דינה צלניק
30/10/05

תרגיל 1 במבוא ללוגיקה

הערה : נניח כי המספרים הטבעיים כוללים את 0.

1. תהי Λ קבוצה של סימנים. ביטוי מ Λ הוא מחרוזת $\varphi = a_1 a_2 .... a_n$ של סימנים מ Λ. רישא של הביטוי $a_1 a_2 .... a_n$ היא כל מחרוזת מהצורה $a_1 ... a_m$ עבור $m \le n$, כולל המחרוזת הריקה. יהיו φ, ψ שני ביטוים מ Λ צירוף של ψ אחרי φ הוא הביטוי $\varphi\psi$. כעת נניח כי $\Lambda = \{(,)\}$ כלומר הקבוצה שמכילה את הסוגר השמאלי והסוגר הימני. יהי φ ביטוי מ Λ נאמר כי זהו ביטוי מאוזן אם בכל רישא שלו מספר הסוגרים הימנים אינו עולה על מספר הסוגרים השמאליים ובכל הביטוי מספר הסוגריים הימניים שווה למספר השמאליים. הוכיחו: (כל הביטויים הם מ Λ).

- **a.** אם φ הוא ביטוי מאוזן אז גם (φ) מאוזן.
- **b.** אם φ, ψ ביטויים מאוזנים אז גם $\varphi\psi, \psi\varphi$ ביטוים מאוזנים.
- **c.** אם φ, ψ ביטויים ו נניח כי $\varphi\psi$ הו מאוזן אז φ מאוזן אם"ם ψ מאוזן.
- **d.** (רשות) מצא נוסח נסיגה לסדרה: $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כאשר C_n הוא מספר הביטויים המאוזנים באורך $2n$.

2. תהי $\{a_n\}_{n \in N}$ סדרה של מספרים ממשים כתוב את ההגדרות של התכונות הבאות בשפה פורמלית.

- **a.** הסדרה חסומה.
- **b.** הסדרה מתכנסת ל 0.
- **c.** הסדרה שואפת ל ∞.
- **d.** הסדרה מקימת את תנאי קושי להתכנסות.

3. כתוב את האקסיומות של השדה בשפה פורמלית.

4. **עקרון האינדוקציה הרגילה:** כל קבוצה S של מספרים טבעיים המקיימת:

- **a.** 0 שייך ל S.
- **b.** אם n שייך ל S אז $n+1$ שייך ל S.

שווה לקבוצת הטבעיים.

עקרון האינדוקציה המלאה: כל קבוצה S של מספרים טבעיים המקיימת:

- אם לכל $k < n$ המספר k שייך ל S אז n שייך ל S.

שווה לקבוצת הטבעיים.

עקרון המינימום: לכל קבוצה S של מספרים טבעיים שאינה ריקה יש איבר מינימלי.

א) כתוב את העקרונות הנ"ל בשפה פורמלית.

ב) מצא דוגמה לקבוצות של מספרים טבעיים S, T כך ש S מקימת את תנאי a אך לא את תנאי b, באקסיומת האינדוקציה הרגילה, ו T מקימת את b אך לא את a.

ג) יהיו n, m מספרים טבעיים חיובים הוכח באינדוקציה מלאה כי מספר החיתוכים הנדרשים על מנת לפרק טבלת שוקולד בגודל $n \times m$ לקובית בודדות הוא קבוע התלוי ב n, m ומצא אותו.

ד) הוכח כי שלושת העקרונות הנ"ל שקולים.

ה) נסח עבור $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ עקרון אינדוקציה בדומה לעקרון האינדוקציה הרגילה כתוב אותו בשפה פורמלית והוכח אותו בעזרת האינדוקציה הרגילה.

פתרון לקבוצה (1)

1. מילה $\varphi = a_1 \cdots a_n$ מעל $\Lambda = \{(,)\}$ נגדיר:

מספר הסוגרים השמאליים ב φ $L[\varphi] = L[a_1, \dots, a_n] =$

— " — הימניים — " — $R[\varphi] = R[a_1, \dots, a_n] =$

נניח φ מאוזן אז $1 = L[(] > R[(] = 0$

ולכל $m \le n$ $[(a_1, \dots, a_m] = 1 + L[a_1 \cdots a_m] \ge 1 + R[a_1 \cdots a_m] > R[(a_1 \cdots a_m]$

ולכן: $[(\varphi)] = 1 + L[\varphi] = 1 + R[\varphi] = R[(\varphi)]$

ונקבל כי (φ) מאוזן

.. הוכחה דומה.

ג. הוכחה דומה.

ד. אפשר להוכיח בקלות כי לכל מילה מאוזנת φ הוכחה מן הצורה $\varphi = (\psi)x$ כאשר $0 \le k < n$ ומתקיים ש: $2k$ ו x מילה מאוזנת מאורך $2(n-k-1)$ ו ψ מילה מאוזנת מאורך $2k$ (נניח כי המילה הריקה היא מאוזנת)

לכן נקבל: $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$

א. $\exists M (\forall n (|a_n| < M))$

ב. $0 \to \exists N (\forall n (n > N) \to (|a_n| < \varepsilon))$

ג. $(\exists N (\forall n (n > N \to a_n > M)))$

- ראשית נראה כי $0\in T$

לפי הגדרה $0\in T$ אם $\forall k(k<0\to k\in S)$

נשאר אם לכל k טבעי הנוסחה $k<0\to k\in S$

מקבלת ערך אמת אמת לכל k טבעי $k\geq 0$

לכן הנוסחה $k<0$ תגרור לא נכון לכן לפי

טבלת אמת של הקשר $\to$ נקבל שאם החלק השמאלי

הוא אינו אמת נכון של הנוסחה הוא אמת

בגורר $k<0\to k\in S$ לכל k. לכן הפסוק

$\forall k(k<0\to k\in S)$

הוא נכון אם $0\in T$.

<u>הערה</u>: מתאוריה אומרת בקלות מהשלם שאם קבוצה S מקיימת את תכונת האינדוקציה המלאה היא מכילה את 0.

- שנית נראה כי אם $n\in T$ אז $n+1\in T$:

בגלל $n\in T$ לפי הגדרה של T לכל $k<n$ $k\in S$

לפי הנחה ש S מקיימת $(*)$ $n\in S$.

(לכן הפרט קיבלנו $S\subseteq T$)

כעת נשתמש בקבוע כי $n\in S$, $0,1,2,\dots$ כגורר לכל

$k<n+1$ $k\in S$ ולכן $n+1\in T$.

לפי עקרון האינדוקציה המלאה בגלל $T=\mathbb{N}$ נמצא ש $S=\mathbb{N}\Leftarrow T\subseteq S$

תת-קבוצות אינדוקטיביות $S \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

אם: 1) $(0,0) \in S$

2) אם $(k,n) \in S$ אז $(k+1,n) \in S$ ואם $(k,n+1) \in S$.

אז $S = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

נוכיח טענה זו: בעזרת טענה אינדוקטיבית המלווה:

* נגדיר לכל $k \in \mathbb{N}$ $S_k = \{n \in \mathbb{N} \mid (k,n) \in S\}$

ונגדיר $T = \{k \in \mathbb{N} \mid S_k = \mathbb{N}\}$

נוכיח כי $T = \mathbb{N}$:

i) $0 \in T$ כאשר $S_0 = \mathbb{N}$ עכשיו נראה אינדוקטיבי:

אזי $(0,0) \in S \Leftarrow 0 \in S_0$.

בנוסף יש $n \in S_0$ כאשר $(0,n) \in S$ אם $(0,n+1) \in S$

אם $n+1 \in S_0$

$\Leftarrow S_0 = \mathbb{N} \Leftarrow 0 \in T$

ii) יהי $k \in T$ כאשר $S_k = \mathbb{N}$ יהי $n \in \mathbb{N}$ כאשר

אזי $n \in S_k$ ולכן $(k,n) \in S$ אם ו $(k+1,n) \in S$

ולכן $n+1 \in S_{k+1}$ לכן $\mathbb{N} \subseteq S_{k+1} \Leftarrow \mathbb{N} = S_{k+1}$

ולכן $k+1 \in T$

$\Leftarrow \mathbb{N} = T$ ולכן $S = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

יואל גוגל'רובסקי
קב' תבאל: יום א', 18:00

תרגיל 1 במתמטיקה לפיזיקה (10)

(1) נסמן לכל φ: $R(\varphi)$ - מס' הסגלים הימניים ב-φ, $L(\varphi)$ - מס' הסוגרים השמאליים ב-φ, $N(\varphi)$ - מס' הפעמים ב-φ.

(a) יהי φ ביטוי מאוזן

תהא φ' כישור של (φ).

אם $N(\varphi)=0 \Rightarrow R(\varphi')=0=L(\varphi')$

אחרת, $N(\varphi)>0$. אם $N(\varphi')+2>N(\varphi)$ אזי נסמן φ'': הכישור של φ באורך $N(\varphi')-1$ (מובטח כי $N(\varphi)\geq N(\varphi')+1$) ומתקיים $\varphi'=(\varphi'')$. נשים לב: $R(\varphi')=R(\varphi'')\underset{\varphi''\text{ מאוזן}}{\leq}L(\varphi'')=L(\varphi')-1<L(\varphi')$.

אחרת $N(\varphi)\leq N(\varphi')+2$ כלומר $N(\varphi)=N(\varphi')+2$ (כי אורכו של (φ) הוא $N(\varphi)+2$ וכישור שלו לא יכולה להיות אורכה יותר) ו-$\varphi'=(\varphi)$ $\Longrightarrow R(\varphi')=R((\varphi))=R(\varphi)+1\underset{\varphi\text{ מאוזן}}{=}L(\varphi)+1=L((\varphi))=L(\varphi')$

כלומר: בכל מקרה $R(\varphi')\leq L(\varphi')$. בנוסף הראינו $R((\varphi))=L((\varphi))$ אזי (φ) מאוזן.

(b) יהיו φ,ψ ביטויים מאוזנים.

תהא θ כישור של $\varphi\psi$ $(\varphi\psi)$. אם $N(\theta)\leq N(\varphi)$ $(N(\psi))$ אזי θ כישור של φ (ψ) ולכן $R(\theta)\leq L(\theta)$. אחרת $N(\theta)>N(\varphi)$ $(N(\psi))$ ונסמן θ': הכישור של φ (ψ) באורך $N(\theta)-N(\varphi)$ $(N(\psi))$ ומתקיים $N(\theta)\leq N(\varphi)+N(\psi)$ (מובטח כי $\theta=\varphi\theta'$ $(\psi\theta')$)

ולכן: $R(\theta)=R(\varphi)+R(\theta')\underset{\varphi,\psi\text{ מאוזנים}}{\leq}L(\varphi)+L(\theta')=L(\theta)$ $(R(\psi)+R(\theta')\leq L(\psi)+L(\theta'))$.

כלומר בכל מקרה $R(\theta)\leq L(\theta)$.

בנוסף: $R(\varphi\psi)=R(\varphi)+R(\psi)\underset{\varphi,\psi\text{ מאוזנים}}{=}L(\varphi)+L(\psi)=L(\varphi\psi)$ $(R(\psi\varphi))$ $(L(\psi\varphi))$

אזי $\varphi\psi$ $(\psi\varphi)$ ביטוי מאוזן.

(c) יהיו φ,ψ ביטויים כך ש $\varphi\psi$ מאוזן.

(I) נניח כי φ מאוזן, אז:

תהא ψ' כישא של ψ, אז $\varphi\psi'$ כישא של $\varphi\psi$

ומתקיים: $R(\psi')=R(\varphi\psi')-R(\varphi)\underset{\varphi\psi\text{ מאוזן}}{\le}L(\varphi\psi')-R(\varphi)\underset{\varphi\text{ מאוזן}}{=}L(\varphi\psi')-L(\varphi)=L(\psi')$.

בנוסף: $R(\psi)=R(\varphi\psi)-R(\varphi)\underset{\varphi,\varphi\psi\text{ מאוזנים}}{=}L(\varphi\psi)-L(\varphi)=L(\psi)$

אז ψ מאוזן.

(II) נניח כי ψ מאוזן, אז:

תהא φ' כישא של φ, אז $\varphi'\psi$ כישא של $\varphi\psi$ גם

כן ו"ל מכיוון ש-$\varphi\psi$ מאוזן: $R(\varphi')\le L(\varphi')$

בנוסף: $R(\varphi)=R(\varphi\psi)-R(\psi)\underset{\varphi,\varphi\psi\text{ מאוזנים}}{=}L(\varphi\psi)-L(\psi)=L(\varphi)$

אז φ מאוזן. ■

(ד) יהי n טבעי. יהי φ פילוג מאוזן באורך $2n$

אז נסמן: m - אורך הכישא המאוזנת הגדולה ביותר

שאפשר להגיע אליה מ-φ (קל"מ כזו כי φ הוא כישא מאוזנת

עצמו טריוויאלית של עצמו)

ע"פ (ב), הסיפא שב-φ שבאורך $2n-m$

מאוזנת אף היא. נסמן לכל n: B_n - הקב' הבינארי הכלאוניים באורך n

לעניין: לכל $m\le n$ קיימת התאמה חח"ע ועל בין $B_{n,m}\overset{def}{=}\{\varphi\in B_{2n}\mid m_\varphi=am\}$

לבין $B_{2(n-m)}\times B_{2(n-m)}$.

הסבר: נראה שהפעולה ההפוכה מוגדרת והיא:

יהיו $\theta\in B_{2(n-m)}$, $\psi\in B_{2(n-m)}$ אז $\theta(\psi)\in B_{n,m}$ (נאמר כי (ψ) רצא

מאוזנת לא טריוויאלית של $\theta(\psi)$ באורך $2m$ יוקל לראות כי אין

ל-$\theta(\psi)$ רישא מאוזנת פחות מדרגה m). הפעולה ההפוכה:

תהי $\varphi\in B_{n,m}$ אז

מתקיים $\theta\in B_{2(n-m)}$ ו-$\psi\in B_{2m}$ כך ש: $\theta\psi=\varphi$ ובאל

מ"ש ψ כנ"ל מכיוון כי כל איבר מהצורה (ψ')
כמו ל $\psi' \in B_{2(n-1)}$.

אלא: ✓

$$C_n = |B_{2n}| = \left|\dot{\bigcup_{m=1}^{n}} B_{2m}\right| = \sum_{m=1}^{n} |B_{2(m-1)} \times B_{2(n-m)}| =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} C_{m-1} C_{n-m} = \sum_{m=0}^{n-1} C_m C_{(n-1)-m}$$

מספר טבעי

$$\exists M (\forall n (|a_n| < M))$$ (a) (2)

מספר טבעי

$$\forall \varepsilon ((\varepsilon > 0) \to (\exists n (\forall m ((m > n) \to (|a_m| < \varepsilon)))))$$ (b)

לכל ε

$$\forall M (\exists n (\forall m ((m > n) \to (a_m > M))))$$ (c)

מספר טבעי

$$\forall \varepsilon ((\varepsilon > 0) \to (\exists n (\forall m (\forall k (((m > k) \wedge (k > n)) \to (|a_m - a_k| < \varepsilon))))))$$ (d)

מספר טבעי לכל ε

איברים ב-F פעולות חשיבות על איברי F

(3) תרגיל $\mathbb{F} = \{F, +, \cdot, 0, 1\}$

$$(\forall x (\forall y (x + y \in F))) \wedge$$

$$(\forall x (\forall y (x + y = y + x))) \wedge (\forall x (x + 0 = x)) \wedge$$ חיבור

$$(\forall x (\exists x' (x + x' = 0))) \wedge (\forall x (\forall y (\forall z ((x + y) + z = x + (y + z))))) \wedge$$

$$(\forall x (\forall y (x \cdot y \in F))) \wedge$$

$$(\forall x (\forall y (x \cdot y = y \cdot x))) \wedge (\forall x (x \cdot 1 = x)) \wedge$$

$$(\forall x ((x \neq 0) \to (\exists x' (x \cdot x' = 1)))) \wedge (\forall x (\forall y (\forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))))) \wedge$$

$$(\forall x (\forall y (\forall z (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z))))) \longleftrightarrow$$ שדה $\mathbb{F}$

(4)

$$\forall S (((0 \in S) \wedge (\forall n ((n \in S) \to ((n+1) \in S)))) \to (\forall m (m \in S)))$$ (t)

$$\forall S ((\forall n ((\forall k ((k < n) \to (k \in S))) \to (n \in S))) \to (\forall m (m \in S)))$$

$$\forall S (\exists n ((n \in S) \wedge (\forall k ((k \in S) \to (n \leq k))))$$

ב) $S=\{0\}$ $T=\mathbb{N}\setminus\{0\}$

ג) נסמן $S\subseteq\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$: $n\in S$ אמ"מ כל טבלת שוקולד משלתה $n+1$ ניתנת לשבירה לקוביות באמצעות n חיתוכים ולא באמצעות אף מספר חיתוכים אחר.

יהי $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל $k<n$ טבעי, $k\in S$. נראה כי מכאן נובע $n\in S$:

אם $n=0$ אזי ישנה רק טבלת שוקולד אחת בגודל $n+1$ – היא קובית ניתן לשברה לקוביות באמצעות 0 חיתוכים שם אף חיתוך אינו חל אזי $n\in S$.

אחרת $n>0 \Leftarrow n+1>1$. תהא טבלת שוקולד שגודלה $n+1$ – נסמן אותה מימדיה m,k. ניתן לשברה לקוביות באמצעות n חיתוכים: נניח בה"כ $k\le m$ ונשבר לפי $k-1$ חיתוכים אורכיים לפי m כאשר בכל טבלה k אורכה m ו-$k-1$ חיתוכים ואת הטבלה האחרונה לקוביות באמצעות $k-1$ חיתוכים (אם $k=m$ אזי לא נדרשים חיתוכים). נראה שאז ניתן לשברה לקוביות באמצעות n חיתוכים.

כל מס' חיתוכים אחר: תהי נתונה סדרת חיתוכים השוברת את הטבלה לקוביות.

בה"כ החיתוך הראשון מחלק את הטבלה לאורך מימד שגודלו m. חיתוך זה יחלק את הטבלה לשני חלקים – נסמן את מימדי אחד מהם $l,k \Leftarrow$ מימדי השני $(m-l),k$. $(1\le l\le m-1)$.

שארית סדרת החיתוכים תחלק את הטבלה בגודל $(m-l)k$ לקוביות – צאת באמצעות $(m-l)k-1$ חיתוכים בדיוק (כי $n=mk-1>(m-l)k-1$) – $(m-l)k-1\le n$ ולכן את הטבלה בגודל lk לקוביות – צאת באמצעות $lk-1$ חיתוכים בדיוק (כי $n=mk-1>lk-1$) $\Leftarrow lk-1\le n$

סה"כ מספר החיתוכים שהיה בסדרה: $1+(m-l)k-1+lk-1=mk-1=n$.

בראיה שבכל טבלה בגודל $n+1$ לקוביות מתבצעים n חיתוכים $\Leftarrow n\in S$.

הראינו את קיום תנאי האינדוקציה בדרך השלמה
על S, אזי $S=\mathbb{N}$.

יהיו m,n מספרים טבעיים חיוביים אזי $m\cdot n\geq 1$
$\Leftarrow m-n-1\geq 0 \Leftarrow m\cdot n-1\in S \Leftarrow$
כל טבלת שוקולד בגודל $m\times n$?

■

(3) (I) אמת:
רגילה $\Leftarrow$ מלאה
תהא S קבוצת טבעיים המקיימת את התנאי:
• אם לכל $k<n$ המספר k שייך ל-S אזי n שייך ל-S.
$\boxed{\text{אזי}}$:
(a) (באופן הריק) לכל $k<0$, k שייך ל-S ולכן 0 שייך ל-S.
(b) יהי n טבעי כך ש-n שייך ל-S. נניח בשלילה
כי $n+1$ לא שייך ל-S, אזי קיים $k<n+1$ שאינו שייך
ל-S (מהתנאי הנתון על S). נסמן: $K=\{k<n+1 \mid k\notin S\}$
(ומהנחה $K\neq\emptyset$). K סופית ולא ריקה ולכן קיים לה מינימום m.
(הוכחנו באינפי האמצעות אינדוקציה רגילה על גודל
הקבוצה שלכל קבוצה סופית ולא ריקה של טבעיים-ולכן בפרט של טבעיים-קיים מינימום)
נשים לב: לכל $k<m$: $k\notin K$ (מאי"ש) $\Leftarrow k\in S$ ולכן מקיום $m\in S$
$\Leftarrow m\notin K$ מסתירה, אזי $n+1$ שייך ל-S.
הראינו את קיום תנאי עקרון האינדוקציה הרגילה
על S, אזי $S=\mathbb{N}$.

■

(II) אמת: מלאה $\Leftarrow$ מינימום.

תהא תת קבוצה S של מספרים טבעיים
ללא איבר מינימלי. נסמן: $C=\mathbb{N}\setminus S$.
יהי n טבעי כך שלכל $k<n$ המספר k שייך ל-C.

מכך שלכל $k<n$ נתון כי $k\notin S$ נובע כי לכל
$k\in S$, $k\geq n$ כלומר אם n היה שייך ל-S הוא
היה איבר מינימלי בה, אבל הוא לא שייך ל-S
כלומר n שייך ל-C.
✓ הבאתי את קיום תנאי האינדוקציה המלאה על
C, אבל $C=\mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $S=\emptyset$.
מכאן אם לקבוצה אין איבר מינ' הרי שהיא ריקה
$\Leftarrow$ אם קבוצה לא ריקה אבל יש לה איבר מינימלי.
III) אבחנה: מינימום $\Leftarrow$ כל טוב.
תהא S קבוצה המקיימת:
a) 0 שייך ל-S b) אם n שייך ל-S אז $n+1$ שייך ל-S.
נניח בשלילה כי $S\neq\mathbb{N}$. נסמן: $C=\mathbb{N}\setminus S$
ומן הנתון C לא ריקה, אבל יש לה מינימום, נסמנו
ב-m. נתון כי $0\in S$ $\Leftarrow$ $0\notin C$ $\Leftarrow$ $m\neq 0$ ומכ
הכרל $m-1$ מוגדר וטבעי. מינימליות m, $m-1\notin C$
$\Leftarrow$ $m-1\in S$ $\overset{b}{\Leftarrow}$ $m\in S$ וזו סתירה, אבל $S=\mathbb{N}$.
הבאתי הוכחה מעגלית: רציפות $\Leftarrow$ מלאה $\Leftarrow$ מינימום $\Leftarrow$ רציפות
אבל שלושת הטענות הנ"ל שקולות.
ד) תהא $S\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ המקיימת:
✓ a) $(0,0)\in S$ b) לכל $m\in\mathbb{N}$: אם $(m,0)\in S$ אז $(m+1,0)\in S$
c) לכל $m,n\in\mathbb{N}$: אם $(m,n)\in S$ אז $(m,n+1)\in S$
אז $S=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

הוכחה:

תהא S כנ"ל.

נסמן: $A=\{m\in\mathbb{N} \mid (m,0)\in S\}$.

(a) $(0,0)\in S \Rightarrow 0\in A$.

(b) יהי $n\in A \Rightarrow (n,0)\in S \Rightarrow (n+1,0)\in S \Rightarrow n+1\in A$

אז לפי עקרון האינדוקציה הבסיסית, $A=\mathbb{N}$.

יהי $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. נסמן: $B=\{k\in\mathbb{N} \mid (n,k)\in S\}$.

(a) הבאנו: $A=\mathbb{N} \Rightarrow (n,0)\in S \Rightarrow 0\in B$,

(b) יהי $k\in B \Rightarrow (n,k)\in S \Rightarrow (n,k+1)\in S \Rightarrow k+1\in B$.

אז לפי עקרון האינדוקציה הבסיסית, $B=\mathbb{N}$.

ובפרט $m\in B \Rightarrow (n,m)\in S$.

הבאנו: לכל $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ מתקיים $(n,m)\in S$, כלומר $S=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

דינה בלשר
6/11/05

תרגיל 2 במבוא ללוגיקה

אקסיומות פיאנו: תהי $L=\{+,\cdot,S,<,0\}$ שפה המכילה שני סימני פונקציה דו-מקומיים: $+,\cdot$ סימן פונקציה חד מקומי: S, סימן יחס דו מקומי: $<$ וקבוע: 0. נרשום את הנוסחאות:

$N_1.\ Sx \neq 0$

$N_2.\ Sx = Sy \to x = y$

$N_3.\ x+0=x$

$N_4.\ x+Sy = S(x+y)$

$N_5.\ x\cdot 0 = 0$

$N_6.\ x\cdot Sy = (x\cdot y)+x$

$N_7.\ \neg(x<0)$

$N_8.\ x<Sy \leftrightarrow x<y \vee x=y$

$N_9.\ x<y \vee x=y \vee y<x$

1. תהי $\mathbb{Z}$ קבוצת המספרים השלמים ונפרש את הסימנים $+,\cdot$ כחיבור והכפל הרגילים את S כפונקציה $S_{\mathbb{Z}}x = x+_{\mathbb{Z}}1$ את $<$ כיחס הסדר הרגיל ואת הקבוע בשפה כאיבר אפס ב $\mathbb{Z}$. האם מבנה זה מקיים את הנוסחאות: N_1-N_9.
2. מצא מבנה מתאים ל L המקיים את כל הנוסחאות פרט ל N_3,N_5.
3. מצא מבנה מתאים ל L המקיים את כל הנוסחאות פרט ל N_6,N_8.
4. מצא מבנה מתאים ל L המקיים את כל הנוסחאות אך אינו המספרים הטבעיים.

פונקציות אמת: פונקצית אמת n-מקומית היא פונקציה מהצורה: $H:\{T,F\}^n \to \{T,F\}$. יהיו $H_1,..,H_k$ פונקציות אמת n_i מקומיות $1\le i\le k$. נאמר כי פונקצית אמת H נוצרת מהן אם אפשר לקבל את H כהרכבה שלהן. נגדיר $H_{d,n}$ להיות הפונקציה המקיימת $H_{d,n}(a_1,....,a_n)=T$ אם"ם קיים i כך ש $a_i=T$. ואת $H_{c,n}$ להיות זו המקיימת $H_{c,n}(a_1,....,a_n)=T$ אם"ם לכל i מתקיים $a_i=T$.

5. כמה פונקצית אמת n-מקומיות יש.
6. הראה כי כל פונקצית אמת נוצרת ע"י קבוצת הפונקציות: $\{H_{c,n},H_{d,n},H_\neg | n\ge 2\}$.
7. הראה כי כל פונקצית אמת נוצרת ע"י אחת מהקבוצות הבאות:

$$\{H_\neg,H_\wedge\},\ \{H_\neg,H_\vee\},\ \{H_\neg,H_\to\}$$

8. (רשות) האם כל פונקצית אמת נוצרת מהקבוצה: $\{H_\neg,H_\leftrightarrow\}$.

קשרים לוגים: תהי $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קבוצה של סימנים שנקרא להם פסוקים אטומים. נגדיר פסוק באופן הבא:

- פסוק אטומי הוא פסוק.
- אם φ פסוק אז גם $\neg\varphi$ פסוק.
- אם φ,ψ פסוקים אז גם $(\varphi)\to(\psi),(\varphi)\leftrightarrow(\psi),(\varphi)\wedge(\psi),(\varphi)\vee(\psi)$ פסוקים.

מבנה A הוא פונקציה $A:\{P_n\}_{n\in N}\to\{T,F\}$. תהי Ψ קבוצת כל הפסוקים נרחיב את A לכל Ψ באופן הבא יהי $\chi\in\Psi$

- אם $\chi=P_n$ אז $A(\chi)=A(P_n)$.
- אם $\chi=\neg\varphi$ אז נגדיר $A(\chi)=H_\neg(A(\varphi))$
- אם $\chi=(\varphi)\square(\psi)$ אז $A(\chi)=H_\square(A(\phi),A(\psi))$ לכל $\square\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$.

נגדיר קשר לוגי n-מקומי להיות פונקציה $c:\Psi^n\to\Psi$ עבורה קיימת פונקצית אמת n מקומית H_c כך שלכול מבנה A ולכל $\varphi_1,..,\varphi_n\in\Psi$ מתקיים: $A(c(\varphi_1,..\varphi_n))=H_c(A(\varphi_1),...,A(\varphi_n))$. קבוצה של קשרים לוגיים $\{c_1,..,c_m\}$ תיקרא שלמה אם לכל פונקציה אמת H אפשר ליצור ע"י הרכבה מ $\{c_1,..,c_m\}$ קשר לוגי c כך ש $H_c=H$

9. הוכח כי הקבוצות הבאות הן שלמות: $\{c_\neg c_\to\}\{c_\neg c_\wedge\}\{c_\neg c_\vee\}$

כאשר $c_\neg(\varphi)=\neg\varphi$ ו $c_\square(\varphi,\psi)=(\varphi)\square(\psi)$ לכל $\square\in\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$.

שאלות 8,9 בתרגיל 2

אלגברת יצירה A היא זוג (A,F) כאשר A קבוצה לא ריקה ו $F=\{f_i \mid i\in I\}$ קבוצה של פונקציות כך שלכל i קיים n_i טבעי כך ש f_i היא פונקציה n_i מקומית מ A^{n_i} ל A. נרשה גם פונקציות 0 מקומיות שהם בהגדרה יהיו קבועים ב A. תהי $B\subseteq A$ תת קבוצה ויהי $a\in A$ נאמר כי a *נמצא* מ B אם קיימת סדרה $\{a_1,...,a_n\}$ של אברים ב A כך ש: $a_n=a$ וכן לכל i או ש $a_i\in B$ או שקימת $f\in F$ פונקציה n מקומית וקיימים $j_1,...,j_n<i$ כך ש $f(a_{j_1},..,a_{j_n})=a_i$.

<u>עקרון האינדוקציה על סדרה יוצרת:</u> תהי (A,F) אלגברת יצירה ותהי $B\subseteq A$ תת קבוצה ותהי (C,F) תת האלגברה הנוצרת ע"י B ותהי T תכונה של אברים ב A. אם מתקיימים התנאים:

- כל $b\in B$ מקיים את T.
- לכל כ $f_i\in F$ ולכל $a_1,...,a_{n_i}\in A$ אם $a_1,...,a_{n_i}$ מקיימים את T אז $f_i(a_1,...,a_{n_i})$ מקיים את T. בפרט אם f_i היא 0 מקומית כלומר אבר ב A מקיימת את T.

אז כל אבר ב C כלומר כל אבר הנצר מ B מקיים את T.

<u>אלגברת היצירה של פונקציות אמת:</u> תהי $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרה של משתנים אזי נגדיר את האלגברה (A,F) באופן הבא: A היא קבוצת כל פונקציות האמת במשתנים $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. ו F היא קבוצת הפונקציות הבאה $\{Sub_i(-,-)\mid i\in\mathbb{N}\}$ כלומר לכל $i\in\mathbb{N}$ קיימת פונקציה דו מקומית $Sub_i(-,-)$ על A כך שלכל $H,G\in A$ $Sub_i(H,G)$ היא פונקצית האמת המתקבלת ע"י הצבה של פונקצית האמת G בפונקצית האמת H במקום המשתנה X_i.

<u>הערה:</u> אם הפונקציה H אינה פונקציה במשתנה X_i אז לכל $G\in A$ מתקיים $Sub_i(H,G)=H$.

תהי $B\subseteq A$ תת הקבוצה המכילה את פונקציות האמת הבאות: לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל n משתנים שונים $X_{i_1},...,X_{i_n}$ מתקיים $H_{c,n}(X_{i_1},..,X_{i_n}),H_{d,n}(X_{i_1},..,X_{i_n})\in B$ ולכל X_i הפונקציה $H_\neg(X_i)\in B$.

<u>הערה:</u> מה שמבדיל בין $H_\neg(X_1)$ ל $H_\neg(X_2)$ למשל הוא לא הערכים שהן נותנות לערכי אמת ת במובן זה הן זהות, אלא העובדה שהן פונקציות במשתנים שונים.

<u>טענה:</u> כל פונקצית אמת נוצרת ע"י תת הקבוצה B: ראשית תהי $\vec{a}=(a_1,...,a_n)\in\{T,F\}^n$ סדרה של n ערכי אמת ותהי $X_{i_1},...,X_{i_n}$ סדרה של n משתנים שונים אזי מהאברים ב B נוכל ליצור את הפונקציה $H_{\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})$ המוגדרת האינדוקציה באופן הבא: אם $a_1=F$ אז נגדיר $H_{1,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})=Sub_{i_1}(H_{c,n}(X_{i_1},...,X_{i_n}),H_\neg(X_{i_1}))$ ואם $a_1=T$ נגדיר $H_{1,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})=H_{c,n}(X_{i_1},...,X_{i_n})$ כעת נניח הגדרנו את $H_{k,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})$ עבור $k<n$ אם $a_{k+1}=F$ אז נגדיר $H_{k+1,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})=Sub_{i_{k+1}}(H_{k,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n}),H_\neg(X_{i_{k+1}}))$ ואם $a_{k+1}=T$ נגדיר $H_{k+1,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})=H_{k,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})$ ולבסוף נגדיר: $H_{\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})=H_{n,\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})$. קל לבדוק כי לפונקצית האמת $H_{\vec{a}}(X_{i_1},...,X_{i_n})$ יש את התכונה שלכל $\vec{b}\in\{T,F\}^n$ מתקיים $H_{\vec{a}}(\vec{b})=T\Leftrightarrow\vec{b}=\vec{a}$ ולפי ההגדרה של יצירה היא נוצרת מ B. כעת תהי $H(X_{i_1},...,X_{i_n})$ פונקצית אמת כל שהיא ונסמן $I=\left\{\vec{a}\in\{T,F\}^n \mid H(\vec{a})=T\right\}$ ונניח ראשית כי $|I|=m>0$. יהי $X_{j_1},...,X_{j_m}$ m משתנים השונים זה מזה וכל אחד מהם שונה מכל אחד מהמשתנים $X_{i_1},...,X_{i_n}$. קל לבדוק כי מהפונקציה $H_{d,m}(X_{j_1},...,X_{j_m})\in B$ אפשר ליצור מ B את הפונקציה $H_{d,m}(H_{\vec{a}_1}(X_{i_1},...,X_{i_n}),...,H_{\vec{a}_m}(X_{i_1},...,X_{i_n}))$. כאשר $I=\{\vec{a}_1,...,\vec{a}_m\}$. שוב קל

לבדוק כי $H(X_{i_1},...,X_{i_n}) = H_{d,m}(H_{\bar{a}_1}(X_{i_1},...,X_{i_n}),...,H_{\bar{a}_m}(X_{i_1},...,X_{i_n}))$ כעת נניח כי I ריקה אז ברור כי $H(X_{i_1},...,X_{i_n})$ שווה למשל לפונקציה:
$H_{c,2}(H_{c,n}(X_{i_1},...,X_{i_n}),H_{\neg}(H_{c,n}(X_{i_1},...,X_{i_n}))$ הנמצאת ב B.

<u>טענה:</u> תהי (A,F) אלגברת יצירה כלשהי ויהיו B,C שתי תת קבוצות של A נניח כי כל איבר ב A נוצר ע"י B אז אם כל איבר ב B נוצר ע"י C אז כל איבר בA נוצר ע"י C.
<u>הוכחה:</u> יהי a איבר ב A ותהי $a_1,...,a_n$ סידרת יצירה שלו יהיו $a_{i_1},...,a_{i_k}$ האברים בסדרת היצירה שאינם קבועים ואינם נוצרים מקודמיהם כלומר הם חייבים להיות מהקבוצה B לכן לכל אחד מהם יש סדרת יצרה מ C. החלף כל אחד מאברים אלו בסדרת היצירה המתאימה לו קל לבדוק כי קיבלנו סידרת יצירה ל a מ C.

נחזור לאלגברת היצירה של פונקציות האמת. ונגדיר $C=\{H_{\vee}(X_i,X_j),H_{\neg}(X_i) \mid i\neq j\in\mathbb{N}\}$ כדי להראות כי כל פונקצית אמת נוצרת מ C לאור הטענה הקודמת מספיק להראות כי כל פונקצית אמת ב B נוצרת מ C. ראשית יש את שוויון $H_{\neg}(H_{\vee}(H_{\neg}(X_i),H_{\neg}(X_j))) = H_{\wedge}(X_i,X_j)$. ולכן לכל זוג משתנים $H_{\wedge}(X_i,X_j)$ נוצרת מ C. כעת נראה כי לכל n משתנים שונים פונקצית האמת $H_{d,n}(X_{i_1},...,X_{i_n})$ נצרת מ C וזה נובע מהשוויון:
$$H_{d,n}(X_{i_1},...,X_{i_n}) = Sub_{i_{n-1}}(...(Sub_{i_2}(H_{\vee}(X_{i_1},X_{i_2}),H_{\vee}(X_{i_2},X_{i_3}))....),H_{\vee}(X_{i_{n-1}},X_{i_n}))$$
ההוכחה עבור $H_{c,n}(X_{i_1},...,X_{i_n})$ דומה. תהי $D=\{H_{\wedge}(X_i,X_j),H_{\neg}(X_i) \mid i\neq j\in\mathbb{N}\}$ ותהי $E=\{H_{\rightarrow}(X_i,X_j),H_{\neg}(X_i) \mid i\neq j\in\mathbb{N}\}$ אזי מהשוויונות הבאים:
$$H_{\vee}(X_i,X_j) = H_{\neg}(H_{\wedge}(H_{\neg}(X_i),H_{\neg}(X_j))) \quad H_{\vee}(X_i,X_j) = H_{\rightarrow}(H_{\neg}(X_i),X_j)$$
ומהטענה למעלה נקבל כי גם הקבוצות D,E יוצרות את כל X.

<u>קשרים לוגים(שאלה 9):</u> יהיו $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ קשר לוגי n מקומי הוא פונקציה n מקומית ב n משתנים שונים $c(Y_{i_1},...,Y_{i_n})$ מקבוצת הפסוקים לעצמה אשר קיימת עבורו פונקצית אמת n מקומית: H_c_אם הקשר הוא במשתנים הנ"ל נתאים לו את פונקצית האמת : $H_c(X_{i_1},...,X_{i_1})$. כלומר יש לנו העתקה מקבוצת הקשרים הלוגים במשתנים $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ לקבוצת פונקציות האמת במשתנים $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. כעת לא קשה לראות כי לכל c,d קשרים לוגים במשתנים כלשהם ויהיו H_c,H_d פונקצית האמת המתאימות להם במשתנים המתאימים. אז לכל משתנה Y_i מתקיים $Sub_i(c,d)$ הוא קשר לוגי ופונקצית האמת המתאימה לו היא $Sub_i(H_c,H_d)$. כאשר פונקצית ההצבה על קשרים לוגים מוגדרת באופן דומה להצבה של פונקציות אמת רק מתייחסת לקבוצת המשתנים $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. נראה כי הקבוצה $\{c_{\neg}(Y_i),c_{\vee}(Y_j,Y_i) \mid i\neq j\in\mathbb{N}\}$ היא שלמה נוכיח באינדוקציה על היצירה של פונקציות אמת מהקבוצה $\{H_{\vee}(X_i,X_j),H_{\neg}(X_i) \mid i\neq j\in\mathbb{N}\}$ כי לכל פונקצית אמת H במשתנים $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ אפשר לבנות קשר לוגי במשתנים המתאימים שזו פונקצית האמת שלו. ולכן תהי $H_1,....,H_n$ סידרת יצירה ל H אם $H_n = H_{\vee}(X_i,X_j)$ $H_n = H_{\neg}(X_i)$ אז ברור שיש קשר שזו פונקצית האמת שלו אחרת קיימים $k,m<n$ וקיים משתנה X_i כך ש $H_n = Sub_i(H_k,H_m)$ לפי הנחת האינדוקציה קיימים קשרים לוגים c_m,c_k במשתנים הנכונים המתאימים ל H_m,H_k. ולכן לפי הרשום למעלה נקבל כי לקשר $Sub_i(c_k,c_m)$ מתאימה פונקצית האמת $H_n = Sub_i(H_k,H_m)$.
ההוכחה עבור קבוצת הקשרים האחרות מתקבלת מהוכחה זו ע"י הצבה של $\wedge,\rightarrow$ במקום $\vee$.

יעל' אנגלמאן
תרגול יום א' 19-18

תרגיל 2 במבוא ללוגיקה

(10)

(1) א) הוכיחו שהשאלה לא מקיים את N_1: $(-1\in\mathbb{Z})\wedge(S\cdot 1=0)$

ב) מקיים את N_2: $\forall x,y: Sx=Sy \Rightarrow x+1=y+1 \Rightarrow x=y$

ג) מקיים את N_3: $\forall x: x+0=x$

(3) מקיים את N_4: $\forall x,y: x+Sy=x+(y+1)=(x+y)+1=S(x+y)$

ה) מקיים את N_5: $\forall x: x\cdot 0=0$

(1) מקיים את N_6: $\forall x,y: x\cdot Sy=x(y+1)=(x\cdot y)+(x\cdot 1)=(x\cdot y)+x$

(5) לא מקיים את N_7: $(-1\in\mathbb{Z})\wedge(-1<0)$

(ח) מקיים את N_8: $\forall x,y: x<Sy=y+1 \Leftrightarrow x<y \vee x=y$

(6) מקיים את N_9: $\forall x,y: x<y \vee x=y \vee y<x$

(2) נבנה ב- $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ונפרש את הסימנים $\cdot,+,S,<$ כרגיל והכפל והעוקב ויתם הסדר הרגילים של $\mathbb{N}$ ואת הקבוע המשמש כ- 1. אז הוכיחו:

א) מקיים את N_1: $\forall x: Sx=x+1\neq 1=0_L$

ב) מקיים את N_2: $\forall x,y: Sx=Sy \Rightarrow x+1=y+1 \Rightarrow x=y$

ג) לא מקיים את N_3: $(1\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\wedge(1+0_L=1+1=2\neq 1)$

(3) מקיים את N_4: $\forall x,y: x+Sy=x+(y+1)=(x+y)+1=S(x+y)$

ה) לא מקיים את N_5: $(2\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\wedge(2\cdot 0_L=2\cdot 1=2\neq 1=0_L)$

(1) מקיים את N_6: $\forall x,y: x\cdot Sy=x\cdot(y+1)=(x\cdot y)+(x\cdot 1)=(x\cdot y)+x$

(5) מקיים את N_7: $\forall x: \neg(x<1) \Rightarrow \neg(x<0_L)$

(ח) מקיים את N_8: $\forall x,y: x<Sy=y+1 \Leftrightarrow x<y \vee x=y$

(6) מקיים את N_9: $\forall x,y: x<y \vee x=y \vee y<x$

(3) נביט ב- $\mathbb{N}$ ונפרש את הסימנים $<,+,\cdot$ כרגיל והכפל ויחס הסדר הרגילים על $\mathbb{N}$, את הקבוע 0 ואת איבר אפס ב- $\mathbb{N}$ ואת S כפונקציה $Sx=x+2$. אלו מהבאות:

(א) מקיים את N_1: $\forall x: Sx = x+2 \neq 0$

(ב) מקיים את N_2: $\forall x,y: Sx=Sy \Rightarrow x+2=y+2 \Rightarrow x=y$

(ג) מקיים את N_3: $\forall x: x+0=x$

(ד) מקיים את N_4: $\forall x: x+Sy=x+(y+2)=(x+y)+2=S(x+y)$

(ה) מקיים את N_5: $\forall x: x\cdot 0=0$

(ו) לא מקיים את N_6: $(1\in\mathbb{N})\wedge(1\cdot S1=1\cdot(1+2)=3\neq 2=(1\cdot 1)+1)$

(ז) מקיים את N_7: $\forall x: \neg(x<0)$

(ח) לא מקיים את N_8: $(1\in\mathbb{N})\wedge(0\in\mathbb{N})\wedge(1<2=S0)\wedge\neg(1<0\vee 1=0)$

(ט) מקיים את N_9: $\forall x,y: x<y \vee x=y \vee y<x$

(4) נגדיר $\mathbb{N}_1$ ו- $\mathbb{N}_2$ - שני עותקים של הטבעיים ונביט בקבוצה $\mathbb{N}_1\cup\mathbb{N}_2$. נגדיר $<,+,\cdot,S$ בתוך כל קבוצה כרגיל (בדרך הרגילה) ונגדיר את 0_1 באיבר האפס. הנוסף נגדיר את הפעולות בין איברי $\mathbb{N}_1,\mathbb{N}_2$:

$\forall m,n\in\mathbb{N}: m_1+n_2=n_2+m_1=(n+m)_2$

$\forall m,n\in\mathbb{N}: n_1<m_2$

$\forall m,n\in\mathbb{N}: m_1\cdot n_2=n_2\cdot m_1=(n\cdot m)_2$

$\forall m\in\mathbb{N}: m_2\cdot 0_1=0_1\cdot m_2=0_1$

קל לראות כי מבנה זה מקיים את כל האקסיומות N_1-N_7 אך אינו הטבעיים כי יש בו 2 איברים שאינם איבר איבר (הם $0_1,0_2$)

(5) יהי $n \geq 0$ שלם. לפונקציית אמת n-מקומית מתאימה הבלתי האופן הבא
אמת עם 2^n שורות - אחת לכל אפשרות
לקלטי הפונקציה. ישנם $2^{(2^n)}$ צירופים
שונים של ערכים לשורות הפונקציה (לכל
שורה יכול להתאים ערך אמת או שקר).
כל טבלת אמת עם 2^n שורות מתאימה באופן
חח"ע ועל לצירוף כנ"ל ועל-כן ישנן
$2^{(2^n)}$ פונקציות אמת n-מקומיות.

(6) נתחיל ונלמד שפונקציות האמת הבאות-מקומיות
$\top, \bot$ לא ניתנות לצירוף כך ובאת מכוון שאז ניתן לבנות
פונקציה אפס-מקומית ע"י קבועת הפונקציות הנתונה
יהי נתון $n \geq 1$ ו- H פונקציית אמת n-מקומית.
אם לכל קלט H מחזירה שקר אני אם נסמן ב- a
את הקלט הראשון לפונקציה H נגדרת ע"י הקבועה הנתונה
בדרך הבאה: $H_{c,2}(a, H_1(a))$.
אחרת: נשים לב לכל $m \geq 2$: $H_{c,m}$ היא פונקציית
הקונונקציה ה-m מקומית וכן $H_{d,m}$ היא פונקציית
הדיסיונקציה ה-m מקומית. הראינו בכיתה כי
כל פונקציית אמת n מקומית ניתנת
לייצוג כדיסיונקציה 1-אין יותר מקומית של
קונונקציות n-מקומיות של קלטי הפונקציה
ושלילות. מכאן כי להראות שניתן לבנות את
הפונקציות $H_{c,1}, H_{d,1}$ עם הקבועה הנתונה על מנת
להראות כדונקציה של הבסיס לטקרה שפתרנו
בשיעור. ואכן לכל x: $H_{c,1}(x) = H_{d,1}(x) = H_1(H_1(x))$ ומכאן
H ניתנת לצירוף ע"י קבועת הפונקציות הנתונה.

(7) (I) המקרה $\{H_1, H_2\}$: אראה שקבוצת הפונקציות הנתונות יוצרת את קבוצת הפונקציות הנתונות בשאלה 6 ועפ"י פתרון שאלה 6 נובע כבר שלהראות שקבוצת הפונקציות הנתונות בסעיף יכולה ליצור כל פונקציית אמת.

(א) לכל $H_1(x)=H_2(x)$ כלומר בפרט H_2 נוצרת באמצעות $\{H_1, H_2\}$

(ב) אוכיח באינדוקציה שלכל $n \geq 2$ טבעי $H_{c,n}$ ניתנת ליצירה באמצעות H_1 ועפ"י באמצעות $\{H_1, H_2\}$

בסיס: לכל x: $H_{c,2}(x)=H_1(x)$.

צעד: יהי נתון $n \geq 2$ טבעי כך ש- $H_{c,n}$ ניתנת ליצירה באמצעות H_1 נראה כי $H_{c,n+1}$ ניתנת ליצירה באמצעות H_1: לכל $a_1, \dots, a_{n+1}$:

$$H_{c,n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = H_{c,n}(a_1, \dots, a_{n-1}, H_1(a_n, a_{n+1}))$$

ומכיוון שע"פ הנחת האינדוקציה $H_{c,n}$ נוצרת ע"י H_1 אזי גם $H_{c,n+1}$ נוצרת ע"י H_1.

הראיתי נכונות הטענה עבור $n=2$ ואת נכונותה עבור $n+1$ מנכונותה עבור $n \geq 2$ טבעי, אזי מעקרון האינדוקציה הראשית הטענה נכונה עבור כל $n \geq 2$ טבעי.

כלומר לכל $n \geq 2$ טבעי $H_{c,n}$ ניתנת ליצירה באמצעות H_1.

(ג) יהי נתון $n \geq 2$ טבעי, אזי לכל $a_1, \dots, a_n$ (מצד-שמאל):

$$H_{d,n}(a_1, \dots, a_n) = H_2(H_{c,n}(H_2(a_1), H_2(a_2), \dots, H_2(a_n)))$$

ומכיוון שהראיתי בסעיף ב' שעבור n כנ"ל $H_{c,n}$ נוצרת ע"י H_1, $H_{d,n}$ נוצרת ע"י $\{H_1, H_2\}$.

עפ"י (ב), (ג), קבוצת הפונקציות הנתונה ב-(ב) נוצרת ע"י $\{H_1, H_2\}$ אזי כל פונקציית אמת נוצרת ע"י $\{H_1, H_2\}$

■

(II) המקרה: $\{H_\neg, H_\vee\}$:

(א) $H_\neg$ נולדת באופן טריוויאלי ע"י $\{H_\neg, H_\vee\}$

(ב) לכל x,y: $H_\wedge(x,y) = H_\neg(H_\vee(H_\neg(x), H_\neg(y)))$

אזי $H_\wedge$ נולדת ע"י $\{H_\neg, H_\vee\}$.

ע"פ (א), (ב), קבוצת הפונקציות הנתונה ב(I) נולדת ע"י $\{H_\neg, H_\vee\}$ אי מפתרון (I) נובע כי כל פונקציית אמת נולדת ע"י $\{H_\neg, H_\vee\}$

(III) המקרה: $\{H_\neg, H_\rightarrow\}$

(א) $H_\neg$ נולד באופן טריוויאלי ע"י $\{H_\neg, H_\rightarrow\}$

(ב) לכל x,y: $H_\vee(x,y) = H_\rightarrow(H_\neg(x), y)$

אזי $H_\vee$ נולדת ע"י $\{H_\neg, H_\rightarrow\}$

ע"פ (א), (ב), קבוצת הפונקציות הנתונה ב(II) נולדת ע"י $\{H_\neg, H_\rightarrow\}$ אי מפתרון (II) נובע כי כל פונקציית אמת נולדת ע"י $\{H_\neg, H_\rightarrow\}$

הגדרה: בהינתן קבוצת פונקציות אמת ~~H~~ ופונקציית אמת H נולדת על ידן, נגדיר: $\#H$ מס' הפונקציות המינימלי מתוך $\#$ (עם חזרות) שיש להפעיל על מנת לקבל את H. מסמן לה ייקרא מספר הגזרה של H ע"י $\#$ ואת נסמנו ב-k נאמר כי H "k-נולדת" ע"י $\#$ מס' גדול הינו מוגדר היטב, סופי וחיובי. בשל ההנחה כי H נולדת ע"י $\#$.

(9) יהי $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} = \square$. אבחן באינדוקציה את הטענה:

לכל n טבעי וחיובי, לכל פונקציית אמת H המקיימת $n = \{H_\neg, H_\square\}\#H$ אפשר לבנות מלבנים קשת לחצי שלבים ש: $H = H_\square$.

יהי k טבעי חיובי. נניח את נכונות הטענה לכל $k < n$ ונוכיח עבור $k = n$

תהא H פונקציית אמת המקיימת $k = \{H_\neg, H_\square\}\#H$

(*) אם $k=1$ אזי $H=H_\neg$ או $H=H_\square$. נטפל בכל מקרה בנפרד:

(א) $H=H_\neg$. נסמן: $C=C_\neg$ אז:

$$\forall \varphi\in\Psi: A(c(\varphi))=A(\neg\varphi)=H_\neg(A(\varphi)) \Rightarrow H_c=H$$

(ב) $H=H_\square$ נסמן: $C=C_\square$ אז:

$$\forall \varphi,\psi\in\Psi: A(c(\varphi,\psi))=A((\varphi)\square(\psi))=H_\square(A(\varphi),A(\psi)) \Rightarrow H_c=H$$

כלומר בכל מקרה קיים קשר לוגי c הנוצר מ $\{C_\neg, C_\square\}$ כך ש: $H_c=H$.

(**) אם $k>1$, יהי m מס' הקלטים ל- H, אזי מתקיים אחד מבין:

(א) קיימת פונקציית אמת H' המקיימת $H'(\{H_\neg,H_\square\})=k-1$ וכן: $\forall a_1,\dots,a_m: H(a_1,\dots,a_m)=H_\neg(H'(a_1,\dots,a_m))$

(ב) קיימות פונקציות אמת H',H'' המקיימות: $H'(\{H_\neg,H_\square\})+H''(\{H_\neg,H_\square\})=k-1$ וכן לאחר נסמן: m',m'' - מס' הקלטים ל- H',H'' בהתאמה) שקיימים $i'_1,\dots,i'_{m'}$ שונים גדולים או שווים ל-1 וקטנים או שווים ל- m ו$i''_1,\dots,i''_{m''}$ שונים גדולים או שווים ל-1 וקטנים או שווים ל- m כך ש: $\forall a_1,\dots,a_m: H(a_1,\dots,a_m)=H_\square(H'(a_{i'_1},\dots,a_{i'_{m'}}),H''(a_{i''_1},\dots,a_{i''_{m''}}))$ נטפל בכל מקרה בנפרד.

(א) H' פונקציית אמת $k-1$-מוגדרת ע"י $\{H_\neg,H_\square\}$ ולכן לה הנחת האינדוקציה קיים קשר לוגי c' הנוצר מ $\{C_\neg,C_\square\}$ כך ש: $H_{c'}=H'$. נגדיר: $c:\Psi^m\to\Psi,\ c(z^1,\dots,z^m)=C_\neg(c'(z^1,\dots,z^m))$ אזי:

$$\forall \varphi^1,\dots,\varphi^m\in\Psi: A(c(\varphi^1,\dots,\varphi^m))=A(\neg c'(\varphi^1,\dots,\varphi^m))=H_\neg(A(c'(\varphi^1,\dots,\varphi^m)))=$$
$$=H_\neg(H_{c'}(A(\varphi^1),\dots,A(\varphi^m)))=H_\neg(H'(A(\varphi^1),\dots,A(\varphi^m)))=H(A(\varphi^1),\dots,A(\varphi^m))$$

$\Leftarrow H_c=H$.

(ב) H',H'' פונקציות אמת שמס' הגדרה שלהן ע"י $\{H_\neg,H_\square\}$ הינו $\geq k-1$ ולכן לה הנחת האינדוקציה קיימים קשרים לוגיים c',c'' הנוצרים מ $\{C_\neg,C_\square\}$ כך ש: $H_{c'}=H'$, $H_{c''}=H''$.

נגדיר: $c:\Psi^m\to\Psi,\ c(z^1,\dots,z^m)=C_\square(c'(z^{i'_1},\dots,z^{i'_{m'}}),c''(z^{i''_1},\dots,z^{i''_{m''}}))$

$$\forall \varphi^1,\dots,\varphi^m \in \Psi : A(c(\varphi^1,\dots,\varphi^m)) = A(c'(\varphi^{i'_1},\dots,\varphi^{i'_{m'}}) \square c''(\varphi^{i''_1},\dots,\varphi^{i''_{m''}})) =$$
$$= H_\square(A(c'(\varphi^{i'_1},\dots,\varphi^{i'_{m'}})), A(c''(\varphi^{i''_1},\dots,\varphi^{i''_{m''}}))) =$$
$$H_\square(H_{c'}(A(\varphi^{i'_1}),\dots,A(\varphi^{i'_{m'}})), H_{c''}(A(\varphi^{i''_1})\dots,A(\varphi^{i''_{m''}}))) =$$
$$H_\square(H'(A(\varphi^{i'_1}),\dots,A(\varphi^{i'_{m'}})), H''(A(\varphi^{i''_1}),\dots,A(\varphi^{i''_{m''}}))) = H(A(\varphi^1),\dots,A(\varphi^m))$$
$$\Leftarrow H_c = H$$

כלומר בכל מקרה קיים קשר לתו c הנוכר מ $\{\square, \neg\}$ כך ש: $H_c = H$.

מנכונות הטענה עבור $n=k$ (טאוטולוגיה) מנכונותה עבור כל $n<k$ לבעי תיובי ועל עקרון האינדוקציה השלמה, הטענה נכונה לכל n שלם.

תהי כעת H פונקציית אמת כלשהי. מהתרון (ד) נובע כי H נולדת ע"י $\{H_\neg, H_\square\}$ כלומר $H(\{H_\neg, H_\square\})$ לבעי תיובי, ע"כ הראיתי כי קיים קשר לתו c הנוכר מ $\{\square, \neg\}$ כך ש: $H_c = H$. כאת כאמור נכון עבור כל פונקציית אמת, אני $\{\square, \neg\}$ קבוצה שלמה.

■

(ה) אבחנת האינדוקציה את הטענה:

לכל n טבעי ותיובי, לכל פונקציית אמת H המק"מ ע"י $H(\{H_\neg, H_\leftrightarrow\})$ אם נסמן ב-m את מספר הקלטים ל-H, מתקיים לכל $1 \le i \le m$ עבור אחד מבין:

(1) $\forall a_1,\dots,a_m : H(a_1,\dots,a_m) = H(a_1,\dots,a_{i-1}, H_\neg(a_i), a_{i+1},\dots,a_m)$

(2) $\forall a_1,\dots,a_m : H(a_1,\dots,a_m) = H_\neg(H(a_1,\dots,a_{i-1}, H_\neg(a_i), a_{i+1},\dots,a_m))$ — אז —

יהי k טבעי תיובי. נניח את נכונות הטענה לכל $n<k$ טבעי תיובי ונוכיחה עבור $n=k$.

תהא H פונקציית אמת המק"מ ע"י $H(\{H_\neg, H_\leftrightarrow\})$ $k=$

(*) אם $k=1$ אזי $H=H_\neg$ או $H=H_\square$. נטפל בכל מקרה בנפרד:

(א) $H=H_\neg$: מתקיים $\forall a : H(a) = H_\neg(a) = H_\neg(H_\neg(H_\neg(a))) = H_\neg(H(H_\neg(a)))$:II

(ב) $H=H_\leftrightarrow$: מתקיים $\forall a,b : H(a,b) = H_\leftrightarrow(a,b) = H_\neg(H_\leftrightarrow(H_\neg(a),b)) = H_\neg(H(H_\neg(a),b))$:II

$\forall a,b: H(a,b)=H_{\leftrightarrow}(a,b)=H_{\neg}(H_{\leftrightarrow}(a,H_{\neg}(b)))=H_{\neg}(H(a,H_{\neg}(b)))$

(**) אם $k>1$: יהיו m מס' הקבועים ל-H, אזי מתקיים אחד מבין (א) ו-(ב) של (**) נטפל בכל מקרה בנפרד:

(א) H' פונקציית אמת המקיימת: $k-1=H'\{H_{\neg},H_{\leftrightarrow}\}$ (מתוך השינוי $\leftrightarrow$ ל $\rightarrow$) ו"כ ע"פ הנחת האינדוקציה היא מקיימת את הטענה. לכל $1\le i\le m$

שלפי: אם H' מקיימת (II) אזי H מקיימת (II) (ביחס לקבועים הנ"ל)

$\forall a_1,\dots,a_m: H(a_1,\dots,a_m)=H_{\neg}(H'(a_1,\dots,a_m))=H_{\neg}(H_{\neg}(H'(a_1,\dots,a_{i-1},H_{\neg}(a_i),a_{i+1},\dots,a_m)))=$

$=H_{\neg}(H(a_1,\dots,a_{i-1},H_{\neg}(a_i),a_{i+1},\dots,a_m))$

(ב) אם H' מקיימת (I) ואז גם H מקיימת (I) (ביחס לקבועים הנ"ל)

$\forall a_1,\dots,a_m: H(a_1,\dots,a_m)=H_{\neg}(H'(a_1,\dots,a_m))=H_{\neg}(H'(a_1,\dots,a_{i-1},H_{\neg}(a_i),a_{i+1},\dots,a_m))=$

$H(a_1,\dots,a_{i-1},H_{\neg}(a_i),a_{i+1},\dots,a_m)$

(ג) H',H'' פונקציות אמת שמס' הפעולות שלהן ע"פ $\{H_{\neg},H_{\leftrightarrow}\}$ הינו $k-1\ge$ ו"כ ע"פ הנחת האינדוקציה מקיימות את הטענה. לכל $1\le i\le m$

שלפי: אם קיים $1\le l\le m$ כך ש: $i'_l=i$ נסמנו l. אם קיים $1\le l\le m$ כך ש: $i''_l=i$ נסמנו l.

(א) אם קיים l וכן H' מקיימת (II) ביחס לקבוע ה-l שלה וכן קיים l וכן H'' מקיימת (II) ביחס לקבוע ה-l שלה:

$\forall a_1,\dots,a_m: H(a_1,\dots,a_m)=H_{\leftrightarrow}(H'(a_{i'_1},\dots,a_{i'_m}),H''(a_{i''_1},\dots,a_{i''_m}))=$

$=H_{\leftrightarrow}(H_{\neg}(H'(a_{i'_1},\dots,H_{\neg}(a_{i'_l}),\dots,a_{i'_m})),H_{\neg}(H''(a_{i''_1},\dots,H_{\neg}(a_{i''_l}),\dots,a_{i''_m})))=$

$=H_{\leftrightarrow}(H'(a_{i'_1},\dots,H_{\neg}(a_{i'_l}),\dots,a_{i'_m}),H''(a_{i''_1},\dots,H_{\neg}(a_{i''_l}),\dots,a_{i''_m}))=$

$=H(a_1,\dots,a_{i-1},H_{\neg}(a_i),a_{i+1},\dots,a_m)$

כלומר H מקיימת (I) ביחס לקבוע ה-i אותה.

(ב) אם קיים l וכן H' מקיימת (II) ביחס לקבוע ה-l שלה אבל לא קיים l או ש-H'' מקיימת (I) ביחס לקבוע ה-l שלה:

$\forall a_1,\dots,a_m: H(a_1,\dots,a_m)=H_{\leftrightarrow}(H'(a_{i'_1},\dots,a_{i'_m}),H''(a_{i''_1},\dots,a_{i''_m}))=$

$=H_{\leftrightarrow}(H_{\neg}(H'(a_{i'_1},\dots,H_{\neg}(a_{i'_l}),\dots,a_{i'_m})),H''(a_{i''_1},\dots,H_{\neg}(a_{i''_l}),\dots,a_{i''_m}))=$

אם קיים l, אחרת כל האיברים ל-H' ולא שלה ה

אם קיים ל, אחרת כל הארגומנטים ל-H ולו שלה!

$$H_{\neg}(H_{\leftrightarrow}(H'(a_{i'_1},\dots,H_{\neg}(a_{i'_l}),\dots,a_{i'_{m'}}),H''(a_{i''_1},\dots,H_{\neg}(a_{i''_l}),\dots,a_{i''_{m''}})))=$$

$$=H_{\neg}(H(a_1,\dots,a_{i-1},H_{\neg}(a_i),a_{i+1},\dots,a_m))$$

כלומר H מקיימת (II) ביחס לקלט ה-i שלה.

(ג) אם: לא קיים ל' או ש-H' מקיימת (I) ביחס לקלט ה-ל' שלה

אז: קיים ל' וגם H מקיימת (II) ביחס לקלט ה-ל' שלה

אזי בלבד דומה להוכחה של-(ב) ניתן להראות

כי H מקיימת (II) ביחס לקלט ה-i שלה.

(ד) אם: לא קיים ל' או ש-H' מקיימת (I) ביחס לקלט ה-ל' שלה

וגם: לא קיים ל' או ש-H'' מקיימת (I) ביחס לקלט ה-ל' שלה

$$\forall a_1,\dots,a_m: H(a_1,\dots,a_m)=H_{\leftrightarrow}(H'(a_{i'_1},\dots,a_{i'_{m'}}),H''(a_{i''_1},\dots,a_{i''_{m''}}))=$$

$$=H_{\leftrightarrow}(H'(a_{i'_1},\dots,\underbrace{H_{\neg}(a_{i'_l})}_{\text{אם קיים ל' אחרת כל הארגומנטים ל-H' שלו שלה!}},\dots,a_{i'_{m'}}),H''(a_{i''_1},\dots,\underbrace{H_{\neg}(a_{i''_l})}_{\text{אם קיים ל'' אחרת כל הארגומנטים ל-H'' שלו שלה!}},\dots,a_{i''_{m''}}))=$$

$$=H(a_1,\dots,a_{i-1},H_{\neg}(a_i),a_{i+1},\dots,a_m)$$

כלומר H מקיימת (I) ביחס לקלט ה-i שלה.

בכל מקרה H מקיימת (I) ביחס לקלט ה-i שלה או H מקיימת (II) ביחס אליו

מנכונות הטענה עבור $k=n$ טבעי חיובי מנכונות הטענה עבור

כל $k<n$ טבעי חיובי ולפי עקרון האינדוקציה השלמה, הטענה נכונה לכל n טבעי

מיד כאן בשלילה כי $H_{\wedge}$ (בונקציית אמת לכל הדעות)

שתנת לצורה ע"י $\{H_{\neg},H_{\leftrightarrow}\}$, כלומר $H_{\wedge}$ שמקיים $\{H_{\neg},H_{\leftrightarrow}\}$ טבעי חיובי,

ע"פ הרצאה כי ביחס לכל אחד מקלטיה היא מקיימת (I) או (II)

$$H_{\wedge}(\top,\top)=\top\neq\bot=H_{\wedge}(\bot,\top)=H_{\wedge}(H_{\neg}(\top),\top)$$

$\Leftarrow$ $H_{\wedge}$ לא מקיימת (I) ביחס לארגומנט הראשון שלה $\Leftarrow$ היא מקיימת (II)

ביחס אליו, אזי:

$$\top=H_{\neg}(\bot)=H_{\neg}(H_{\wedge}(H_{\neg}(\top),\bot))=H_{\wedge}(\top,\bot)=\bot$$

וזו סתירה לכך ש-$H_{\wedge}$ שתנת לצורה ע"י $\{H_{\neg},H_{\leftrightarrow}\}$, אזי לא כל

כולם קבוצות אמת ניתנות לתיאור ע"י $\{H_{\rightarrow}, H_{\leftrightarrow}\}$

תרגיל 3 במבוא ללוגיקה

1. קריאה יחידה בתחשיב הפסוקים: *אלגברת יצירה* A היא זוג (A,F) כאשר A קבוצה לא ריקה ו $F=\{f_i \mid i\in I\}$ קבוצה של פונקציות כך שלכל i קיים n_i טבעי כך ש f_i היא פונקציה n_i מקומית מ A^{n_i} ל A. נרשה גם פונקציות 0 מקומיות שהם בהגדרה יהיו קבועים ב A. תהי $B\subseteq A$ תת קבוצה ויהי $a\in A$ נאמר כי a *נוצר* מ B אם קיימת סדרה $\{a_1,...,a_n\}$ של אברים ב A כך ש: $a_n=a$ וכן לכל i או ש $a_i\in B$ או שקימת $f\in F$ פונקציה n מקומית וקיימים $j_1,...,j_n<i$ כך ש $f(a_{j_1},..,a_{j_n})=a_i$. *תת-אלגברה* (C,F) של A היא תת קבוצה $C\subseteq A$ הסגורה תחת הפונקציות (והקבועים).

a. הוכיחו כי לכל תת-קבוצה $B\subseteq A$ קיימת תת-אלגברה מינימלית המכילה את B. לאלגברה זו נקרא *האלגברה הנוצרת ע"י* B.

נניח כעת כי האלגברה A נוצרת ע"י תת קבוצה B, נאמר כי היא *נוצרת באופן חופשי* אם לכל $a\in A$ אם מתקיים: $a=f(a_1,...,a_n)=g(b_1,...,b_m)$ אז $a\notin B$, $n=m$ ו $f=g$ וגם לכל $1\le i\le n$ מתקיים $a_i=b_i$ כלומר a נבנה באופן יחיד.

תהי $L=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ קבוצה של סימנים (פסוקים אטומים) נגדיר אלגברה $\Phi=(A,C)$ כאשר A היא קבוצת כל הביטויים מהקבוצה $\{P_\alpha\}\cup\{(,),\neg,\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}$ ו $F=\{c_\wedge,c_\vee,c_\to,c_\leftrightarrow,c_\neg\}$ כאשר אם $a,b\in A$ אז: $c_\neg(a)=(\neg a)$, $c_\square(a,b)=(a\square b)$ (הסימון שונה מתרגיל 2).

b. הוכיחו כי התת-אלגברה $\Psi=(B,C)$ של Φ הנוצרת ע"י $L=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ היא נוצרת חופשית מ L. הדרכה: הראו ראשית שלכל פסוק ב B מספר הסוגרים הימניים שווה לשמאליים ובכל רישא שלו, שאינה הכל, מספר הסוגרים השמאליים גדול ממספר הימניים. הסיקו כי רישא של פסוק B היא לא פסוק ב B.

2. נגדיר מודל M להיות פונקציה מקבוצת הפסוקים האטומים לקבוצת ערכי האמת ונסמן: $M:L\to\{T,F\}$. ראינו כי אפשר להרחיב פונקציה כזו לקבוצת כל הפסוקים. יהי $\varphi\in B$ נגדיר $Mod(\varphi)=\{M:M(\varphi)=T\}$. נאמר כי φ *שקול* לפסוק ψ ונרשום $\varphi\equiv\psi$ אם $Mod(\varphi)=Mod(\psi)$. נאמר כי ψ *נבע* מ φ ונסמן $\varphi\models\psi$ אם $Mod(\varphi)\subseteq Mod(\psi)$. נאמר כי φ היא *טאוטולוגיה* אם $Mod(\varphi)$ היא קבוצת כל המודלים לשפה ונסמן $\models\varphi$. אם $Mod(\varphi)$ היא ריקה נאמר כי φ היא *סתירה*. הוכח את הטענות הבאות:

a. $\chi\equiv\psi$ אם"ם $\varphi\models\psi$ וגם $\psi\models\varphi$.
b. אם $\varphi\models\psi$ וגם $\psi\models\chi$ אז $\varphi\models\chi$.
c. $\varphi\models\psi_1$ וגם $\varphi\models\psi_2$ אם"ם $\varphi\models(\psi_1\wedge\psi_2)$.
d. $\varphi_1\models\psi$ וגם $\varphi_2\models\psi$ אם"ם $(\varphi_1\vee\varphi_2)\models\psi$.
e. יהי φ פסוק הראה כי הטענות הבאות שקולות:
   i. $\models\varphi$.
   ii. לכל ψ מתקיים $\psi\models\varphi$.
   iii. $\neg\varphi\models\varphi$.
   iv. $\neg\varphi$ הוא סתירה.
   v. קיים פסוק ψ כך ש $\psi\models\varphi$ וגם $\psi\models\neg\varphi$.
f. נניח כי L היא אין סופית הוכח כי לכל פסוק שאינו סתירה יש אין סוף מודלים.
g. נניח כי L סופית והראה כי קיים פסוק φ שאינו סתירה אבל לכל ψ אם $\varphi\models\psi$ אז $\varphi\equiv\psi$ או ש ψ סתירה.
h. האם הסעיף נשאר נכון אם נניח ש L היא אין סופית.

פתרון תרגיל 3

1 א. תהי $B\subseteq A$ תת קבוצה בשני נסמן ע"י המשפחה:
$F=\{C \mid$ C תת אלגברה של A המכילה B$\}$. קבוצה
לא ריקה כי היא מכילה את כל
האלגברה A (נשתמש ב A עם תפקיד האלגברה
לתת תפקיד עליונה). נסמן ע"י $\tilde{B}=\bigcap_{C\in F} C$

(i) $\tilde{B}$ היא תת אלגברה: מתקיים אם כל $C\in F$
היא תת אלגברה בוודאי תת קבוצה סגורה
לפונקציות ומכילה גם הקבוצות $\bigcap_{C\in F} C$
סגורה לפונקציות ומכילה גם כל הקבוצות.

(ii) $B\subseteq\tilde{B}$: מתקיים שלכל $C\in F$ מתקיים
$B\subseteq C$ לכן B מוכל בחיתוך

(iii) $\tilde{B}$ מינימלית: אם $\tilde{C}$ תת אלגברה המכילה
את B אזי $\tilde{C}\in F$ ולכן $\bigcap_{C\in F} C\subseteq\tilde{C}$.

ב. תהי B רשת אמיתית של Φ הקיימת ע"י $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ ל-L

i) לכל איבר $\varphi\in B$ מספר הסימנים הימניים שלה

למספר הסימנים השמאליים גדול כשאו שווים בקבוצה

ומספר הימניים קטן שווה למספר השמאליים

הוכחה: באינדוקציה על גודל של φ:

- אם φ משתנה גודל באורך 1 אין מקרה

שאין פונקציה, המקיימת $\varphi\in L = P_\alpha$ ומשתנה

יחיד.

- נניח כי $\varphi = \varphi_n, \ldots, \varphi_1$ סדרת גודל φ

לפי הגדרה של סדרת גודל מתקיים אחד

מהבאים: $\varphi_n = P_\alpha \in L$ (מקרה הבסיס) $\varphi_n = (\varphi_i \square \varphi_j)$ (I

$n>i,j$ אין מניחים

אז הנחת האינדוקציה מתקיים φ_i, φ_j לכן

גדל לחלוטין ש מספר הסימנים הימניים ב φ_n שווה למספר

של הסימנים השמאליים ומכל כשאו מתקיים

לגבי הפרק השמאלי הכולשון שמתקיים שכן הינו

הקטע מתקיים

ג) $\varphi_n = (\neg\varphi_i)$ $n>i$ (מקרה ל I).

מסקנה: רשומה של פסוק אינה פסוק.

<u>קורולר</u>: הרשומה אינה מספר הסימנים אינם אין

מספר מספרים רשומיים ב B.

<u>הערה</u>: פסוק הוא פשוט יותר מ B.

כלומר עובדה שצריך להוכיח לפשוט.

לשם כך נניח לרגעים את הקיום

— יהי $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$ פסוקים המקיימים $(\varphi_1 \square \varphi_2) = (\varphi_1' \Delta \varphi_2')$

אז $\square = \Delta$ ו $\varphi_i = \varphi_i'$ לכל $i = 1, 2$ ($\square, \Delta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$)

— יהי φ_1, φ_1' פסוקים אזי $(\neg\varphi_1) \neq (\varphi_1' \square \varphi_2')$

— יהי φ_1, φ_2 פסוקים המקיימים $(\neg\varphi_1) = (\neg\varphi_2)$

אז $\varphi_1 = \varphi_2$.

<u>קורולר</u> — נניח כי $(\varphi_1 \square \varphi_2) = (\varphi_1' \Delta \varphi_2')$

אזי אפשר לבטא את הסימנים $\varphi_1 \square \varphi_2 = \varphi_1' \Delta \varphi_2'$

לפי φ_1' הוא רישא של φ_1 ו φ_1 הוא רישא של φ_1' ושניהם

פסוקים לפי המסקנה $\varphi_1 = \varphi_1'$ ולכן:

$\square \varphi_2 = \Delta \varphi_2'$

לכן $\square = \Delta$ ומכאן $\varphi_2 = \varphi_2'$.

— נניח T $(\neg\varphi_1) = (\varphi_1' \square \varphi_2')$

אם נקבל כי הנוסחא φ_1' מתקיים בסימן ד
קל להראות (באינדוקציה על גודל הנוסחא) כי כל
נוסחא הלא אטומית מתקיים בסימן ד.
לכן לא יכול להיות ש φ_1' מתקיים בסימן ד
לכן $(\neg\varphi_1) \neq (\neg\varphi_2)$.

– אם $(\neg\varphi_1) = (\neg\varphi_2)$
אזי בהכרח כי $\varphi_1 = \varphi_2$.

---

2. a. $\chi \equiv \psi$ אם ורק אם $Mod(\chi) = Mod(\psi)$
אם $Mod(\chi) \subseteq Mod(\psi)$ אם ורק אם $Mod(\chi) \supseteq Mod(\psi)$ אם ורק אם
$\chi \models \psi$ אם ורק אם $\psi \models \chi$.

b. נניח $\varphi \models \psi$ ואם $\psi \models \chi$ נקבל $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)$
אם $Mod(\psi) \subseteq Mod(\chi)$ אם ורק אם $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\chi)$ אם ורק אם
$\varphi \models \chi$ מתקיים.

c. $\varphi \models \psi_1$ אם ורק אם $\varphi \models \psi_2$ אם ורק אם
$Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi_1)$ אם ורק אם $Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi_2)$ אם ורק אם
לכל מודל A מתקיים $A(\varphi) = T$ אם ורק אם $A(\psi_1) = T$ אם ורק אם
$A(\psi_2) = T$.

אם $A(\varphi)=T$ עבור מפה A לכל φ אז $A(\psi_1\wedge\psi_2)=T$

אם $Mod(\varphi)\subseteq Mod(\psi_1\wedge\psi_2)$ אזי $\varphi\models\psi_1\wedge\psi_2$.

d. $\varphi_1\models\psi$ ו $\varphi_2\models\psi$ אזי לכל מפה A

אם $A(\varphi_2)=T$ ו $A(\varphi_1)=T$ אז $A(\psi)=T$

אזי לכל מפה A אם $A(\varphi_1\vee\varphi_2)=T$

אז $A(\psi)=T$ אזי $\varphi_1\vee\varphi_2\models\psi$.

e. <u>i ⇐ ii</u>: לפי הגדרה $Mod(\varphi)$ מתאפס

לכל ψ אם לכל ψ $Mod(\psi)\subseteq Mod(\varphi)$ אזי

לכל ψ $\psi\models\varphi$

<u>ii ⇐ iii</u>: נניח $\psi=\neg\varphi$ נקבל $\varphi\models\neg\varphi$.

<u>iii ⇐ iv</u>: לכל פסוק φ קיים מודל כך $Mod(\varphi)\cap Mod(\neg\varphi)=\phi$

אם אין $Mod(\neg\varphi)\subseteq Mod(\varphi)$ נקבל כי

אינו מספיק אם $Mod(\neg\varphi)=\phi$ אזי $\neg\varphi$

סתירה.

<u>iv ⇐ v</u>: אם $\neg\varphi$ סתירה אזי $Mod(\neg\varphi)=\phi$ אזי

$\neg\varphi\models\varphi$ ולכן כי $\varphi\models(\neg\neg\varphi)=\varphi$ אם נניח

$\psi=\neg\varphi$.

$i \Leftarrow v$ אם ψ נוסחא אז $Mod(T\psi) \cup Mod(\psi)$
הוא קבוצה של המבנים כי כל מבנה A או $A(\psi)$;
או שי $T = A(T\psi)$ לכן לפי הנחה נקבל כי
$Mod(T\psi) \cup Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$ לכן לכל מבנה
A $T = A(\varphi)$ ולכן $\models \varphi$.

ד. ~~הוכחה~~ נניח בלשון אם ψ נוסחא ו $P_1, \dots, P_n$ נוסחאות
אטומיות המופיעות בה נסמן n ו H_φ כן
הפונקציה שמתאימה ל n ערכים H_φ כן
לכל מבנה A $A(\varphi) = H_\varphi(A(P_1), \dots, A(P_n))$

נוכיח הנחה על φ:
אם $\varphi = P_i$ נוסחא אטומית אזי קבוע שני
מבנים נתון אם הפונקציה בינארית לפונקציה הזאת על
הפונקציה i.

אם $\psi \vee \eta$ אזי אם לפי הנחת הפונקציה
פונקציה H_ψ כך ש $A(\psi) = H_\psi(A(P_1), \dots, A(P_n))$
ולכן קבוע כי $H_\varphi = H_\vee(H_\psi)$

אם $\varphi = \psi_1 \square \psi_2$ כאשר ψ_1 ו ψ_2 נוסחאות קטנות יותר

אם נניח כי קיימים H_{ψ_1} ו H_{ψ_2} ואז לפי הגדרה

$$H_\varphi = H_\square(H_{\psi_1}, H_{\psi_2})$$ ולכן

נמשיך.

כלומר אם משפט φ נתון בשפה $L = \{P_\alpha\}_{\alpha\in I}$

ו $|I|$ לא סופי. אפשר שגם משפט כזה אמת

סופי של סימנים יש רק אמצעי סופי של

משתנים שם $P_1, \dots, P_n$ אם φ אמת אז קיים

אם φ אינו תאוטולוגיה יש אמצעי A כך ש

$A(\varphi) = T$. כלומר לפי אמצעי $A' : \{P_\alpha\}_{\alpha\in I} \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$

יש אין סוף כאלו קיימים אמצעי $A'' : \{P_\alpha\}_{\alpha\in I}$

מקיים הרחבה $A''(P_\alpha) = A'(P_\alpha)$ $\alpha \neq 1, \dots, n$

$A''(P_\alpha) = A(P_\alpha)$ $\alpha = 1, \dots, n$

לכן $A''(\varphi) = H_\varphi(A''(P_1), \dots, A''(P_n)) = H_\varphi(A(P_1), \dots, A(P_n))$

$= A(\varphi) = T.$

(כלומר A'' כאלו.

ינאי גוטליבסקי

דף תרגילים יומא 18-19

תרגיל בתרגול לוגיקה

10

2) מסימוני השאלה:

a) יהיו ψ, χ, φ פסוקים, אזי:

$$((\psi \models \varphi) \wedge (\varphi \models \psi)) \overset{\text{הגדרת נכונות}}{\iff} ((Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)) \wedge (Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)))$$

$$\overset{\text{שוויון הכלות שקולות הדדית}}{\iff} (Mod(\varphi) = Mod(\psi)) \overset{\text{הגדרת שקילות}}{\iff} (\varphi \equiv \psi)$$

כלומר $\varphi \equiv \psi$ אם"ם $\psi \models \varphi$ וגם $\varphi \models \psi$.

b) יהיו φ, ψ, χ פסוקים, אזי:

$$((\varphi \models \psi) \wedge (\psi \models \chi)) \overset{\text{הגדרת נכונות}}{\iff} ((Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi)) \wedge (Mod(\psi) \subseteq Mod(\chi)))$$

$$\overset{\text{טרנזיטיביות ההכלה}}{\implies} (Mod(\varphi) \subseteq Mod(\chi)) \overset{\text{הגדרת נכונות}}{\iff} (\varphi \models \chi)$$

כלומר אם $\psi \models \varphi$ וגם $\chi \models \psi$ אזי $\chi \models \varphi$.

c) יהיו φ, ψ_1, ψ_2 פסוקים, אזי:

$$(\varphi \models (\psi_1 \wedge \psi_2)) \overset{\text{הגדרת נכונות}}{\iff} (Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi_1 \wedge \psi_2)) \overset{\text{הגדרת Mod}}{\iff} (Mod(\varphi) \subseteq \{M : M(\psi_1 \wedge \psi_2) = T\})$$

$$\overset{\text{תכונות מודל הבולאי}}{\iff} (Mod(\varphi) \subseteq \{M : (M(\psi_1) = T) \wedge (M(\psi_2) = T)\}) \overset{\text{הגדרת קבוצה}}{\iff}$$

$$(\forall M((M \in Mod(\varphi)) \to ((M(\psi_1) = T) \wedge (M(\psi_2) = T)))) \overset{\text{הגדרת Mod}}{\iff}$$

$$(\forall M((M \in Mod(\varphi)) \to ((M \in Mod(\psi_1)) \wedge (M \in Mod(\psi_2))))) \iff$$

$$(\forall M((M \in Mod(\varphi)) \to (M \in Mod(\psi_1)))) \wedge (\forall M((M \in Mod(\varphi)) \to (M \in Mod(\psi_2)))) \overset{\text{הגדרת הכלה}}{\iff}$$

$$(Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi_1)) \wedge (Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi_2)) \overset{\text{הגדרת נכונות}}{\iff} ((\varphi \models \psi_1) \wedge (\varphi \models \psi_2))$$

כלומר $\varphi \models \psi_1$ וגם $\varphi \models \psi_2$ אם"ם $\varphi \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$.

d) יהיו $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ פסוקים, אזי:

$$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \models \psi) \overset{\text{הגדרת נכונות}}{\iff} Mod(\varphi_1 \vee \varphi_2) \subseteq Mod(\psi) \overset{\text{הגדרת Mod}}{\iff} (\{M : M(\varphi_1 \vee \varphi_2) = T\} \subseteq Mod(\psi))$$

$$\overset{\text{תכונות המודל הבולאי}}{\iff} (\{M : (M(\varphi_1) = T) \vee (M(\varphi_2) = T)\} \subseteq Mod(\psi)) \overset{\text{הגדרת הכלה}}{\iff}$$

$$(\forall M(((M(\varphi_1) = T) \vee (M(\varphi_2) = T)) \to (M \in Mod(\psi)))) \overset{\text{הגדרת Mod}}{\iff}$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

$$(\forall M(((M\in Mod(\varphi_1))\vee(M\in Mod(\varphi_2)))\to(M\in Mod(\psi))))\iff$$

$$((\forall M((M\in Mod(\varphi_1))\to(M\in Mod(\psi))))\wedge(\forall M((M\in Mod(\varphi_2))\to(M\in Mod(\psi))))) \iff$$

$$((Mod(\varphi_1)\subseteq Mod(\psi))\wedge(Mod(\varphi_2)\subseteq Mod(\psi))) \overset{\text{הגדרת הכלה}}{\iff} ((\varphi_1\models\psi)\wedge(\varphi_2\models\psi)) \overset{\text{הגדרת הכלה}}{\iff}$$

כלומר, $\varphi_1\models\psi$ ו $\varphi_2\models\psi$ אמ"מ $(\varphi_1\vee\varphi_2)\models\psi$

(e) נראה: יהי ψ פסוק, אז: $\psi\models\psi$ כי $Mod(\psi\wedge\psi)$ ו $Mod(\psi\vee\psi)$ כאשר M קבוצת כל המודלים בשפה.

הוכחה:

$$Mod(\psi\vee\neg\psi)\overset{\text{הגדרת}}{=}\{M: M(\psi)=T\vee M(\psi)=F\}=\{M: M(\psi)\subseteq\{T,F\}\}=\mathcal{M}$$

כי המודלים הם פונקציות נוכל

$$Mod(\psi\wedge\neg\psi)\overset{\text{הגדרת}}{=}\{M: M(\psi)=T\wedge M(\psi)=F\}=\{M: M(\psi)\subseteq\{T\}\cap\{F\}\}=\{M: M(\psi)\subseteq\emptyset\}=\emptyset$$

כי סתירה

$$Mod(\psi)=Mod(\psi)\Rightarrow Mod(\psi)\subseteq Mod(\psi)\Rightarrow\psi\models\psi$$

נרצה להוכיח הטלה: יהי φ פסוק.

i ⇐ ii: נניח $\varphi\models\psi$, יהי ψ פסוק אז: $Mod(\varphi)\overset{\text{הגדרת}}{\subseteq}\mathcal{M}\overset{\text{הגדרת}}{\subseteq}Mod(\psi)\overset{\text{הגדרת}}{\Rightarrow}\varphi\models\psi$

ii ⇐ iii: נניח כי לכל פסוק ψ מתקיים: $\varphi\models\psi$. בפרט $\varphi\models\neg\varphi$ אז $\varphi\models\neg\varphi$ פסוק

iii ⇐ iv: נניח $\varphi\models\neg\varphi$. תהי φ אז: $(\varphi\wedge\neg\varphi)\models\varphi$ ⇐ $Mod(\varphi\wedge\neg\varphi)\subseteq Mod(\varphi)$ ⇐ $\emptyset\subseteq Mod(\varphi)$ ⇐ φ סתירה

iv ⇐ v: נניח φ סתירה. נסמן $\varphi=\psi$. תהי $\varphi\models\psi$ וכן $Mod(\varphi)=\emptyset\subseteq Mod(\psi)$ אז $\varphi\models\neg\psi$ ⇐ $(\varphi\models\psi)\wedge(\varphi\models\neg\psi)$

v ⇐ i: נניח קיים ψ עבור $\varphi\models\psi$ וכן $\varphi\models\neg\psi$ אז (מ-ה) $\varphi\models(\psi\wedge\neg\psi)$ ⇐ $Mod(\varphi)\subseteq Mod(\psi\wedge\neg\psi)=\mathcal{M}$ הגדרת המודלים ⇐ $\varphi\models\psi$

בסה"כ: i ⇐ ii ⇐ iii ⇐ iv ⇐ v ⇐ i אז כל הטענות הללו שקולות.

(f) נניח כי L אינסופית. יהי φ פסוק שאינו סתירה ויהי M מודל כך ש $M(\varphi)=T$. φ סופי ולכן קיימים אינספר פסוקים אטומיים מ-L שאינם ב-φ. נסמן אותם קבוצת L'. כמת לכל i נגדיר M_i - המודל המקבל את אותו הערך כמו M על כל פרט ל-i, ומקבל על i ערך הפוך מ-M. נבנה את M_i לקבוצת כל הפסוקים. $M_i(\varphi)$ אינו תלוי ב-i ולכן $M_i(\varphi)=M(\varphi)=T$ (אי תלות נובעת מהגדרת הפונקציה לפסוק תלוי-אטומים)

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

נסמנה $L=\{l_1,\dots,l_n\}$

(ג) נניח כי L סופית. נבנה סדרת פסוקים $\varphi_1,\dots,\varphi_n$

כדלקמן: (א) $\varphi_1=l_1$ (ב) לכל $1<k\le n$ שלם: $\varphi_k=(\varphi_{k-1}\wedge(l_k))$

נניח בשלילה ~~לכל~~ כי M מודל כך ש $M(\varphi_n)=T$.

שקיים $1\le k\le n$ כך ש $M(l_k)=F$, אזי: $M(\varphi_k)=M(\varphi_{k-1}\wedge(l_k))=$

$=M(\varphi_{k-1})\wedge M(l_k)=M(\varphi_{k-1})\wedge F=F$

נוכיח כעת באינדוקציה: ~~לכל~~ כי לכל $n\ge k'\ge k$

שלם: $M(\varphi_{k'})=F$.

בסיס: $M(\varphi_k)=F$ הראינו.

צעד: נניח כעת $M(\varphi_{k'})=F$ עבור $n>k'\ge k$ ונוכיח $M(\varphi_{k'+1})=F$:

$M(\varphi_{k'+1})=M(\varphi_{k'}\wedge(l_{k'+1}))=M(\varphi_{k'})\wedge M(l_{k'+1})=F\wedge M(l_{k'+1})=F$

וע"פ עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n\ge k'\ge k$ שלם

ובפרט: $M(\varphi_n)=F$ וזו סתירה, אזי לכל $1\le k\le n$ לפחות $M(l_k)=T$.

כלומר, אם קיים מודל M כך ש $M(\varphi_n)=T$, הרי שהוא

מכיל מודל מונפה הלקוחות ע"ערכיו על כל הפסוקים הבסיסיים

יחיד. נגדיר כעת M' המודל המוגדר כדלקמן:

לכל $l\in L$: $M'(l)=T$. נוכיח באינדוקציה, הסימונים

מתחלפים, כעת: לכל $1\le k\le n$ שלם: $M'(\varphi_k)=T$.

בסיס: $M'(\varphi_1)=M'(l_1)=T$ מהגדרת M'

צעד: נניח כעת $M'(\varphi_k)=T$ עבור $n>k\ge 1$ ונוכיח $M'(\varphi_{k+1})=T$:

$M'(\varphi_{k+1})=M'(\varphi_k\wedge(l_{k+1}))=M'(\varphi_k)\wedge M'(l_{k+1})=T\wedge T=T$

וע"פ עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n\ge k\ge 1$ שלם.

כלומר M' המודל היחיד ~~שקיים~~ המאפיין T על φ_n. ובפרט φ_n לא סתירה.

$Mod(\varphi_n)=\{M'\}=$ וכי כעת פסוק ψ כך ש: $\psi\models\varphi_n$

$Mod(\psi)\subseteq Mod(\varphi_n)=\{M'\}=$, כלומר מתקיים אחד משני

~~המקרים~~ המקרים: (א) $Mod(\psi)=\emptyset$ כלומר ψ סתירה (ב) $Mod(\psi)=\{M'\}\Leftarrow\psi\equiv\varphi_n$

בראיה קיום פסוק (הוא φ_n) שאינו סתירה אבל לכל ψ אם $\psi\models\varphi$ אזי $\psi\equiv\varphi$ אוי סתירה

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

יהי L שלם. שני מ' אלו $M_1(L)=M_2(L)\neq M(L)$ ובכל זאת $M_1\neq M_2$
אי אפשר ש-L אינסופית, כי $M_1|_L$ הקבוצה אינסופית
של מודלים שונים המתאימים לכל אחת מהם אבל לי-ש
יש אינסוף מודלים.

■

הסבר לשאלה הראשונה בהנחה שתמשתנה:
נוכיח באינדוקציה: יהי ש פסוק בעל n אותיות, יהי M
מודל ויהי ש פסוק אטומי שאינו מ"ז ב-ש. ויהיו M_1,M_2
מודלים המתאימים לכל פסוק אטומי שונה מ-ש
ומתאימים לכל שונה לפחות ש, אז: $M(\varphi)=M_1(\varphi)=M_2(\varphi)$
יהי $k=1$ לפי ונניח מנכונות הטענה לכל
$1\leq k<n$ לפי ונוכיח זה עבור $k=n$.
(א) אם $k=1$. ש בעל אותיות אחת ולכן הוא פסוק אטומי.
ש אינו מוכל ב-ש ולכן ש≠ש אבל לכן הנתון $M(\varphi)=M_1(\varphi)=M_2(\varphi)$
אם $k\neq 1$: ש הינו מן הצורה "שר" או "שס"ש (□ יחס בן-מקומי)
נטפל בכל מקרה לחוד:
(ב) ש מן הצורה "שר" כאשר "ש פסוק, אבל
ש אינו מוכל ב-ש שגודלו $k-1$ ולכן מתכונות
מודל ומהנחת האינדוקציה: $M(\varphi)=M(\text{"שר"})=M(\text{"ש"})=M_1(\text{"ש"})=M_1(\text{"שר"})=M_1(\varphi)$
(ג) ש מן הצורה "שס"ש (□ יחס בן-מקומי) כאשר "ש,"ש פסוקים,
אבל ש אינו מוכל ב-ש שגודלם $<k$ וב-"ש שגודלם $<k$ ולכן
מתכונות מודל ומהנחת האינדוקציה: $M(\varphi)=M(\text{"ש□ש"})=M(\text{"ש"})\square M(\text{"ש"})=M_1(\text{"ש"})\square M_1(\text{"ש"})=M_1(\text{"ש□ש"})=M_1(\varphi)$
ובכל מקרה $M(\varphi)=M_1(\varphi)$.
מנכונות הטענה עבור $k=n$ לפי מנכונותה עבור $1\leq k<n$
לפי הטענה נכונה לכל $n\geq 1$ לפי
הנבון את אותיות שאלה (1)

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

(1) (א) בסימונים השאלה תהי $B\subseteq A$ תת-קבוצה.
נגדיר: C - קבוצת כל האיברים הנולדים מ-B.

טענה: $C\subseteq A$

הוכחה: יהי $c\in C$ אזי c נולד ע"י B כלומר קיימת סדרה $\{a_1,\dots,a_n\}$ של איברים ב-A כך ש-$c=a_n$ וכן לכל i או $a_i\in B$ או שקיימת $f\in F$ בינארית m מקומית ו-$i>j_1^i,\dots,j_m^i$ כך ש-$a_i=f(a_{j_1^i},\dots,a_{j_m^i})$.

אמרת האינדוקציה כי לכל $1\le k\le n$ טבעי $a_k\in A$:
יהי $1\le l\le n$ טבעי ונניח נכונות הטענה לכל $1\le k<l$ טבעי ונוכיחה עבור $k=l$:

(א) אם $a_k\in B$ אזי $a_k\in A$

(ב) אחרת קיימים $j_1^k,\dots,j_m^k<k$ כך ש-$a_k=f(a_{j_1^k},\dots,a_{j_m^k})$, מהנחת האינדוקציה לכל $1\le j_i^k\le m$ טבעי $a_{j_i^k}\in A$ ולכן מהגדרת f $a_k\in A$.

מנכונות הטענה לכל $1\le k<l$ טבעי מנכונותה לכל $1\le k<l$ טבעי הטענה נכונה לכל $1\le k\le n$ טבעי ובפרט $c=a_n\in A$.

טענה: (C,F) תת-אלגברה של (A,F)

הוכחה: תהי $f\in F$ בינארית m מקומית ויהיו $c_1,\dots,c_m\in C$. נבאה ש: $c=f(c_1,\dots,c_m)\in C$.
לכל $1\le k\le m$ קיימת $\{c_1^k,\dots,c_{n_k}^k\}$ ב-C כך ש כל c_i^k בנוי מהפעלת בינארי ו-F על קודמיו ב-B ו-$c_{n_k}^k=c_k$.
נבנה סדרה: $\{c_1^1,\dots,c_{n_1}^1,c_1^2,\dots,c_{n_2}^2,\dots,c_1^m,\dots,c_{n_m}^m,c\}$
מהגדרת c_i^k כל איבר בסדרה בנוי מהפעלת בינארי ו-F על קודמיו או ב-B.
כאן כן c נולד מ-$c_1,\dots,c_m$ שקודמים לו בסדרה, כלומר כל איבר בסדרה בנוי מהפעלת בינארי ו-F על קודמיו או ב-B, אזי c נולד ע"י B ולכן c שייך כלומר C סגורה תחת הפונקציות והקבועים.

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

תת־פי (F', C') תת־אלגברה של (A,F) המכילה את B.

טענה: $C' \subseteq C$.

הוכחה: יהי $c \in C$. נבנה את ההוכחה הקודמת לקבלת סדרה $c_1, \dots, c_n$ כך ש־ $c_n = c$ וכן כל c_i (מלבד לראשון) הינו B-מ (ולכן $C' - C$) אין בלי של הפעלת פונ' F על קודמיו לו.

כדי להראות שהוקלדה ניתן להוכיח בהוכחה בהראשונה שלכל $1 \le k \le n$ $c_k \in C'$, ולכן $c \in C'$.

הראינו שלכל $c \in C$ מתקיים $c \in C'$ אזי $C \subseteq C'$.

הראינו ש־(C,F) תת־אלגברה של A המכילה את B ומוכלת בכל תת־אלגברה של A המכילה את B, אזי היא תת־אלגברה מינימלית המכילה את B.

ובפרט קיימת תת־אלגברה מינימלית של A המכילה את B.

ב) מינימוני והגדרות השאלה:

טענה: יהי $b \in B$ פסוק באורך חסום, אזי מס' הסגר"ם הימניים בו (נסמנו $R(b)$) שאינם שאולים ובכל רישא שלו יש יותר סגרים שאולים ימניים מימניים.

הוכחה באינדוקציה על n: יהי $k \ge 1$ טבעי ונניח נכונות הטענה לכל $n \ge k$ טבעי ונוכיח עבור $n = k$.

יהי אם כן $b \in B$ פסוק באורך K. אם $K = 1$ אזי $b \in L$ ולכן $R(b) = 0 = L(b)$ ובאופן ריק לכל רישא NNE שלו h מתקיים: $R(h) < L(h)$.

אותרת $k = 1$.

אם b מהצורה $(\neg b')$ כאשר $b' \in B$: b' באורך $k-1$ ולכן מקיים את הטענה לפי הנחת האינדוקציה יהי $R(b) = R(b') + 1 = L(b') + 1 = L(b)$. תהא h רישא NNE של b, אזי: אם $h = (\neg$ אז $L(h) = 1 > 0 = R(0)$:

(II) אותה כמו $h=(\neg h')$ כאשר h' כישלו של h (*) ולפי
הנחת האינדוקציה: $L(h)=1+L(h')\geq 1+R(h')>h(h')=R(h)$

(ג) אותה כמו b מהצורה $(b'\square b'')$ כאשר $b',b''\in B$ מאורך
$<k$ ולכן מקיים את הטענה לפי הנחת האינדוקציה.
ולכן: $L(b)=1+L(b')+L(b'')=1+R(b')+R(b'')=R(b)$

תהא h כישלון של b, אזי: (I) $h=(h')$ כאשר h' כישלון (אולי
יקה) של b' (אז h' = כל b') ואז $L(h)=1+L(h')\geq 1+R(h')>R(h')=L(h)$

(II) אותה כמו $h=(h'\square h'')$ כאשר h' כישלון (אולי יקה)
של b'' (אז h'' = כל b'') $L(h)=1+L(b')+L(b'')\geq 1+R(b')+R(b'')>R(b')+R(b'')=R(h)$

הבאתי שבכל מקרה: $L(h)>R(h)$.

מבוגות הטענה בעבור $n=k$ מבוגותה עבור כל $n<k$
אמיתי, ולפי עקרון האינדוקציה השלמה, הטענה נכונה לכל
$n\geq 1$ אמיתי.

כעת נוכל להוכיח את הטענה:

יהי $b\in B$ כך ש $b=f(a_1,\dots,a_n)=g(b_1,\dots,b_m)$ עבור $f,g\in F$
ו- $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m\in\Sigma$ אזי:

(א) b מהצורה $(a_1\square a_2)$ או $(\neg a_1)$ ובכל מקרה סמל
הראשון בו הוא סוגר ולכן הוא אינו סימן אטומי כלומר $b\notin L$

(ב) אם $f=c_\neg$ אזי הסמל השני ב- b הינו $\neg$. אם $g\neq c_\neg$
אזי הסמל השני ב- b הוא מתוך L (או) ולכן $g=c_\neg$
ולכן $n=m=1$ $\Leftarrow$ b מהצורה $(\neg b_1)$ וכן מהצורה $(\neg a_1)$
ולכן הסיפא עם הסימן הראשון של הכישלון מהסימן ה-3
של b שווה ל- b_1 וכן ל- a_1 $\Leftarrow$ $a_1=b_1$ והטענה הוכחה.

(ג) אותה כמו $f=c_\square$ עבור $\square\neq\neg$ אזי הסמל השני ב- b הינו מתוך
L (או) ולכן $g\neq c_\neg$ כי אם $g=c_\neg$ אזי הסמל השני ב- b
הינו $\neg$ ולכן $n=m=2$ $\Leftarrow$ b מהצורה $(a_1\square a_2)$ וכן מהצורה $(b_1\square b_2)$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

מכאן a_1 כישלו של b_1 או b_1 כישלו של a_1.
בהינ a_1 כישלו של b_1. יצוץ ל b_1
בסוק ולכן אם a_1 כישלו MNL של b_1, מס' הסעיפים
בו לא מאוזן ואלו הוא לא בסוק אלו מכיל ל a_1
בסוק נובע $a_1=b_1$ אלו b מהצורה: $(a_1 \square b_2)$ וכן
מהצורה $(a_1 \triangle b_2)$ אלו אם נסמן את אורכו של a_1 ב- k.
הסמל במקום ה $k+2$ ב- b שווה $\square$ וכן $\triangle$ ולכן $\triangle=\square$
לומר $f=g$. בגלל הסיכוי גם הסמן בלבני אתכון
של הכישלו המל במקום ה $k+3$ של b שווה הן ל- a_2
והן ל- b_2 ולכן $a_2=b_2$ והטענה הוכחה.
בכל המקרים הוכחתי: $L \not\models b$, $f=g$, $m=n$, $a_i=b_i$, $\forall 1\le i\le m$ אז נבנה כאן
יחיד ומהבנאה ψ נוכחת תוכשית $N-L$.
■

2 (h) נניח כי L אינסופית ונניח כי קיים בסוק φ שאינו סתירה
אבל לכל ψ אם $\varphi \not\equiv \psi$ אז $\psi \equiv \varphi$ או ψ סתירה.
מסעיף (ד) קיים $L \models \ell$ כך ש- ℓ לא מופיע ב- φ. נסמן: $\psi=(\varphi)\wedge\ell$.
יהי M מודל של φ בקיים כזה בו φ לא סתירה. ב- (ד) הסאתי
שהמודל M_ℓ המוגדר בהתאמה ערך הסוק $M-M$ אל ℓ ונרק פסה לבה של M
אל כל בסוק אטומי $\neq \ell$ אם כן מקיים: $M_\ell(\varphi)=T$. אם כן
הינ נניח שהתרנו את M מכאן כך ש $M(\ell)=T$. מתכונות מודל:

$$M(\psi)=M((\varphi)\wedge\ell)=M(\varphi)\wedge M(\ell)=T\wedge T=T$$

אלו ψ אינו סתירה. מאידך:

$$M_\ell(\psi)=M_\ell((\varphi)\wedge\ell)=M_\ell(\varphi)\wedge M_\ell(\ell)=T\wedge F=F$$

אלו $M_\ell \notin Mod(\psi)$ אך כאינו $M_\ell(\varphi)=T$ אלו $M_\ell \in Mod(\varphi)$ כלומר
$Mod(\varphi)\neq Mod(\psi)$ אלו $\varphi \not\equiv \psi$. יהי M מודל המקיים את ψ
אלו מתכונות מודל: $M(\varphi)\wedge M(\ell)=M((\varphi)\wedge\ell)=M(\psi)=T$
ומתכונות נימוס $\Longleftarrow M(\varphi)=T$ אלו $Mod(\psi)\subseteq Mod(\varphi)$
כלומר $\varphi \not\equiv \psi$.
מצאתי φ כך ש $\varphi \not\equiv \psi$ אבל $\psi \not\equiv \varphi$ ולכן ψ לא סתירה
ואז סתירה לקיום φ כנ"ל, אלו הטענה לא נכונה
אם L אינסופית.
■

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

דינה פלשר
20.11.05

תרגיל 4 במבוא ללוגיקה

תהי L שפה המכילה שני קבועים שני סימני פונקציה דו מקומיים וסימן יחס דו מקומי: $0,1,+,\times,<$ את סימן השוויון: $=$, משתנים: $x,y,z,..$ ואת הסימנים: $\neg,\vee,\exists$.

1. מבין ההיגדים הבאים קבע איזה הוא שם עצם, איזה נוסחה (שאינה אטומית) ואיזה נוסחה אטומית וכתוב אותם באופן הנלמד בשיעור, לדוגמא : $1<0 \Rightarrow <10$
   - a. $((1+x)\times y)+0)$
   - b. $((1+x)\times y)+0)=1$
   - c. $\neg(((1+x)\times y)+0)=1)$
   - d. $\exists x(x=1)$
   - e. $((1+x)=0)\vee(1<0)$
   - f. $(1\times y)<(0+x)$
2. כתוב את ההיגדים הבאים באופן המקובל וקבע עבור כל אחד אם הוא שם עצם נוסחה אטומית הוא נוסחה (שאינה אטומית) :
   - a. $\exists x\times+1x\times yz$
   - b. $+\times++xy\times11+01\times yz$
   - c. $<\times+1x+0z+yz$
   - d. $\vee\neg=xz\exists x<x1$
   - e. $\neg\exists x<++++11111x$
   - f. $<+\times+\times+xyzuvw1$
3. נוסיף כעת לשפה את הסימנים : $\rightarrow,\leftrightarrow,\forall,\wedge$. כתוב את הפסוקים הבאים בשפה המקורית כלומר ללא הסימנים החדשים באופן של שאלה 2 אך שמור על תרגום נכון לדוגמא: $\wedge<10=x1 \Rightarrow \neg\vee\neg<10\neg=x1$. כמו כן רשום אותם בשפה החדשה אך באופן המקובל (בדומה לשאלה 2).
   - a. $\forall x\leftrightarrow=x1<xy$
   - b. $\leftrightarrow=0x<10$
   - c. $\rightarrow\forall x=xy\exists y<y0$
   - d. $\wedge\wedge\wedge=xy=xz=zy$
   - e. $\leftrightarrow=xz<xy$
   - f. $\rightarrow\leftrightarrow\wedge\forall x=0x<+1yz=xy<xz$
4. בנוסחאות הבאות קבע עבור כל משתנה בפסוק אם הוא חסום, חופשי או שניהם:
   - a. $A\equiv\ \vee\exists x\exists y\vee=yz<xz=x1$.
   - b. $B\equiv\ (\exists x(x=1))\vee(x<z)$.
   - c. $C\equiv\ \neg\vee=xy\exists z\exists y=x+zy$.
   - d. $D\equiv\ \left(\exists w\left(\exists x(x=u)\rightarrow\exists u(u<w)\right)\right)\leftrightarrow\left(\exists z\left((x=1)\vee\left(\exists y(y<z)\right)\right)\right)$
   - e. $E\equiv\ \leftrightarrow\rightarrow\exists x\exists y\vee=yw=xy=zy\exists w=wx$.
   - f. $F\equiv\ \exists x\forall y\exists z=x+yz$.
5. עבור שמות העצם הבאים קבע אם ההצבות הבאות מותרות ורשום אותן מפורשות. נגדיר: $a\equiv+xy$, $b\equiv+\times xyz$, $c\equiv++x+1wz$. הסימנים $A,B,C,..$ הם מהשאלה הקודמת.
   - a. $A_x[a]$
   - b. $B_{x,z}[a,b]$
   - c. $C_{x,y}[b,c]$
   - d. $E_w[c]$
   - e. $D_x[a]$
   - f. $D_{x,z}[a,a]$

ינאי גולדמכר

תרגיל יומי א' 18-19

10

תרגיל 4 מתמטיקה לוגיקה

1) a) הפרדיקט הוא שם עצם — $+\ x\ +\ 1\ x\ y\ 0$

b) הפרדיקט הוא נוסחה אטומית — $=\ +\ x\ +\ 1\ x\ y\ 0\ 1$

c) הפרדיקט הוא נוסחא — $\neg\ =\ +\ x\ +\ 1\ x\ y\ 0\ 1$

d) הפרדיקט הוא נוסחא — $\exists x\ =\ x\ 1$

e) הפרדיקט הוא נוסחא — $\vee\ =\ +\ 1\ x\ 0\ <\ 1\ 0$

f) הפרדיקט הוא נוסחא אטומית — $<\ x\ 1\ y\ +\ 0\ x$

2) a) הפרדיקט הוא לא שם עצם! אם, אפשר לזהות שם עצם אז נוסחא

b) הפרדיקט הוא שם עצם — $(((x+y)+(1\times 1))\times(0+1))+(y\times z))$

c) הפרדיקט הוא נוסחא אטומית — $((1+x)\times(0+z))<(y+z)$

d) הפרדיקט הוא נוסחא — $(\neg(x=z))\vee(\exists x(x<1))$

e) הפרדיקט הוא נוסחא — $\neg(\exists x(((((1+1)+1)+1)+1)<x)$

f) הפרדיקט הוא נוסחא אטומית — $(((((x+y)\times z)+u)\times v)+w)<1$

3) a) $\forall x((x=1)\leftrightarrow(x<y))$ — $\neg\exists x\ \neg\vee\neg\vee\neg=x\ 1\ \neg<x\ y\ \neg\vee=x\ 1<x\ y$

b) $(x=0)\leftrightarrow(0<1)$ — $\neg\vee\neg=0\ x\ \neg<1\ 0\ \neg\vee=0\ x<1\ 0$

c) $(\forall x(x=y))\rightarrow(\exists y(y<0))$ — $\vee\exists x\ =x\ y\ \exists y<y\ 0$

d) $((x=y)\wedge(x=z))\wedge(z=y)$ — $\neg\vee\vee\vee\neg=x\ y\ \neg=x\ z\ \neg=z\ y$

e) $(x=z)\leftrightarrow(x<y)$ — $\vee\neg\vee=x\ z\ \neg<x\ y\ \neg=x\ z<x\ y$

f) $(((\forall x(0=x))\wedge((1+y)<z))\leftrightarrow(x=y))\rightarrow(x<z)$ — $\vee\neg\vee\neg\vee\vee\exists x\ \neg=0\ x\ \neg<+\ 1\ y\ z\ \neg=x\ y\ \vee\neg\ =x\ y<x\ z$

4) a) $\exists x\exists y\vee=y\ z<x\ z=x\ 1$ — חופשי, חופשי, קשור, קשור, חופשי, קשור

b) $(\exists x(x=1))\vee(x<z)$ — קשור, חופשי, חופשי

c) $\exists y=x+z\ y\ \exists z\ \exists y=x\ y\ \neg\vee$ — קשור, קשור, חופשי, חופשי, חופשי

d) $\exists w(\exists x(x=u)\rightarrow\exists u(u<w))\leftrightarrow\exists z((x=1)\vee\exists y(y<z))$ — קשור, חופשי, קשור, קשור, חופשי, קשור, קשור

e) $\exists x\ \exists w=w\ x\ \exists y\ \vee=y\ w=x\ y=z\ y\ \leftrightarrow\rightarrow$ — חופשי, קשור, חופשי, חופשי, קשור, חופשי, קשור, חופשי, קשור

f) $\exists x\forall y\exists z=x+y\ z$ — קשור, קשור, קשור

5) a) הנוסחה תוקפת כי ה-a נמצאים המשתנים
x ו-y ומכל ההופעות החופשיות של x (יש אחת כזו)
ב-A אינן בתחום הפעולה של כמת שהמשתנה הסמוך להוא x אוy
$A_x[a] = A_x[+xy] = \forall x \exists y (y < x \wedge z = +xy)$

b) הנוסחה תוקפת כי ה-a נמצאים המשתנים x ו-y
וכל ההופעות החופשיות של x ב-B (יש אחת כזו)
אינן בתחום הפעולה של כמת שהמשתנה הסמוך לה הוא x אוy
וכן כי ה-b נמצאים המשתנים x, y ו-z וכל ההופעות
החופשיות של z ב-B (יש אחת כזו) אינן בתחום הפעולה
של כמת שהמשתנה הסמוך לה הוא x או y אוz.
$B_{x,z}[a,b] = B_{x,z}[+xy, +xxyz] = (\exists x(x=1)) \vee ((x+y) < ((x \times y)+z))$

c) הנוסחה אינה תוקפת כי בין השאר ה-b נמצא
המשתנה y וההופעה החופשית הראשונה של x
ב-C נמצאת בתחום הפעולה של כמת שהמשתנה הסמוך לה הוא y.

d) הנוסחה אינה תוקפת כי בין השאר ה-a נמצא המשתנה
x וההופעה החופשית הראשונה (והיחידה) של w נמצאת
בתחום הפעולה של כמת שהמשתנה הסמוך לה הוא x.
E-ה

e) הנוסחה תוקפת כי ה-a נמצאים המשתנים x ו-y
וכל ההופעות החופשיות של x ב-D (יש אחת כזו)
אינן בתחום הפעולה של כמת שהמשתנה הסמוך לה הוא x אוy.
$D_x[a] = D_x[+xy] = (\exists w(\exists x(x=u) \rightarrow \exists u(u<w))) \leftrightarrow (\exists z((x+y)=1) \vee (\exists y(y<z))))$

f) הנוסחה תוקפת: את תוקפות הלבת a במקום x
ב-D נימקתי כבר. כמו כן ה-a נמצאים
המשתנים x ו-y וכן (באופן ריק) כל ההופעות
החופשיות של z ב-D (כאמור אין כאלה) אינן
בתחום הפעולה של כמת שהמשתנה הסמוך לן
הוא x או y.
$D_{x,z}[a,a] = D_{x,z}[+xy, +xy] = (\exists w(\exists x(x=u) \rightarrow \exists u(u<w))) \leftrightarrow (\exists z((x+y)=1) \vee (\exists y(y<z))))$

תרגיל 5 במבוא ללוגיקה

1. תהי $L=\{<\}$ שפה המכילה סימן יחס דו מקומי יחיד. (נניח כי בכל שפה יש גם את סימן השוויון). עבור כל תת קבוצה של הקבוצה של ארבעת הנוסחאות הבאות מצאו מבנה מתאים ל L המקיים את הנוסחאות בתת קבוצה אך לא מקיים את הנוסחאות בתת הקבוצה המשלימה. (סה"כ יש למצוא 16 מבנים)

   a. $\exists x\left(\forall y\left(\left(x<y\right)\vee\left(x=y\right)\right)\right)$

   b. $\exists x\left(\forall y\left(\left(y<x\right)\vee\left(x=y\right)\right)\right)$

   c. $\forall x\forall y\left(\left(x<y\right)\rightarrow\exists z\left(\left(x<z\right)\wedge\left(z<y\right)\right)\right)$

   d. $\forall x\forall y\left(\left(x<y\right)\vee\left(y<x\right)\vee\left(x=y\right)\right)$

2. תהי שפה L ויהיו A,B מבנים מתאימים לשפה יהיו $L(A),L(B)$ השפות המתקבלות ע"י הוספה ל L שם לכל איבר ב A,B בהתאמה. כעת נניח כי קיימת העתקה $\Pi:|A|\rightarrow|B|$ שהיא חח"ע ועל המקיימת את התנאים הבאים: 1) לכל סימן פונקציה n מקומי $f\in L$ ולכל $a_1,...,a_n\in A$ מתקיים $\Pi(f_A(a_1,...,a_n))=f_B(\Pi(a_1),...,\Pi(a_n))$.
   2) לכל סימן יחס n מקומי $p\in L$ ולכל $a_1,...,a_n\in A$ מתקיים
   $p_A(a_1,...,a_n)=T\Leftrightarrow p_B(\Pi(a_1),...,\Pi(a_n))=T$ הוכח כי

   a. העתקה $\Pi^{-1}:|B|\rightarrow|A|$ מקיימת את התנאים הנ"ל כאשר מחליפים את A ב B ואת Π ב Π^{-1}.

   b. לכל שם עצם t במשתנים $x_1,...,x_n$ ולכל $i_{a_1},...,i_{a_n}$ שמות של האבירים $a_1,...,a_n$ ב $|A|$ מתקיים: $\Pi(A(t_{x_1,...,x_n}[i_{a_1},...,i_{a_n}]))=(B(t_{x_1,...,x_n}[i_{\Pi a_1},...,i_{\Pi a_n}]))$.
   כאשר $B(i_{\Pi a})=\Pi a$. (שימו לב $i_a\in L(A)$ אך $i_{\Pi a}\in L(B)$)

   c. לכל נוסחה φ במשתנים $x_1,...,x_n$ ולכל $i_{a_1},...,i_{a_n}$ שמות של האבירים $a_1,...,a_n$ ב $|A|$ מתקיים:
   $A(\varphi_{x_1,...,x_n}[i_{a_1},...,i_{a_n}])=T\quad\Leftrightarrow\quad(B(\varphi_{x_1,...,x_n}[i_{\Pi a_1},...,i_{\Pi a_n}]))=T$.

3. הראה כי אם בשאלה 2 מורידים את ההנחה ש Π היא על $|B|$ סעיף b נשאר נכון. האם סעיף c נשאר נכון?

4. לשני מבנים A,B המתאימים לאותה שפה L ואשר עבורם קיימת העתקה $\Pi:|A|\rightarrow|B|$ המקיימת את תנאי שאלה 2, נקרא *איזומורפיים* ולהעתקה Π ביניהם נקרא *איזומורפיזם*. תהי $L=\{<\}$ שפה. לכל אחת מהקבוצות למטה נתאים את המבנה שזוהי קבוצתו והמפרש את סימן היחס $<$ ב L כיחס הסדר הרגיל. עבור כל זוג ממבנים אלו קבע אם הוא זוג של מבנים איזומורפיים או לא, במידה והמבנים איזומורפיים רשום את האיזומורפיזם במפורש במידה ולא הסבר.

$1.\mathbb{N}\quad 2.\mathbb{Z}\quad 3.\mathbb{Q}\quad 4.\mathbb{R}\quad 5.\left\{\frac{m}{2}\,|\,m\in\mathbb{Z}\right\}\quad 6.(0,1)\subset\mathbb{R}\quad 7.\{q\in\mathbb{Q}\,|\,q>0\}$

$n<n',\ m<m' \iff (n,m)<(n',m')$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$		ϕ
$n+m<n'+m' \iff (n,m)<(n',m')$	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$		$\{a\}$
$n+m>n'+m' \iff (n,m)<(n',m')$	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$		$\{b\}$
$n+m<n'+m' \iff (n,m)<(n',m')$	$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$		$\{c\}$
לא יחס סדר	$\mathbb{Z}$		$\{d\}$
$n+m<n'+m' \iff (n,m)<(n',m')$	$\{0,1\}\times\{0,1\}$		$\{a,b\}$
$n+m<n'+m' \iff (n,m)<(n',m')$	$[0,1)\times[0,1)$		$\{a,c\}$
לא יחס סדר	$\mathbb{N}$		$\{a,d\}$
$n+m<n'+m' \iff (n,m)<(n',m')$	$(0,1]\times(0,1]$		$\{b,c\}$
לא יחס סדר כי $\{n\in\mathbb{Z}\mid n<0\}$			$\{b,d\}$
לא יחס סדר	$\mathbb{Q}$		$\{c,d\}$
$n+m<n'+m' \iff (n,m)<(n',m')$	$[0,1]\times[0,1]$		$\{a,b,c\}$
לא יחס סדר	$\{0,1\}$		$\{a,b,d\}$
לא יחס סדר	$[0,1)$		$\{a,c,d\}$

| קומה א | | |

שאלה 2 מסעיף ג:

נניח כי Π איזומורפיזם בין A ל B.

כל שם עצם:

(i) לכל $t = c$ קבוע בשפה מתקיים:

$$\Pi(A(c)) = \Pi(c_A) = c_B = B(c)$$

(ii) לכל $t = x$ משתנה, לכל a ב $L(A)$:

$$\Pi(A(x_x[i_a])) = \Pi(a) = B(x_x[i_{\pi a}])$$

(iii) לכל f סימן פונקציה m-מקומי ו $t_1 \dots t_m$ n-מקומי

שם עצם כלשהו של המשתנים בהם מופיעים $x_1 \dots x_n$

ויהי $i_{a_1} \dots i_{a_n}$ שלוא של $a_1 \dots a_n$ ב $L(A)$

אזי:

$$\Pi(A((ft_1 \dots t_m)_{x_1 \dots x_n}[i_{a_1} \dots i_{a_n}]))$$

$$= \Pi(f_A(A(t_{1\,x_1 \dots x_n}[i_{a_1} \dots i_{a_n}]), \dots, A(t_{m\,x_1 \dots x_n}[i_{a_1} \dots i_{a_n}])))$$

$$= f_B(\Pi(A t_1[\cdot]) \dots \Pi(A t_m[\cdot])) =$$

$$\overset{\text{מהנחת יו"ד}}{=} f_B(t_{1\,x_1 \dots x_n}[i_{\pi a_1} \dots i_{\pi a_n}], \dots, t_{m\,x_1 \dots x_n}[i_{\pi a_1} \dots i_{\pi a_n}])$$

$$= B((ft_1 \dots t_m)_{x_1 \dots x_n}[i_{\pi a_1} \dots i_{\pi a_n}])$$

שאלה 2 ב: נוכיח באינדוקציה על גודל של נוסחה φ

(i) נניח φ היא נוסחה אטומית במשתנים $x_1 \dots x_n$

אזי $\varphi = Rt_1 \dots t_m$ כאשר R סימן יחס

m-מקומי $t_1 \dots t_m$ שמות שלהם במשתנים $x_1, \dots, x_m$

והתכונה כי

$$A(Rt_1 \dots t_m x_1 \dots x_n[i_{a_1} \dots i_{a_n}]) = B(Rt_1 \dots t_m x_1 \dots x_m(i_{\pi a_1}, \dots, i_{\pi a_n}))$$

נומה להוכחה מס' 2.

(ii) נניח $\varphi = \psi \vee \chi$ אזי:

$$A(\varphi_{x_1 \dots x_n}[i_{a_1} \dots i_{a_n}]) = H_\vee(A(\psi_{x_1 \dots x_n}[i_{a_1} \dots i_{a_n}]), A(\chi_{x_1 \dots x_n}[i_{a_1} \dots i_{a_n}]))$$

$$= H_\vee(B(\psi_{x_1 \dots x_n}[i_{\pi a_1}, \dots, i_{\pi a_n}]), B(\chi_{x_1 \dots x_n}[i_{a_1}, \dots, i_{a_n}]))$$

$$= B(\varphi_{x_1 \dots x_n}[i_{\pi a_1}, \dots, i_{\pi a_n}])$$

(iii) נניח $\varphi = \neg\chi$ הוכחה נומה ל סע"מ קודם.

(iv) נניח כי $\varphi = \exists_x \chi$ כאשר χ הוא נוסחה במשתנים הפשוטים $x_1 \dots x_n$ הרי

נניח כי $x = x_n$ כלומר $\varphi = \exists x_n \psi$

(אם $x \neq x_i$ לכל i אזי $A(\varphi) = A(\chi)$ לכל הצבה

$$A(\exists x_n \chi_{x_1 \cdots x_{n-1}}[i_{a_1} \cdots i_{a_{n-1}}]) = T \iff$$ כלומר

$$A(\chi_{x_1 \cdots x_{n-1} x_n}[i_{a_1} \cdots i_{a_{n-1}}, i_a]) = T$$ לכל $a \in A$ קיים

$$\iff$$

$$A(\chi_{x_1 \cdots x_{n-1} x_n}[i_{a_1} \cdots i_{a_{n-1}}, i_{\pi b}]) = T$$ לכל $b \in B$ קיים

(לפי π מתוך (1))

לפי הנחת האינדוקציה

$$\iff$$

$$B(\chi_{x_1 \cdots x_n}[i_{\pi a_1} \cdots i_{\pi a_{n-1}}, i_{\pi \pi b}]) = T$$

$$\iff$$

$$B(\exists x_n \chi_{x_1 \cdots x_{n-1}}[i_{\pi a_1}, \cdots, i_{\pi a_{n-1}}]) = T$$

$$\iff B(\varphi_{x_1 \cdots x_{n-1}}[i_{\pi a_1} \cdots i_{\pi a_{n-1}}]) = T$$

$$A(\varphi_{x_1 \cdots x_{n-1}}[i_{a_1}, \cdots, i_{a_{n-1}}]) = B(\varphi_{x_1 \cdots x_{n-1}}[i_{\pi a_1}, \cdots, i_{\pi a_{n-1}}])$$ לכל

3. אין מוכרחים אם ההנחה ש π על סדר ט נשאר
נכון מהסיבה שלו השתמשנו בלחה לו ביקן
ש π על.

סדר ט לו נשאר נכון ולמעשה.
נניח אם $L=\{<\}$ אזי $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ הם
שני מסדרים מתאימים לטפה באשר $<_{\mathbb{Z}}$ ו $<_{\mathbb{Q}}$
הם יחס הסדר הרגיל ב $\mathbb{Z}$ ו $\mathbb{Q}$.
נסתכל ט $\pi:\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Q}$ השיכון הרגיל
אזי מסדר ש אין קפלים ומתקיים דיין כך
להבדיל כי $a<_{\mathbb{Z}}b \Rightarrow \pi a<_{\mathbb{Q}}\pi b$
למרות שהתאקה שלמרה סדר אבל לא ברור.
לפי סדר ב כל נוסחה חסרת משתנים כמשפט φ ב L
מקיימת $A(\varphi)=B(\varphi)$ אם נניח אם φ
והיא הנוסחה φ מסדר L שאלה 1 (שיחס
הסדר בסדר) נקבל כי $Z(\varphi)=F$ אם $Z(\varphi)=T$
אבל סדר ב לו תלוי לחלקים אם π הוא רק חד חד

3. שלמות סדר אפשרי לרוץ מ הלמתה מתוץ.

לכן איזומורפיזם.

כלומר נקבל למקרים $\mathbb{R}$ ו $(0,1)$

אזי הפונקציה $(0,1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

המוגדרת לכל

$$f(x) = tg\left(\frac{\pi}{2}(2x-1)\right)$$

היא חח"ע על ושומרת סדר לכן איזומורפיזם.

יגאל גולדלוסקי

תרגיל יום א' 849

80 תרגיל 5 במתמטיקה לוגיקה

10 / 16

מ הנה	מקיים a?	מקיים b?	מקיים c?	מקיים d?
1) [0,2] עם הפירוש הסטנדרטי ל <	כן. $x=0$ $\forall y((0<y)\vee(0=y))$	כן $x=2$ $\forall y((y<2)\vee(y=2))$	כן. $\forall x\forall y((x<y)\to((x<\frac{x+y}{2})\wedge(\frac{x+y}{2}<y)))$	כן. מתבונות יחס הסדר.
(-∞,2] עם הפירוש הסטנדרטי ל <	לא! לכל x קיים y, השוא x, כך ש $\neg((x<y)\vee(x=y))$	לא! לכל x קיים y, הוא x+1 כך ש $\neg((y<x)\vee(y=x))$		
ℝ עם הפירוש הסטנדרטי ל <				
(0,∞) עם הפירוש הסטנדרטי ל <	כן. אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה		לא. עבור $x=1$ $y=2$: $\neg\forall z:(\neg(1\in z)\wedge(z<2))$	
ℕ∪{0} עם הפירוש הסטנדרטי ל <		לא! אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה		
ℤ עם הפירוש הסטנדרטי ל <		כן. אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה		
ℕ−{0,1,2} עם הפירוש הסטנדרטי ל <	כן. אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה		לא! עבור $x=1$ $y=-1$ $\neg((-1<1)\vee(-1=1))$	
{-1,0,1,2} עם היחס < לסדרים המוחלטים		לא! לכל איבר, אחרת ניקח $y=1$ ולכל מקרה: $\neg((x<y)\vee(x=y))$		
{-1,1,2} עם היחס < לסדרים המוחלטים				
ℤ\{0} עם היחס < לסדרים המוחלטים	כן. אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה	לא! אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה		
ℤ עם היחס < לסדרים המוחלטים				
ℝ עם היחס < לסדרים המוחלטים			כן. $\forall x\forall y((x<y)\to\exists z((x<\frac{|x|+|y|}{2})\wedge(\frac{|x|+|y|}{2}<y)))$	
ℝ\(-1,1) עם היחס < לסדרים המוחלטים	לא! אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה			
[-1,2] עם היחס < לסדרים המוחלטים	כן. אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה			
[-1,2] עם היחס < לסדרים המוחלטים	כן. אותו ההסבר כמו ⊛ למעלה			

2) הגדרות והסימונים השונים:

a) i) π^{-1} חח"ע ועל $\Longleftarrow$ π^{-1} חח"ע ועל.

ii) לכל סימן פ n מקומי f ב-L ולכל $b_1,\dots,b_n$ ב-|B|:

$$\pi^{-1}(f_B(b_1,\dots,b_n))\underset{\forall b\in|B|:\ \pi(\pi^{-1}(b))=b}{=}\pi^{-1}(f_B(\pi(\pi^{-1}(b_1)),\dots,\pi(\pi^{-1}(b_n))))\underset{\pi^{-1}(b_1),\dots,\pi^{-1}(b_n)\in|A|\ \text{זמן הנתון על}\ \pi}{=}\pi^{-1}(\pi(f_A(\pi^{-1}(b_1),\dots,\pi^{-1}(b_n))))\underset{\forall a\in|A|:\ \pi^{-1}(\pi(a))=a}{=}$$

$$=f_A(\pi^{-1}(b_1),\dots,\pi^{-1}(b_n))$$

iii) לכל סימן יחס n מקומי p ב-L ולכל $b_1,\dots,b_n$ ב-|B|:

$$P_B(b_1,\dots,b_n)=T\underset{\forall b\in|B|:\ \pi(\pi^{-1}(b))=b}{\Longleftrightarrow}P_B(\pi(\pi^{-1}(b_1)),\dots,\pi(\pi^{-1}(b_n)))=T\underset{\pi^{-1}(b_1),\dots,\pi^{-1}(b_n)\in|A|\ \text{זמן הנתון על}\ \pi}{\Longleftrightarrow}P_A(\pi^{-1}(b_1),\dots,\pi^{-1}(b_n))=T$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

(b) בהנחות ובתנאי השאלה, לכולל ההגדרה ש-π על $|B|$:

✓ לכל שם עצם t במשתנים $x_1,\dots,x_n$ ולכל $i_{a_1},\dots,i_{a_n}$ שמות של האיברים $a_1,\dots,a_n$ ב-$|A|$: נוכיח בדקדוקיה על הבנייה של שם העצם:

(i) אם $t = x_i$ עבור $1 \le i \le n$ כלשהו:

$$\pi(A(t_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])) = \pi(A(i_{a_i})) \underset{\text{תכונות מבנה}}{=} \pi(a_i) \underset{\text{תכונות מבנה}}{=} B(i_{\pi(a_i)}) = B(t_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])$$

(ii) אם $t = f t_1 \dots t_m$ כאשר f סימן פונקציה m-מקומי: $t_1,\dots,t_m$ שמות עבור $t_1,\dots,t_m$ שמקיימים את ההנחות בסעיף:

$$\pi(A(t_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])) = \pi(A((ft_1\dots t_m)_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])) \underset{\text{תכונות הצבה}}{=}$$

$$= \pi(A(f\, t_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}] \dots t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])) \underset{\text{תכונות מבנה}}{=}$$

$$= \pi(f_A(A(t_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]),\dots,A(t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]))) \underset{\text{הנחת ה-ת לגבי } t_1,\dots,t_m}{=}$$

$$= f_B(\pi(A(t_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])),\dots,\pi(A(t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]))) \underset{\text{הנחת הדקדוקיה}}{=}$$

$$= f_B(B(t_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]),\dots,B(t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])) \underset{\text{תכונות מבנה}}{=}$$

$$= B(f\, t_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}] \dots t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) \underset{\text{תכונות הצבה}}{=}$$

$$= B((ft_1\dots t_m)_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = B(t_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])$$

הצבה נכון בשביל ההגדרה ש-π על $|B|$ אז, ובאי, ובאי שנכון עם ההגדרה ש-π על $|B|$.

■

✓

(c) בהנחות ובתנאי השאלה

לכל נוסחא φ במשתנים חופשיים $x_1,\dots,x_n$ ולכל $i_{a_1},\dots,i_{a_n}$ שמות של האיברים $a_1,\dots,a_n$ ב-$|A|$: נוכיח בדקדוקיה על הבנייה של הנוסחאות כל שלב נוכיח לכל $x_1,\dots,x_n$ ולכל $i_{a_1},\dots,i_{a_n}$ שמות של האיברים $a_1,\dots,a_n$ ב-$|A|$:

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

(i) אם φ נוסחא אטומית אז' כלשהי $\varphi = pt_1 \dots t_m$

p סימן יחס m-מקומי ו- $t_1, \dots, t_m$ אינה מכילה משתנים $x_1, \dots, x_n$

$$A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff A((pt_1\dots t_m)_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff$$

תכונות הצבה

$$\iff A(pt_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]\dots t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff$$

תכונות מכפלה

$$\iff P_A(At_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]),\dots,At_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff$$

$\boxed{\text{תכונת נתונה עבור } A,B \text{ כי לכל } i \in |A| \Rightarrow A(t_{i\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])}$

$$\iff P_B(\pi(At_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]),\dots,\pi(At_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])) = T \iff$$

(ii) סעיף

$$\iff P_B(B(t_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]),\dots,B(t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])) = T \iff$$

תכונות מכפלה

$$\iff B(pt_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]t_1\dots t_{m\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T \iff$$

תכונות הצבה

$$\iff B((pt_1\dots t_m)_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T \iff B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T$$

(ii) אחרת, אם $\varphi = \vee\varphi_1\varphi_2$ כאשר φ_1, φ_2 נוסחאות שליקן כבר הוכחנו את נכונות הטענה:

$$A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff A((\vee\varphi_1\varphi_2)_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff$$

תכונות הצבה

$$\iff A(\vee\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]\varphi_{2\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff$$

תכונות מכפלה

$$\iff A(\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \text{ או } A(\varphi_{2\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}]) = T \iff$$

הנחת האינדוקציה

$$\iff B(\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T \text{ או } B(\varphi_{2\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T \iff$$

תכונות מכפלה

$$\iff B(\vee\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]\varphi_{2\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T \iff$$

תכונות הצבה

$$\iff B((\vee\varphi_1\varphi_2)_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T \iff B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

(iii) שלילה, אם $\varphi=\neg\varphi_1$ כאשר φ_1 נוסחא עליה הנחנו
כבר את נכונות הטענה (לכל $x_1,\dots,x_n$ ולכל $i_{a_1},\dots,i_{a_n}$ שאות של $a_1,\dots,a_n$)

$$A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \iff A((\neg\varphi_1)_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \iff$$
תנאי הלבה

$$A(\neg\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \iff A(\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \iff$$
נכונות מבנה — נכונות הפרדיקטים

$$\iff B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])=T \iff B(\neg\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])=T \iff$$
נכונות מבנה — תכונות הלבה

$$\iff B((\neg\varphi_1)_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])=T \iff B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])=T$$

(iv) אחרת $\varphi=\exists y\,\varphi_1$ כאשר y משתנה ו- φ_1 נוסחא עליה
הנחנו כבר את נכונות הטענה, אם $y\notin\{x_1,\dots,x_n\}$:
(לכל $i_{a_1},\dots,i_{a_n}$ שאות של φ_1 ב-$\{x_1,\dots,x_n\}$ ולכל y)

$$A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \iff A((\exists y\,\varphi_1)_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \iff$$
תכונות הלבה — נכונות מבנה

$$\iff A(\exists y\,\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \iff A(\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n,y}[i_{a_1},\dots,i_{a_n},i_a])=T \iff$$
(לכל $i_{a_1},\dots,i_{a_n},i_a$; $x_1,\dots,x_n,y$; לכל $a\in|A|$ כך ש:) הנחת הנכונות

$$\iff B(\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n,y}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)},i_{\pi(a)}])=T \iff$$
(לכל $a\in|A|$ כך ש:) — נסמן: $b=\pi(a)$ אזי $a=\pi^{-1}(b)$ אזי מותר לעשות את הזיהוי הזה

$$\iff B(\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n,y}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)},i_b])=T \iff$$
(לכל $b\in|B|$ כך ש:) — נכונות מבנה

$$\iff B(\exists y\,\varphi_{1\,x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])=T \iff$$
תכונות הלבה

$$\iff B((\exists y\,\varphi_1)_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])=T \iff B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}])=T$$

אחרת $y=x_i$ לאיזשהו i. לצורך הפשטות, בכתיבת ההוכחה אכתוב I במקום $x_1,\dots,x_n$, אכתוב I במקום $i_{a_1},\dots,i_{a_n}$, ואכתוב I_π במקום $i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}$

$$A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{a_1},\dots,i_{a_n}])=T \overset{\text{אינטואיציה: מוכיח ב-}\varphi}{\iff} A(\varphi_{\mathbf{x}}[I])=T \iff A((\exists y\,\varphi_1)_{\mathbf{x}}[I])=T \iff$$
תכונות הלבה

$$\iff A(\exists y\,\varphi_{1\,\mathbf{x}}[I])=T \iff A(\varphi_{1\,\mathbf{x},y}[I,a])=T \iff$$
(לכל $a\in|A|$ כך ש:) — נכונות מבנה — הנחת הנכונות

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

קיים a|A כך ש:

$$\Longleftrightarrow B(\varphi_{1\,X,y}[I_\pi, i_{\pi(a)}]) = T \Longleftrightarrow$$

נסמן: $b=\pi(a)$ עבור $\Longleftarrow$
$a=\pi^{-1}(b)$ עבור $\Longrightarrow$
מיתר בשאר כאלה כי π חח"ע ועל

קיים b|B כך ש:

$$\Longleftrightarrow B(\varphi_{1\,X,y}[I_\pi, i_b]) = T \underset{\text{תכונות מבנה}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow B(\exists y\, \varphi_{1\,X}[I_\pi]) = T \underset{\text{תכונות הכפל}}{\Longleftrightarrow} B((\exists y\, \varphi)_X[I_\pi]) = T \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow B(\varphi_X[I_\pi]) = T \underset{\text{X אינו משתנה חופשי ב-}\varphi}{\Longleftrightarrow} B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(a_1)},\dots,i_{\pi(a_n)}]) = T$$

■

ג (a) אם (ב) הוכחתי קודם כלל שיחוס בהינתן ש-π חח"ע על B.

(ב) סעיף ג לא נשאר נכון גם בהנחה כזו: נסמן: $L=\{<\}$, $A=\mathbb{N}$ עם הפירוש הסטנדרטי ל-$<$, $B=\mathbb{N}\cup\{0\}$ עם הפירוש הסטנדרטי ל-$<$.

נגדיר: $\pi: A\to B$, $\pi(a)=a$. זו הפונקציה חח"ע המקיימת את התנאים אל Z לכל סימן פונקציה ב-L (אין כאלה...)

וכן לכל סימן יחס ב-L: עבור $<$, לכל a_1, a_2 ב-$|A|$ מתקיים: $<_A(a_1,a_2)=T \Longleftrightarrow a_1<a_2 \Longleftrightarrow \pi(a_1)<\pi(a_2) \Longleftrightarrow <_B(\pi(a_1),\pi(a_2))$

עכשיו נסמן $\varphi=\exists x<x\, x_1$ זו נוסחא המשתנה המשתנה x_1

ונסמן $a=1\in|A|$ אז עבור $i_a=i_1$, שם של איבר 1 ב-$|A|$ מתקיים: $A(\varphi_{x_1}[i_1])=T \Longleftrightarrow A(\exists x<x\, i_1)=T \Longleftrightarrow$ קיים a|A כך ש: $A((<x\, i_1)_x[i_a])=T \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ קיים a|A כך ש: $A(<i_a, i_1)=T \Longleftrightarrow$ קיים a|A כך ש: $<_A(A(i_a),A(i_1))=T \Longleftrightarrow$ קיים a|A כך ש: $<_A(a,1)=T \Longleftrightarrow$ קיים a|A כך ש: $a<1$ ← כמו קודם! נכון!

כלומר לא מתקיים $A(\varphi_{x_1}[i_1])=T$ אם מאיזשהו:

$$B(\varphi_{x_1x_2}[i_{\pi(2)}, i_{\pi(1)}])=T \Longleftrightarrow B(\varphi_{x_1x_2}[i_2, i_1]) \Longleftrightarrow B(\exists x<x\, i_1)=T \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow$ קיים b|B כך ש: $B((<x\, i_1)_x[i_b])=T \Longleftrightarrow$ קיים b|B כך ש: $B(<i_b, i_1)=T \Longleftrightarrow$ קיים b|B כך ש: $<_B(A(i_b),A(i_1))=T \Longleftrightarrow$ קיים b|B כך ש: $<_B(b,1)=T \Longleftrightarrow$ קיים b|B כך ש: $b<1$ ← לא נכון! אין b=0 בשאלה

כלומר מתקיים $B(\varphi_{x_1}[i_{\pi(1)}])=T$ אבל לא מתקיים $A(\varphi_{x_1}[i_1])=T \Longleftrightarrow B(\varphi_{x_1}[i_{\pi(1)}])=T$.

■

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

(א) כאשרת נבחין: אף אחד מבין המבנים M_6, M_4 איננו איזומורפי לשום אחד מבין המבנים M_1, M_2, M_3, M_5, M_7 כי לשאלה הראשונים אין בדיקה בת מניה ובדיקה של אלה האחרונים הינן בנות מניה אבל לא קיימת π חח"ע ועל בין כל מבנה מבין אלה הראשונים לבין כל מבנה מבין אלה האחרונים. נותר לבדוק בתוך כל קבוצה רגל האם כל זוג מבנים איזומורפי או לא: נסמן את המבנה הבין (לפי סדר) ב- M_i

(ב) נביט בנוסחא ① - נסמנה φ. מתקיים $M_1(\varphi)=T$ (עבור $x=1$). נוכיח בשלילה כי קיים איזומורפיזם בין M_1 לבין M_i (לכל $i=2,3,4,5,6,7$) כלשהו) שמתקיים $M_i(\varphi)=T$ כלומר קיים איבר ב- $|M_i|$ איבר כך שאין איבר "קטן ממנו" ב- M_i - צריך להראות שכזה (לכל $i=2,3,4,5,6,7$) אז M_1 איננו איזומורפי לשום אחד מן המבנים האחרים הנתונים.

(ג) נביט בנוסחא ② - נסמנה ψ. מתקיים $M_2(\psi)=F$. (עבור $x=0, y=1$) וכן $M_5(\psi)=F$ (עבור $x=0, y=\frac{1}{2}$) אך מתקיים $M_3(\psi)=T$ (עבור $z=\frac{x+y}{2}$) וכן $M_7(\psi)=T$ (עבור $z=\frac{x+y}{2}$) ושוב מאותם הנימוקים אף אחד מבין M_3, M_7 איננו איזומורפי לשום אחד מבין M_2, M_5.

(ד) M_2, M_5 איזומורפיים. האיזומורפיזם: $\pi: |M_2| \to |M_5|$, $\pi(a)=\frac{a}{2}$. בין השתקה (בגלל הכפלה ב-2 ולכן חח"ע ועל) אין ב- L פונקציות אי יש להראות רק את קיום התכונה הנדרשת מיתרסים כלומר ש- π משמר סדר ולכן רק $(\forall a,b\in\mathbb{Z}): (\frac{a}{2}<\frac{b}{2} \iff (a<b))$

(ה) M_3, M_7 איזומורפיים. האיזומורפיזם: $\pi: |M_3| \to |M_7|$, $\pi(a)=\begin{cases} a+2 & a\geq -1 \\ -\frac{1}{a} & a<-1 \end{cases}$ בין השתקה מובנת היטב והפיכה $\pi^{-1}(a)=\begin{cases} a-2 & a\geq 1 \\ -\frac{1}{a} & a<1 \end{cases}$ ולכן חח"ע ועל. כמו מקודם יש רק לבדוק ש- π משמר סדר ולכן רק (מן ההשכבה כל $a\geq -1$ יעבור לערך ≥ 1 וכל $a<-1$ יעבור לערך <1 והנשאר יהיה משמרת סדר בין איברים ≥ -1 $(\forall a,b\in\{q\in\mathbb{Q} \mid q<-1\}): ((-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}) \iff (a<b))$.
וכן יהיה משמר סדר בין איברים <-1, ואז יהיה משמר סדר.

(ו) M_4, M_6 איזומורפיים. האיזומורפיזם: $\pi: |M_4| \to |M_6|$, $\pi(a)=\begin{cases} 1-\frac{1}{a} & a>4 \\ \frac{a}{16}+\frac{3}{4} & -4\leq a\leq 4 \\ -\frac{1}{a} & a<-4 \end{cases}$ בין השתקה מובנת היטב והפיכה $\pi^{-1}(a)=\begin{cases} \frac{1}{1-a} & a>\frac{3}{4} \\ 16(a-\frac{3}{4}) & -4\leq a\leq \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{a} & a<\frac{1}{4} \end{cases}$ ולכן חח"ע ועל. כמו מקודם קל לראות ש- π משמר סדר כי הוא משמר את הסדר בין $\{a\in\mathbb{R} \mid a>4\}$ לבין $\{a\in\mathbb{R} \mid a\geq 4\}$ ובין $\{a\in\mathbb{R} \mid a<-4\}$ לבין $\{a\in\mathbb{R} \mid a\leq -4\}$ וכן בתוך כל אחת מן הקבוצות הנ"ל.

■

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

תרגיל 6 במבוא ללוגיקה

1. תהי $L=\{c,f,R\}$ שפה שבה R הוא סימן יחס דו מקומי f,c סימני פונקציה 0 ו 1 מקומיים בהתאמה. עבור כל אחד מהנוסחאות הבאות קבע אם הן נכונות בכל מבנה המתאים לשפה או אם הן לא נכונות בכל מבנה. אם לא מתקיימת אחת משתי האפשרויות מצא מבנה שבו הנוסחה נכונה ומבנה שבו אינה נכונה.
   a. $\left(\neg\exists x\left(Rxc\right)\right)\vee\left(\forall y\left(Ryc\right)\right)$
   b. $\left(\forall x(Rxx)\right)\leftrightarrow\left(\neg\exists x\neg\left(Rxx\right)\right)$
   c. $\left(\neg\forall x\left(fx=c\right)\right)\rightarrow\left(\exists x\neg(fx=c)\right)$
   d. $\left(\left(\forall x\left(\exists y\left(fy=x\right)\right)\right)\wedge\left(\forall x\left(Rfxfx\right)\right)\right)\rightarrow\left(\forall x\left(Rxx\right)\right)$
   e. $\forall x\forall y\left(Rxy\right)\rightarrow\forall y\exists x\left(\neg Rfxfy\right)$

2. תהי L שפה ויהיו A,B מבנים המתאים ל L נרחיב את השפה לשפות $L(A),L(B)$. נאמר כי B הוא *תת מבנה* של A אם מתקיימים התנאים הבאים: 1) $|B|\subseteq|A|$ כלומר העולם של A מכיל את העולם של B. ולכן נניח כי $L(B)\subseteq L(A)$ 2) לכל $f\in L$ סימן פונקציה $n\geq 0$ מקומי ולכל $b_1,...,b_n\in|B|$ מתקיים $f_B(b_1,...,b_n)=f_A(b_1,...,b_n)$. 3) לכל $R\in L$ סימן יחס $n\geq 0$ מקומי ולכל $b_1,...,b_n\in|B|$ מתקיים $R_B(b_1,...,b_n)=R_A(b_1,...,b_n)$.
   a. יהי A מבנה מתאים ל L ותהי $X\subseteq|A|$ תת קבוצה של העולם שלו המקיימת כי לכל סימן פונקציה n מקומי $f\in L$ ולכל $a_1,...,a_n\in X$ מתקיים $f_A(a_1,...,a_n)\in X$ הגדר מבנה חדש המתאים ל L שהוא תת מבנה של A ועולמו הוא X.
   b. יהי A מבנה מתאים ל L ויהיו $\{B_i\}_{i\in I}$ קבוצה של תת מבני של A. הנח כי $|B_i|\cap_{i\in I}$ אינה ריקה והראה כי קיים תת מבנה של A שזה הוא עולמו. האם אפשר תמיד לבנות תת מבנה לאיחוד של מבנים?
   c. תהי Φ קבוצת הנוסחאות המינימלית בשפה L המקיימת את התנאים: 1) אם φ נוסחה אטומית אז $\varphi\in\Phi$. 2) אם $\varphi,\psi\in\Phi$ אז גם $\neg\varphi\in\Phi,\ \vee\varphi\psi\in\Phi$. הראה כי עבור נוסחה φ בשפה L $\varphi\in\Phi$ אם ורק אם לא מופיע בה הסימן $\exists$ כלומר היא נוסחה חסרת כמתים, בפרט כל משתנה הוא חופשי.
   d. יהי A,B מבנים מתאימים לשפה L ונניח כי B הוא תת מבנה של A. תהי $\varphi\in\Phi$ נוסחה במשתנים $x_1,....,x_n$ הראה כי לכל $b_1,...,b_n\in|B|$ מתקיים: $A(\varphi_{x_1,...,x_n}[i_{b_1},...,i_{b_n}])=B(\varphi_{x_1,...,x_n}[i_{b_1},...,i_{b_n}])$.

3. תהי $L=\{+,\times\}$ שפה ויהי F שדה שהוא מבנה המתאים ל L ומפרש את הסימנים באופן המקובל האם כל תת מבנה של F הוא תת שדה? אם לא רשום איזה מהאקסיומות של השדה לא בהכרח מתקיימות בתת מבנה של F ביחס לשפה ואיזה מתקיימות ומצא שדה ותת מבנה שלו אשר מקיים בדיוק את האקסיומות שהוא חייב.
4. אותה השאלה כמו 3 רק עבור השפות הבאות:
   a. $\{1,+,\times\}$
   b. $\{1,0,+,\times\}$
   c. $\{0,+,-\}$ כאשר $-$ הוא סימן פונקציה חד מקומי אשר F מפרש אותו כנגדי לחיבור.
   d. $\{1,0,+,\times,-,^{-1}\}$ כאשר הוא סימן פונקציה חד מקומי אשר F מפרש אותו כהופכי לכפל. על 0 בשדה נגדיר פונקציה זו להיות 0.

1 a)

- ניקח את המבנה $\mathbb{Z}$ כאשר: $C_{\mathbb{Z}}=0$ ו $R_{\mathbb{Z}}=\leq$ ($f_{\mathbb{Z}}=Id_{\mathbb{Z}}$)

אזי $\mathbb{Z}(\forall y(Ryc))=F$ לכן $\mathbb{Z}(\neg\exists x(Rxc))=F$

לכן $\mathbb{Z}(\neg\exists x(Rxc)\vee\forall y(Ryc))=F$

- ניקח את המבנה $\mathbb{N}$ כאשר $C_{\mathbb{N}}=0$ $R_{\mathbb{N}}=\leq$ $f_{\mathbb{N}}=Id_{\mathbb{N}}$.

אז קל להראות כי $\mathbb{N}$ מקיים T ו מקיים.

ב)	לא מקיים A	$\forall xA \Leftrightarrow \neg\exists x\neg A$

ג)	א ב) לא מקיים A	$\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$

ד) נראה כי הנוסחה מקיימת בכל מבנה: נסתכל

למבנים שבהם מבנים M ל L כך ש:

$$M(\forall x\exists y(fy=x)\wedge\forall x(Rfxfx))=T$$

לשאר המבנים הנוסחה ב ד) מקבלת T בוודאי

אוטומטית. אזי נראה להראות כי $M(\forall xRxx)=T$

יהי $a\in|M|$ אזי צריך להראות כי $R_M(a,a)=T$

לפי הנחה $M(\forall x\exists y(fy=x))$ נקבל קיים $b\in|M|$ כך ש:

$f_M(b)=a$ ומכך ש $M(\forall xRfxfx)=1$ נקבל כי

$$R_M(a,a)=R_M(f_Mb,f_Mb)=T.$$

ש. נניח מבנה M כנ"ל קיימים $(a,b)\in M^2$ כך ש:

$R_M(a,b)=F$ כלומר $M(\forall x\forall y(Rxy))=F$

ולכן M לא הנסתה תחת T.

ואם אין $M(\forall x\forall y(Rxy))=T$ אזי בגלל ש

$M(\forall y\exists x(\neg Rfxfy))=F$ לכן M כבר לא הנסתה תחת F.

---

2. a) נתבונן מבנה B כך ש: $|B|=X$

ולכל סימן פונקציה $f\in L$ מתקיים: $f_B=f_A|X^n$

ולכל סימן יחס $R\in L$ מתקיים: $R_B=R_A|X^n$

b) - יהי $f\in L$ ולכל $a_1,\dots,a_n\in[\bigcap_{i\in I}|B_i|]^n$

מתקיים לכל i כי $a_1,\dots,a_n\in|B_i|^n$

ולכן $f_A(a_1,\dots,a_n)\in|B_i|$ לכל i

כלומר $f(a_1,\dots,a_n)\in[\bigcap|B_i|]^n$

לכן $\bigcap_{i\in I}|B_i|$ מקיים יחס a) ולכן קיים לפ

מבנה שלהם מלמ.

- נניח את המבנה $\mathbb{C}$ המסכים המתרבים שהוא

מבנה מתאים לטפה של קבוצה השלמה.

ויש $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ $\mathbb{Q}(i)\subseteq\mathbb{C}$ 2 לפחות מבנים

קל לראות כי $\mathbb{R}\cup\mathbb{Q}[i]\subseteq\mathbb{C}$ אינן שדות מכיוון
הלא למשל לא סגורים לכפל כי $i\in\mathbb{Q}[i]$, $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$
אבל $i\sqrt{2}$ אינו ב יחידה.

ג. הוכחה קלה באינדוקציה על הגדרה של נוסחה.

ד. מראים קודם נסיק כי לכל שם עצם
$t(x_1,\dots,x_n)=t$ ולכל $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{B}$
$$A(t_{x_1\dots x_n}[b_1,\dots,b_n]) = B(t_{x_1\dots x_n}[b_1,\dots,b_n])$$

כאשר יהי $R t_1\dots t_n=\varphi$ נוסחה אטומית ונקבל כי
$$A(\varphi_{x_1\dots x_n}[b_1,\dots,b_n]) = B(\varphi_{x_1\dots x_n}[b_1,\dots,b_n])$$

מהטבה זו והאמור למעלה בעל כל נוסחה
תהא ב Φ היא מהצורה $\psi\vee\psi$ כאשר $\psi,\psi\in\Phi$
או $\neg\psi$ כאשר $\psi\in\Phi$

באינדוקציה נקבל את המבוקש.

4 a. תן מבנה של F המתאים לשפה $\{1,+,\times\}$

הינו תת קבוצה של F שסגורה לחיבור, כפל

ומכילה את 1.

כדי קבוצה של F האקסיומות של קומוטיבית, אסוציאטיבית

ופילוג מתקיימות בוודאות אוטומטי

מה כן יש לבדוק להתקיים הן האקסיומות:

- קיום איבר נייטרלי לחיבור
- סגירות לנגדי
- סגירות להפכי

אם נקח את $\mathbb{Q} \subseteq$ אז אין לנו את מבנה

של הסדרה לא מקיים אז אחת מהאקסיומות.

---

b. הסיבה היא ש 0 לשפה לכן

האקסיומות שאין מ"ש מלא הן

- סגירות לנגדי והפכי ; נקח $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

---

c. תן מבנה לF בשפה $\{0,+,-\}$ הוא

למשל תת חבורה חילופית (סגור לחיבור ונגדי = אם כל 0)

לא מ"ש מלא:

סגירות לכפל } $\Rightarrow$ נקח $\mathbb{Z}\cdot\sqrt{2} \subseteq \mathbb{Q}$

קיום הפכי לכפל }

יגאל בינדר רוכבקי

תרגיל יומי א' 18-19

10

תרגיל 6 מתמטיקה לוגיקה

① (a) הנוסחא נכונה רק בתרגיל מן המתנים

נבחר מתנים C, B ב: $|C|=|B|=\{0,1\}$. $f_C=f_B=id_{\{0,1\}}$ $c_C=c_B=0$

$R_C: |C|^2 \to \{0,1\}$ $R(a,b)=T$; $R_B: |A|^2 \to \{0,1\}$ $R_B(a,b)=\begin{cases}T & a=b\\ F & a\neq b\end{cases}$; A מבנה כלשהו:

$A((\neg\exists x(Rxc))\vee(\forall y(Ryc)))=T \iff A(\neg\exists x(Rxc))\vee A(\forall y(Ryc))=T \iff$ (בנוסחאות חוביות)

$\iff A(\neg\exists x(Rxc))=T$ או $A(\forall y(Ryc))=T \iff A(\exists x(Rxc))=F$ או $A(\forall y(Ryc))=T \iff$

$\iff$ קיים $a\in|A|$ כך ש $A(Rxc)[a]=T$ או לכל $b\in|A|$ $A(Ryc)[b]=T \iff$ לא קיים $a\in|A|$ כך ש $A(R_a c)=T$ או לכל $b\in|A|$ $A(R_b c)=T \iff$

$\iff$ לא קיים $a\in|A|$ כך ש $R_A(a,c_A)=T$ או לכל $b\in|A|$ $R_A(b,c_A)=T \iff R_A(a,c_A)=T$ או לכל $b\in|A|$ $R_A(b,c_A)=T \iff$

נתון: $A=C$: לכל $b\in|A|$: $R_A(b,c_A)=T$ $\Leftarrow$ הטענה נכונה

סתרור: $A=B$: $R_A(b,c_A)=T$ (אמור $b\neq c_A$ שכאן) $a=c_A$ סתרור $R_A(b,c_A)=F$ $\Leftarrow$ הטענה לא נכונה

(b) הנוסחא נכונה תמיד! יהי A מבנה סתרור L כלשהו

$A((\forall x(Rxx))\leftrightarrow(\neg\exists x\neg(Rxx)))=T \iff A((\forall x(Rxx)))=T$ אמור $A(\neg\exists x\neg(Rxx))\iff$

$\iff A(Rxx)[a]=T$ אמור לכל $a\in|A|$ מתקיים $A(Rxx)[a]=T$ $\longleftarrow$ סיקולות פורמלית נכונה!

הרגיל בכל תה יומי אלגוריתם

(c) הנוסחא נכונה תמיד! יהי A מבנה סתרור L כלשהו

$A((\neg\forall x(fx=c))\to(\exists x\neg(fx=c)))=T \iff$

$\iff A(\neg\forall x(fx=c))=F$ או $A(\exists x\neg(fx=c))=T \iff$

$\iff A(\forall x(fx=c))=F$ או $A((\neg(fx=c))[a])=T \iff$ קיים $a\in|A|$ כך ש:

$\iff A(\forall x(fx=c))=T$ או $A(\neg(f c_a=c))=T \iff$ קיים $a\in|A|$ כך ש:

$\iff$ לכל $a\in|A|$ $A((fx=c)_x[i_a])=T$ אז קיים $a\in|A|$ כך ש $A(f\,i_a=c)=F$ $\iff$

$\iff$ לכל $a\in|A|$ $A(f_{i_a}=c)=T$ אז קיים $a\in|A|$ כך ש $A(f_{i_a}=c)=F$

① אם קיים $a\in|A|$ כך ש $A(f_{i_a}=c)=F$ $\Leftarrow$ אז"ל נכון $\Leftarrow$ הנוסחא המתוארת נכונה

② אחרת לכל $a\in|A|$ $A(f_{i_a}=c)=T$ $\Leftarrow$ אז"ל נכון $\Leftarrow$ הנוסחא המתוארת נכונה

כלומר בכל אופן הנוסחא המתוארת נכונה.

■

ד) הנוסחא נכונה תמיד! יהי A מבנה עבור L, אז:

$A(((\forall x(\exists y(fy=x)))\wedge(\forall x(Rfxfx)))\to(\forall x(Rxx)))=T \iff$ ✓

$A(((\forall x(\exists y(fy=x)))\wedge(\forall x(Rfxfx)))=F$ אז $A(\forall x(Rxx))=T \iff$

$\iff A(\forall x(\exists y(fy=x)))=F$ אז $A(\forall x(Rfxfx))=F$ אז $A(\forall x(Rxx))=T \iff$

$\iff$ לכל $a\in|A|$ מתקיים $A((\exists y(fy=x))_x[i_a])=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $A((Rfxfx)_x[i_a])=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $A((Rxx)_x[i_a])=T \iff$

$\iff A(\exists y\, fy=i_a)=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $A(Rfi_afi_a)=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $A(Ri_ai_a)=T \iff$

$\iff A((fy=i_a)_y[i_b])=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(A(fi_a),A(fi_a))=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(A(i_a),A(i_a))=T \iff$

$\iff A(f\,i_b=i_a)=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(f_A(A(i_a)),f_A(A(i_a)))=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(a,a)=T \iff$

$\iff A(fi_b)=A(i_a)$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(f_A(a),f_A(a))=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(a,a)=T \iff$

$\iff f_A(A(i_b))=a$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(f_A(a),f_A(a))=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(a,a)=T \iff$

$\iff f_A(b)=a$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(f_A(a),f_A(a))=T$ אז לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(a,a)=T$

(1) אם לא לכל $a\in|A|$ קיים $b\in|A|$ כך ש: $f_A(b)=a$ ⇐ הנוסחא הראשונה נכונה

אחרת לכל $a\in|A|$ קיים $b\in|A|$ כך ש $f_A(b)=a$

(2) אם לא לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(f_A(a),f_A(a))=T$ ⇐ הנוסחא הראשונה נכונה

אחרת לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(f_A(a),f_A(a))=T$

(3) כי $a\in|A|$ אזי קיים $b\in|A|$ כך ש $f_A(b)=a$.

$b\in|A|$ ולכן מתקיים $R_A(f_A(b),f_A(b))=T$ כלומר $R_A(a,a)=T$

אזי לכל $a\in|A|$ מתקיים $R_A(a,a)=T$ ⇐ הנוסחא הראשונה נכונה

כלומר בכל אופן הנוסחא הראשונה נכונה.

(ה) הנוסחא היא רק בתלות בין המונים בגודל שני מבנים B,C כך ש $|C|=|B|=\{0\}$

$C_C=C_B=0$; לכל $f_C=f_B=id$; $R_C\ |C|^2\to\{T,F\}: R(a,b)=T$; $R_B\ |B|^2\to\{T,F\}: R(a,b)=F$ לכל $A\in\{B,C\}$

$$A((\forall x\forall y(Rxy))\to(\forall y\exists x(\neg Rfxfy)))=T \iff$$

$\iff A(\forall x\forall y(Rxy))=F$ או $A(\forall y\exists x(\neg Rfxfy))=T \iff$

$\iff A((Rxy)_{x,y}[i_a,i_b])=T$ לכל $a\in|A|$ ולכל $b\in|B|$ או $A((\neg Rfxfy)_{x,y}[i_a,i_b])=T \iff$ לכל $a\in|A|$ $b\in|A|$ קיים כך ש

$\iff A(Ri_ai_b)=T$ לכל $a,b\in|A|$ מתקיים או $A(\neg Rfi_afi_b)=T \iff$ לכל $a\in|A|$ $b\in|A|$ קיים כך ש:

$\iff R_A(A(i_a),A(i_b))=T$ לכל $a,b\in|A|$ מתקיים או $A(Rfi_afi_b)=F \iff$ לכל $a\in|A|$ $b\in|A|$ קיים כך ש:

$\iff R_A(a,b)=T$ לכל $a,b\in|A|$ מתקיים או $R_A(A(fi_a),A(fi_b))=F \iff$ לכל $a\in|A|$ $b\in|A|$ קיים כך ש:

$\iff R_A(a,b)=F$ קיימים $a,b\in|A|$ כך ש: או $R_A(f_A(A(i_a)),f_A(A(i_b)))=F \iff$ לכל $a\in|A|$ $b\in|A|$ קיים כך ש:

$\iff R_A(a,b)=F$ קיימים $a,b\in|A|$ כך ש: או $R_A(f_A(a),f_A(b))=F$ לכל $a\in|A|$ $b\in|A|$ קיים כך ש:

(1) לעומת B: לא מתקיים $a,b\in|A|$ כך ש $R_A(a,b)=F$ ⇐ הא"ל נכון ⇐ הנוסחא התחילית

(2) לעומת C: לא קיימים $a,b\in|A|$ כך ש $R_A(a,b)=F$ ובנוסף לכל $a\in|A|$ $b\in|A|$ כך ש

לא מתקיים $R_A(f_A(a),f_A(b))=F$ ⇐ הא"ל לא נכון ⇐ הנוסחא התחילית נכונה

נגדיר מבנה B ל-L: $|B|=X=|A|\le|B|$

2) a) בתנאי השאלה. לכל סימן פונקציה n-מקומי $f\in L$

נגדיר $f_B=f_A|_{|B|}$ ⇐ f_B מוגדרת מ-$|B|^n$ לתוך $|B|$

(f_B מוגדרת לתוך $|B|$ מן הנתון) וכן לכל $b_1,\dots,b_n\in|B|$

מתקיים $f_B(b_1,\dots,b_n)=f_A(b_1,\dots,b_n)$. לכל סימן יחס n-מקומי

$P\in L$ נגדיר $P_B=P_A|_X$ ⇐ P_B מוגדרת מ-$|B|^n$ ל-$\{T,F\}$

וכן לכל $b_1,\dots,b_n\in|B|$ מתקיים $P_B(b_1,\dots,b_n)=P_A(b_1,\dots,b_n)$.

מכל אלה B תת-מבנה של A ועל-מן הוא X כנדרש.

b) בתנאי השאלה: נגדיר מבנה B ל-L: $|B|=\bigcap_{i\in I}|B_i|$

$|B|\subseteq|B_1|\subseteq|B|$. לכל סימן פונקציה n-מקומי

$f\in L$ נגדיר $f_B=f_A|_{|B|}$ ⇐ לכל $b_1,\dots,b_n\in|B|$: $f_B(b_1,\dots,b_n)=f_A(b_1,\dots,b_n)$

לכל $b_1,\dots,b_n\in|B|$: לכל $i\in I$: $f_B(b_1,\dots,b_n)=f_A(b_1,\dots,b_n)=f_{B_i}(b_1,\dots,b_n)\in|B_i|$

⇐ $f_B(b_1,\dots,b_n)\in\bigcap_{i\in I}|B_i|=|B|$. לכל סימן יחס n-מקומי

$P\in L$ נגדיר $P_B=P_A|_{|B|}$ ⇐ P_B מוגדרת מ-$|B|^n$ ל-$\{T,F\}$

וכן לכל $b_1,\dots,b_n\in|B|$ מתקיים $P_B(b_1,\dots,b_n)=P_A(b_1,\dots,b_n)$.

מכל אלה B תת-מבנה של A ועל-מן הוא $\bigcap_{i\in I}|B_i|$ כנדרש.

ג) לא תמיד ניתן להבנות תת-מבנה לאיחוד של מבנים.

נסמן: $L=\{f\}$ כאשר f סימן פונקציה 2-מקומית.

נסמן: A מבנה ל-L כך ש: $|A|=\{1,2,3\}$, $f_A:|A|^2\to|A|$; $f_A(a,b)=\begin{cases}a & a=b\\ 3 & a\neq b\end{cases}$

נגדיר מבנה B ל-L: $|B|=\{1,2\}$, $f_B:|B|^2\to|B|=Id|_{|B|}$ ← קל לראות כי הוא תת-מבנה של A

נגדיר מבנה C ל-L: $|C|=\{2,3\}$, $f_C:|C|^2\to|C|=Id|_{|C|}$ ← קל לראות כי הוא תת-מבנה של A

נניח בשלילה, כי קיים מבנה D שהוא תת מבנה של A בקבוצה $|D|=|B|\cup|C|$

אזי: נשים לב: $3\notin|D|$ ומאידך $3=f_A(1,2)\underset{\text{D תת-מבנה של A}}{=}f_D(1,2)\in|D|$ $f_D:|D|^2\to|D|$

לכן כתירה, אזי לא קיים מבנה כנ"ל.

אשר לא מופיע בה הכימות $\exists$

(ב) בהנחת השאלה: תהא ψ נוסחא בשפה L. נוכיח בדקדוקיה על הגדרה של ψ כי $\psi \in \Phi$:

(א) אם ψ נוסחא אטומית אזי מן הגדרה 1) $\psi \in \Phi$.

(ב) אם $\psi = \neg\varphi$ כך ש- φ נוסחא (חסרת כמתים) שכבר הוכחתי עבורה כי $\varphi \in \Phi$ אזי מהגדרה 2) $\psi \in \Phi$

(ג) אם $\psi = \varphi \xi \psi$ כך ש $\xi \in \{\wedge, \vee\}$ נוסחאות (חסרות כמתים) שכבר הוכחתי עבורן כי $\varphi, \psi \in \Phi$ אזי מהגדרה 2) $\psi \in \Phi$

(ד) אחרת $\psi = \exists x \varphi$ כך ש-x משתנה ו- φ נוסחא ב- L

$\Leftarrow$ צריך לו ויתרון כי נתון שב-φ לא מופיע הכימות $\exists$.

אזי כל נוסחא בשפה L אשר לא מופיע בה הכימות $\exists$ מולדת ב- Φ

תהא $\varphi \in \Phi$ נוכיח בדקדוקיה על הגדרה של φ כי φ נוסחא בשפה L אשר לא מופיע בה הכימות $\exists$:

(א) אם φ נוסחא אטומית אזי היא נוסחא חסרת כמתים ב- L

(ב) אם $\psi = \neg\varphi$ כך ש- $\varphi \in \Phi$ שכבר הוכחתי עבורה כי היא ב- L וחסרת כמתים, אזי ψ נוסחא חסרת כמתים ב- L.

(ג) אחרת $\psi = \varphi \xi \psi$ כך ש $\xi \in \{\wedge, \vee\}$ שכבר הוכחתי עבורן כי הן ב- L וחסרות כמתים, אזי ψ נוסחא חסרת כמתים ב- L.

אזי כל נוסחא ב-φ היא נוסחא חסרת כמתים ב- L.

אזי: $\psi \in \Phi \Leftarrow$ ψ נוסחא חסרת כמתים ב- L. ובפרט ב- ψ אין משתנים קשורים (אין כל משתנה בה הוא חופשי).

■

(ד) נגדיר: $\pi : |B| \to |A| \cdot \pi(b) = b$ לכל t סימן פונקציה (שם-מקומי) ב- L: לכל $b_1, \dots, b_n \in |B|$ $\pi t_B(b_1, \dots, b_n) = f_B(b_1, \dots, b_n) = f_A(b_1, \dots, b_n) = f_A(\pi(b_1), \dots, \pi(b_n))$ (יד כלומר). לכל p סימן יחס $n \geq 0$ מקומי ב- L: לכל $b_1, \dots, b_n \in |B|$: $p_B(b_1, \dots, b_n) = p_A(b_1, \dots, b_n) = p_A(\pi(b_1), \dots, \pi(b_n))$ (יד כלומר).

כאמור π מקיימת את דרישות סעיף ב בתרגיל הקודם בדרך לדרישה של π על. הראיתי בתשובתי לסעיף ב' בתרגיל כי בפ מתקיים גם כאשר π לא על, עבור נוסחאות חסרות כמתים, כלומר:

לכל φ נוסחא חסרת כמתים ב-L המשתנים $x_1,\dots,x_n$ ולכל שמות של איברים $b_1,\dots,b_n \in |B|$ $i_{b_1},\dots,i_{b_n}$

מתקיים: $(*)$. $B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{b_1},\dots,i_{b_n}]) = T \iff A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(b_1)},\dots,i_{\pi(b_n)}])$

תהי $\varphi \in \Phi$ נוסחה המשתנים $x_1,\dots,x_n$ ויהיו $b_1,\dots,b_n \in |B|$. $\varphi \in \Phi \iff \varphi$ חסרת כמתים ב-L לפי $(*)$:

$$B(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{b_1},\dots,i_{b_n}]) = A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{\pi(b_1)},\dots,i_{\pi(b_n)}]) = A(\varphi_{x_1,\dots,x_n}[i_{b_1},\dots,i_{b_n}])$$

$\forall b_1,\dots,b_n \ \exists \pi: \pi(b)=b$

■

(3)	שדה	אקסיומות שלו בהכרח מתקיימות	תת מבנה של $\mathbb{R}$ שמקיים את תנאי
	$\{+,\times\}$	קיום הפכי, נ.ג.ד, קיום נטרלי לחיבור, קיום נטרלי לכפל	
(4)(a)	$\{1,\cancel{+},\times\}$	קיום הפכי, קיומ נ.ג.ד, קיומ נטרלי לחיבור	$(1,\infty)$ עם $x,+$ המוגדרים מהגדרתם ל $\mathbb{R}$
(b)	$\{1,0,+,\times\}$	קיומ הפכי, קיומ נ.ג.ד	$[1,\infty)$ עם $1,x+$ המוגדרים מהגדרתם ל $\mathbb{R}$
(6)	$\{0,+,-\}$	סגירות לכפל, קיומ נטרלי לכפל, קיומ הפכי	$[1,\infty)\cup\{0\}$ עם $1,0,x+$ המוגדרים מהגדרתם ל $\mathbb{R}$
			$\{\pi z \mid z\in\mathbb{Z}\}$ עם $-,+$ המוגדרים מהגדרתם ל $\mathbb{R}$

(*) נשים לב כי בכל אחד מהמבנים הנ"ל, סגירות לפעולה מהשדה (בדיוק שמקיים) מוגדרת מהגדרת הפונקציה ~~לעומת~~ של הפעולה במבנה, לעומת הפעולה של המבנה.

~~סגירות~~ קיומ נ.ג.ד (בדיוק שמקיים) מהגדרת – לעומת הפעולה של המבנה.

(5) ביתר לשדה. $\{1,0,+,\times,-^{-1}\}$ כל תת מבנה של שדה המתאים לה הוא גם תת-שדה שבו (בדיוק) מקיים את כל ~~הדרישות~~ הדרישות מתת-שדה:

סגירות לכפל ולחיבור (הסברתי ב-(*)), קיומ נטרלי לחיבור ולכפל, קיומ נ.ג.ד וקיומ הפכי (מהגדרת $-^{1}$ לעומת הפעולה של המבנה).

■

תרגיל 7 במבוא ללוגיקה

1. תהי L שפה כלשהי ויהי A נוסחה ב L רשימת **האקסיומות הלוגיות**:
   a. $\neg A \vee A$
   b. $A_x[a] \to \exists xA$ אך נשתמש בשקול $\neg A_x[a] \vee \exists xA$
   c. $x = x$
   d. $x_1 = y_1 \to,...,\to x_n = y_n \to fx_1..x_n = fy_1..y_n$ עבור סימן פונקציה n מקומי ו $x_1 = y_1 \to,...,\to x_n = y_n \to Rx_1..x_n \to Ry_1..y_n$ עבור סימן יחס n מקומי רשימת

   כללי ההיסק:
   e. מהנוסחה A הסק את $A \vee B$
   f. מהנוסחה $A \vee A$ הסק את A
   g. מהנוסחה $A \vee (B \vee C)$ הסק את $(A \vee B) \vee C$
   h. מהנוסחאות $\neg A \vee C$ $A \vee B$ הסק את $B \vee C$
   i. אם x לא חופשי ב B מהנוסחה $A \to B \equiv \neg A \vee B$ הסק $\exists xA \to B \equiv \neg \exists xA \vee B$

2. תהי T התורה ללא סימני פונקציה וללא סימני יחס וללא אקסיומות שאינן לוגיות כלומר סימן היחס היחיד בשפה הוא השוויון והאקסיומות היחידות הן האקסיומות הלוגיות. **<u>הערות:</u>** 1)אנו לא נשתמש בסימן הגרירה ולכן באקסיומה b נשתמש בשקול לה הרשום וכנ"ל עבור כלל ההיסק i.
   2) שים לב שמפני שאין סימני פונקציה וסימני יחס פרט סימן השוויון אקסימה d שקולה ל $\neg x = y \vee x = y$. 3) שים לב לסדר באיווים כלומר ל $A \vee B$ נתייחס אחרת מאשר ל $B \vee A$.
   a. נגדיר פונקציה f מקבוצת כל הנוסחאות לערכי אמת באופן הבא: $f(A) = T$ לנוסחה אטומית A. ו $f(\exists xA) = T$, $f(A \vee B) = f(B)$, $f(\neg A) = F$ נוסחאות A, B.
   הראה כי כל נוסחה A שאפשר להוכיח מ T **ללא** אקסימה a מקיימת $f(A) = T$. הסק כי אי אפשר להוכיח את הפסוק $\neg\neg(x = x) \vee \neg(x = x)$ ללא אקסיומה a.
   b. נגדיר פונקציה f המקיימת $f(A) = T$ עבור A אטומית. ובאופן כללי $f(\exists xA) = F$ $f(\neg A) = H\neg(F(A))$ $f(A \vee B) = H_\vee(f(A), f(B))$ הראה כי כל נוסחה A שאפשר להוכיח ב T **ללא** אקסימה b מקימת $F(A) = T$ והסק כי הנוסחה $x = x \to \exists x(x = x) \equiv \neg(x = x) \vee \exists x(x = x)$ היא משפט ב T אך איננה ניתנת להוכחה ללא אקסימה b.
   c. נגדיר פונקציה f המקיימת $f(A) = F$ עבור A אטומית. ובאופן כללי $f(\exists xA) = f(A)$ $f(\neg A) = H\neg(F(A))$ $f(A \vee B) = H_\vee(f(A), f(B))$ הראה כי כל נוסחה A שאפשר להוכיח ב T **ללא** אקסימה c מקימת $f(A) = T$ והסק כי הנוסחה $x = x$ היא משפט ב T אך איננה ניתנת להוכחה ללא אקסימה c.

3. תהי L שפה כלשהי ו T תורה ל L. יהיו A, B נוסחאות בשפה
   a. הראה כי אם $A \vee B$ משפט ב T אז גם $B \vee A$.
   b. הראה כי אם A משפט ב T אז גם $\neg\neg A$.
   c. הראה כי אם A, $A \to B$ משפטים ב T אז גם B.
   d. הראה כי אם A משפט ב T אז גם $\exists xA$.
   e. הראה כי אם A, B משפטים אז גם $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$.

פתרון תרגיל 7

Z. א) תהי f פונקציה הפורכת המשלבת
תרגיל נכון ב אינדוקציה על התחתה
כי כל נוסחה A הינה נכון לתחתה
אלא אם מהצורה $B \vee \neg B$ מקיימת
$f(A)=T$.

ו) צריך לבדוק $f(A)=T$ לכל אקסיומה לוגית
שהיא $B \vee \neg B$:

- $f(\neg A_x[a] \vee \exists x A) = f(\exists x A) = T$
- $f(x=x) = T$ נוסחה אלגוריתמית
- $f(\neg(x=y) \vee (x=y)) = f(x=y) = T$

ii נניח כי אם מסיקים את B מ A $f(A)=T$
אזי $f(B)=T$.

- $A \overset{infer}{\Longrightarrow} B \vee A$ $\quad f(B \vee A) = f(A) = T$
- $A \vee A \Longrightarrow A$ $\quad f(A) = f(A \vee A) = T$
- $A \vee (B \vee C) \Longrightarrow (A \vee B) \vee C$ $\quad f((A \vee B) \vee C) = f(C) = f(B \vee C)$
- $f(A \vee (B \vee C)) = T$

$f(\neg\exists x A \vee B) =$ $\Leftarrow$ $f(\neg A \vee B) = T$ לכן

$(f(\exists x A) = F)$ $H_\vee(H_\neg f(\exists x A), f(B)) = H_\vee(T, f(B)) = T$

אם נניח כי $\neg(x=x) \vee \exists x(x=x)$

נראה לתכתב ולהו אוקיים הבלבה אך לפי
מה שהראינו נקבל כי f נראה לה
עבור T ואז לפי הגדרה של f

$f(\neg(x=x) \vee \exists x(x=x)) =$

$H_\vee(H_\neg(f(x=x)), f(\exists x(x=x))) = F$

כי $f(\exists x(x=x)) = F$ ו $f(x=x) = T$

לכן סתירה.

ה. תהי f מודל כלשהו ב סדיר ל.
נבנה ל כל נוסחה B שנוצרה לחלוטין
לפי אקסיומת ההצבה $A_x[a] \to \exists x A$
מקיימת $f(B)=T$.

- בדיקה לאקסיומות לוגיות:

- $f(\neg A \vee A) = H_\vee(H_\neg(f(A)), f(A)) = T$
- נוסחה אטומית $f(x=x) = T$
- מקרה פרטי של $\neg A \vee A$ $f(\neg(x=y) \vee x=y) = T$

- בדיקה כלל היסק:

- $A \Rightarrow B \vee A$ $f(B \vee A) = H_\vee(f(B), f(A)) = T$
  כי $f(A)=T$ לפי הנחה.
- $A \vee A \Rightarrow A$ $f(A \vee A) = f(A) = T$
- $f(A \vee (B \vee C)) = f((A \vee B) \vee C)$
- אם $f(\neg A \vee C) = f(A \vee B) = T \iff f(B)=T$ או $f(C)=T$

$\Rightarrow f(B \vee C) = T$

יואל גונן מסקין

תרגיל יום א 18-19

תרגיל 7 המבוא ללוגיקה

10

1) על-מנת שהיקש ניתן להוכיח את הנדרש בשאלה
2) אתייחס לכלל ההיסק הראשון (e) ככל שלא
אם הבהרתה ולא כפי שניתן בשאלה: מהנוסחא A היסק את BVA

2) a) בתנאי השאלה:
תהא D נוסחא שאפשר להוכיח מ-T ולא
אקסיומה d. נוכיח באינדוקציה על ההוכחה
של D מתוך T שמתקיים $f(D)=T$:

I) אם D אקסיומה לוגית (כולל d, כמובן):
a) אם D מהצורה $\neg A_x[a] \vee \exists x A$ אזי מהגדרת f:
$f(A) = f(\neg A_x[a] \vee \exists x A) = f(\exists x A) = T$
b) אם D מהצורה $x=x$ אזי D אטומית ומהגדרת f: $f(A)=T$
c) אם D מהצורה $x=y \vee \neg x=y$ אזי $x=y$ אטומית
ומהגדרת f: $f(\neg x=y \vee x=y) = f(x=y) = T$

II) אם D היסקה ע"פ כלל היסק מנוסחאות אשר
עבורן הראינו כבר כי הטענה מתקיימת:
e) אם D מהצורה BVA והיסקה מ-A אזי מהנחת
האינדוקציה $f(D) = f(BVA) = f(A) = T$
f) אם D היסקה מ- DVD
אזי מהנחת האינדוקציה: $f(D) = f(DVD) = T$
g) אם D מהצורה $(AVB)VC$ והיסקה מ $AV(BVC)$
אזי מהנחת האינדוקציה:
$f(D) = f((AVB)VC) = f(C) = f(BVC) = f(AV(BVC)) = T$
h) אם D מהצורה BVC והיסקה מנוסחאות מהצורה
$\neg AVC$, AVB אזי מהנחת האינדוקציה:
$f(D) = f(BVC) = f(C) = f(\neg AVC) = T$
i) אם D מהצורה $\neg\exists x AVB$ והיסקה מ $\neg AVB$ כאשר
x לא מופיע ב-B, אזי מהנחת האינדוקציה:
$f(D) = f(\neg\exists x AVB) = f(B) = f(\neg AVB) = T$

אני הטענה נכונה לגבי D שאפשר להוכיח
מ-T ללא אקסיומה a.
נניח בשלילה כי אפשר להוכיח את הנוסחא
$\neg(x=x)\vee\neg(x=x)$ מתוך ללא אקסיומה a, אני
מן הטענה ומהגדרת f:
$T=f(\neg(x=x)\vee\neg(x=x))=f(\neg(x=x))=F$
וזו סתירה, אני אי אפשר להוכיח את הפסוק $\neg(x=x)\vee\neg(x=x)$
מ-T ללא אקסיומה a.

(D) בתרגיל הבא:
הוא D נוסחא שאפשר להוכיח מ-T ללא אקסיומה
b. נוכיח באינדוקציה על ההוכחה של D מתוך T
שמתקיים $f(D)=T$:
(I) אם D אקסיומה לוגית (כרגע ל-b < מוכן):
(a) אם D מהצורה $A\vee A$: אני מהגדרת f:
$f(D)=f(A\vee A)=H_\vee(f(A),f(A))=H_\vee(H_\neg(f(A)),f(A))$
אם $f(A)=T$: $f(D)=H_\vee(H_\neg(T),T)=H_\vee(F,T)=T$
אחרת $f(A)=F$ ואני: $f(D)=H_\vee(H_\neg(F),F)=H_\vee(T,F)=T$
כלומר בכל מקרה $f(D)=T$.
(c) אם D מהצורה $x=x$ אני אמיתית ומהגדרת f: $f(D)=T$
(d) אחרת D מהצורה $\neg x=y\vee x=y$ אני $x=y$ אמיתית ומהגדרת f
$f(D)=f(\neg x=y\vee x=y)=H_\vee(f(\neg x=y),f(x=y))=H_\vee(H_\neg(f(x=y)),T)=H_\vee(H_\neg(T),T)=H_\vee(F,T)=T$
(II) אחרת D הוסקה באמצעות כלל הניסוק
מנוסחאות אשר קדמו בסדר הראינו כי הטענה מתקיימת
(e) אם D מהצורה $B\vee A$ והוסקה מ-A אני מהנחת האינדוקציה:
$f(D)=f(B\vee A)=H_\vee(f(B),f(A))=H_\vee(f(B),T)=T$
(f) אם D הוסקה מ-$D\vee D$ אני מהנחת האינדוקציה:
$T=f(D\vee D)=H_\vee(f(D),f(D))\Rightarrow f(D)=T$ או $f(D)=T\Rightarrow f(D)=T$
(g) אם D מהצורה $(A\vee B)\vee C$ והוסקה מ $A\vee(B\vee C)$

אזי מהנחת האינדוקציה:

$T=f(A\vee(B\vee C))=H_\vee(f(A),f(B\vee C))=H_\vee(f(A),H_\vee(f(B),f(C)))\Rightarrow$

$\Rightarrow f(A)=T$ או $H_\vee(f(B),f(C))=T \Rightarrow f(A)=T$ או $f(B)=T$ או $f(C)=T \Rightarrow$

$\Rightarrow (f(A)=T$ או $f(B)=T)$ או $f(C)=T \Rightarrow H_\vee(f(A),f(B))=T$ או $f(C)=T \Rightarrow$

$\Rightarrow T=H_\vee(H_\vee(f(A),f(B)),f(C))=H_\vee(f(A\vee B),f(C))=f((A\vee B)\vee C)=f(D)$

ii) אם D מהצורה $B\vee C$ והוסקה מנוסחאות מהצורה $\neg A\vee C$, $A\vee B$ אזי מהנחת האינדוקציה:

i) אם $f(A)=T$: $T=f(\neg A\vee C)=H_\vee(f(\neg A),f(C))=H_\vee(H_\neg(f(A)),f(C))=H_\vee(F,f(C))$

אזי $f(C)=T$, אזי: $f(B\vee C)=H_\vee(f(B),f(C))=H_\vee(f(B),T)=T$

ii) אחרת $f(A)=F$: $T=f(A\vee B)=H_\vee(f(A),f(B))=H_\vee(F,f(B))$

אזי $f(B)=T$, אזי: $f(B\vee C)=H_\vee(f(B),f(C))=H_\vee(T,f(C))=T$

iii) אחרת D מהצורה $\exists x A\vee B$ והוסקה מ $\neg\exists x A\vee B$ כאשר x לא חופשי ב-B, אזי

$f(D)=f(\neg\exists xA\vee B)=H_\vee(f(\neg\exists xA),f(B))=H_\vee(H_\neg(f(\exists xA)),f(B))=$

$=H_\vee(H_\neg(F),f(B))=H_\vee(T,f(B))=T$

אזי הטענה נכונה לכל נוסחא D שאפשר להוכיח מ-T לפי אקסיומה b.

נמשיך בשאלה כי אפשר להוכיח את הנוסחא $\neg(x=x)\vee\exists x(x=x)$ לפי אקסיומה b.

אזי מהיזרה ומהגדרת f:

$f(\neg(x=x)\vee\exists x(x=x))=H_\vee(f(\neg(x=x)),f(\exists x(x=x)))=$

$H_\vee(H_\neg(f(x=x)),F)=H_\vee(F,F)=F$

לכן סתירה, אי אפשר להוכיח את הנוסחא $\neg(x=x)\vee\exists x(x=x)$ מ-T לפי אקסיומה b.

מאידך בהגדרת אקסיומה b ניתן להוכיח את $\neg(x=x)\vee\exists x(x=x)$ מ-T:

בהגדרת אקסיומה b, נסמן $A=(x=x)$ ומהאקסיומה $\neg A_x[x]\vee\exists xA$

כלומר עם $x=x$ נקבל: $\neg(x=x)\vee\exists x(x=x)$

אזי $\neg(x=x)\vee\exists x(x=x)$ משפט ב-T.

(ב) בחינה ב' השאלה:

תהא D נוסחא שאפשר להוכיח מ-T ללא אקסיומה ב. נוכיח באינדוקציה על ההוכחה של D מתוך T שמתקיים $f(D)=T$:

(I) אם D אקסיומה לוגית (פרט ל-ב כמובן):

(a) אם D מהצורה $\neg A \vee A$ אז מהגדרת f:

$f(D)=f(\neg A\vee A)=H_\vee(f(\neg A),f(A))=H_\vee(H_\neg(f(A)),f(A))\overset{\text{הגדרת } H_\neg}{=}T$ ✓

(b) אם D מהצורה $\neg A_x[a] \vee \exists x A$, אז מהגדרת f:

$f(D)=f(\neg A_x[a]\vee\exists xA)=H_\vee(f(\neg A_x[a])\vee f(\exists xA))=$

$=H_\vee(H_\neg(f(A_x[a])),f(\exists xA))=H_\vee(H_\neg(f(A)),f(A))=T$

השתמשתי בטענה: לכל נוסחא A לכל a שמתקיים: $f(A_x[a])=f(A)$.

✓ אוכיח את הטענה על הבנייה של A, באינדוקציה:

(i) אם A אטומית וגם $A_x[a]$ אטומית, אז: $f(A)=F=f(A_x[a])$ (הראינו בשאלה)

(ii) אם A מהצורה $\exists yB$ אז: $f(A_x[a])=f(\exists yB_x[a])=f(B_x[a])=f(B)=f(\exists yB)=f(A)$

(כאשר הראינו בפר את הטענה לגבי B) הנחת האינדוקציה

אם A מהצורה $\exists xB$ אז $A_x[a]=A$ כי x לא חופשי ב-A ו"כ וגו' ל: $f(A_x[a])=f(A)$

(iii) אם A מהצורה $B\vee C$ אז:

$f(A_x[a])=f((B\vee C)_x[a])=f(B_x[a]\vee C_x[a])=H_\vee(f(B_x[a]),f(C_x[a]))\overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}$

$=H_\vee(f(B),f(C))=f(B\vee C)=f(A)$

(iv) אם A מהצורה $\neg B$ אז:

$f(A_x[a])=f((\neg B)_x[a])=f(\neg(B_x[a]))=H_\neg(f(B_x[a]))\overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=}$

$H_\neg(f(B))=f(\neg B)=f(A)$

אז הטענה נכונה לכל נוסחא A.

(ג) אחרת D מהצורה $\neg x=y\vee x=y$ אז $x=y$ אטומית ומהגדרת f:

$f(D)=f(\neg x=y\vee x=y)=H_\vee(f(\neg x=y),f(x=y))=$

$=H_\vee(H_\neg(f(x=y)),f(x=y))=H_\vee(H_\neg(T),T)=H_\vee(F,T)=T$

(II) אחרת D הוסקה באמצעות כללי היסק מנוסחאות שקודם כבר הראינו כי הטענה מתקיימת.

(e) (f) אם כן, הפסקה אם כלל היסק 1,2,3 אינו
אזי ההגדרה ש $f(D)=T$ היא בדיוק כמו בסעיף
הקודם עבור f הקודמת ומסתמכת רק על הנכונות:
$f(\neg A)=H_{\neg}(f(A))$, $f(A\vee B)=H_{\vee}(f(A),f(B))$.

(i) אחרת D מהצורה $\exists xA\vee B$ והפסקה $\neg\exists xA\vee B$
כאשר x לא חופשי ב-B, אזי:

$$f(D)=f(\neg\exists xA\vee B)=H_{\vee}(f(\neg\exists xA),f(B))=H_{\vee}(H_{\neg}(f(\exists xA)),f(B))=$$
$$H_{\vee}(H_{\neg}(f(A)),f(B))=H_{\vee}(f(\neg A),f(B))=f(\neg A\vee B)=T$$

אזי הטענה נכונה לכל נוסחא D
שאם שם לפיות מ-T ולא אקסיומה ג.
נניח בשלילה כי אפשר להוכיח את הנוסחא $x=x$
ללא אקסיומה ג, אזי מן הטענה וממה בצדית f
(בגלל $x=x$ אטומית): $T=f(x=x)=F$
וזו סתירה, אזי אי אפשר להוכיח את הנוסחה $x=x$
מ-T ללא אקסיומה ג.
מאידך, אקסיומה ג היא $x=x$ אזי $x=x$ משפט ב-T.

(3) בתנאי השאלה:

(a) נתון: $A\vee B$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{מכלל היסק g עבור } A=A,\ B=B,\ C=A}$ $B\vee A$ משפט ב-T.
מאקסיומה a שמלמדת: $A\vee A$ משפט ב-T

(b) נתון: A משפט ב-T $\xleftarrow{\text{כלל היסק e עבור } B=A}$ $A\vee A$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{סעיף a}}$ $A\vee\neg A$ משפט ב-T
מאקסיומה a עבור $A=A$ ו $A\vee A$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{סעיף a}}$ $A\vee\neg A$ משפט ב-T
$A\vee\neg A$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{כלל היסק g עבור } A=A,\ B=C=A}$ $A\vee A$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{כלל היסק e עבור } B=A}$ A משפט ב-T.

(c) נתון: $\neg A\vee B$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{כלל היסק g עבור } A=B,\ B=B}$ $B\vee B$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{כלל היסק e עבור } A=B}$ B משפט ב-T
נתון: A משפט ב-T $\xleftarrow{\text{כלל היסק g עבור } A=A,\ B=B}$ $B\vee A$ משפט ב-T $\xleftarrow{\text{סעיף a}}$ $A\vee B$ משפט ב-T

(d) אקסיומה b עבור $x=a$, $A=A$: $(A_x[x]\to\exists xA)\to\exists xA\to A$ משפט ב-T
נתון: A משפט ב-T. $\xleftarrow{\text{מסעיף c}}$ $\exists xA$ משפט ב-T.

(e) מעבר לדף...

(ה) נאמר ס"ו מה בעמוד $A=(\neg A\vee\neg B)$ $\Leftarrow$ $\neg(\neg A\vee\neg B)\vee(\neg A\vee\neg B)$ משלב ב-T

$\neg(\neg A\vee\neg B)\vee(\neg A\vee\neg B)$ $\xleftarrow{\text{(ד) סעיף}}$ $\neg B\vee(\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg A)$ משלב ב-T

$\neg B\vee(\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg A)$ $\xleftarrow{\text{(ג) סעיף}}$ $(\neg B\vee\neg(\neg A\vee\neg B))\vee\neg A$ כלל היסק g

$A=(\neg A\vee\neg B)$, $C=\neg B$, $B=\neg A$

$(\neg B\vee\neg(\neg A\vee\neg B))\vee\neg A$ $\xleftarrow{\text{(ב) סעיף}}$ $B\to(\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg A)$ לפי שקול 1

$\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg A$ משלב. לפי שקול 5: $A\to\neg(\neg A\vee\neg B)$ $\xleftarrow{\text{(ב) סעיף}}$

$\neg(\neg A\vee\neg B)$ נמשלב ב-T. $\xleftarrow{\text{(ב) סעיף ונמשלב: A משלב}}$

תרגיל 8 במבוא ללוגיקה

1. תהי Φ קבוצת כל הנוסחאות האלמנטריות בשפה מסוימת כלומר זו הקבוצה של הנוסחאות האטומיות ונוסחאות המתחילות בכמת קיים (לשם הדיון כאן נחשוב אליה רק כקבוצה של סמלים פורמליים שלהם ניתן ערכי אמת). נבנה בעזרת נוסחאות אלמנטריות אלו קבוצה $\Phi_\vee$ של נוסחאות חדשות באופן הבא: אם בנינו את A,B אז מהם נוכל לבנות את $(A\vee B)$ כלומר כל נוסחה $\Phi_\vee$ היא או אלמנטרית או איווי בסוגריים של שתי נוסחאות ב $\Phi_\vee$ בעלות אורך קטן יותר.

a. תהי $f:\Phi\to\{T,F\}$ פונקציה ונרחיב אותה לכל $\Phi_\vee$ באופן המקובל הוכח כי אם A נוסחה ב $\Phi_\vee$ ו $A_1,...,A_n$ הן בדיוק הנוסחאות האלמנטריות המופיעות בה (אולי עם חזרות) אז $f(A)=T$ אם"ם קיים i כך ש $f(A_i)=T$.

b. ניקח מערכת היסק לקבוצה זו המכילה את כללי ההיסק הבאים:

i. $A\Rightarrow(A\vee B)$

ii. $(A\vee B)\Rightarrow(B\vee A)$

iii. $(A\vee A)\Rightarrow A$

iv. $\big(A\vee(B\vee C)\big)\Rightarrow\big((A\vee B)\vee C\big)$

v. $\big((A\vee B)\vee C\big)\Rightarrow\big(A\vee(B\vee C)\big)$

תהי $A_1,...A_n$ קבוצה של נוסחאות אלמנטריות נאמר כי ניתן להוכיח את הנוסחה A מקבוצה זו אם קיימת סדרה $B_1,...,B_m=A$ של נוסחאות כך שלכל $0\le j\le m$ $B_j=A_i$ או שהוא מסקנה של אחד הקודמים לו ע"י אחד מכללי ההיסק הנ"ל. הוכח כי A ניתן להוכחה מקבוצה $A_1,...A_n$ אם"ם מופיע בו לפחות אחד מה A_i.

c. תהי A נוסחה כלשהי ונניח כי ניתן להוכיח את B מ A אז לכל פונקצית אמת כנ"ל אם $f(A)=T$ אז גם $f(B)=T$. הסיקו כי ב B מופיעה כל נוסחה אלמנטרית המופיעה ב A.

d. יהיו A_1,A_2 נוסחאות אשר הנוסחאות האלמנטריות המופיעות בהן בדיוק $B_1,...,B_n$ וזהו בדיוק סדר הופעתן למשל $A_1=(B_1\vee(B_2\vee(B_3,...\vee B_n)$ הראה כי ניתן להוכיח את A_2 מ A_1.

e. אותו הדבר כמו ב d רק בלי שמירה על הסדר.

f. הראה כי התנאים הבאים שקולים

i. ניתן להוכיח את הנוסחה B מהנוסחה A.

ii. לכל פונקצית אמת f כנ"ל אם $f(A)=T$ אז גם $f(B)=T$.

iii. כל נוסחה אלמנטרית המופיעה ב A מופיעה גם ב B.

2. כעת נחזור למערכת ההיסק הרגילה המוגדרת לשפה כלשהי ויהיו Γ,Δ קבוצות של נוסחאות נסמן $\Gamma\vdash\Delta$ אם כל נוסחה ב Δ ניתן להוכיח מ Γ בתוספת כמובן האקסיומות הלוגיות (עבור נוסחה יחידה φ נסמן $\Gamma\vdash\varphi,\varphi\vdash\Delta$) הוכח:

a. אם $\Gamma\vdash\Delta$ ו $\Delta\vdash E$ אז $\Gamma\vdash E$.

b. אם $\Gamma\vdash\varphi$ אז קיימת $\Gamma'\subseteq\Gamma$ תת קבוצה סופית כך ש $\Gamma'\vdash\varphi$.

c. נאמר כי Γ היא עקבית אם אי אפשר להוכיח מ Γ סתירה כלומר פסוק שאינו נכון בכל המבנים. הוכח כי Γ היא עקבית אם"ם כל תת קבוצה סופית שלה עקבית.

d. הראה כי אם $\Gamma\vdash\varphi$ אז $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$ אינה עקבית.

תרגיל 8 במתמטיקה לוגית

(2) (a) נניח ש- $\Gamma = \{C_1, \dots, C_n, \dots\}$. $\Delta = \{D_1, \dots, D_n, \dots\}$

$\Delta \vdash \Gamma$ פירוש לכל $A \in \Delta$ קיימת סדרה $B_1^A, \dots, B_m^A = A$ של נוסחאות כך שלכל $1 \le j \le m$ $B_j = C_i$ או שהוא מסקנה של אחד הקודמים לו לפי אחד מכללי ההיסק.

$\Delta \vdash E$ פירוש לכל $A \in E$ קיימת סדרה $B_1^A, \dots, B_m^A = A$ של נוסחאות כך שלכל $1 \le j \le m$ $B_j = D_i$ או שהוא מסקנה של אחד הקודמים לו לפי אחד מכללי ההיסק.

נראה שלכל $\varphi \in E$ $\varphi \vdash \Gamma$. תהי $\varphi \in E$. $\varphi \vdash \Delta$ $\Leftarrow$ קיימת סדרה $B_1^\varphi, \dots, B_m^\varphi = \varphi$ של נוסחאות כך שלכל $1 \le j \le m$ $B_j^\varphi = D_i$ או שהוא מסקנה של אחד הקודמים לו לפי אחד מכללי ההיסק. אם כל B_j הם מסקנה של הקודמים לו אחד מכללי ההיסק אזי ברור ש $\varphi \vdash \Gamma$ כי ההוכחה כללי לא מסתמכת על האקסיומות הלא לוגיות, אלא רק על האקסיומות הלוגיות וכללי ההיסק.

יהי k המקסימלי שעבורו $B_k \in \Delta$ פירוש המעבירים בהוכחה לאחר מכן הם רק לפי כללי ההסק. $B_k \vdash \Gamma$ $\Leftarrow$ קיימת סדרה $B_1^{B_k}, \dots, B_n^{B_k} = B_k$ של נוסחאות כך שלכל $1 \le j \le n$ $B_j^{B_k} = C_i$ או שהוא מסקנה של אחד הקודמים לו לפי אחד מכללי ההיסק. ברור שה סדרה $B_1^{B_k}, \dots, B_n^{B_k} = B_k, B_{k+1}, \dots, B_m = \varphi$ הוא הוכחה של φ מתוך Γ בתוספת כללי ההסק $\Leftarrow$ $\varphi \vdash \Gamma$

פירוש $E \vdash \Gamma$. אשר (ב)

(ב) $\varphi \vdash \Gamma$ משמעו שקיימת סדרה (סופית) $B_1, \dots, B_m = \varphi$ כך שלכל $1 \le j \le m$ $B_j \in \Gamma$ או שהוא מסקנה של אחד הקודמים לו לפי אחד מכללי ההיסק.

תהי $\{\varphi_i\}$ קבוצת האינדקסים שעבורם $B_{m_i} \in \Gamma$. ברור שכל קבוצה סופית נמדדת $\Gamma' = \{B_{m_i}\}$ וברור ש $\varphi \vdash \Gamma'$ אשר (ב)

(c) Γ עקבית אמ"מ כל תת־קבוצה סופית הורחבה

($\Rightarrow$) אם כל תת־קבוצה סופית של Γ עקבית, בפרט $\Gamma \subseteq \Gamma$ עקבית.

($\Leftarrow$) נניח ש־Γ עקבית. כלומר אי אפשר להוכיח מ־Γ סתירה. תהי $\Gamma' \subseteq \Gamma$ תת־קבוצה. כל הנוסחאות שאפשר להוכיח מ־Γ' הן בעצם כל הסדרות $B_1, \dots, B_m$ כך ש־$B_j \in \Gamma'$ או ש־B_j הוא מסקנה מהקודמים. ברור שאם $\Gamma \subseteq \Gamma'$ כל מה שניתן להוכיח מ־Γ' ניתן להוכיח גם מ־Γ. אם היה ניתן להוכיח סתירה מ־Γ' היה ניתן להוכיח אותה גם מ־Γ, בסתירה לכך ש־Γ עקבית.

משל ☺

(d) הורחבנו שאם ניתן לפסק את A ניתן לפסק את B אז ניתן לפסק $A \vee B$.

נתון ש־$\neg A$ ניתנת להוכחה ובגלל ש־Γ עקבית אם $\neg A$ ניתנת להוכחה $\Rightarrow$ $\neg A$ ניתנת להוכחה וגם סתירה.

(1) (f) (i $\Rightarrow$ ii) הוכחה בסעיף ש. (ii $\Rightarrow$ i) הוכח ב־(c)

(ii $\Rightarrow$ iii) ברור שאם כל נוסחה אטומרית ב־A היא גם ב־B אז $f(A)=T$ אזי ש־$f(B)=T$. אם $f(A)=T$ אז קיימת נוסחה אטומרית ב־A A_1 כך ש־$f(A_1)=T$. נוסחה כזו מופיעה גם ב־B וגם היא דיסיונקציה של נוסחאות אטומרית ולכן $f(B)=T$.

(iii $\rightarrow$ i) נניח שכל נוסחה אטומרית ב־A מופיעה ב־B. אז B היא דיסיונקציה של נוסחאות אטומרית שחלק מהן זה את A. אז אם נסתכל על $A_1, \dots, A_n$ אפשר להוכיח באמצעות B הסק את B.

(ii $\Rightarrow$ iii) נניח $A = A_1 \vee \dots \vee A_n$ ו־ $B = B_1 \vee \dots \vee B_k$ נגדיר אחת $g(A) = \begin{cases} T & A = A_i \\ F & \text{אחרת} \end{cases}$ לכל $A \in \Phi_A$ אטומי. נניח שקיימת ב־A נוסחה אטומרית שלא מופיעה ב־B בהכ"ז A_1. אז $g(A)=T$ ולכן $g(B)=T$ אבל A_1 לא מופיעה ב־B ולכן $g(B)=F$. סתירה $\Leftarrow$ כל נוסחה אטומי ב־A מופיעה גם ב־B. משל ☺

1 (a) באינדוקציה על מס' הנוסחאות האלמנטריות (בכלל הצדדים):

מדוע ש עבור $A = A_1$ $\quad f(A_1)=T \iff f(A)=T$

נניח ש $A \in \Phi_\vee$ אז $A=(B \vee C)$ כאשר B ו-C נוסחאות ב $\Phi_\vee$ בפחות אותיות מ-A $\Leftarrow$ ניתן להראות עליהן את הנחת האינדוקציה

$$f(A) = H_\vee(f(B), f(C)) = T \iff$$

$$\iff f(B) = T \quad \vee \quad f(C) = T \iff$$

קיים i כך ש $f(B_i)=T$ או קיים i כך ש $f(C_i)=T$

כאשר B_i - הנוסחאות האלמנטריות שמופיעות ב-B

C_i - " " ב-C.

מדוע ש B_i ו-C_i הם חלק מ A_i זה מראה ש $f(A)=T$ אמ"מ קיים i כך ש $f(A_i)=T$.

נשלם ☺

(c) ניתן להוכיח את B ל-A כמו B הנקבלה ל-A ע"י אחד מכלל ההיסק. יש 4 אפשרויות:

- B היא מהצורה $B_1 \vee B_2$ אז A היא או B_1 או $B_2 \vee B_1$. אם A היא B_1 אז אם $f(B_1)=T$ אז $f(B)=f(B_1 \vee B_2) = H_\vee(f(B_1), f(B_2)) = T$

אם A היא $B_2 \vee B_1$ אז $f(B_2 \vee B_1)=T$ מדוע שאם $f(B_1 \vee B_2)=T$.

- B היא מהצורה B_1 אז A היא מהצורה $B_1 \vee B_1$ מדוע שאם $f(B_1 \vee B_1)=T$ אז $f(B)=f(B_1)=T$

- B היא מהצורה $(B_1 \vee B_2) \vee B_3$ אז A היא $B_1 \vee (B_2 \vee B_3)$ אם $f(B_1 \vee (B_2 \vee B_3))=T$ אז $f(B_1)=T$ או $f(B_2 \vee B_3)=T$ כלומר או $f(B_1)=T$ או $f(B_2)=T$ או $f(B_3)=T$ $\Leftarrow$ $f(B)=f((B_1 \vee B_2) \vee B_3)=T$

- B היא $B_1 \vee (B_2 \vee B_3)$ ו-A היא $(B_1 \vee B_2) \vee B_3$ מרצים בצורה דומה כמו המקרה הקודם. נשלם ☺

ו) (⇐) נניח שאפשר להוכיח את A מ $A_1,\dots,A_n$. יש קיימת סדרה $B_1,\dots,B_m=A$ שמקיימת את מה שמוגדר בשאלה

נוכיח באינדוקציה על m:

$m=1$ ⇐ קיים i כך ש $A=A_i$ והטענה נכונה.

נניח למספר קטן מ-m.

אם בין i כך ש $B_m=A_i$ אז סיימנו. אחרת יש כך שניתן להסיק את B_m מ- B_j. אפ הנחת האינדוקציה ש i כך ש- A_i מופיע ב- B_j. מכיוון שבכל כלל ההסק כל נוסחה אומנטרית בדרך שמאל מופיעה מימין לכן A_i מופיע גם ב- B_m.

(⇒) נניח שיש i כך ש A_i מופיע ב- A. נוכיח באינדוקציה על האורך של A:

אם A אומנטרית אז $A=A_i$ וסיימנו.

נניח לכל נוסחה שקדמה מ- A.

אם $A=B\vee C$ בגלל נניח ש A_i מופיע ב- B. לפי הנחת האינדוקציה ניתן להוכיח את B ~~מ~~ מ- $A_1,\dots,A_n$

לפי (i) נוכל להוכיח את $A=B\vee C$

אם A_i מופיע רק ב- C אפשר להשתמש בכלל (ii)

10

דינה צליגר
25.12.05

תרגיל 9 במבוא ללוגיקה

1. תהי L שפה כלשהי ותהי Φ הקבוצה של כל הנוסחאות האלמנטריות נאמר כי נוסחה כלשהי φ *נוצרת ע"י נוסחאות אלמנטריות* אם קיימת סדרה: $\varphi_1,\dots,\varphi_n=\varphi$ כך שלכל i מתקיים אחד מהבאים:
   a. φ_i היא אלמנטרית
   b. $\varphi_i=\neg\varphi_j \quad j<i$
   c. $\varphi_i=\vee\varphi_j\varphi_k \quad j,k<i$ (אפשר גם לרשום למי שיותר נוח $(\varphi_i=(\varphi_j\vee\varphi_k)$)

   הוכח כי כל נוסחה ב L *נוצרת ע"י נוסחאות אלמנטריות.*
2. תהי $f:\Phi\to\{T,F\}$ פונקציה **כלשהי** הראה כי קיימת פונקציה $\tilde{f}$ יחידה מקבוצת **כל** הנוסחאות לקבוצה $\{T,F\}$ המקיימת:
   a. $\tilde{f}(\varphi)=f(\varphi) \quad \forall\varphi\in\Phi$
   b. $\tilde{f}((\varphi\vee\psi))=H_{\vee}(\tilde{f}(\varphi),\tilde{f}(\psi))$
   c. $\tilde{f}(\neg\varphi)=H_{\neg}(\tilde{f}\varphi)$
3. ראינו כי כל מבנה M המתאים ל L נותן פונקצית אמת על קבוצת הנוסחאות ולכן בפרט על קבוצת הנוסחאות האלמנטריות. האם כל פונקציה $f:\Phi\to\{T,F\}$ מתקבלת ממבנה? אם לא תן דוגמה.
4. הראה כי כל טאוטולוגיה נכונה בכל מבנה ותן דוגמה לנוסחה הנכונה בכל מבנה שאינה טאוטולוגיה.
5. הוכח אילו מן האקסיומות הלוגיות הן טאוטולוגיות ואלו לא.
6. **עקרון האינדוקציה על הוכחות**: תהי T תורה ו P תכונה כלשהי על נוסחאות בשפה של T עקרון האינדוקציה על הוכחות אומר כי אם התנאים הבאים מתקיימים :
   a. לכל אקסיומה לוגית ולכל אקסיומה לא לוגית יש תכונה P.
   b. לכל תנאי הסק $A,B\Rightarrow C$ אם ל A,B יש תכונה P אז גם ל C יש תכונה P.

   אז לכל משפט של T יש תכונה P. הוכח את העיקרון.
7. הראה כי בתורה T כל משפט T נכון בכל מודל של T כלומר מבנה המקיים את כל האקסיומות הלא לוגיות ב T.
8. בשאלה 4 ראינו כי כל טאוטולוגיה נכונה בכל מבנה אך ההפך אינו נכון. במשפט הטאוטולוגיה הוכחנו כי כל טאוטולוגיה ניתנת להוכחה מהאקסיומות הלוגיות וכללי ההיסק. במלים אחרות תורת ההיסק שבנינו מספיק חזקה כדי להוכיח כל טאוטולוגיה בעזרתה. הסבר מדוע לתורת היסק יש כוח מקסימלי אם ניתן להוכיח בעזרתה כל נוסחה שנכונה בכל מבנה לשפה.
9. נאמר כי תורה T היא שלמה אם כל נוסחה בשפה ניתנת להוכחה או ששלילתה ניתנת להוכחה. הראה כי לכל נוסחה A ולכל שני מודלים של תורה שלמה M,N מתקיים $N(A)=M(A)$.
10. תן דוגמה לתורה שאינה שלמה.

לוגיקה קלאסית 9

1. התפרצות נוסחה באופן כללי היא ש:

אם נוסחה אטומית היא נוסחה

כי אם A,B נוסחה אז גם $\neg A$, $A \vee B$, $\exists x A$ נוסחאות

לכן אם A נוסחה משתנה אז היא אטומית ולכן אטומית

אז שהי $A = \exists x B$ ולכן אלמנטרית והפרט

נדרש עי אטומטרי

אז ש $A = \neg B$ או $A = B \vee C$ ואז נדרש לבדוק

ש A נדרש עי אלמנטרי.

2. נגדיר את $\tilde{f}$ באינדוקציה אם $A = \neg B$

נגדיר $\tilde{f}(A) = H_\neg(\tilde{f}(B))$ אם $A = B \vee C$ נגדיר

$\tilde{f}(A) = H_\vee(\tilde{f}(B), \tilde{f}(C))$.

מכיוון שכל נוסחה היא או אטומית או <u>באופן יחיד</u> $\neg B$ או $B \vee C$ התפרצות הפונקציה

היא טוטלית והתפרצות $\tilde{f}$ מבלי שהיא יחידה

המקיימת יש רק אין הבדל.

3. למשפט נגדיר F הקבוצה ו אטומטרי

$x = x$ אז הפרדיקט F. כל מבנה M יחיד

שמת ו אקסיומה אומרת בדיוק אם פרדיקט T.

4. כל מבנה M נתון בפרט מרכיב לכל הנוסחאות

וכפי שנראה על נוסחאות אלו הן סינטקטית הטענה לכן בהגדרה
הוא ניתן T לכל טאוטולוגיה.

הנוסחה $x=x$ אינה טאוטולוגיה.

5. האקסיומה הלוגית הבאה שהיא סכם טאוטולוגיה
היא $A \vee \neg A$.

6. עקרון האינדוקציה על הוכחה:
נניח שיש העקרון מאינדוקציה שאם על אורך ההוכחה
יהי A משפט מ T ויהי $A_1, \dots, A_n$
הוכחה לו ונניח כי לכל משפט ב T סכם הוכחה
הקצרה מ-n יש נכונה P.

כעת לפי הגדרה L הוכחה $A_n = A$ הוא או
אקסיומה (לוגית או לא) ולכן לפי בנתון העקרון
יש לו אכן נכונה P. זאת שמקבל מ אקס
מעלה הסיק מ A_i, A_k עבור $i<n$, $k<n$ כאשר
הסדרה $A_1 \dots A_i$ ו $A_1 \dots A_k$ הן הוכחות
ל A_i ו A_k ולכן לפי הנחת האינדוקציה
יש ל A_i ו A_k הוכחות P ולכן לפי

בנוסף הלוקחים גם למסקנה $A_1, A_2 \Rightarrow A_n$ ש.
בכוח P.

7. נניח בינגליה על הכתבה יהי M מודל
של T אז P הכוח על הנוסחאות שן
ש A מקיים אל P אזי $M(A)=T$.
אנו לפי הגדרה של מודל כל אקסיומה II מוגדר
על T מקיימת P ולפי נאותות מערכת הסק
ש, ט של שאלה 6 מקיימת לגבי P
לכן לפי סקרון הבינגליה על הכתבה
כל משפט ב T מקיים P.

8. לפי 7 כל מה שניתן להוכיח רק מהאקסיומות
המוגדרות תוב להוכיח בכל מבנה בעל כוח
לשפה לכן לא יהיו להם שמערכת הסק
נאותה יהיה אפשר להכיח נוסחה שאינה נכונה
במבנה כלשהו ואם במערכת הסק נאותה
אפשר להכיח כל נוסחה הנכונה בכל מבנה
זה המקרה הבלתי.

9. נניח T תורה שלמה ויהי N, M מודלים של T
ו A נוסחה ענית כך $N(A)=T$ אזי בהכרח $A \vdash_T$
ובדיוק משמלא $A \vdash_T$ ואז $N(A)=T$ לפי 7
בסתירה להנחה. לכן $M(A)=T$ מפני שגם M מודל
של T כמו כן שוב פעם הוה להתיל ב $M(A)=T$
ולקבל בדיוק הדומה $N(A)=T$ לכן
לכל A $M(A)=T \iff N(A)=T$ ולכן $N(A)=M(A)$ לכל A

10. נניח T הנדרה שהאקסיומות הלו לוגלות לה
כן אקסיומה חשבה. לפי 9 מספיק שנראה
נוסחה A ישנן מבנים שבהם מודלים של T
שונים נגדנים ווהו לרק ל A.
נקח: $A = \exists x(x^2+1=0)$
המבנים הם $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ אזי
$\mathbb{C}(A) = T \neq F = \mathbb{R}(A)$

תרגיל 10 במבוא ללוגיקה

1. הראה כי אם נוסחה ניתנת להוכחה ללא אקסיומות לא לוגיות וללא האקסיומות הבאות: אקסיומת ההצבה אקסיומת הזהות, אקסיומת השוויון וללא תנאי ההיסק עבור הכמת $\exists$ אז הנוסחה היא טאוטולוגיה.

2. תהי A נוסחה כלשהי בשפה כלשהי הראה כי קיימת נוסחה A' כך ש $A \leftrightarrow A'$ היא טאוטולוגיה ו A' היא מהצורה $A' = A_1 \vee \ldots \vee A_n$ כאשר לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $A_i = B_1 \wedge \ldots \wedge B_{m_i}$ כאשר לכל $1 \le j \le m_i$ הנוסחה B_j היא נוסחה אלמנטרית או שלילה של נוסחה אלמנטרית.

3. הוכח את המשפטים הבאים:
   a. $(\forall x(A \to B)) \to (\exists xA \to \exists xB)$
   b. $(\forall x(A \to B)) \to (\forall xA \to \forall xB)$
   c. $(\exists x(A \vee B)) \leftrightarrow (\exists xA \vee \exists xB)$
   d. $(\forall x(A \wedge B)) \leftrightarrow (\forall xA \wedge \forall xB)$
   e. $(\exists x(A \wedge B)) \to (\exists xA \wedge \exists xB)$
   f. $(\forall xA \vee \forall xB) \to (\forall x(A \vee B))$

4. מצא שפה ומבנה מתאים לשפה שבה הנוסחאות הבאות אינן נכונות:
   i. $(\forall x(A \vee B)) \to (\forall xA \vee \forall xB)$
   ii. $(\exists xA \wedge \exists xB) \to (\exists x(A \wedge B))$

5. נניח כי x אינו משתנה חופשי בנוסחה A הראה כי:
   a. $\exists xA \leftrightarrow A$
   b. $\forall xA \leftrightarrow A$

6. הוכח את המשפטים הבאים:
   a. $\exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$
   b. $\forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$
   c. $\exists x\forall yA \to \forall y\exists xA$

7. מצא שפה ומבנה מתאים לשפה שבה הנוסחה $\forall x\exists yA \to \exists y\forall xA$ אינה נכונה.

בסיון קנון סו

1. באינדוקציה על האורך מאקסיומות הנתונות ועל-
ההסק:

אם A נוסחה הנגזרת לפי מאקסיומות אלו ועל-
ההסק ואם $A_1, \dots, A_n = A$ הלמה של A
אזי אם $A_n = A$ היא אקסיומה אזי היא מהצורה
$A \vee A$ ולכן טאוטולוגיה אחרת היא מתקבלת
מ אחד הקודמים (שבגלל הנחת האינדוקציה טאוטולוגיה)
עתה אחרי מעל ההסק:
ובלעדי אחר כל ההסק:

1. $A \Rightarrow A \vee B$ אם A טאוטולוגיה אז גם $A \vee B$
טאוטולוגיה

2. $A \vee A \Rightarrow A$ כנ"ל

3. אסור ל (בלה)

4. אם $A \vee C$ ו $A \vee B$ טאוטולוגיה אזי גם C טאוטולוגיה
B גם טאוטולוגיה לכן $B \vee C$ טאוטולוגיה.

2. נשתמש בכך ש- $A_1 \dots A_n$ נוסחאות אלמנטריות.

מתקיים $\neg(\bigvee_{i=1}^{n} A_i) \Longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \neg A_i$ לשוללות. (חוקי דה מורגן)

$\neg\neg A \Longleftrightarrow A$ לשוללות.

ו- $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j_i=1}^{K_i} A_i \Longleftrightarrow \bigvee_{\substack{(j_1,\dots,j_n) \\ 1 \le j_\ell \le K_\ell}} \bigwedge_{i=1}^{n} A_{j_i}$ לשוללות. (פילוג).

נוכל בעזרתם לבנות את A

כל נוסחה A ניתנת לנוסחאות אלמנטריות רק בשלבים 1 ו-2.

נניח כי $A = B \vee C$ לפי הנחת הבנייה

לשוללות $B \Longleftrightarrow \bigvee_{i_B=1}^{n_B} \bigwedge_{j=1}^{K_{i_B}} B_j$ ו- $C \Longleftrightarrow \bigvee_{i_C=1}^{n_C} \bigwedge_{j=1}^{K_{i_C}} C_j$

לכן $A \Longleftrightarrow \bigvee_{i_C=1}^{n_C} \bigwedge_{j=1}^{K_{i_C}} C_j \vee \bigvee_{i=1}^{n_B} \bigwedge_{j=1}^{K_{i_B}} B_j$

כאן B_j ו- C_j נוסחאות אלמנטריות

זו סיבה כל נוסחאות אלמנטריות

(8) נניח ש $A = \neg B$ לפי הגדרת הפיצול:

$$B \Longleftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j_i=1}^{k_i} B_i$$ פיצול

$$A \equiv \neg B \Longleftrightarrow \neg \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j_i=1}^{k_i} B_i$$ אם

$$\neg\left(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j_i=1}^{k_i} B_j\right) \Longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j_i=1}^{k_i} \neg B_j$$ לפי דה מורגן: פיצול

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{k_i} \neg B_j \Longleftrightarrow \bigvee_{\substack{(j_1,\dots,j_n) \\ 1 \le j_L \le k_L}} \bigwedge_{i=1}^{n} \neg B_{j_i}$$ לפי הפילוג: פיצול

$$A \Longleftrightarrow \bigvee_{\substack{(j_1,\dots,j_n) \\ 1 \le j_L \le k_L}} \bigwedge_{i=1}^{n} \neg B_j$$ אם פיצול

3. נוכיח $\vdash (\forall x(A\to B))\to(\exists xA\to\exists xB)$

(a) יהי $x_1,\dots,x_n$ המשתנים ב A,B הפשוטים
והשונים מ x, ויהיו $e_1,\dots,e_n$ קבועים חדשים
ושונים נניח כי $A[\bar{e}]=A_{x_1\dots x_n}[e_1\dots e_n]$ אז:

כלל אם $\vdash \forall x(A\to B)[\bar{e}]$

אז $\vdash (A\to B)[\bar{e}]$

לפי משפט הפונים $\vdash (\exists xA\to\exists xB)[\bar{e}]$

כלומר: $\vdash T[\forall x(A\to B)[\bar{e}]]\ (\exists xA\to\exists xB)[\bar{e}]$

ומסעיף e $\forall x(A\to B)[\bar{e}]$ סגורה אפשר להשתמש
במשפט הדדיקציה ולקבל:

$$\vdash \forall x(A\to B)[\bar{e}]\to(\exists xA\to\exists xB)[\bar{e}]$$

ומכאן לפי משפט הקבועים:

$$\vdash \forall x(A\to B)\to(\exists xA\to\exists xB)$$

(b) כדי להוכיח זאת נשתמש
במשפט הפונים בצורה הבאה:
אם:

$$\vdash (A\to B)[\bar{e}]$$

$$\vdots$$

$$\vdash (\exists xA\to\exists xB)[\bar{e}]$$

ג) לפי לי: נניח כי הנוסחה $\forall xA \vee \forall xB \to A \wedge B$

היא מסקנה לוגית של הנוסחאות:

שהן משפטים

$\vdash \forall xA \to A$

$\vdash \forall xB \to B$

ולפי משפט מסקנה x אינו חופשי ב $\forall xA \vee \forall xB$

נקבל

$\vdash \forall xA \vee \forall xB \to \forall x(A \wedge B)$

כיוון שיש נוסחה מהצורה מכך ש:

$\vdash A \wedge B \to A$ $\vdash A \wedge B \to B$

(מיוחדת ולכן:

(1) $\vdash \forall x(A \wedge B) \to \forall xA$ (2) $\vdash \forall x(A \wedge B) \to \forall xB$

(כי הוא)

ו $\vdash \forall x(A \wedge B) \to \forall xA \vee \forall xB$

(כי זו מסקנה לוגית של (1), (2).

(שזה מוכרחים בוליאן גמור)

4.5.7 הראו קיום נוסחי גודל מ 6:

א. $\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A$

מספיק להוכיח: $\vdash \exists x \exists y A \Rightarrow \exists y \exists x A$

מאקסיומת הכפה נקבל: $\vdash A \rightarrow \exists x A$

ממשפט פולין נקבל $\vdash \exists y A \rightarrow \exists y \exists x A$

מ שלב הוספת כמת $\vdash \exists x \exists y A \rightarrow \exists y \exists x A$.

ב. כיוון שני:

ג. $\vdash \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

מאקסיומה הכפה: $\vdash A \rightarrow \exists x A$

ממשפט הכלל $\vdash \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

מכלל הסק בלוגי כמת $\vdash \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$

תרגיל 11 במבוא ללוגיקה

1. **משפט השוויון:** תהי b שם עצם כלשהו ויהיו גם $a_1,...a_n$ שמות עצם נחליף כל הופעה של a_i ב b בשם עצם אחר a_i' ונקבל שם עצם חדש b' אזי אם ניתן להוכיח כי $a_i = a_i'$ אז ניתן גם להוכיח כי $b = b'$. כעת אם A נוסחה שבה ההופעות של a_i הן לא ישר אחרי הכמתים $\forall,\exists$ ותהי A' הנוסחה המתקבלת מ A ע"י החלפה של ה a_i ב a_i' אז אם ניתן להוכיח כי $a_i = a_i'$ אז ניתן להוכיח $A \leftrightarrow A'$. הסק מהמשפט את הטענה הבאה אם a,b,c שמות עצם ו ניתן להוכיח $a = b, b = c$ אז ניתן להוכיח $a = c$. הוכח גם כי אם a,b שמות עצם A נוסחה אז $a = b \to (A_x[a] \leftrightarrow A_x[b])$. (רמז השתמש במשפט הקבועים).

2. יהי a שם עצם ללא המשתנה x הוכח את המשפט: $\exists x(x = a \wedge A) \leftrightarrow A_x[a]$.
הדרכה: השתמש ב: $a = a \wedge A_x[a] \to \exists x(x = a \wedge A)$ ובמשפט השוויון.

3. **(הגדרה)** תהי T התורה ששפתה היא $L = \{+,\times,-,1,0\}$ כאשר $+,\times$ פונקציות דו-מקומיות, $-$ פונקציה חד מקומית $0,1$ קבועים והאקסיומות הלא לוגיות שלה הן אקסיומות השדה המנוסחות:
   - **a.** $(x+y)+z = x+(y+z)$
   - **b.** $x+y = y+x$
   - c. $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$
   - **d.** $x\times y = y\times x$
   - **e.** $x+0 = x$
   - **f.** $x \neq 0 \to x\times 1 = x$
   - **g.** $x+(-x) = 0$
   - **h.** $x \neq 0 \to \exists y(x\times y = 1)$
   - i. $(x+y)\times z = x\times z + y\times z$

4. הוכח כי הנוסחאות הבאות הן משפטים ב T:
   - a. $x = y \to z+x = z+y$
   - b. $x = y \to z\times x = z\times y$
   - c. $0+x = x$
   - d. $x+y = x+z \to y = z$
   - e. $x+y = y \to x = 0$
   - f. $x+x = x \to x = 0$
   - g. $x\times 0 = 0$
   - h. $x\times(-1)+x = 0$

הערה: אפשר להשתמש בכל המשפטים על הוכחות גם במשפט הסימטרייה האומר: מ $a = b$ אפשר להוכיח $b = a$. אך צריך להצדיק כל מעבר. לא צריך להשתמש בכל אקסיומות השדה.

פרק קודם II

1. הראינו עבור כל אם $\vdash a=b$ ו $\vdash b=c$ אז $\vdash a=c$

לפי משפט השלמות אם $\vdash b=c$ ובנוסף $A \equiv a=b$ ו $A' \equiv a=c$

אפשר לבנות הוכחה $\vdash a=b \leftrightarrow a=c$ מפרק נגזר להוכיח

$\vdash a=b \rightarrow a=c$

ומפני שלפי הנחה $\vdash a=b$ מסלק הגזירה $\vdash a=c$.

- יהי $x_1 \dots x_n$ המשתנים המופיעים ב a,b ויהי

$e_1 \dots e_n$ קבועים שונים דבשים הם נסמן:

$$a_{x_1 \dots x_n}[e_1 \dots e_n] = a[\bar{e}]$$

- יהי y משתנה שאינו מופיע ב A, a, b

ונסמן $\bar{A} = A_x[y]$ (כלומר, נחליף את x במשתנה y)

- לפי משפט השלמות נקבל: $\vdash a[\bar{e}] = b[\bar{e}]$

אזי $\vdash \bar{A}[\bar{e}]_y[a[\bar{e}]] \leftrightarrow \bar{A}[\bar{e}]_y[b[\bar{e}]]$

מכך ש $a[\bar{e}]=b[\bar{e}]$ נוסחה סגורה אפשר להשתמש

במשפט הדדיות הדקדוקי

$$\vdash a[\bar{e}]=b[\bar{e}] \rightarrow \bar{A}[\bar{e}]_y[a[\bar{e}]] \leftrightarrow \bar{A}[\bar{e}]_y[b[\bar{e}]]$$

מכך ש $\bar{A}[\bar{e}]_y[a[\bar{e}]] \equiv A_x[a]_{x_1 \dots x_n}[e_1 \dots e_n]$

לקבל מאקסיומת הקיבוץ $\vdash a=b \to A_x[a] \leftrightarrow A_x[b]$.

---

2. a קיים מסוג x כאשר:

$$\vdash \exists x(x=a \wedge A) \leftrightarrow A_x[a]$$

i) כאשר: $\vdash \exists x(x=a \wedge A) \to A_x[a]$

לפי שאלה 1 לקבל:

$$(*) \quad \vdash x=a \to A \leftrightarrow A_x[a]$$

ולקבל $\vdash x=a \wedge A \to A_x[a]$

מכאן שאז מסקנה טאוטולוגית של $(*)$

לפי כלל הוספת תנאי (לכל כך a לא מופיע x)

לקבל: $\vdash \exists x(x=a \wedge A) \to A_x[a]$

(ii) כאשר: $\vdash \exists x(x=a \wedge A) \leftarrow A_x[a]$

לפי אקסיומת ההצבה לנוסחה:

$X=a \wedge A$

נקבל: $(1)\quad \vdash a=a \wedge A_x[a] \rightarrow \exists x(x=a \wedge A)$

אקסיומה הכללית היא + משפט הצבה $(2)\quad \vdash a=a$

ולכן $\vdash A_x[a] \rightarrow \exists x(x=a \wedge A)$

כדרוש מסקנה: לוגיקלית של (1)(2).

---

4. נראה כי $\vdash_T x=y \rightarrow z+x=z+y$

מיקום השלילי נקבל:

$\vdash_T z=z \rightarrow x=y \rightarrow z+x=z+y$ משפט הצבה +

$\vdash_T z=z$ אקסיומה הכללית

$\vdash_T x=y \rightarrow z+x=z+y$ כלל נלקח:

5) כאן a) כך שם x במקום +.

ב. נראה:

$\vdash 0+x=x$

- לפי אקסיומת הקומוטטיבית והדרה נקבל:

$\vdash 0+x=x+0$

- לפי אקסיומה 5 נקבל

$\vdash x+0=0$

- לפי שאלה 1

$\vdash 0+x=0$

ג. נראה

$\vdash x+y=x+z \rightarrow y=z$

כוונה נראה ש אפשר:

$(1)\ \vdash_T -x+(x+y)=y$

סדרה:

$(2)\ \vdash_T -x+(x+y)=(-x+x)+y$

הוכחה: מ אסוציטיבי + הדרה נקבל:

$\vdash_T -x+x=x+-x$

כלל יודע כי:

מ קומוטטיבית

$\vdash_T x+-x=0$

ומאקסיומה נקבל

$\vdash_T -x+x=0$

לכן

$(3)\ \vdash_T (-x+x)+y=0+y$

ולכן מסעיף a

מאקסיומה סלר 0

$\vdash_T 0+y=y$

ולכן לפי (3) ושוויון נקבל:

(4) $\vdash_T (-x+x)+y=y$

ולכן מ (2) (4) ושוויון:

(5) $\vdash_T -x+(x+y)=y$

ע"י מעבר הצבה נקבל לפי:

(6) $\vdash_T -x+(x+z)=z$

מ(5) ו(6) ומעבר השוויון

נקבל:

(7) $\vdash_T -x+(x+y)=-x+(x+z) \Leftrightarrow y=z$

כלל מסוג a נקבל:

(8) $\vdash_T x+y=x+z \rightarrow -x+(x+y)=-x+(x+z)$

ו 7 ו 8 נקבל: (מסדנה לוגיקה)

$\vdash_T x+y=x+z \rightarrow y=z$

שזה מה שהיה צריך להוכיח.

ה. נראה: $\vdash_T \; x+y=y \rightarrow x=0 \quad (*)$

כאן בסעיף קודם נקבל:
(עקב שימוש בקומוטיבי)

$\vdash_T \; (x+y)+-y = x$

ואילו האקסיומה:

$\vdash_T \; y+-y = 0$

לכן מאשפט השוויון

$(1) \; \vdash_T \; (x+y)+-y = y+-y \Leftrightarrow x=0$

מסעיף a:

$(2) \; \vdash_T \; x+y=y \rightarrow (x+y)+-y = y+-y$

ו $(*)$ הוא מסקנה לוגית של $(1),(2)$.

ו. מראה מה עיר משפט הצבה

ז $\vdash_T \; z\times 0 = 0$:

עיר אקסיומה + הצבה נקבל $\vdash_T \; 0+0=0$

עיר שימוש בסעיף ד נקבל $\vdash_T \; z\times(0+0) = z\times 0$

עיר קומוטיבי: $\vdash_T \; z\times(0+0) = (0+0)\times z$

3) $\vdash_T (0+0)\times z = 0\times z + 0\times z$

$\vdash_T 0\times z = z\times 0$

4) $\vdash_T 0\times z + 0\times z = z\times 0 + z\times 0$

$\vdash_T z\times 0 + z\times 0 = z\times 0$

$\vdash_T z\times 0 + z\times 0 = z\times 0 \rightarrow z\times 0 = 0$

$\vdash_T z\times 0 = 0$.

לפי פרק
והדרכה:

מקומוטיביות:

אחרון המשוואה:

מ 1,2,3,4 נקבל:
ומאחר ש

לכן

מהדרה וסעיף f

ומכל הנתונים

---

5. כלומר נראה $\vdash_T x\neq 0 \longrightarrow x\times(-1)+x=0$

לפי אקסיומה נקבל: $\vdash_T x\neq 0 \longrightarrow x\times 1 = x$

מסימטריה $\vdash_T x\times 1 = x \rightarrow x = x\times 1$

מסעיף a: $\vdash_T x = x\times 1 \rightarrow x\times(-1)+x = x\times(-1)+x\times 1$

לפי אקסיומה ב פילוג: $\vdash_T x\times(-1)+x\times 1 = x\times(-1+1)$

קומוטטיביות

$\vdash_T \ -1+1=1+-1$

אקסיומה

$\vdash_T \ 1+-1=0$

$\vdash_T \ x\times(1+-1)=x\times 0$

סעיף ב:

$\vdash_T \ x\times 0=0$

סעיף ג:

$\vdash_T \ x\times(-1)+x\times 1=0$

לכן קיבלנו:

מאנשט השוויון (כיוון 1)

3) $\vdash_T \ x\times(-1)+x=x\times(-1)+x\times 1 \rightarrow x\times(-1)+x=0$

לכן מ 1, 2, 3 נקבל:

$\vdash_T \ x\neq 0 \rightarrow x\times(-1)+x=0$ (*)

$\vdash_T \ x=0 \rightarrow x\times(-1)+x=0$ (**) כלומר נראה:

בגין באותו אופן מכיוון שאם מקיים בהנחה ש $x\neq 0$
אפשר שאם השמאלי בשוויון מקיים בהנחה

$\vdash_T \ x\times(-1)+x=0$

כדי לא מסוגל לאולמיר-
ל (x) (**x) ניכרו כי $x\neq 0 \equiv \top(x=0)$

תרגיל 12 במבוא ללוגיקה

1. יהיו $b, a_1, .., a_n, a_1', .., a_n'$ שמות עצם ותהי A נוסחה נסמן ב b' את שם העצם המתקבל ע"י החלפה של הופעות של a_i ב a_i'. ונסמן ב A' את הנוסחה המתקבלת ע"י החלפה דומה בהופעות שאינן אחרי כמת. הסק ממשפט השוויון כי:
   a. ניתן להוכיח: $a_1 = a_1' \to, \ldots, \to a_n = a_n' \to b = b'$
   b. ניתן להוכיח: $a_1 = a_1' \to, \ldots, \to a_n = a_n' \to \mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{A}'$.

2. תהי T תורה כלשהי ונסמן ב T' מערכת פורמלית חדשה המתקבלת מ T ע"י הוצאה של כל האקסיומות הלוגיות של השוויון והוספת אקסיומות לוגיות מהצורה $x = y \to (A \leftrightarrow A_x[y])$ לכל נוסחה אטומית A. הראה נוסחה היא משפט ב T אם"ם איה משפט ב T'.

3. יהי a שם עצם לא מופיע בו המשתנה x הראה כי ניתן להוכיח את הנוסחה : $\forall x(x = a \to A) \leftrightarrow A_x[a]$.

4. מצא נוסחאות מהצורה: $\exists x(x = a \wedge A) \leftrightarrow A_x[a]$, $\forall x(x = a \to A) \leftrightarrow A_x[a]$ מהתורה של המספרים הטבעיים שאינם מתקיימות במספרים הטבעיים.

5. תן דוגמה לנוסחה A אשר התורה אשר מכילה אותה כאקסיומה לא לוגית יחידה אינה עקבית.

6. הסק ממשפט השלמות כי אם נוסחה בשפה כלשהי לא מתקיימת באף מבנה לשפה אז מהתורה המכילה אותה כאקסיומה לא לוגית יחידה אפשר להוכיח את שלילתה.

7. הסק ממשפט השלמות את הטענה הבאה: תהי T תורה כלשהי לכל קבוצה Γ של נוסחאות בשפה של T התורות $T, T[\Gamma]$ שקולות אם"ם כל נוסחה Γ נכונה בכל מודל של T. (תורות הן שקולות אם יש להן את אותם המשפטים).

פתרון קולוקיום 12

שאלות נמרצות

2. במסדנו מאמצע השאלון ועד לפי כל אקסיומה ומנין חדשה ב'ד ניתנת להוכחה מן האקסיומה המוגדרת הסטנדרטית ב T.
לכן מה שניתן להראות הוא כי כל אקסיומה מאקסיומת השאלון ניתנת להוכחה ב'ד מהאקסיומות החדשות.
— הוכחה מפני שמשפט הטוטולוגיה ומשפט ההצבה לא משתמשים באקסיומה השאלון משפטים אלו נכונים גם ב'T.
— בנוסף נכון כי לכל A אטומית מתקיים:

1) $\vdash_{T'} x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \quad \to x_n = y_n \to A \leftrightarrow A_{x_1 \cdots x_n}[y_1 \cdots y_n]$

נוכיח באינדוקציה על n: עבור n=1 נובע מיידית מהגדרת הקבוע. לכן נניח עבור n ונוכיח עבור n+1. משלמות ניסל של הנדר: על "ד

2) $\vdash_{T'} x_{n+1} = y_{n+1} \to A_{x_1 \cdots x_n}[y_1 \cdots y_n] \leftrightarrow A_{x_1 \cdots x_{n+1}}[y_1 \cdots y_{n+1}]$

ולהנוסחה: $x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \cdots \to x_{n+1} = y_{n+1} \to A \leftrightarrow A_{x_1 \cdots x_{n+1}}^{y_1 \cdots y_{n+1}}$

הוא מסקנה טאוטולוגית של (1) ו(2) ולכן מסקנה שמשמש הטאוטולוגיה כמן גם ל T הוא נגזרת ניתן כתבה ב T.

בשל יום f סימן ותם n- מקומי אם נניח

ולא נוסחה (1) שבה $A = f(x_1 \cdots x_n)$ נקבל

לא אקסיומה השונה מבלי סימן היחס f.

נניח כי f הוא סימן פונקציה n-מקומי.

נניח ולא $A = f(x_1 \cdots x_n) = f(y_1 \cdots y_n)$

ולכן מ(1) נקבל כי

$$\vdash_{T'} x_1 = y_1 \to \cdots \to x_n = y_n \to (f(x_1 \cdots x_n) = f(y_1 \cdots y_n)) \leftrightarrow f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1 \cdots x_n)$$

מאקסיומה הבאה נקבל (+ הצבה)

$$\vdash_{T'} f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1 \cdots x_n)$$

ומסקנה טאוטולוגית נקבל:

$$\vdash_{T'} x_1 = y_1 \to \quad \to x_n = y_n \to f(x_1 \cdots x_n) = f(y_1 \cdots y_n)$$

3. (בתנאי: לכל מה ש a לא משתנה x)

$$\exists x(x=a \wedge A) \leftrightarrow A_x[a]$$

4. - נסתכל על הנוסחה $A = x>0$ ובמידה

a נקח לא $a = x+1$

$$\exists x(x=a \wedge A) \leftrightarrow A_x[a]$$

יתן

הינו הנוסחה:

$$\exists x(x=x+1 \wedge x+1>0) \leftrightarrow x+1>0$$

כאן $\mathbb{N}(x+1>0) = T$

אלא $\mathbb{N}(\exists x(x=x+1 \wedge x+1>0)) = F$

- אבל $\forall x(x=a \to A) \leftrightarrow A_x[a]$

נקח מראה $A \equiv x=0$

ובמקום $a \equiv x+1$

$$\mathbb{N}(A_x[a]) = \mathbb{N}(x+1=0) = F$$

$$\mathbb{N}(\forall x(x=x+1 \to A)) = T$$

5. $A = \neg B \wedge B$

6. אם A עוסקת בכל יש לנו כי $T = \{A\}$ היא עקבית אזי יש לה מודל M המקיים $M(A) = T$ מאחר לכן T אינה עקבית ולכן $\vdash_T \neg A$.

7. - T שקולה ל $T[\Gamma]$ אזי לכל $A \in \Gamma$ $\vdash_T A$.

נניח T, $T[\Gamma]$ שקולות ויהי M מודל של T אזי מסיבה ש $\vdash_T A$ לכל $A \in \Gamma$ $M(A) = T$ לכל $A \in \Gamma$.

להפך נניח כי קיים $A \in \Gamma$ כך ש $\nvdash_T A$ נראה כי $T[\neg A]$ עקבית. יהי A' הסגור של A מסיבה ש $T[\neg A]$ עקבית אזי $T[\neg A']$ עקבית אפשר להניח כי A סגורה.

נניח בשלילה ש $T[\neg A]$ אינה עקבית.

אז $\vdash_{T[\neg A]} A$ לכן משפט

הדדוקציה מתקיים ש $\neg A$ סתירה

$$\vdash_T \neg A \to A \equiv A \vee A$$

ולכן

$$\vdash_T A$$

סתירה להנחה לכן $T[\neg A]$ עקבית

לפי משפט הפשט מתקיים ש Γ היא מודל M

לכן מודל M הוא מודל של T ומתקיים

$M(\neg A)=T$ אז $M(A)=F$ לכן $\Gamma \vdash A$ סתירה

לכן לא $\Gamma \vdash A$ ולכן $\vdash_T A$

$T[\Gamma]$ עקבית ל T.

תרגיל 13 במבוא ללוגיקה

1. משפט הקומפקטיות: תהי L שפה ותהי Γ קבוצה של נוסחאות בשפה נניח כי לכל תת קבוצה סופית Γ' של Γ יש מודל, כלומר מבנה המתאים ל L המקיים את כל הנוסחאות ב Γ', אז ל Γ יש מודל. הסק את משפט הקומפקטיות ממשפט השלמות.

2. הראה כי בשפה אשר מכילה משתנה של פונקציה חד מקומית, כלומר אפשר לכתוב נוסחאות מהצורה: לכל פונקציה... וקיימת פונקציה...,אפשר לכתוב נוסחה כך שמבנה מקיים אותה אם"ם הוא בעל עולם סופי. הערה: זו דוגמה לשפה שאינה מסדר ראשון.

3. נחזור כעת לשפה רגילה השתמש במשפט הקומפקטיות כדי להראות לא קיימת נוסחה כמו בשאלה 2. רמז: הנח בשלילה כי קיימת והוסף לה מספר אין סופי של נוסחאות שלכל תת קבוצה סופית יש מודל. הסק כי משפט השלמות אינו נכון לשפה כמו בשאלה 2.

4. סדר טוב: תהי $L=\{<\}$ שפה המכילה סימן יחס דו מקומי יחד. התורה של יחס סדר ליניארי (מלא) היא זו המכילה את האקסיומות הלא לוגית הבאות:

a. אנטי רפלקסיביות: $\neg(x<x)$

b. אנטי סימטריות: $(x<y)\to\neg(y>x)$

c. טרנזיטיביות: $(x<y\wedge y<z)\to(x<z)$

d. לינאריות: $(x\neq y)\to(x<y\vee y<x)$

למודל של תורה זו נקרא קבוצה סדורה ליניארית. נאמר כי קבוצה סדורה ליניארית היא סדורה היטב אם לכל תת קבוצה שלה שאינה ריקה יש איבר מינימלי. הראה כי קבוצה סדורה ליניארי היא סדורה היטב אם"ם אם אין בה תת סדרה אין סופית יורדת : $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $a_{n+1}<a_n$ לכל n. הוכח כי לא קימת נוסחה A ב L המקיימת כי קבוצה סדורה ליניארית מקיימת אותה אם"ם היא סדורה היטב. רמז: הנח בשלילה שקיימת נוסחה כזו, הוסף לשפה אין סוף קבועים חדשים שונים והוכח את הטענה כמו בשאלה 3.