האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בלוגיקה מתמטית (2) (80424)

מועד א' תשס"ג

שם המורה: פרופ' ש. שלח **משך הבחינה: 2 שעות**

1. שאלת חובה:

ענה בקצרה על כל החלקים הבאים:

א. הגדר מתי $M \prec N$.

ב. הגדר את משפחת הפונקציות החשיבות.

ג. הגדר מתי פונקציה חשיבה דו מקומית $F(x,y)$ הינה כוללת.

ד. הגדר מתי תורה T מסדר ראשון הינה כריעה.

ה. האם לתורת המספרים כלומר קבוצת הפסוקים

$T = \{\varphi :$ φ פסוק מסדר ראשון

במילון $\tau = 0,1,+,\times\}$ כך ש- $(\square, 0,1,+,\times) \models \varphi$

יש מערכת אכסיומות סופית? נמק.

ענה על שתיים משלוש השאלות הבאות. נסח בבהירות משפטים עליהם אתה מסתמך.

2. נסח והוכח את משפט Los ללוגיקה ללא שוויון.

3. א. למילון סופי τ ותורה סופית T ב- $L(T)$ הגדר מתי פונקציה k מקומית מהטבעיים לטבעיים נתנת להצגה בחלש לגבי T.

ב. הוכח כי כל פונקציה חשיבה נתנת להצגה בחלש בתורה N (תורת המספרים המנוונת).

הערה: אין צורך לטפל בכל המקרים, אך צריך:

א. להסביר מהם הדברים שצריך להוכיח ולמה הם מספיקים.

ב. לבחור את אחד הדברים, מהיותר רציניים ולהוכיחו בפרוט.

4. א. נסח את שלושת ההגדרות השקולות של קבוצה A של טבעיים הינה נתנת למניה חשיבה (=נלח או נלר).

ב. הוכח את השקילות.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

<u>בחינה בלוגיקה מתמטית (2) (80424)</u>
מועד ב' תשס"ג

שם המורה: פרופ' ש. שלח | **משך הבחינה: 2 שעות**

1. <u>שאלת חובה</u>:

ענה בקצרה על כל החלקים הבאים:

א. הגדר על מכפלה $\prod_{i\in I} M_i / D$ של מודלים.

ב. מהי מכונת מונים? מהי פונקציה הנתנת לחשוב על ידי מכונת מונים? (מותר להחליף מכונת מונים במכונת טיורינג).

ג. הגדר מתי לתורה T יש חלוץ כמתים.

ד. תהי $f(x,y)$ פונקציה דו מקומית חשיבה ומלאה. היתכן שלכל פונקציה חשיבה ומלאה $f(x)$ יש טבעי n כך ש

$(\forall x)\big(F(x,n)=f(x)\big)$ ולמה?

ה. נסח את משפט אי השלמות של גדל.

ענה על שתיים משלוש השאלות הבאות. נסח בבהירות משפטים עליהם אתה מסתמך.

2. א. הגדר מתי $M \prec N$.

ב. נסח את מבחן טרסקי ווט.

ג. הוכח כי אם $M_n \prec M_{n+1}$ לכל n טבעי

$$M=\cup\{M:n<\omega\}$$

אז $M_0 \prec M$.

3. הוכח שכל פונקציה חשיבה נתנת להשוב על ידי מכונת מונים (או על ידי מכונת טיורינג).

הערה: אין צורך לטפל בכל המקרים, אך צריך:

א. להסביר מהם הדברים שצריך להוכיח ולמה הם מספיקים.

ב. לבחור את אחד הדברים, מהיותר רציניים ולהוכיחו בפרוט.

4. א. למילון סופי τ ותורה סופית T ב- $L(T)$ הגדר מתי פונקציה k מקומית מהטבעיים לטבעיים נתנת להצגה בחלש לגבי T.

ב. בעבור T,τ כנ"ל הוכח כי כל פונקציה מלאה מהטבעיים לטבעיים שנתנת להצגה בחלש לגבי T הינה פונקציה חשיבה.

בהצלחה!

80.424
(א) תשס"ד

מבחן בלוגיקה מתמטית 2 80424

בהצלחה

המורה: שמואל ברגר

סמסטר ב תשס"ד מועד א

יום רביעי ד בתמוז תשס"ד 23.6.2004 שעה 16^{00}

משך המבחן שעתיים

בחירה: יש לענות על שלוש בלבד מארבע השאלות שבמבחן.

משקלה של כל שאלה 33 נקודות. בסך הכל 99 נקודות.

כל נבחן יקבל תוספת של נקודה על הנקודות שצבר.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכח בקורס, אלא אם כן אתם מתבקשים להוכיח את המשפט הזה, או שהוכחת המשפט הזה מסתמכת על מה שעליכם להוכיח.

שאלה 1

נסתכל במבנה $\mathcal{N}_0 = \langle \mathrm{N}, 0, s \rangle$, כאשר N היא קבוצת המספרים הטבעיים, לרבות 0, 0 הוא האפס הרגיל, ו- s היא פעולת העוקב.

יהי U על-מסנן (אולטרה-פילטר) על N. הוכיחו שהעל מכפלה $\mathcal{N}_0{}^{\mathrm{N}}/U = \langle \mathrm{N}, 0, s \rangle$ איזומורפית ל- $\mathcal{N}_0$, אם ורק אם U הוא על-מסנן ראשי.

שאלה 2

א. הגדירו תת-מבנה אלמנטרי.

ב. נסחו את קריטריון טרסקי ווט לתת-מבנה אלמנטרי.

ג. הוכיחו שהמבנה $\langle \mathrm{R} \setminus \{7\}, < \rangle$ הוא תת-מבנה אלמנטרי של $\langle \mathrm{R}, < \rangle$.

(R היא קבוצת המספרים הממשיים, $<$ זה היחס "קטן מ-", ו- $\setminus$ זה סימן ההפרש של קבוצות).

שאלה 3

א. נסחו והוכיחו את משפט טרסקי בעניין אי-גדירותה של האמת.

ב. הוכיחו שקבוצת מספרי גדל של הפסוקים העקביים בשפת המבנה $\langle \mathrm{N}, 0, s, +, \cdot \rangle$ אינה נ.ל.ר..

($\mathrm{N}, 0, s$ הוצגו בשאלה 1, $+, \cdot$ הם הכפל והחיבור. פסוק עקבי הוא פסוק, שאינו שקרי לוגית).

שאלה 4

הגדירו את פונקצית β של גדל, הוכיחו שהיא אריתמטית, והוכיחו ישירות בעזרתה, שפונקצית החזקה

$$f(x,y) = \begin{cases} x^y & \text{if } x \neq 0 \text{ or } y \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = y = 0 \end{cases}$$

היא אריתמטית.

(פעולה על N ויחס על N נקראים אריתמטיים אם הם גדירים על ידי נוסחה מסדר ראשון במבנה $\langle \mathrm{N}, 0, s, +, \cdot \rangle$).

-א' 44-

80.424
תשס"ד ב/ו

מבחן בלוגיקה מתמטית 2 80424

המורה: שמואל ברגר

סמסטר ב תשס"ד מועד ב

יום חמישי ט"ז באלול תשס"ד 2.9.2004 שעה 09^{00}

מקום המבחן שפרינצק 115

משך המבחן שעתיים

בחירה: יש לענות על שלוש בלבד מארבע השאלות שבמבחן.

משקלה של כל שאלה 33 נקודות. בסך הכל 99 נקודות.

כל נבחן יקבל תוספת של נקודה על הנקודות שצבר.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכח בקורס, אלא אם כן אתם מתבקשים להוכיח את המשפט הזה, או שהוכחת המשפט הזה מסתמכת על מה שעליכם להוכיח.

שאלה 1

א. הגדירו מתי תורה היא $\aleph_0$-קטיגורית.

ב. נסחו והוכיחו את משפט ווט, הקושר בין $\aleph_0$-קטיגוריות לבין שלמות.

שאלה 2

א. יהיו $\mathcal{A},\mathcal{B}$ מבנים, כך ש-$\mathcal{A}$ הוא תת-מבנה אלמנטרי של $\mathcal{B}$.

הוכיחו שכל איברי $\mathcal{B}$, הגדירים ב-$\mathcal{B}$ באמצעות נוסחה מסדר ראשון, נמצאים ב-$\mathcal{A}$.

ב. יהי $\mathcal{R}$ המבנה $\langle \mathrm{R},+,\cdot\rangle$, כאשר R היא קבוצת המספרים הממשיים, ו-$+$ ו-$\cdot$ הם החיבור והכפל, בהתאמה.

הוכיחו שכל תת-מבנה אלמנטרי של $\mathcal{R}$ מכיל את כל המספרים הרציונלים וגם את $\sqrt{2}$.

שאלה 3

א. הגדירו תורה אקסיומטית (מסדר ראשון), והוכיחו שתורה אקסיומטית, החלקית ל-Ω ($\Omega = \mathrm{Tr}_1(\langle \mathrm{N},0,s,+,\cdot,\rangle)$) אינה שלמה. (משפט האי-שלמות של גדל).

ב. הדגימו תת-קבוצה של N, שאינה נ.ל.ר., אבל הקבוצה המשלימה לה נ.ל.ר. (יש לנמק).

שאלה 4

א. תהי פונקציית פיבונצ'י $F:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ הפונקציה המוגדרת כך:

$F(0)=F(1)=1$, ולכל n טבעי, $F(n+2)=F(n)+F(n+1)$.

הוכיחו ש-F היא פונקציה פרימיטיב-רקורסיבית.

ב. תהי $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ פונקציה רקורסיבית, שלכל n טבעי, $n\le f(n)$.

תהי $A\subseteq \mathrm{N}$ קבוצה רקורסיבית.

הוכיחו ש-$f^{-1}(A)=\{n\in\mathrm{N} \mid f(n)\in A\}$ היא קבוצה רקורסיבית.

בהצלחה

מבחן בלוגיקה מתמטית 2 80424

המורה: שמואל ברגר

סמסטר ב תשס"ה מועד א

יום רביעי כ"ט בסיוון תשס"ה 6.7.2005 שעה 09^{00}

מקום המבחן בניין לוי 6

משך המבחן שעתיים

בחירה: יש לענות על שלוש בלבד מארבע השאלות שבמבחן.

משקלה של כל שאלה 33 נקודות. בסך הכל 99 נקודות.

כל נבחן יקבל תוספת של נקודה על הנקודות שצבר.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכח בקורס, אלא אם כן אתם מתבקשים להוכיח את המשפט הזה, או שהוכחת המשפט הזה מסתמכת על מה שעליכם להוכיח.

שאלה 1

א. יהי R יחס n-מקומי על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$.

הוכיחו שהיחס R הוא רקורסיבי, אם ורק אם גם הוא וגם שלילתו נ.ל.ר.

ב. הדגימו יחס נ.ל.ר. על $\mathbb{N}$, ששלילתו אינה נ.ל.ר. נמקו מדוע יחס זה הוא נ.ל.ר. ומדוע שלילתו אינה נ.ל.ר.

שאלה 2

א. יהי $\mathcal{A}$ מבנה לשפה מסוימת $\mathcal{L}$, שעולמו A. יהי $\mathcal{B}$ תת-מבנה של $\mathcal{A}$, שעולמו B.

נניח, שלכל תת-קבוצה סופית $\{b_1,\dots,b_k\}$ של B ולכל a ב-A, קיים אוטומורפיזם של $\mathcal{A}$, המעתיק כל b_i ($1\le i\le k$) לעצמו, ואת a לאיבר של B.

הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ הוא תת-מבנה אלמנטרי של $\mathcal{A}$.

ב. תהי C קבוצת המספרים הממשיים השונים מ-0.

הוכיחו שהמבנה $\langle C,<\rangle$ (C עם הסדר הרגיל) הוא תת-מבנה אלמנטרי של המבנה $\langle \mathbb{R},<\rangle$. (המספרים הממשיים עם הסדר הרגיל).

שאלה 3

א. תהי T תורה $\aleph_0$-קטיגורית מסדר ראשון בשפה בת-מנייה, שאין לה מודלים סופיים.
הוכיחו ש- T היא תורה שלמה.

ב. תהי $\mathcal{L}$ שפה, שקבועיה הם $\approx$ (קבוע השוויון) ועוד קבוע יחס חד-מקומי $\overline{P}$.
תהי Σ קבוצת הפסוקים $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\ldots\}$ ב- $\mathcal{L}$, כך שלכל n טבעי חיובי σ_n הוא
פסוק מסדר ראשון, האומר שיש לפחות n איברים שונים בפירוש של $\overline{P}$ במבנה,
ויש לפחות n איברים שונים מחוץ לו.
הוכיחו שהתורה $\mathrm{Th}_1(\Sigma)$ (קבוצת הפסוקים מסדר ראשון, הנובעים מ- Σ) היא שלמה.

שאלה 4

א. תהי Π תורה אקסיומטית סופית, החלקית ל- Ω (קבוצת הפסוקים מסדר ראשון, שהם
אמיתיים במבנה המספרים הטבעיים), שבה כל הפונקציות הרקורסיביות ניתנות לייצוג חזק.
(אנו יודעים שיש תורה כזו).
הוכיחו שאם Σ היא תורה מסדר ראשון בשפה של תורת המספרים, כך שהקבוצה $\Sigma\cup\Pi$
עקבית, אז Σ אינה כריעה (כלומר קבוצת מספרי גדל של פסוקיה אינה רקורסיבית).

ב. נסחו והוכיחו את משפט צ׳רץ׳ (Church) לגבי השפה של תורת המספרים.

בהצלחה

80.424
5/1/07

מבחן בלוגיקה מתמטית 2 80424

המורה: שמואל ברגר

בהצלחה

סמסטר ב תשס"ה מועד ב

יום חמישי כ"ז באב תשס"ה 1.9.2005 שעה 10^{00}

אולם 110 בניין המתמטיקה

משך המבחן שעתיים

בחירה: יש לענות על שלוש בלבד מארבע השאלות שבמבחן.

משקלה של כל שאלה 33 נקודות. בסך הכל 99 נקודות.

כל נבחן יקבל תוספת של נקודה על הנקודות שצבר.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכח בקורס, אלא אם כן אתם מתבקשים להוכיח את המשפט הזה, או שהוכחת המשפט הזה מסתמכת על מה שעליכם להוכיח.

שאלה 1

א. נסחו והוכיחו את משפט הקומפקטיות בתחשיב היחסים מסדר ראשון.

ב. תהי Σ קבוצת פסוקים מסדר ראשון שכל המודלים שלה סופיים.

הוכיחו שקיים מספר טבעי n, שלכל מודל $\mathcal{S}$ של Σ, מספר האיברים בעולמו של $\mathcal{S}$ אינו עולה על n.

שאלה 2

יהי $\mathcal{R}$ המבנה $\langle \mathrm{R}, +, \cdot \rangle$ (המספרים הממשיים עם החיבור והכפל).

א. הוכיחו שכל תת-מבנה אלמנטרי של $\mathcal{R}$ מכיל את כל המספרים הרציונליים וגם את $\sqrt{2}$.

ב. הוכיחו שלא כל תת-מבנה אלמנטרי של $\mathcal{R}$ מכיל את כל המספרים האי-רציונליים.

שאלה 3

נסתכל בפונקצית האלכסון במשתנה אחד $\lambda x[\{x\}(x)]$, שתחום הגדרתה הוא תת-קבוצה של N.

א. הוכיחו שאין לפונקציה זו הרחבה לפונקציה רקורסיבית, המוגדרת על N כולה.

ב. הוכיחו שתחום ההגדרה של פונקציית האלכסון אינו רקורסיבי, אבל נ.ל.ר.

שאלה 4

א. הוכיחו שאם Σ היא תורה בשפת תורת המספרים, שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חלש,

אז T_Σ אינה רקורסיבית. (T_Σ היא קבוצת מספרי גדל של איברי Σ).

ב. תהי $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ פונקציה רקורסיבית, שלכל n טבעי $f(n)\le n$, ותהי A קבוצה רקורסיבית של מספרים טבעיים. הוכיחו שהקבוצה $f^{-1}[A]:=\{n\in\mathrm{N}\mid f(n)\in A\}$ היא רקורסיבית.

80,424
14/1"ופל

מבחן בלוגיקה מתמטית 2 80424

המורה: שמואל ברגר בהצלחה

סמסטר א תשס"ו מועד א

יום רביעי כג בתמוז תשס"ו 19.7.2006 שעה

משך המבחן שעתיים

בחירה: יש לענות על שאלה 1 ועל שתים בלבד משאלות 4,3,2.

משקלה של שאלה 1 הוא 30 נקודות (10 נקודות לכל סעיף) ומשקל כל שאלה מבין 4,3,2 הוא 35 נקודות.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכח בקורס, אלא אם כן אתם מתבקשים להוכיח את המשפט הזה, או שהוכחת המשפט הזה מסתמכת על מה שעליכם להוכיח.

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו:

א. לכל יחס n-מקומי נל"ר R על $\mathbf{N}$, גם היחס $\neg R$ הוא נל"ר.

ב. כל תורה אקסיומטית ושלמה היא כריעה.

ג. לכל שני מבנים $\mathcal{A}$ ו- $\mathcal{B}$ לשפה מסוימת, כך ש- $\mathcal{B}$ תת-מבנה של $\mathcal{A}$, אם $\mathcal{B}$ שקול אלמנטרית ל- $\mathcal{A}$, אז $\mathcal{B}$ תת-מבנה אלמנטרי של $\mathcal{A}$.

שאלה 2

א. תהי Σ תורה בשפת תורת המספרים. הגדירו מתי יחס n-מקומי ניתן לייצוג חלש ב- Σ ומתי הוא ניתן לייצוג חזק ב- Σ.

ב. תהי Σ תורה אקסיומטית בשפת תורת המספרים. הוכיחו שכל יחס n-מקומי, הניתן לייצוג חלש ב- Σ הוא נל"ר.

ג. תהי Σ תורה אקסיומטית ועקבית בשפת תורת המספרים. הוכיחו שכל יחס n-מקומי, הניתן לייצוג חזק ב- Σ הוא רקורסיבי.

80. 421

תשס"ו/א/1

שאלה 3

א. נסחו והוכיחו את משפט טרסקי בעניין אי-גדירותה של האמת.

ב. הוכיחו שכל תורה אקסיומטית, שהמבנה $\langle \mathbf{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ הוא מודל שלה, אינה שלמה.

(משפט האי-שלמות של גדל).

שאלה 4

א. נסתכל במבנה $\mathcal{N}_0 = \langle \mathbf{N}, 0, s \rangle$, כאשר $\mathbf{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים, לרבות 0, 0 הוא האפס הרגיל, ו- s היא פעולת העוקב.

יהי U על מסנן על $\mathbf{N}$. הוכיחו שהעל חזקה $\mathcal{N}_0^{\mathbf{N}} / U$ איזומורפית ל- $\mathcal{N}_0$, אם ורק אם U ראשי.

ב. לכל מספר טבעי n, הגדול מ-1, יהי Z_n המבנה שעולמו $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ עם הפעולות חיבור מודולו n וכפל מודולו n. יהי U על מסנן על קבוצת המספרים הטבעיים הגדולים מ-1.

מצאו תנאי על העל-מסנן U, שהוא הכרחי ומספיק לכך ש- $\left. \prod_{n=2}^{\infty} Z_n \middle/ U \right.$ הוא שדה, ונמקו.

80.424
תשס"ו / ב'

מבחן בלוגיקה מתמטית 2 80424

המורה: שמואל ברגר בהצלחה

סמסטר ב תשס"ו מועד ב

יום שני יא באלול תשס"ו 4.9.2006 שעה 10:00

משך המבחן שעתיים

בחירה: יש לענות על שאלה 1 ועל שתים בלבד משאלות 4,3,2.

משקלה של שאלה 1 הוא 30 נקודות (10 נקודות לכל סעיף) ומשקל כל שאלה מבין 4,3,2 הוא 35 נקודות.

מותר להסתמך על כל משפט שהוכח בקורס, אלא אם כן אתם מתבקשים להוכיח את המשפט הזה, או שהוכחת המשפט הזה מסתמכת על מה שעליכם להוכיח.

שאלה 1

הוכיחו או הפריכו:

א. אם f פונקציה רקורסיבית מתת-קבוצה של N אל N, אז גם התחום של f, דהיינו $\{n \in N \mid f(n) \neq \infty\}$ הוא קבוצה רקורסיבית.

ב. אם Σ תורה כריעה ועקבית בשפת תורת המספרים, ו-Δ תורה כך ש-$\Sigma \subseteq \Delta$, אז Δ כריעה.

ג. אם Σ היא תורה עקבית בת-מנייה ו-φ פסוק שהוא אמיתי בכל מודל בן-מנייה של Σ, אז $\Sigma \models \varphi$ (דהיינו φ נובע מ-Σ). (מודל בן-מנייה הוא מודל סופי, או בעוצמה $\aleph_0$).

שאלה 2

א. הוכיחו שאם Σ היא תורה בשפת תורת המספרים, שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חלש, אז T_Σ אינה רקורסיבית. (T_Σ היא קבוצת מספרי גדל של איברי Σ).

ב. האם כל תורה כריעה היא שלמה? נמקו את תשובתכם.

←

80.424
תשס"ו / ב'

שאלה 3

הגדירו את פונקצית β של גדל, הוכיחו שהיא אריתמטית, והוכיחו ישירות בעזרתה, שפונקצית

החזקה $f(x,y)=\begin{cases} x^y & \text{if } \ x\neq 0 \ \text{ or } \ y\neq 0 \\ 1 & \text{if } \ x=y=0 \end{cases}$ היא אריתמטית.

(פעולה על $\mathbb{N}$ ויחס על $\mathbb{N}$ נקראים אריתמטיים אם הם גדירים על ידי נוסחה מסדר ראשון במבנה $\langle \mathbb{N},0,s,+,\cdot,\rangle$).

שאלה 4

א. יהי U על-מסנן לא ראשי על $\mathbb{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים). נסתכל במבנה $\langle \mathbb{N},<\rangle$ עם יחס הסדר הרגיל על $\mathbb{N}$, שהוא, כידוע, קבוצה סדורה. הוכיחו שהעל-חזקה $\langle \mathbb{N},<\rangle^{\mathbb{N}}/U$ היא קבוצה סדורה, שיש בה סדרה אינסופית יורדת.

ב. הוכיחו שבשפת הקבוצות הסדורות אי אפשר לבטא באמצעות קבוצת פסוקים את הטענה שאין במבנה סדרה אינסופית יורדת.