מבחן בלוגיקה מתמטית 2 80424

המורה: שמואל ברגר בהצלחה

סמסטר ב תשס"ז מועד א דינה

יום חמישי י"ח באב תשס"ז 2.8.2007 שעה 1400

אולם 8 בניין לוין

משך המבחן שעתיים

בחירה: יש ארבע שאלות במבחן וצריך לענות על שלוש בלבד.

משקל: משקלה של כל שאלה הוא 33 נקודות. כל מי שייגש למבחן יקבל עוד נקודה במתנה.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכח בקורס, אלא אם כן אתם מתבקשים להוכיח את המשפט הזה, או שהוכחת המשפט הזה מסתמכת על מה שעליכם להוכיח.

שאלה 1

א. תהי $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ פונקציה רקורסיבית שלמה (כלומר מוגדרת לכל n) ועולה. (כלומר $m<n\Rightarrow f(m)<f(n)$). הוכיחו שהתמונה של f ($\{f(n)|\, n\in\mathrm{N}\}$) היא קבוצה רקורסיבית.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה אינסופית נל"ר של מספרים טבעיים יש תת-קבוצה אינסופית רקורסיבית).

שאלה 2

א. הוכיחו את משפט טרסקי המוכלל:

תהי Σ תורה עקבית בשפה של תורת המספרים.

נניח שפונקצית האלכסון d ניתנת לייצוג חזק ב- Σ.

הקבוצה A של מספרי גדל של הפסוקים ב- Σ אינה ניתנת לייצוג חזק ב- Σ.

ב. הוכיחו שאם Σ היא תורה עקבית בשפת תורת המספרים, שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק, אז T_Σ אינה רקורסיבית.

שאלה 3

א. הוכיחו שקבוצה של מספרים טבעיים, המתקבלת מיחס נל״ר דו-מקומי על ידי כימות ישי, או על ידי כימות כולל חסום, היא נל״ר, ושקבוצת הקבוצות של מספרים טבעיים, שהן נל״ר, אינה סגורה לפעולת המשלים (המשלים של A זה $\{n \in \mathrm{N} \mid n \notin A\}$).

ב. תהי $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ הפונקציה המוגדרת כך : $f(0) = 1$, ולכל n טבעי חיובי

$$f(n) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\right)^2.$$

הוכיחו ש- f היא פונקציה פרימיטיב רקורסיבית.

שאלה 4

א. הוכיחו שלמבנה $\mathcal{A} = \langle \mathrm{Z}, 0, 1, + \rangle$ אין תת-מבנה אלמנטרי פרט ל- $\mathcal{A}$ עצמו.

בדקו אם יש ל- $\mathcal{A}$ תת-מבנה פרט ל- $\mathcal{A}$ עצמו. (Z היא קבוצת המספרים השלמים).

ב. יהי U אולטרה פילטר (על מסנן) לא ראשי על N (קבוצת המספרים הטבעיים).

יהי $\mathcal{N}$ המבנה $\langle \mathrm{N}, 0, 1, + \rangle$. הוכיחו שבמבנה $\mathcal{N}^{\mathrm{N}}/U$ (האולטרה-חזקה) יש איבר, שאינו גדיר במפורש (כלומר, שאינו הערך של שום שם עצם קבוע).

ג. הוכיחו או הפריכו : אם $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ הם מבנים כך ש- $\mathcal{A}$ הוא תת-מבנה של $\mathcal{B}$ ושניהם שקולים אלמנטרית, אז $\mathcal{A}$ הוא תת-מבנה אלמנטרי של $\mathcal{B}$.

בהצלחה