu_1 ... u_n$ שם עצם (ייתכן גם המקרה ש- $n = 0$ ואז מדובר בקבוע)

<u>הגדרה</u>: **נוסחה**

1. נניח ש- p סימן יחס n-מקומי ו- $u_1, ..., u_n$ שמות עצם. אזי $pu_1 ... u_n$ נקרא **נוסחה אטומית**. נוסחה אטומית היא נוסחה.
2. אם A, B נוסחאות אזי $\vee AB$ נוסחה.
3. אם A נוסחה אזי $\neg A$.
4. אם A נוסחה ו- x משתנה אזי $\exists x A$ נוסחה.

<u>הגדרה</u>: **היגד** הוא או שם עצם או נוסחה.

<u>הגדרה</u>: בהינתן שפה, **מילה** היא רצף של סימנים כלשהם מהשפה (לאו דווקא בעל משמעות).

<u>הגדרה</u>: יהיו w_1, w_2 מילים בשפה. נאמר שהן **ניתנות להשוואה** אם מתקיים אחד מהבאים:

1. w_1 היא רישא של w_2
2. w_2 היא רישא של w_1

<u>הגדרה</u>: יהיו A נוסחה ו- x משתנה. הופעה של x בתוך A נקראת **קשורה** אם הוא מופיע ב- A בחלק שצורתו $\exists x B$ (כאשר B נוסחה). אחרת ההופעה נקראת **חופשית**. x נקרא משתנה **קשור** (**חופשי**) ב- A אם קיימת הופעה **קשורה** (**חופשית**) שלו ב- A.

<u>הגדרה</u>: הצבה של שם עצם a במקום הופעה חופשית של משתנה x בנוסחה A נקראת **מותרת** אם לכל משתנה y שנמצא ב- a, אף חלק של A מהצורה $\exists y B$ לא מכיל הופעה חופשית של x.

<u>סימון</u>: נסמן ב- $A_x[a]$ את הנוסחה המתקבלת ע"י הצבה מותרת של שם העצם a במקום כל ההופעות החופשיות של משתנה x בנוסחה A. $A_{x_1,...,x_n}[a_1, .., a_n]$ היא הנוסחה המתקבלת מ- A ע"י החלפת כל ההופעות החופשיות של $x_1, ..., x_n$ ב- $a_1, ..., a_n$ בהתאמה, כאשר ההצבה של a_i במקום x_i היא מותרת לכל $1 \leq i \leq n$.

<u>הגדרה</u>: תהי L שפה. **מבנה** $\mathfrak{A}$ לשפה L הוא קבוצה $|\mathfrak{A}|$ שעליה מוגדרות פונקציות ויחסים כדלהלן:
לכל סימן פונקציה n-מקומית f שבשפה L מוגדרת פונקציה $f_{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$. כאשר $n = 0$ f היא בעצם קבוע ו- $f_{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$.
לכל סימן יחס n-מקומי p שבשפה L מוגדר יחס $p_{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to \{T, F\}$ (פונקצייה בוליאנית n-מקומית). אם $n = 0$ אזי $p_{\mathfrak{A}}$ קבוע ומתקיים $p_{\mathfrak{A}} \in \{T, F\}$.

<u>הגדרה</u>: תהי שפה L ויהי $\mathfrak{A}$ מבנה לשפה. לכל $a \in |\mathfrak{A}|$ נגדיר פונקציה 0-מקומית (כלומר קבוע) i_a שנקראת **השם** של a ומקיימת $(i_a)_{\mathfrak{A}} = a$. את השפה המורחבת נסנן ע"י $L(\mathfrak{A})$.

<u>שמות עצם</u>:

1. אם i_a שם של $a \in |\mathfrak{A}|$ אזי נפרש $\mathfrak{A}(i_a) = (i_a)_{\mathfrak{A}} = a$.
2. אם שם העצם אינו שם של איבר, אזי שם העצם הוא $fb_1 .. b_n$ כאשר f סימן פונקציה n-מקומית ו- $b_1, ..., b_n$ שמות עצם. אז נפרש את השם העצם ב- $\mathfrak{A}$ באופן הבא:
$\mathfrak{A}(fb_1 .. b_n) = f_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(b_1), ..., \mathfrak{A}(b_n)) \in |\mathfrak{A}|$.

<u>הגדרה</u>: נוסחה תיקרא **סגורה** אם אין בה אף משתנה חופשי.

<u>נוסחאות</u>:

1. יהי p סימן יחס n-מקומי בשפה L ויהיו $b_1, ..., b_n$ שמות עצם בשפה ללא משתנים. אזי הנוסחה האטומית הסגורה מתפרשת כך:
$\mathfrak{A}(pb_1 .. b_n) = p_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(b_1), ..., \mathfrak{A}(b_n)) \in \{T, F\}$.

יהיו A, B נוסחאות סגורות. אזי נפרש באופן הבא:

2. $\mathfrak{A}(\neg A) = \neg \mathfrak{A}(A)$
3. $\mathfrak{A}(\vee AB) = \vee \mathfrak{A}(A) \mathfrak{A}(B)$
4. $\mathfrak{A}(\exists x A) = T$ אם קיים $a \in |\mathfrak{A}|$ כך ש- $\mathfrak{A}(A_x[i_a]) = T$.

תהי A נוסחה עם משתנים חופשיים $x_1, ..., x_n$. אזי נאמר ש- $\mathfrak{A}(A) = T$ אם לכל הצבה של איברים $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{A}|$ מתקיים $\mathfrak{A}\left(A_{x_1,...,x_n}\left[i_{a_1}, ..., i_{a_n}\right]\right) = T$.

<u>האקסיומות הלוגיות</u>:

1. השלישי הנמנע: $\neg A \vee A$
2. אקסיומת ההצבה: $A_x[a] \to \exists x A$
3. אקסיומת הזהות: $x = x$
4. אקסיומות השוויון:

$$x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to fx_1\dots x_n = fy_1\dots y_n$$
$$x_1 = y_1 \to \dots \to x_n = y_n \to px_1\dots x_n \to py_1\dots y_n$$

<u>כללי ההיסק:</u>
1. כלל ההרחבה: מ- A נובע $B \vee A$
2. כלל הצמצום: מ- $A \vee A$ נובע A
3. כלל האסוציאטיביות: $A \vee (B \vee C)$ נובע $(A \vee B) \vee C$
4. כלל החתך: מ- $A \vee B$ ו- $\neg A \vee C$ נובע $B \vee C$
5. כלל הכנסת $\exists$: אם x אינו חופשי ב- B אז מ- $A \to B$ נובע $\exists xA \to B$

<u>הגדרה:</u> **תורה** (או **מערכת פורמלית**) T מורכבת מהרכיבים הבאים:
5. שפה פורלית
6. אקסיומות לוגיות
7. אקסיומות לא לוגיות – קבוצה של נוסחאות כלשהן
8. כללי ההיסק שהגדרנו לעיל.

<u>סימון:</u> אם ניתן להסיק את הנוסחה A מתוך האקסיומות הלוגיות בשימוש בכללי ההיסק בלבד נסמן $\vdash A$. אם ניתן להסיק את הנוסחה A מתוך האקסיומות של תורה T נסמן $\vdash_T A$.

<u>הגדרה:</u> **נוסחאות אלמנטריות** הן נוסחאות אטומיות ונוסחאות מהצורה $\exists xB$ כאשר B נוסחה כלשהי.

<u>הגדרה:</u> יהיו $A_1,\dots,A_n,B$ נוסחאות ונניח שלכל הערכה V שעבורה $V(A_1)=T,\dots,V(A_n)=T$ גם $V(B)=T$. B נקראת אז **גרירה טאוטולוגית** של $A_1,\dots,A_n$.

<u>הגדרה:</u> נוסחה B נקראת **טאוטולוגיה** אם היא מקבלת ערך אמת עבור כל הערכה V.

<u>הגדרה:</u> תהי נוסחה A ויהיו $x_1,\dots,x_n$ כל המשתנים שיש להם הופעה חופשית ב- A. הנוסחה $\forall x_1 \dots \forall x_n A$ נקראת **הסגור** של A.

<u>סימון:</u> תהא T מערכת פורמלית. ויהיו $A_1,\dots,A_n$ נוסחאות. נסמן ב- $T[A_1,\dots,A_n]$ את המערכת הפורמלית המתקבלת מ- T ע"י הוספת $A_1,\dots,A_n$ בתור אקסיומות חדשות.

<u>הגדרה:</u> נאמר שנוסחה A' היא **וריאנט** של A אם A' מתקבלת ע"י סדרה של החלפות של חלקי A שנראים כך $\exists xB$ ב $\exists yB_x[y]$ כאשר y אינו חופשי ב- B.

<u>הגדרה:</u> נאמר שנוסחה היא **פתוחה** אם לא מופיעים בה כמתים.

<u>הגדרה:</u> נאמר ש- A היא ב**צורת קידומת נורמלית (prenex form)** כאשר היא מהצורה $Q_1x_1\dots Q_mx_mB$ כאשר כל $Q_i \in \{\exists,\forall\}$, המשתנים $x_1,\dots,x_n$ הם שונים ו- B פתוחה. $Q_1x_1\dots Q_mx_m$ נקרא **הקידומת** והיא יכולה להיות ריקה. כלומר, נוסחה פתוחה היא בצורת קידומת נורמלית.

<u>הגדרה:</u>
1. נאמר שהשפה L' היא **הרחבה** של השפה L אם כל מה שנמצא ב- L נמצא גם ב- L'.
2. תהי T מערכת פורמלית עם השפה L ותהי T' מערכת פורמלית עם השפה L' שהיא הרחבה של L. נאמר ש- T' היא **הרחבה** של T אם כל משפט ב- T הוא משפט ב- T'.
3. נאמר ש- T ו- T' **שקולות** אם יש להן אותה שפה וכל אחת מהן היא הרחבה של השנייה (כלומר יש להן אותם המשפטים).

<u>הגדרה:</u> יהיו T,T' תיאוריות עם שפות L,L' בהתאמה כך ש- T' הרחבה של T. נאמר שההרחבה **שמרנית (conservative)** אם לכל נוסחה A כך ש- $\vdash_{T'} A$ ושהיא כתובה בשפה L מתקיים $\vdash_T A$.

<u>הגדרה:</u> נאמר שב- $T[\Gamma]$ יש **סתירה** כאשר $\vdash_{T[\Gamma]} B \wedge \neg B$ עבור נוסחה כלשהי B.

<u>הערה:</u> נשים לב שאם ב- $T[\Gamma]$ יש סתירה אזי לכל נוסחה A קיים $\vdash_{T[\Gamma]} A$. שהרי כל נוסחה A היא גרירה טאוטולוגית של $B \wedge \neg B$ ולכן לפי משפט הטאוטולוגיה $\vdash_{T[\Gamma]} A$.

<u>הגדרה:</u> נאמר שמערכת פורמלית T היא **עקיבה** אם אין בה סתירה.

<u>הגדרה:</u> נאמר שמבנה $\mathfrak{M}$ לתיאוריה T הוא **מודל** אם כל המשפטים ב- T נכונים ב- $\mathfrak{M}$.

<u>הגדרה:</u> נאמר שתיאוריה T היא בעלת **תכונת הנקין** אם לכל נוסחה סגורה $\exists xA$, קיים קבוע e בשפה של T כך ש- $\vdash_T \exists xA \to A_x[e]$.

<u>הגדרה:</u> נוסחה A בתיאוריה T היא **אינה ניתנת להכרעה** אם לא A ולא $\neg A$ הן משפטים ב- T. אחרת A **ניתנת להכרעה**. תיאוריה T נקראת **שלמה** אם כל נוסחה סגורה A היא ניתנת להכרעה בצורה יחידה.

<u>הגדרה:</u> תהי E קבוצה. ותהי $J \subset 2^E$. נאמר ש- J היא **מאופיינת סופית** אם לכל תת קבוצה $A \subset E$, $A \in J$ אמ"מ כל תת קבוצה סופית של A היא ב- J. קבוצה A ב- J נקראת **איבר מקסימלי** ב- J אם לא קיימת $B \in J$ כך ש- $A \subset B$.

נספח 2 – סיכום טענות העזר, הלמות, הטענות והמשפטים

משפט 1: באריתמטיקה של פיאנו $0+x=x$

משפט 2: באריתמטיקה של פיאנו $Sx+y=S(x+y)$

משפט 3: באריתמטיקה של פיאנו $x+y=y+x$

משפט 4: באריתמטיקה של פיאנו $(x+y)+z=x+(y+z)$

משפט 5: באריתמטיקה של פיאנו $0\cdot x=0$

משפט 6: באריתמטיקה של פיאנו $Sx\cdot y=x\cdot y+y$

משפט 7: באריתמטיקה של פיאנו $x\cdot y=y\cdot x$

משפט 8: באריתמטיקה של פיאנו $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

משפט 9: באריתמטיקה של פיאנו $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

טענה 10: יש 2^{2^n} פונקציות בוליאניות n-מקומיות.

משפט 11: כל פונקציה בוליאנית n-מקומית $f(P_1,...,P_n)$ ניתן להציג כאיווי של גימום של המשתנים הבוליאניים או שלילתם.

טענה 12: יהיו $v_1,...,v_n,v_1',...,v_n'$ ($0<n$) היגדים כך שהמילים $v_1...v_n$ ו-$v_1'...v_n'$ ניתנות להשוואה. אזי $v_1=v_1',...,v_n=v_n'$.

משפט 13: כל היגד מתפרש באופן חד-ערכי.

טענה 14: יהי u היגד ו-v סמל המופיע בתוך u. אזי ההופעה של v ב-u פותחת הופעה של היגד ב-u.

משפט 15: יהי $uv_1...v_n$ היגד כאשר u סמל n-מקומי ו-$v_1,...,v_n$ היגדים. יהי v היגד שמופיע ב-$uv_1...v_n$. אזי ההופעה של v ב-$uv_1...v_n$ היא כל $uv_1...v_n$ או ש-v מופיע כולו בתוך איזה v_i $1\le i\le n$.

טענה 16: יהיו b ו-a שמות עצם. אם נחליף ב-b את אחת ההופעות של המשתנה x ב-a נקבל שם עצם c.

טענה 17: יהיו A נוסחה, x משתנה ו-a שם עצם. אם נציב את a במקום הופעה חופשית של x תתקבל נוסחה.

טענה 18: תהי B נוסחה שאין בה משתנים חופשיים מלבד אולי x. אזי
$$\left(\mathfrak{A}(\neg\exists x\neg A)=T\right)\Leftrightarrow\left(\forall a\in|\mathfrak{A}|\ \mathfrak{A}\left(A_x[i_a]\right)=T\right)$$

טענה 19: יהיו B,C נוסחאות ללא משתנים חופשיים. אזי
$$\left(\mathfrak{A}(\neg\vee\neg B\neg C)=T\right)\Leftrightarrow\left(\left(\mathfrak{A}(B)=T\right)\wedge\left(\mathfrak{A}(C)=T\right)\right)$$

טענה 20: יהיו $B_1,...,B_n$ נוסחאות. אזי
$$\mathfrak{A}(B_1\vee...\vee B_n)=T\Leftrightarrow\exists 1\le i\le n\ \mathfrak{A}(B_i)=T$$

טענה 21: יהיו $B_1,...,B_n$ נוסחאות. אזי
$$\mathfrak{A}(B_1\wedge...\wedge B_n)=T\Leftrightarrow\forall 1\le i\le n\ \mathfrak{A}(B_i)=T$$

טענה 22: יהי b שם עצם ללא משתנים ויהי c שם עצם ללא משתנים מלבד אולי x. אם $\mathfrak{A}(b)=a\in|\mathfrak{A}|$ אזי $\mathfrak{A}(c_x[b])=\mathfrak{A}(c_x[i_a])$.

טענה 23: תהי C נוסחה שאין בה משתנים חופשיים מלבד אולי x ויהי b שם עצם שאין בו משתנים. אם $\mathfrak{A}(b)=a$ אזי מתקיים $\mathfrak{A}(C_x[b])=\mathfrak{A}(C_x[i_a])$.

משפט 24 (**כלל הנאותות לאקסיומות לוגיות**): תהי A נוסחה ו-$x,x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ משתנים. אזי הנוסחאות הבאות הן אקסיומות לוגיות (כלומר הן נכונות בכל מבנה):
1. השלישי הנמנע: $\neg A\vee A$
2. אקסיומת ההצבה: $A_x[a]\to\exists xA$
3. אקסיומת הזהות: $x=x$
4. אקסיומות השוויון:
$$x_1=y_1\to...\to x_n=y_n\to fx_1...x_n=fy_1...y_n$$
$$x_1=y_1\to...\to x_n=y_n\to px_1...x_n\to py_1...y_n$$

משפט 25 (**כללי היסק**):
1. כלל ההרחבה: מ-A נובע $B\vee A$
2. כלל הצמצום: מ-$A\vee A$ נובע A
3. כלל האסוציאטיביות: $A\vee(B\vee C)$ נובע $(A\vee B)\vee C$
4. כלל חתך: מ-$A\vee B$ ו-$\neg A\vee C$ נובע $B\vee C$
5. כלל הכנסת $\exists$: אם x אינו חופשי ב-B אז מ-$A\to B$ נובע $\exists xA\to B$

טענה 26: B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,...,A_n$ אמ"מ $A_1\to...\to A_n\to B$ טאוטולוגיה.

טענה 27: לכל נוסחה A קיים אלגוריתם סופי אשר מאפשר לקבוע אם היא טאוטולוגיה או לא.

מסקנה 28: קיים תהליך סופי לקביעה האם B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,...,A_n$.

משפט 29 (**משפט הטאוטולוגיה**): אם B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,...,A_n$ ו-$\vdash A_1,...,\vdash A_n$ אזי $\vdash B$.

תוצאה 30: אם B טאוטולוגיה אזי $\vdash B$.

למה 31: אם $\vdash A\vee B$ אזי $\vdash B\vee A$

למה 32 (שגם לה נקרא כלל האסוציאטיביות):
אם $\vdash A\vee(B\vee C)$ אז $\vdash(A\vee B)\vee C$

משפט 33 (**כלל הניתוק Modus Ponens**): אם $\vdash A,\vdash A\to B$ אזי $\vdash B$

טענת עזר 34: יהיו $A_1,...,A_n$ נוסחאות. אם $\vdash A_{i_1}\vee...\vee A_{i_m}$ כאשר $1\le i_1,...,i_m\le n$ אז $\vdash A_1\vee...\vee A_n$.

טענת עזר 35: אם $\vdash A\vee B$ אז $\vdash \neg\neg A\vee B$

טענת עזר 36: אם $\vdash \neg A\vee C$ וגם $\vdash \neg B\vee C$ אז $\vdash \neg\left(A\vee B\right)\vee C$

למה 37: לכל $2\le n$ אם $A_1\vee\ldots\vee A_n$ טאוטולוגיה אז $\vdash A_1\vee\ldots\vee A_n$

טענה 38 (**כלל הכנסת $\forall$**): אם ב- A לא מופיע x באופן חופשי אזי מ- $\vdash A\to B$ נובע $\vdash A\to\forall xB$.

טענה 39 (**כלל ההכללה**): אם $\vdash A$ אז $\vdash \forall xA$

טענה 40: אם $\vdash A$ אזי $\vdash A_x\left[b\right]$ כאשר x משתנה ו- b שם עצם.

טענה 41 (**כלל ההצבה**): אם $\vdash A$ אז $\vdash A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]$ כאשר $x_1,\ldots,x_n$ משתנים ו- $b_1,\ldots,b_n$ שמות עצם.

משפט 42 (**משפט ההצבה**): יהיו נוסחה A, משתנים $x_1,\ldots,x_n$ ושמות עצם $b_1,\ldots,b_n$. אזי:

3. $\vdash A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]\to\exists x_1\ldots\exists x_nA$
4. $\vdash \forall x_1\ldots\forall x_nA\to A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]$

משפט 43 (**כלל הדיסטריביוטיביות**): אם $\vdash A\to B$ אז $\vdash \forall xA\to\forall xB$ ו- $\vdash \exists xA\to\exists xB$

טענה 44:

4. $\vdash \forall x\forall yA\leftrightarrow\forall y\forall xA$
5. $\vdash \exists x\exists yA\leftrightarrow\exists y\exists xA$
6. $\vdash \exists x\forall yA\to\forall y\exists xA$ אבל לא בכיוון ההפוך.

משפט 45 (**משפט הסגור**): תהי A' הסגור של A. אזי $\vdash A$ אמ"מ $\vdash A'$.

משפט 46 (**משפט הדדוקציה**): יהיו A,B נוסחאות וב- A אין משתנים חופשיים. אזי $\vdash_{T[A]} B$ אמ"מ $\vdash_T A\to B$.

משפט 47 (**משפט הדדוקציה**): אם ב- $A_1,\ldots,A_n$ אין משתנים חופשיים אז $\vdash_{T[A_1,\ldots,A_n]} B$ אמ"מ $\vdash_T A_1\to\ldots\to A_n\to B$

משפט 48 (**משפט הקבועים**): תהי תורה T. תהי A נוסחה עם משתנים חופשיים $x_1,\ldots,x_n$. יהיו $c_1,\ldots,c_n$ קבועים חדשים ושונים זה מזה שכלל לא מופיעים בשפה. תהי T' המערכת הפורמלית המתקבלת מהוספת הקבועים החדשים לשפה של T. אזי $\vdash_T A$ אמ"מ $\vdash_{T'} A_{x_1,\ldots,x_n}\left[c_1,\ldots,c_n\right]$.

משפט 49 (**משפט השקילות**): אם $\vdash B_1\leftrightarrow B_1',\ldots,\vdash B_n\leftrightarrow B_n'$ ונוסחה A' מתקבלת מ- A ע"י מספר החלפות של B_1 ב- B_1', ..., ושל B_n ב- B_n' אזי $\vdash A\leftrightarrow A'$

משפט 50 (**משפט הוריאנט**): אם y לא מופיע ב- B אז $\vdash \exists xB\leftrightarrow\exists yB_x\left[y\right]$

משפט 51 (**משפט הסימטריה**): יהיו a,b שמות עצם. אם $\vdash a=b$ אז $\vdash b=a$.

משפט 52 (**משפט השוויון**): יהיו $b_1,\ldots,b_n,b_1',\ldots,b_n'$ שמות עצם וכן יהיו שם עצם c ונוסחה A. נניח $\vdash b_1=b_1',\ldots,\vdash b_n=b_n'$.

1. אם c' מתקבל מ- c ע"י מספר החלפות של b_i ב- b_i' אז $\vdash c=c'$.
2. אם A' מתקבלת מ- A ע"י מספר החלפות של b_i ב- b_i' כאשר המשתנים שב- b_i וב- b_i' לא קשורים הן לפני והן אחרי ההחלפה, אז $\vdash A\leftrightarrow A'$.

מסקנה 53: אם c שם עצם ו- $b_1,\ldots,b_n,b_1',\ldots,b_n'$ שמות עצם אזי $\vdash b_1=b_1'\to\ldots\to b_n=b_n'\to c\left[b_1,\ldots,b_n\right]=c\left[b_1',\ldots,b_n'\right]$

מסקנה 54:
$\vdash b_1=b_1'\to\ldots\to b_n=b_n'\to\left(A\left[b_1,\ldots,b_n\right]\leftrightarrow A\left[b_1',\ldots,b_n'\right]\right)$

מסקנה 55: אם x לא מופיע בשם עצם b ו- A נוסחה אזי $\vdash A_x\left[b\right]\leftrightarrow\exists x\left(x=b\wedge A\right)$

טענה 56: תהי A נוסחה ותהי A' הנוסחה שהתקבלה מ- A ע"י פעולת קידומת נורמלית. אזי $\vdash A\leftrightarrow A'$.

טענה 57: כל נוסחה A ניתן להפוך לנוסחה בצורת קידומת נורמלית ע"י סדרה של פעולות קידומת נורמלית.

מסקנה 58: לכל נוסחה A קיימת נוסחה A' כך ש- $\vdash A\leftrightarrow A'$ ו- A' מהצורה $Q_1x_1\ldots Q_mx_mB$ כאשר $Q_i\in\left\{\exists,\forall\right\}$ וב- B אין כמתים.

משפט 59 (**משפט הרדוקציה**): תהי Γ קבוצת נוסחאות ב- T ותהי A נוסחה ב- T. אזי $\vdash_{T[\Gamma]} A$ אמ"מ $\vdash_T B_1\to\ldots\to B_n\to A$ כאשר $B_1,\ldots,B_n$ סגורים של נוסחאות ב- Γ.

משפט 60: ב- $T\left[\Gamma\right]$ יש סתירה אמ"מ ב- T יש משפט מהצורה $\neg A_1\vee\ldots\vee\neg A_n$ כאשר כל A_i היא סגור של נוסחה מ- Γ.

משפט 61 (**משפט השלמות**): מערכת פורמלית T היא עקיבה אמ"מ קיים לה מודל.

למה 62: תהי T תורה שלמה בעלת תכונת הנקין. $\mathfrak{A}$ המבנה הקנוני ל- T. תהי A נוסחה סגורה ב- T. אזי $\mathfrak{A}\left(A\right)=T\Leftrightarrow\vdash_T A$.

מסקנה 63: אם T תורת הנקין שלמה אזי המבנה הקנוני שלה הוא מודל שלה.

למה 64: לכל תיאוריה T ניתן למצוא הרחבה שמרנית שלה T_c כך ש- T_c תורת הנקין.

למה 65 (**למת טייכמולר-טיוקי**): תהי $Q\subset 2^I$ מאופיינת סופית. אזי יש ב- Q לפחות איבר מקסימלי אחד.

משפט 66 (**משפט לינדנבאום**): אם T עקיבה אזי קיימת לה הרחבה שלמה עם אותה השפה.

נספח 3 – בחינה לדוגמה

מבחן לדוגמא במבוא ללוגיקה (80423)

המורה: פרופ א. ריפס **משך הבחינה: 3 שעות**

לא ניתן לצבור יותר מ 100 נקודות.

חלק ראשון: ענו על 2 שאלות מתוך 3 השאלות הבאות (כל שאלה 20 נקודות).

1. הוכיחו כי לכל תיאוריה T יש הרחבה שמרנית T_c שהיא בעלת תכונת הנקין.

2. נסחו והוכיחו את משפט הקבועים.

3. נסחו והוכיחו שת משפט הוריאנט.

חלק שני: ענו על 2 שאלות מתוך 3 השאלות הבאות (כל שאלה 20 נקודות).

1. הוכיחו את כלל הכנסת הכמת $\forall$:
אם $\vdash A \to B$ ובנוסחה A אין משתנה חופשי x אז $\vdash A \to \forall x B$.

2. האם ניתן לבטא את הקשרים הלוגיים: $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ באמצאות קבוצות הקשרים הבאות:
   א. $\{\wedge, \vee\}$
   ב. $\{\wedge, \neg\}$

3. נגדיר את הקבוצה $|M| \subseteq \mathbb{Q}$ באופן הבא: $|M| = \left\{ \frac{a}{3^n} | a \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$.
נסתכל במבנה: $M = \langle |M|, +, < \rangle$ האם במבנה זה מתקיימות הנוסחאות הבאות:
   א. $\forall x \forall y \exists z (x < y \to x < z \wedge z < y)$.
   ב. $\forall x \exists y (x = y + y)$.

חלק שלישי: ענו על 3 שאלות מתוך 4 השאלות הבאות (כל שאלה 7 נקודות).
ענו האם הטענות הבאות נכונות או לא, נמקו תושבתכם!

1. האם קיימת תיאוריה T כך שבקבוצת המבנה של כל מודל שלה יש בדיוק אבר אחד?

2. יהיו a, b, c שמות עצם ו x, y משתנים האם $(a_x[b])_y[c]$ זהה ל $(a_y[c])_x[b]$?

3. האם הנוסחה $A \vee B \to A \vee C$ היא גרירה טאוטולוגית של הנוסחה $A \vee (B \to C)$?

4. נניח כי תיאוריה T כוללת את סימן החיבור כסימן פונקציה דו מקומית. נסתכל במבנים $\langle \mathbb{Q}, + \rangle, \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ האם הנוסחה $\forall x \exists y (x = y + y)$ מבחינה בין מבנים אלו?

בהצלחה!