לוגיקה 2

הסיכום

סוכם, עובד והוקלד ע"י **דינה זליגר**

מבוסס על הרצאותיו של **שמואל ברגר** ותרגוליו של **איתי קפלן**

סמסטר ב' תשס"ז

תנאי שימוש

Please read the following important legal information before reading or using these notes. The use of these notes constitutes an agreement to abide by the terms and conditions below, just as if you had signed this agreement.

A. THE SERVICE.

The following notes ("The service") are provided by DinaZil's Notes-Heaven ("Notes-Heaven").

B. DISCLAIMER OF WARRANTIES; LIMITATION OF LIABILITY.

Notes-Heaven does not endorse content, nor warrant the accuracy, completeness, correctness, timeliness or usefulness of any opinions, advice, content, or services provided by the Service.

YOU AGREE THAT USE OF THE SERVICE IS ENTIRELY AT YOUR OWN RISK. THE SERVICE PROVIDED IS PROVIDED "AS IS," WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND. NOTES-HEAVEN EXPRESSLY DISCLAIMS ALL WARRANTIES OF ANY KIND, WHETHER EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING WITHOUT LIMITATION: ANY WARRANTIES CONCERNING THE ACCURACY OR CONTENT OF INFORMATION OR SERVICES. NOTES-HEAVEN MAKES NO WARRANTY THAT THE SERVICE WILL MEET YOUR REQUIREMENTS, OR THAT THE SERVICE WILL BE ERROR FREE; NOR DOES NOTES-HEAVEN MAKE ANY WARRANTY AS TO THE RESULTS THAT MAY BE OBTAINED FROM THE USE OF THE SERVICE OR AS TO THE ACCURACY OR RELIABILITY OF ANY INFORMATION OBTAINED THROUGH THE SERVICE. YOU UNDERSTAND AND AGREE THAT ANY DATA OBTAINED THROUGH THE USE OF THE SERVICE IS DONE AT YOUR OWN DISCRETION AND RISK AND THAT YOU WILL BE SOLELY RESPONSIBLE FOR ANY DAMAGE TO YOUR GPA.

NEITHER NOTES-HEAVEN NOR ANY OF ITS PARTNERS, AGENTS, AFFILIATES OR CONTENT PROVIDERS SHALL BE LIABLE FOR ANY DIRECT, INDIRECT, INCIDENTAL, SPECIAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES ARISING OUT OF USE OF THE SERVICE OR INABILITY TO GAIN ACCESS TO OR USE THE SERVICE OR OUT OF ANY BREACH OF ANY WARRANTY.

C. INDEMNIFICATION.

You agree to indemnify and hold Notes-Heaven, its partners, agents, affiliates and content partners harmless from any dispute which may arise from a breach of terms of this Agreement. You agree to hold Notes-Heaven harmless from any claims and expenses, including reasonable attorney's fees and court costs, related to your violation of this Agreement.

D. OWNERSHIP RIGHTS.

The materials provided by the Service may be downloaded or reprinted for personal use only. You acknowledge that the Service contains information that is protected by copyrights, trademarks, trade secrets or other proprietary rights, and that these rights are valid and protected in all forms, media and technologies existing now or hereafter developed. You may not modify, publish, transmit, participate in the transfer or sale, create derivative works, or in any way exploit, any of the Content, in whole or in part. You may not upload, post, reproduce or distribute Content protected by copyright, or other proprietary right, without obtaining permission of the owner of the copyright or other proprietary right.

E. NO COPYING OR DISTRIBUTION.

You may not reproduce, copy or redistribute the design or layout of this service, individual elements of the design, Notes-Heaven logos or other logos appearing on this service, without the express written permission of Notes-Heaven, Inc. Reproduction, copying or redistribution for commercial purposes of the service is strictly prohibited without the express written permission of Notes-Heaven, Inc.

If you have any questions about this statement or the practices of this service you can contact

Dina Zeliger
dinaweb@gmail.com

תורת הרקורסיה

קבוצות רקורסיביות וניתנות למניה רקורסיבית

__הגדרה__: תהי $A\subset\mathbb{N}^n$ עבור $0\le n$ ותהי $f:A\to\mathbb{N}$. נאמר ש- f פונקציה **שלמה** אם $A=\mathbb{N}^n$. אחרת, נאמר שהיא פונקציה **חלקית**. לכל פונקציה חלקית $f:A\to\mathbb{N}$ נתאים פונקציה שלמה $\bar{f}:\left(\mathbb{N}\cup\{\infty\}\right)^n\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ אשר מרחיבה אותה לכל ה- n-יות ומוגדרת באופן הבא:

$$\bar{f}(\vec{x})=\begin{cases} f(\vec{x}) & \vec{x}\in A \\ \infty & else \end{cases}$$

כעת ניתן להגיר **תחום** של פונקציה ע"י $\operatorname{dom} f=\left\{\vec{x}\in\mathbb{N}^n:\bar{f}(\vec{x})\neq\infty\right\}$ ובאופן שקול פונקציה f היא שלמה אם $\operatorname{dom} f=\mathbb{N}^n$.

יחס $R\subset\mathbb{N}^n$ הוא פונקציה שלמה $f:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ כך שמתקיים $f(\vec{x})=1-\chi_R(\vec{x})=\begin{cases} 0 & R(\vec{x}) \\ 1 & \neg R(\vec{x}) \end{cases}$ כאשר χ_R היא הפונקציה המציינת של R.

בהינתן פונקציה $f:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$, כאשר נרצה להתייחס אליה כאל פונקציה ולא כאל ערך נשתמש בסימון λ של צ'רץ' $\lambda\vec{x}f(\vec{x})$.

__דוגמה__: $f(x,y)=x-y$ היא פונקציה חלקית ומוגדרת רק על $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}^2:x\ge y\right\}$. כאשר נרצה להתייחס ל- f כאל פונקציה נקרא לה $\lambda xy(x-y)$.

__הגדרה__: **אלגוריתם** הוא סדרה סופת של סימנים. פונקציה חשיבה היא פונקציה אשר קיים אלגוריתם שמחשב אותה.

נשים לב שיש מספר בן מניה של אלגוריתמים ולכן מספר בן מניה של פונקציות חשיבות. אך יש מספר לא בן מניה של פונקציות $f:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ ולכן קיימות פונקציות שאינן חשיבות.

__הגדרה__:

פונקציות רקורסיביות יסודיות:

1. אינסוף פונקציות אפס בכל מספר (כולל אפס) של משתנים $Z(\vec{x})=0$.
2. פונקצית העוקב במשתנה אחד $S(x)=x+1$

3. אינסוף פונקציות הטלה בכל מספר משתנים ועל כל אחד מהרכיבים $I_{n,i}\left(x_1,...,x_n\right)=x_i$ לכל $1\le n$ ולכל $1\le i\le n$.

סכמות מעבר:

א. הרכבה: אם $G:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ עבור $0\le k$ ו- $H_1,...,H_k:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ עבור $0\le n$ אזי סכמת ההרכבה נותנת פונקציה $W:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $W\left(\vec{x}\right)=G\left(H_1\left(\vec{x}\right),...,H_k\left(\vec{x}\right)\right)$.

ב. רקורסיה פרימיטיבית: אם $G:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ עבור $0\le n$ ו- $H:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ אזי רקורסיה פרימיטיבית נותנת פונקציה $F:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ המוגדרת באופן הבא:

$$F\left(\vec{x},0\right)=G\left(\vec{x}\right)$$
$$F\left(\vec{x},y+1\right)=H\left(\vec{x},y,F\left(\vec{x},y\right)\right)$$

ג. מזעור: אם $G:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ עבור $0\le n$ אזי סכמת המזעור נותנת פונקציה $\mu yG\left(\vec{x},y\right)$ כך שלכל $\vec{x}\in\mathbb{N}$ $a=\mu yG\left(\vec{x},y\right)$ הוא המספר היחיד כך ש- $\left(\vec{x},a\right)=0$ ולכל $y<a$ $0<G\left(\vec{x},y\right)\ne\infty$. אם אל קיים a כזה אז $\mu yG\left(\vec{x},y\right)=\infty$.

קבוצת הפונקציות הרקורסיביות היא המחלקה המינימאלית שמכילה את הפונקציות הרקורסיביות היסודיות והיא סגורה לפעולות סכמות המעבר. פונקציה רקורסיבית היא פונקציה השייכת למחלקה זו.

פונקציה פרימיטיב-רקורסיבית (להלן פ"ר) היא פונקציה המתקבלת ללא ימוש במזעור. נשים לב שכל הפונקציות הפ"ר הן שלמות. יחס R הוא רקורסיבי (בהתאמה פ"ר) אם הפונקציה $1-\chi_R$ היא רקורסיבית (בהתאמה פ"ר).

<u>התזה של צ'רץ'</u>: הפונקציות הניתנות לחישוב הן בדיוק הפונקציות הרקורסיביות.

<u>דוגמאות</u>:

א. כל פונקציה קבועה היא פ"ר. פונקציה קבועה היא מהצורה $f\left(\vec{x}\right)=n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו. נוכיח באינדוקציה על n ש- f היא פ"ר.
עבור $n=0$ זה ברור כי פונקצית האפס $Z\left(\vec{x}\right)$ היא פונקציה רקורסיבית יסודית.
נניח ש- $f\left(\vec{x}\right)=n$ היא פ"ר ונראה ש- $g\left(\vec{x}\right)=n+1$ היא פ"ר. נשים לב שמתקיים $g\left(\vec{x}\right)=S\left(f\left(\vec{x}\right)\right)$, כלומר g התקבלה ע"י שימוש בסכמת ההרכבה משתי פונקציות פ"ר. לכן g היא פ"ר.

ב. פונקצית הזהות במשתנה אחד $f\left(x\right)=x$ היא כמובן פ"ר שהרי $f\left(x\right)=I_{1,1}\left(x\right)$.

ג. תהי $G:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ פונקציה רקורסיבית. יהיו $x_{i_1},...,x_{i_n}\subset\left\{x_1,...,x_n\right\}$ לא בהכרח שונים זה מזה. אזי $F:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $F\left(x_1,...,x_n\right)=G\left(x_{i_1},...,x_{i_k}\right)$ היא פונקציה פרימיטיבית, שכן היא מוגדרת ע"י סכמת ההרכבה ע"י $F\left(\vec{x}\right)=G\left(I_{n,i_1}\left(\vec{x}\right),...,I_{n,i_k}\left(\vec{x}\right)\right)$.
יש פה כמה מקרים פרטיים:

- פרמוטציה של משתנים: תהי $p:\left\{1,...,n\right\}\to\left\{1,....,n\right\}$ פרמוטציה. אם $G\left(x_1,...,x_n\right)$ פונקציה רקורסיבית אז $F\left(x_1,...,x_n\right)=G\left(x_{p(1)},...,x_{p(n)}\right)$ פונקציה רקורסיבית.
- זיהוי של משתנים: למשל, $F\left(x,y\right)=G\left(x,y,x\right)$.
- שימוש במשתני סרק: למשל, $F\left(x,y\right)=G\left(x\right)$.

ד. יהי $a\in\mathbb{N}$ קבוע ותהי $G(\vec{x},y)$ פונקציה רקורסיבית. אזי $F(\vec{x})=G(\vec{x},a)$ פונקציה רקורסיבית שהרי היא מתקבלת ע"י הרכבה של פונקצית הזהות ופונקציה קבועה על פונקציה רקורסיבית.

ה. הפונקציה $\lambda xy(x+y)$ היא פ"ר ומתקבלת ע"י רקורסיה פרימיטיבית והרכבה באופן הבא:

$$x+0=F(x,0)=G(x)=I_{1,1}(x)=x$$
$$x+(y+1)=F(x,y+1)=H(x,y,F(x,y))=S(F(x,y))=F(x,y)+1=(x+y)+1$$

ו. הפונקציה $\lambda xy(x\cdot y)$ היא פ"ר ומתקבלת ע"י רקורסיה פרימיטיבית והרכבה באופן הבא:

$$x\cdot 0=F(x,0)=G(x)=Z(x)=0$$
$$x\cdot(y+1)=F(x,y+1)=H(x,y,F(x,y))=F(x,y)+x=x\cdot y+x$$

והרי כבר ראינו שהחיבור היא פונקציה פ"ר.

ז. הפונקציה $\lambda xy(x^y)$ היא פ"ר ומתקבלת ע"י רקורסיה פרימיטיבית והרכבה באופן הבא:

$$x^0=F(x,0)=G(x)=S(0)=1$$
$$x^{y+1}=F(x,y+1)=H(x,y,F(x,y))=F(x,y)\cdot x=x^y\cdot x$$

והרי כבר ראינו שהכפל היא פונקציה פ"ר.

ח. פונקציית העצרת $\lambda x(x!)$ היא פ"ר שכן היא מתקבלת ע"י רקורסיה פרימיטיבית:

$$0!=1$$
$$(x+1)!=x!\cdot(x+1)$$

ט. נגדיר **חיסור מקוצץ** ע"י $x\dot{-}y=\max\{x-y,0\}$. פונקציה זו היא פ"ר משום שהיא מתקבלת ברקורסיה פרימיטיבית באופן הבא:

$$x\dot{-}0=x$$
$$x\dot{-}(y+1)=(x\dot{-}y)\dot{-}1$$

כאשר $\lambda x(x\dot{-}1)$ מוגדרת ברקורסיה פרימיטיבית כך:

$$0\dot{-}1=0$$
$$(x+1)\dot{-}1=x$$

י. מחלקת היחסים הרקורסיביים (בהתאמה הפ"ר) סגורה תחת הקשרים הלוגיים. יהיו $R,S\subset\mathbb{N}^n$ שני יחסים רקורסיביים (בהתאמה פ"ר). אזי הפונקציות $1-\chi_R,1-\chi_S$ הן רקורסיביות (בהתאמה פ"ר).

- נסתכל על $T=\neg R$. אזי $1-\chi_T=\begin{cases}0 & T(\vec{x})\\ 1 & \neg T(\vec{x})\end{cases}=\begin{cases}0 & \neg R(\vec{x})\\ 1 & R(\vec{x})\end{cases}=1\dot{-}(1-\chi_R)$ וזאת פונקציה הרכבה של פונקציה פרימיטיבית (בהתאמה פ"ר) עם פונקציה פ"ר ולכן היא פרימיטיבית (בהתאמה פ"ר).
- נסתכל על $T=R\vee S$. אזי

$$1-\chi_T=\begin{cases}0 & T(\vec{x})\\ 1 & \neg T(\vec{x})\end{cases}=\begin{cases}0 & R(\vec{x})\vee S(\vec{x})\\ 1 & \neg R(\vec{x})\wedge\neg S(\vec{x})\end{cases}=(1-\chi_R)(1-\chi_S)$$

ומאחר שמכפלה היא פונקציה פ"ר נקבל את הדרוש.

יא. היחסים הבאים ב- $\mathbb{N}^2$ הם פ"ר:

- $<$: $x<y$ אמ"מ $1\dot{-}(y\dot{-}x)=0$, לכן $1-\chi_<=\lambda xy(1\dot{-}(y\dot{-}x))$ והיחס הוא פ"ר.
- $>$: מתקבל ע"י פרמוטציה של המשתנים מ-$<$.
- $\leq$: מתקבל ע"י שלילה של $>$.
- $\geq$: מתקבל ע"י שלילה של $<$.
- $=$: מתקבל ע"י גימום של $\leq$ ו-$\geq$.
- $\neq$: מתקבל ע"י שלילה של $=$.

יב. **סכומים**: תהא $G:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ פונקציה רקורסיבית (בהתאמה פ"ר). אזי $F:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $F(\vec{x},y)=\sum_{z<y}G(\vec{x},z)$ היא רקורסיבית (בהתאמה פ"ר). שהרי נוכל להגדיר ברקורסיה פרימיטיבית:

$$F(\vec{x},0)=0$$
$$F(\vec{x},y+1)=F(\vec{x},y)+G(\vec{x},y)$$

יג. **מכפלות**: תהא $G:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ פונקציה רקורסיבית (בהתאמה פ"ר). אזי $F:\mathbb{N}^{n+1}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $F(\vec{x},y)=\prod_{z<y}G(\vec{x},z)$ היא רקורסיבית (בהתאמה פ"ר). שהרי נוכל להגדיר ברקורסיה פרימיטיבית:

$$F(\vec{x},0)=1$$
$$F(\vec{x},y+1)=F(\vec{x},y)\cdot G(\vec{x},y)$$

יד. מחלקת היחסים הרקורסיביים (בהתאמה פ"ר) סגורה תחת כמתים חסומים. יהי $P\subset\mathbb{N}^{n+1}$ יחס רקורסיבי (בהתאמה פ"ר). אזי הפונקציה $1-\chi_P$ היא רקורסיבית (בהתאמה פ"ר).

- נסתכל על $Q(\vec{x},y)=\exists z<yP(\vec{x},y)$. אזי $1-\chi_Q(\vec{x},y)=\prod_{z<y}(1-\chi_P(\vec{x},z))$. שהרי $1-\chi_Q(\vec{x},y)=0$ אמ"מ $Q(\vec{x},y)$ אמ"מ קיים $z<y$ כך ש-$P(\vec{x},y)$. והרי $\prod_{z<y}(1-\chi_P(\vec{x},z))=0$ אמ"מ קיים כך ש-$1-\chi_P(\vec{x},z)=0$, כלומר אמ"מ קיים $z<y$ כך ש-$P(\vec{x},y)$.
- נסתכל על $R(\vec{x},y)=\forall z<yP(\vec{x},y)$. $R(\vec{x},y)\leftrightarrow\neg\exists z<y(\neg P(\vec{x},y))$. מאחר שמחלקת היחסים הפרימיטיביים (בהתאמה פ"ר) סגורה תחת קשרים לוגיים נקבל את הטענה.

נשתמש בקיצורים $\exists z\le yP(\vec{x},y)$ ו- $\forall z\le yP(\vec{x},y)$ עבור $\exists z<(y+1)P(\vec{x},y)$ ו- $\forall z<(y+1)P(\vec{x},y)$ בהתאמה.

טו. **מזעור חסום**: בהינתן יחס רקורסיבי (בהתאמה פ"ר) נסמן ב- $\min z<yP(\vec{x},y)$ את הפונקציה שערכה הוא המספר $a<y$ הראשון שמקיים $P(\vec{x},a)$. אם לא קיים a כנ"ל ערך הפונקציה הוא y. כלומר, $\min z<yP(\vec{x},y)=\mu z[((z<y)\wedge P(\vec{x},z))\vee(z=y)]$. הפונקציה כמובן שלמה והיא רקורסיבית (בהתאמה פ"ר) כי מתקיים $\min z<yP(\vec{x},y)=\sum_{z<y}\exists v<zP(\vec{x},v)$.

נשתמש בקיצור $\min z\le yP(\vec{x},y)$ עבור $\min z<(y+1)P(\vec{x},y)$.

טז. חילוק עם שארית: נניח ש-$x=\mathrm{q}(x,y)\cdot y+\mathrm{rm}(x,y)$ כאשר $\mathrm{q}(x,y)$ המנה של חלוקת x ב- y ו- $\mathrm{rm}(x,y)$ היא השארית. אזי q ו- rm הן פונקציות פ"ר:

$$\mathrm{q}(x,y)=\min z<x((z+1)\cdot y>x)$$
$$\mathrm{rm}(x,y)=x\dot{-}\mathrm{q}(x,y)\cdot y$$

נשים לב שאם $y=0$ אז $\mathrm{q}(x,0)=\min z<x(0>x)=x$ וגם $\mathrm{rm}(x,0)=x\dot{-}\mathrm{q}(x,0)\cdot 0=x$. אבל במקרה ש- $y>0$ אלה הם המנה והשארית הרגילים.

יז. סדרת המספרים הראשוניים λxp_x כאשר $p_0=2$ ו- p_{i+1} הוא המספר הראשוני הבא אחרי p_i היא פ"ר. ניתן להגדיר אותה באופן הבא:

$$p_0=2$$
$$p_{i+1}=\min z\le p_i^{p_i}\left((z>p_i)\wedge\forall v<z(v\le 1\vee(\mathrm{rm}(z,v)>0))\right)$$

יש כאן שימוש בטענה ידועה מתורת המספרים ש- $p_{x+1}\le p_x!+1\le p_x^{p_x}$ לכל x.

יח. נגדיר פונקציה פ"ר $\lambda zx(z)_x$ באופן הבא: $(z)_x = \min y < z\left(\mathrm{rm}\left(z, p_x^{y+1}\right) > 0\right)$.

נשים לב שאם $z > 0$ אז $(z)_x$ הוא ה- y המקסימלי כך ש- z מתחלק ב- p_x^y ללא שארית. לכל x מתקיים $(0)_x = 0$. כעת, אם $z > 0$ ומתקיים $z = \prod_{i<n} p_i^{k_i}$ עבור סדרה סופית $\langle k_0, ..., k_{n-1} \rangle$ אז לכל $x < n$ מתקיים $(z)_x = k_x$ ולכל $x \geq n$ מתקיים $(z)_x = 0$. במקרה זה נאמר ש- z מצפין את $\langle k_0, ..., k_{n-1} \rangle$.

יט. **פונקציית האורך** $\lambda z \operatorname{lh}(z)$: נגדיר $\operatorname{lh}(z) = \min y < z\left(\prod_{x<y} p_x^{(z)_x} = z\right)$. מתקיים $\operatorname{lh}(0) = 0$ ועבור $z > 0$ $\operatorname{lh}(z)$ הוא אורך הסדרה הקצרה ביותר שמוצפנת ע"י z. זאת כמובן פונקציה פ"ר.

כ. **פונקציית הזיווג**: $\mathbb{N}^2$ קבוצה בת מניה ולכן ניתן למנות את כל הזוגות הסדורים (x, y). נמנה אותם בסדר עולה של הסכום $x + y$ ועבור קבוצת זוגות בעלת סכום זהה נמנה את איבריה לפי סדר עולה של y. יהי $\mathrm{J}(x, y)$ המספר הסידורי של (x, y) באותה מנייה כאשר $\mathrm{J}(0,0) = 0$. ברור שמתקיים ש-$\mathrm{J}(x, y)$ הוא מספר הזוגות שנמצאים במנייה לפני (x, y). לכל סכום w קיימים $w+1$ זוגות בעלי סכום זה - $(w,0),(w-1,1)...,(0,w)$. לכן, עבור זוג (x, y) קיימים $1+2+...+(x+y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ זוגות בעלי סכום קטן מ- $x+y$. יש y זוגות שסכומם $x+y$ ורכיבם השני קטן מ- y. לכן $\mathrm{J}(x, y) = \mathrm{q}\left((x+y)(x+y+1), 2\right) + y$ והיא פונקציה פ"ר.

$\mathrm{J}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ כפי שהגדרנו אותה היא חח"ע ועל ולכן קיימת לה פונקציה הופכית (K, L) כך שמתקיים $\mathrm{K}\left(\mathrm{J}(x, y)\right) = x$ ו- $\mathrm{L}\left(\mathrm{J}(x, y)\right) = y$. קל לוודא שניתן להגדיר:

$$\mathrm{K}(z) = \min x \leq z\left(\exists y \leq z\left(\mathrm{J}(x, y) = z\right)\right)$$
$$\mathrm{L}(z) = \min y \leq z\left(\exists x \leq z\left(\mathrm{J}(x, y) = z\right)\right) = \min y \leq z\left(\mathrm{J}\left(\mathrm{K}(z), y\right) = z\right)$$

ומכאן שגם הפונקציות ההופכיות הן פ"ר.

כא. הגדרה לפי מקרים: תהיינה $G_1(\vec{x}), ..., G_k(\vec{x})$ פונקציות רקורסיביות (בהתאמה פ"ר) ושלמות ב- n משתנים ויהיו $R_1(\vec{x}), ..., R_k(\vec{x})$ יחסים רקורסיביים (בהתאמה פ"ר) וזרים בזוגות ב- n משתנים. אז הפונקציה

$$F(\vec{x}) = \begin{cases} G_1(\vec{x}) & R_1(\vec{x}) \\ \vdots & \\ G_k(\vec{x}) & R_k(\vec{x}) \end{cases}$$

גם היא רקורסיבית (בהתאמה פ"ר). שהרי מתקיים $F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} G_i(\vec{x})\left(1 - \chi_{\neg R_i}(\vec{x})\right)$.

<u>**הגדרה**</u>: מכונת **URIM** היא מכונה דימיונית שיש בה סדרה אינסופית של **אוגרים** $\{R_i : i > 0\}$. האינדקס i נקרא הכתובת של האוגר R_i. תפקיד האוגר R_i הוא לאחסן מספר טבעי r_i. אם אוגר מאחסן את 0 נאמר שהוא **ריק**. נוסף על האוגרים יש למכונה **מונה פקודות** K שמחזיק בתוכו מספרים טבעיים והוא מציין את הפקודה העומדת להתבצע בשלב הבא. בכל רגע נתון משתמשים במכונה במספר סופי של אוגרים ושאר האוגרים ריקים.

סוגי הפקודות:

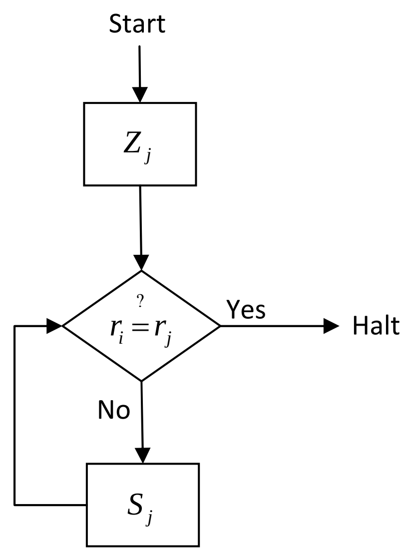
- פקודות Z: לכל $0<i$ הפקודה Z_i מאפסת את האוגר R_i ומגדילה את K ב-1.
- פקודות S: לכל $0<i$ הפקודה S_i מגדילה את האוגר R_i ב-1 ומגדילה את K ב-1.
- פקודות J: הפקודה $J_{i,j,k}$ אומרת את הדבר הבא:
  - אם $r_i = r_j$ מאחסנים את k ב-K במקום הערך שהיה שם קודם
  - אחרת מגדילים את K ב-1.

תוכנית היא סדרה סופית (אולי ריקה) של פקודות $P=\left\langle c_0,\dots,c_{h-1}\right\rangle$. אורך התכנית הוא h ולכל $k<h$ c_k היא הפקודה ה-k. תכנית לא ריקה מתחילה תמיד בפקודה c_0. בתכנית באורך h לכל פקודה מהצורה $J_{i,j,k}$ מתקיים $k \le h$. אם ברגע מסויים רשום k ב-K ו-$k<h$ אז המכונה מבצעת את הפקודה c_k. אם $k \ge h$ המכונה עוצרת.

<u>**דוגמה**</u>: יהיו i,j מספרים טבעיים כלשהם. נבנה תוכנית $P_{i,j}$ שמעתיקה את המספר המאוחסן ב-R_i לאוגר P_j במקום מה שהיה רשום בו קודם.

אם $i=j$ אין צורך לעשות כלום אז התכנית היא $\left\langle J_{1,1,1}\right\rangle$.

אחרת, התכנית היא $P_{i,j}=\left\langle Z_j, J_{i,j,4}, S_j, J_{1,1,1}\right\rangle$. תכנית זו בעצם מייצגת את תרשים הזרימה הבא:



מה שקורה כאן הוא שתכנית מגדילה את R_j בכל שלב עד שהערך שלו זהה לערך של R_i.

את שני המקרים שראינו ניתן למעשה להגדיר בצורה אחידה ע"י $P_{i,j}=\left\langle J_{i,j,5}, Z_j, J_{i,j,5}, S_j, J_{1,1,2}\right\rangle$.

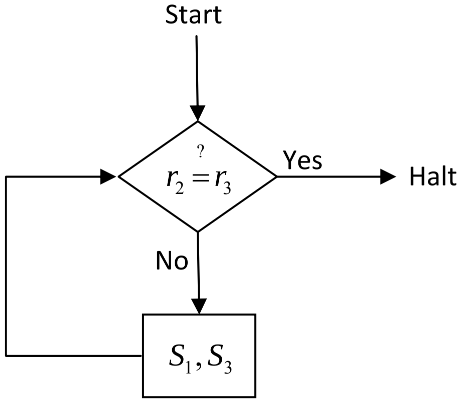
<u>**הגדרה**</u>: אם P תכנית באורך h ו-Q תכנית באורך כלשהו, **השרשור** PQ הוא תכנית שמתקבלת מביצוע הפקודות של P לפי הסדר כמו שהן ולאחר מכן ביצוע הפקודות של Q לפי סדרן אלא שכל פקודה $J_{i,j,k}$ של Q מוחלפת ב-$J_{i,j,k+h}$. ברור שפעולת השרשור היא אסוציאטיבית.

הגדרה: לכל תכנית P התכנית $P^{(m)}$ היא התכנית המתקבלת מ- P ע"י הוספת m לכל הכתובות שמופיעות ב- P.

הגדרה: תהי P תכנית ויהי n מספר טבעי כלשהו. נגדיר את הפונקציה P_n באופן הבא: נניח ש- $a_1,...,a_n$ מאוחסנים ב- $R_1,...,R_n$ ויתר הרגיסטרים ריקים. במצב זה נפעיל את התכנית P. אם אחרי מספר סופי של צעדים המכונה עוצרת וברגיסטר R_1 רשום המספר b נגדיר $P_n\left(\vec{a}\right)=b$. אם המכונה לא עוצרת לעולם נגדיר $P_n\left(\vec{a}\right)=\infty$ (כלומר ערך הפונקציה לא מוגדר על $\vec{a}$. במקרה זה נאמר ש- P **מחשבת** את P_n.

פונקציה נקראת **חשיבה** אם קיימת תכנית שמחשבת אותה.

דוגמה: פונקציית החיבור $\lambda xy\left(x+y\right)$ היא חשיבה ע"י התכנית $\left\langle J_{2,3,4},S_1,S_3,J_{1,1,0}\right\rangle$.



משפט: כל פונקציה רקורסיבית היא חשיבה

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על הבנייה של הפונקציה.

ראשית, נראה שכל הפונקציות הרקורסיביות היסודיות הן חשיבות:

1. פונקציה מהצורה $Z\left(\vec{x}\right)=0$ ניתנת לחישוב ע"י התכנית $\left\langle Z_1\right\rangle$.
2. הפונקציה $S\left(x\right)=x+1$ ניתנת לחישוב ע"י תכנית $\left\langle S_1\right\rangle$.
3. פונקציה מהצורה $I_{n,i}\left(\vec{x}\right)$ ניתנת לחישוב ע"י התכנית $P_{i,1}$ שראינו קודם.

כעת, נראה את הנכונות עבור סכמות המעבר.

1. סכמת ההרכבה: נניח ש- $H_1,...,H_k$ פונקציות חשיבות ב- n משתנים ותהיינה $Q_1,...,Q_k$ תכניות שמחשבות אותן בתאמה. נניח כמו כן ש- G פונקציה חשיבה ב- k משתנים ותהי R תכנית שמחשבת אותה.
נגדיר תכנית $U_{n,m}=P_{1,m}P_{2,m+1},...,P_{n,m+n-1}$. זוהי תכנית שמעתיקה את תוכן האוגרים $R_1,...,R_n$ לאוגרים $R_m,R_{m+1},...,R_{m+n-1}$.
לכל תכנית Q_i תהי a_i כתובת האוגר המקסימלית ש- Q_i משתמשת בה.

התכנית שמחשבת את ההרכבה $G\left(H_1\left(\vec{x}\right),...,H_k\left(\vec{x}\right)\right)$ כאשר $\vec{x}$ רשום באוגרים $R_1,...,R_n$:

$$U_{n,a_1+1}...U_{n,a_1+...+a_{k-1}+1}Q_1Q_2^{(a_1)}...Q_k^{(a_1+...+a_{k-1})}P_{a_1+1,2}...P_{a_1+...+a_{k-1}+1,k}Z_{k+1}...Z_{a_1+...+a_k+1}R$$

התכנית פועלת כך: ראשית, היא מעתיקה את הקלט $R_1,...,R_n$ ל- $k-1$ מקומות נוספים על הסרט כך שהם לא יתנגשו עם פעולת התכניות $Q_1,...,Q_k$. נשים לב שבסוף ההעתקה, מלבד k העותקים של הקלט כל שאר האוגרים נשארים ריקים. לאחר מכן התכנית מפעילה את $Q_1,...,Q_k$, כל אחת על עותק נפרד של הקלט. לפי הבחירה של המיקום החישובים לא מתנגשים זה בזה. לבסוף $Q_1\left(\vec{x}\right),...,Q_k\left(\vec{x}\right)$ רשומים באוגרים $R_1,R_{a_1+1},...,R_{a_1+...a_{k-1}+1}$ בהתאמה. את תוצאות אלה התכנית מעתיקה לאוגרים הראשונים $R_1,...,R_k$ כדי שאפשר יהיה להפעיל עליהם את R. אבל המהלך החישובים הקודמים יכול להיות שהיה שימוש באוגרים נוספים בסרט ולכן לפני תחילת החישוב התכנית מאפסת את כל האוגרים שיכול להיות שהיה שימוש בהם. לבסוף R פועלת וערך ההרכבה נשאר ב- R_1.

נשים לב שאם אחד החישובים לא נעצר אף פעם אז התכנית כולה לא עוצרת אף פעם והפלט אינו מוגדר, כפי שאמור להיות.

2. רקורסיה פרימיטיבית: תהי G פונקציה חשיבה ב- n משתנים ותהי P תכנית שמחשבת אותה. תהי H פונקציה חשיבה ב- $n+2$ משתנים ותהי Q תכנית שמחשבת אותה. נראה ש-הפונקציה ב- $n+1$ משתנים F המוגדרת ברקורסיה פרימיטיבית באופן הבא:

$$F\left(\vec{x},0\right)=G\left(\vec{x}\right)$$
$$F\left(\vec{x},y+1\right)=H\left(\vec{x},y,F\left(\vec{x},y\right)\right)$$

גם היא חשיבה. נטען שהתכנית הבאה מחשבת את F :

$$U_{n,n+3}P^{(n+2)}J_{n+1,n+2,m_0}P_{n+3,2n+4}P_{n+2,2n+3}P_{1,n+3}Z_{2n+5}...Z_kQ^{(n+2)}S_{n+2}J_{1,1,m_1}P_{n+3,1}$$

כאשר:

- m_0 הוא המספר הסידורי בתכנית של הפקודה הראשונה בהופעה של התת תכנית $P_{n+3,1}$
- m_1 הוא המספר הסידורי של הפקודה $J_{n+1,n+2,m_0}$
- k הוא המקסימום בין $2n+5$ לכתובת הרחוקה ביותר המופיעה ב- $Q^{(n+2)}$

נסביר את מהלך התכנית.הרעיון הוא להשתמש במונה כדי לחשב את $F\left(\vec{x},i\right)$ עד שנגיע ל- i הדרוש. ראשית, התכנית מעתיקה את הקלט $R_1,...,R_n$ לאוגרים $R_{n+3},...,R_{2n+2}$. האוגר R_{n+2} נשאר ריק והוא יתפקד כמונה. לאחר מכן מתבצעת P ובאוגר R_{n+3} נרשם הערך $F\left(\vec{x},0\right)$. אם $y=0$ הערך נרשם ב- R_1 והתכנית נגמרת. אחרת, מעבירים את הקלט ל- Q לאוגרים $R_{n+3},...,R_{2n+2},R_{2n+3},R_{2n+4}$. נזכור שב- R_{n+3} רשום כעת $F\left(\vec{x},0\right)$ וב- $R_{n+4},...,R_{2n+2}$ רשומים $x_2,...,x_n$ בהתאמה. לכן כל מה שנותר לעשות הוא להעביר את x_1 ל- R_{n+3}, את המונה מ- R_{n+2} ל- R_{2n+3} ואת תוצאת השלב הקודם מ- R_{n+3} ל- R_{2n+4} (כמובן, צריך לבצע שלב זה ראשון כדי לא לאבד את הערך שחושב). כעת ניתן להריץ את Q. בסוף הריצה התכנית מעדכנת את המונה, משווה אותו ל- y הרצוי וחוזרת על התהליך אם צריך.

נשים לב שאם באיזשהו שלב אחד החישובים לא נגמר כל התכנית כולה לא תסיים לרוץ לעולם וערך הפונקציה לא יהיה מוגדר, כפי שצריך להיות.

3. סכמת מזעור: תהי G פונקציה חשיבה ב- $n+1$ משתנים ותהי P תכנית שמחשבת אותה. אזי התכנית הבאה מחשבת אתה מזעור $\mu yG\left(\vec{x},y\right)$:

$$U_{n+1,n+2}P^{(n+1)}Z_{n+3}J_{n+1,n+2,m_0}S_{n+1}Z_{2n+2}...Z_kJ_{1,1,0}P_{n+1,1}$$

כאשר:

- m_0 הוא המספר הסידורי של הפקודה הראשונה בהופעה של $P_{n+1,1}$ בתכנית
- k הוא המקסימום בין $2n+2$ לכתובת הרחוקה ביותר המופיעה ב- $P^{(n+2)}$

כמו ברקורסיה פרימיטיבית הרעיון הוא שתכנית תחשב את $G(\vec{x},y)$ שוב ושוב עד שנקבל את הערך הרצוי. אם לא קיים כזה התכנית לא תעצור לעולם.
לכל אורך הריצה הקלט נמצא באוגרים $R_1,...,R_n$. בכל שלב התכנית מעתיקה את הקלט לאוגרים $R_{n+2},...,R_{2n+1}$ כאשר R_{n+1} ו- R_{2n+2} מכילים את ה- y שנבדק כרגע. אם התוצאה מתאפסת התכנית מעבירה את y מ- R_{n+1} ל- R_1. אחרת היא מגדילה את y וממשיכה לבדוק. נשים לב שאם באיזה שלב $G(\vec{x},y)$ לא מוגדר אז התכנית לא מסיימת לרוץ ו- $\mu y(\vec{x},y)=\infty$.

☺

משפט: כל פונקציה חשיבה היא רקורסיבית

הוכחה: ראשית, נשים לב שאנחנו נמצאים בבעיה משום שמושג הפונקציה החשיבה לא הוגדר במונחים מתמטיים. לשם כך, נצפין את התכניות ע"י מספרים טבעיים באופן הבא:

לכל פקודה C נתאים מספר $\#C$ באופן הבא:

$$\begin{aligned} &Z_i \mapsto 2^i \\ &S_i \mapsto 3^i \\ &J_{i,j,m} \mapsto 5^i 7^j 11^m \end{aligned}$$

לכל תכנית $P=\langle C_0,...,C_{h-1}\rangle$ נתאים מספר $\#P=\prod_{k<h} p_k^{\#C_k}$. הקוד שלך התכנית הריקה הוא 1. בגלל יחידות הפירוק לגורמים ראשוניים ההתאמה $P\mapsto \#P$ היא פונקציה חח"ע מקבוצת התכניות ל- $\mathbb{N}$.

נגדיר תכונה של מספרים טבעיים $\mathrm{Prog}(z)$ שאומרת ש- z הוא קוד של תכניות לא ריקה כלשהי. נשים לב שמתקיים

$$\mathrm{Prog}(z)=[z>0]\wedge\left[\forall x<\mathrm{lh}(z)\exists u<z\exists v<z\exists w<z\left((z)_x=2^{u+1}\vee(z)_x=3^{u+1}\vee(z)_x=5^{u+1}\cdot 7^{v+1}\cdot 11^w\right)\right]$$

לכן Prog הוא יחס פ"ר.

כעת נגדיר את הפונקציה $\lambda z(\hat{z})$ באופן הבא:

$$\hat{z}=\begin{cases} z & \mathrm{Prog}(z) \\ 1 & \neg\mathrm{Prog}(z) \end{cases}$$

זוהי הגדרה לפי מקרים ולכן $\lambda z(\hat{z})$ היא פונקציה פ"ר. נשים לב ש- $\hat{z}$ הוא תמיד קוד של תכנית כלשהי – או של התכנית ש- z מקודד או של התכנית הריקה. נסמן ב- $\{z\}$ את התכנית שמקודד $\hat{z}$, כלומר $\#\{z\}=\hat{z}$. נשתמש בסימון $\{z\}$ גם עבור הפונקציה $\{z\}_n$. ברור שמתקיים שאורך התכנית $\{z\}$ הוא $\mathrm{lh}(\hat{z})$. בהינתן $u>0$ נאמר שהמכונה נמצאת במצה u אן המספר במונה הפקודות הוא $(u)_0$ ולכל $0<i$ המספר המאוחסן באוגר R_i הוא $(u)_i$. מאחר שבהגדרת מכונת URIM בכל רגע נתון כמעט כל הרגיסטרים ריקים אכן ניתן לתאר את כל מצב של המכונה ע"י מספר טבעי u כנ"ל.

כעת, נניח שהמכונה מריצה את התכנית $\{z\}$. נאמר שהמצב u הוא מצב עצירה אם $0<u$ ו- $(u)_0\geq \mathrm{lh}(\hat{z})$. זה מתאים להגדרה שהמכונה עוצרת אם במונה הפקודות מופיע מספר שגדול מאורך התכנית. לכל מצב u יש

מצב יחיד $\mathrm{Nex}(u,z)$ שנקרא המצב הבא. אם u מצב עצירה אז המצב הבא הוא u עצמו. אחרת, המצב הבא הוא המצב שבו תהיה המכונה מיד אחרי שהמכונה תבצע את הפקודה $(u)_0$ בתכנית $\{z\}$. כדי ש-Nex תהיה שלמה נגדיר $\mathrm{Nex}(0,z)=0$.

נראה ש-$\lambda uz\,\mathrm{Nex}(u,z)$ פונקציה פ"ר. לשם כך, נגדיר כמה פונקציות עזר:

1. $k(u)=(u)_0$
2. $i(u,z,x)=\left((\hat{z})_{k(u)}\right)_x$
3. $f(u,z,x)=\mathrm{q}\left(u,p_{i(u,z,x)}^{(u)_{i(u,z,x)}}\right)$
4. $k'(u,z)=\begin{cases} i(u,z,4) & (u)_{i(u,z,2)}=(u)_{i(u,z,3)} \\ k(u)+1 & else \end{cases}$

ארבע פונקציות אלה הן כמובן פ"ר. אם המכונה נמצאת במצב $u>0$ שאינו מצב עצירה אז $k(u)$ הוא המספר ב-K. הפקודה שהמכונה עומדת לבצע היא הפקודה ה-$k(u)$ בתכנית. $i(u,z,x)$ הוא הרכיב ה-x של הפקודה הזאת. כעת יש שלוש אפשרויות:

- אם $i(u,z,0)>0$ אז המכונה תבצע את הפקודה $Z_{i(u,z,0)}$
- אם $i(u,z,1)>0$ אז המכונה תבצע את הפקודה $S_{i(u,z,1)}$
- אם $i(u,z,2)>0$ אז המכונה תבצע את הפקודה $K_{i(u,z,2),i(u,z,3),i(u,z,4)}$ וב-K יאוחסן המספר $k'(u,z)$

המצב $f(u,z,x)$ הוא זהה למצב u פרט לכך שב-$f(u,z,x)$ האוגר $R_{i(u,z,x)}$ הוא ריק.

כעת נוכל להגדיר את $\mathrm{Nex}(u,z)$ באופן הבא:

$$\mathrm{Nex}(u,z)=\begin{cases} 2f(u,z,0) & u>0\wedge k(2)<\mathrm{lh}(\hat{z})\wedge i(u,z,0)>0 \\ 2p_{i(u,z,1)}\cdot u & u>0\wedge k(2)<\mathrm{lh}(\hat{z})\wedge i(u,z,1)>0 \\ 2^{k'(u,z)}\cdot \mathrm{q}\left(u,2^{k(u)}\right) & u>0\wedge k(2)<\mathrm{lh}(\hat{z})\wedge i(u,z,2)>0 \\ u & else \end{cases}$$

מההגדרה מקבלים שהפונקציה היא אכן פ"ר.

כעת, נניח שהמכונה מתחילה לבצע את התכנית $\{z\}$. המכונה מתחילה במצב u_0 שבו המספרים $x_1,...,x_n$ נמצאים באוגרים $R_1,...,R_n$ בהתאמה ושאר האוגרים ריקים. אזי מתקיים לפי ההגדרה $u_0=p_1^{x_1}\cdot...\cdot p_n^{x_n}$. אם $n=0$ אז $u_0=1$. בהינתן מצב u_i יהי $u_{i+1}=\mathrm{Nex}(u_i,z)$ המצב הבא.

נבחן שני מקרים:

1. אם $\{z\}(\vec{x})\neq\infty$ אז קיים t שעבורו המצב u_t הוא מצב עצירה. יהי h המינימלי כך ש-$(u_t)_0\leq \mathrm{lh}(\hat{z})$. נגדיר את קוד החישוב של $\langle z,\vec{x}\rangle$ להיות המספר $\prod_{t\leq h}p_t^{u_t}$.
2. אם $\{z\}(\vec{x})=\infty$ אז לא קיים t שעבורו המצב u_t הוא מצב עצירה. במקרה זה קוד החישוב של $\langle z,\vec{x}\rangle$ אינו מוגדר. כלומר, קוד החישוב במקרה זה הוא ∞.

לכל n נגדיר יחס $n+2$-מקומי T_n באופן הבא[1]:

$$T_n\left(z,\vec{x},y\right)= \left[\left(y\right)_0=\prod_{i=1}^{n}p_i^{x_i}\right]\wedge\left[\forall t<\left(\mathrm{lh}\left(y\right)\dot{-}1\right)\left(\left(y\right)_{t+1}=\mathrm{Nex}\left(\left(y\right)_t,z\right)\right)\right]\wedge$$
$$\wedge\left[\forall t<\left(\mathrm{lh}\left(y\right)\dot{-}1\right)\left(\left(\left(y\right)_t\right)_0<\mathrm{lh}\left(\hat{z}\right)\right)\right]\wedge\left[\left(\left(y\right)_{\mathrm{lh}(y)\dot{-}1}\right)_0\geq \mathrm{lh}\left(\hat{z}\right)\right]$$

ברור שיחס הוא פ"ר. נטען שלכל $z,\vec{x},y$ מתקיים היחס $T_n\left(z,\vec{x},y\right)$ אמ"מ y הוא קוד חישוב ל-$\left\langle z,\vec{x}\right\rangle$.

מההגדרה של היחס רואים שהוא מתקיים אמ"מ y הוא מהצורה $\prod_{t\leq h}p_t^{u_t}$ כאשר $u_0=p_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{x_n}$ ולכל $t<h$ $u_{t+1}=\mathrm{Nex}\left(u_t,z\right)$ ו-u_t אינו מצב עצירה לתכנית $\left\{z\right\}$ ואילו u_h מצב עצירה. אלה הם בדיוק התנאים שאומרים ש-y הוא קוד חישוב ל-$\left\langle z,\vec{x}\right\rangle$.

נגדיר כעת את הפונקציה $U\left(y\right)=\left(\left(y\right)_{\mathrm{lh}(y)\dot{-}1}\right)_1$. הפונקציה כמובן פ"ר. נראה ש-$\left\{z\right\}\left(\vec{x}\right)=U\left(\mu yT\left(z,\vec{x},y\right)\right)$.

בהינתן z ו-$\vec{x}$, נניח שהמכונה פועלת לפי התכנית $\left\{z\right\}$ ממצב התחלתי שבו המספרים $x_1,\ldots,x_n$ נמצאים באוגרים $R_1,\ldots,cR_n$ בהתאמה ויתר האוגרים ריקים. ראינו ש-$\mu yT\left(z,\vec{x},y\right)$ הוא קוד חישוב ל-$\left\langle z,\vec{x}\right\rangle$ הוא מוגדר אמ"מ $\left\{z\right\}\left(\vec{x}\right)\neq\infty$. אם $U\left(\mu yT\left(z,\vec{x},y\right)\right)$ מוגדר אז הוא הרכיב הראשון של הרכיב החיובי האחרון של קוד החישוב הזה. אבל זה בדיוק המספר שמופיע באוגר R_1 כשהמכונה עוצרת, כלומר $\left\{z\right\}\left(\vec{x}\right)$.

הפונקציה $U\left(\mu yT\left(z,\vec{x},y\right)\right)$ היא רקורסיבית (לא בהכרח פ"ר כי השתמשנו במזעור). ולכן $\left\{z\right\}\left(\vec{x}\right)$ רקורסיבית. אבל כל פונקציה חשיבה היא מהצורה $\left\{z\right\}\left(\vec{x}\right)$ ולכן כל פונקציה חשיבה היא רקורסיבית.

☺

<u>משפט הצורה הנורמלית</u>: קיימת פונקציה פ"ר חד-מקומית U כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים יחס פ"ר T_n ב-$n+2$ משתנים כך שלכל מספר z ולכל $\vec{x}\in\mathbb{N}^n$ מתקיים $\left\{z\right\}\left(\vec{x}\right)=U\left(\mu yT_n\left(z,\vec{x},y\right)\right)$.

<u>ניסוח שקול</u>: קיימת פונקציה פ"ר U במשתנה אחד ולכל n קיים יחס פ"ר T_n ב-$n+2$ משתנים כך שלכל פונקציה רקורסיבית f ב-n משתנים יש מספר טבעי e כך שמתקיים לכל $\vec{x}\in\mathbb{N}^n$ $f\left(\vec{x}\right)=U\left(\mu yT\left(e,\vec{x},y\right)\right)$.

<u>ניסוח שקול</u>: לכל n קיימת פונקציה רקורסיבית ב-$n+1$ משתנים $F\left(z,\vec{x}\right)$ בעלת התכונה הבאה: לכל ערך טבעי e הפונקציה $G\left(\vec{x}\right)=F\left(e,\vec{x}\right)$ היא פונקציה רקורסיבית ב-n משתנים. יתר על כן, כאשר עוברים על כל הערכים האפשריים של z, אנו מקבלים את כל הפונקציות הרקורסיביות ב-n משתנים.

<u>ניסוח שקול</u>: $\left\{\lambda\vec{x}F\left(e,\vec{x}\right):e\in\mathbb{N}\right\}$ זו מנייה (עם חזרות) של כל הפונקציות הרקורסיביות ב-n משתנים.

---

[1] אם ברור מה ה-n הרלוונטי נרשום רק T.

<u>הוכחה</u>: נסתכל בפונקציה $F\left(z,\vec{x}\right)=U\left(\mu yT\left(z,\vec{x},y\right)\right)$. זו פונקציה רקורסיבית ב-$n+1$ משתנים. ראינו שכל פונקציה חשיבה ב-n משתנים היא מהצורה $F\left(e,\vec{x}\right)=U\left(\mu yT\left(e,\vec{x},y\right)\right)$, אבל כל פונקציה רקורסיבית היא חשיבה ולכן כל פונקציה רקורסיבית היא מהצורה $F\left(e,\vec{x}\right)$ שהיא פונקציה רקורסיבית ב-n משתנים.

☺

<u>דוגמה</u>: **פונקציית האלכסון** במשתנה יחיד $\lambda x\left(\{x\}(x)\right)$ היא פונקציה רקורסיבית, שהרי $\lambda xy\left(\{x\}(y)\right)$ פונקציה רקורסיבית וע"י הצבת x נקבל שפונקציית האלכסון רקורסיבית. נניח ש-g היא הרחבה של פונקציית האלכסון. הראה ש-g לא יכולה להיות גם רקורסיבית וגם שלמה. אז נניח ש-g הרחבה רקורסיבית של $\lambda x\left(\{x\}(x)\right)$. אזי גם הפונקציה $\lambda x\left(g(x)+1\right)$ רקורסיבית. לכן קיים מספר e כך שלכל $x\in\operatorname{dom} g$ $g(x)+1=\{e\}(x)$ (שהרי ראינו שכל פונקציה רקורסיבית מתקבלת ע"י תכנית כלשהי). נניח בשלילה ש-$g(e)$ מוגדר. אזי גם $g(e)+1=\{e\}(e)$ מוגדר. אבל g היא הרחבה של $\lambda x\left(\{x\}(x)\right)$ ולכן $g(e)=\{e\}(e)$. קיבלנו $g(e)+1=\{e\}(e)=g(e)$ וזאת סתירה. לכן $g(e)$ אינו מוגדר ו-g אינה שלמה. קיבלנו ש-g אינה יכולה להיות גם רקורסיבית וגם שלמה. בפרט $\lambda x\left(\{x\}(e)\right)$ עצמה אינה שלמה.

<u>דוגמה</u>: נסתכל על פונקציית האלכסון $\lambda x\left(\{x\}(x)\right)$. נטען שתחום ההגדרה שלה אינו רקורסיבי. פירוש הדבר שאין אלגוריתם שיכול לומר לנו אם מספר מסויים נמצא בתחום ההגדרה של הפונקציה או לא, כלומר אם התכנית שמחשבת את הפונקציה עוצרת על מספר זה או לא. בעיה זו נקראת **בעיית העצירה**. נניח בשלילה שהיחס $P(x)$ שמגדיר את תחום ההגדרה של הפונקציה הוא רקורסיבי. נסתכל אז על הפונקציה הבאה:

$$g(x)=\begin{cases}\{x\}(x) & P(x)\\ 0 & \neg P(x)\end{cases}$$

לפי ההנחה זוהי פונקציה רקורסיבית והיא כמובן הרחבה של פונקציית האלכסון. לכן אינה יכולה להיות שלמה. אבל היא שלמה לפי הגדרתה, בסתירה. לכן לא יכול להיות ש-$P(x)$ רקורסיבי.

<u>הגדרה</u>: יחס n-מקומי R הוא **ניתן למניה רקורסיבית** (להלן נל"ר) הוא יחס המתקבל מיחס רקורסיבי $n+1$-מקומי ע"י כמת קיום. כלומר, קיים יחס P כך ש-$R(\vec{z})=\exists P(\vec{z},y)$.

ברור שיחס רקורסיבי הוא נל"ר שכן, אם P רקורסיבי אז $P(\vec{x})=\exists y\left(P(\vec{x})\wedge y=y\right)$.

<u>למה</u>: מחלקת היחסים הנל"ר סגורה תחת הפעולות הבאות:

1. הרכבה על פונקציות רקורסיביות שלמות
2. כמת קיום
3. גימום
4. איווי
5. כמת קיום חסום
6. כמת כולל חסום

<u>הערה</u>: מחלקת היחסים הנל"ר אינה סגורה תחת כמת כולל לא חסום.

<u>**הוכחה**</u>:

1. יהי $R(\vec{x}) = \exists yP(\vec{x}, y)$ יחס נל"ר k-מקומי. ותהיינה $f_1, ..., f_k$ פונקציות רקורסיביות שלמות n-מקומיות. אזי $R(f_1(\vec{x}), ..., f_k(\vec{x})) = \exists yP(f_1(\vec{x}), ..., f_k(\vec{x}), y)$. אבל בגלל ש-$P$ רקורסיבי גם ההרכבה $P(f_1(\vec{x}), ..., f_k(\vec{x}), y)$ היא רקורסיבית. ולכן $R(f_1(\vec{x}), ..., f_k(\vec{x}))$ נל"ר לפי ההגדרה.
2. נסתכל על $R(\vec{x}) = \exists y \exists zP(\vec{x}, y, z)$. ניתן לזווג את (y, z) ולהצפין את הזוג ע"י u ואז למעשה $R(\vec{x}) = \exists uP(\vec{x}, \mathrm{K}(u), \mathrm{L}(u))$. אם P רקורסיבי אז R נל"ר.
3. יהיו $R(\vec{x}) = \exists yP(\vec{x}, y)$ ו-$Q(\vec{x}) = \exists yT(\vec{x}, y)$ יחסים נל"ר. מתקיים $R(\vec{x}) \wedge Q(\vec{x}) = \exists y \exists z(P(\vec{x}, y) \wedge Q(\vec{x}, z))$ ולפי הסעיף הקודם יחס זה הוא נל"ר משום ש-$P(\vec{x}, y) \wedge Q(\vec{x}, z)$ רקורסיבי.
4. יהיו $R(\vec{x}) = \exists yP(\vec{x}, y)$ ו-$Q(\vec{x}) = \exists yT(\vec{x}, y)$ יחסים נל"ר. מתקיים $R(\vec{x}) \vee Q(\vec{x}) = \exists y(P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, z))$ ויחס זה הוא נל"ר משום ש-$P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, z)$ רקורסיבי.
5. נסתכל על $\exists z < u \exists yP(\vec{x}, y, z)$. מתקיים $\exists z < u \exists yP(\vec{x}, y, z) = \exists z \exists y(z < u \wedge P(\vec{x}, y, z))$ מאחר ש-> יחס רקורסיבי נקבל את הטענה.
6. נסתכל על $\forall w < u \exists yP(\vec{x}, w, y)$. מתקיים $\forall w < u \exists yP(\vec{x}, w, y) = \exists z \forall w < uP(\vec{x}, w, (z)_w)$ ומאחר שהיחסים הרקורסיביים סגורים תחת כמת חסומים נקבל את הטענה.

☺

<u>**הגדרה**</u>: תהי f פונקציה n-מקומית עבור $1 \le n$. הגרף של f הוא הקבוצה $\{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in \operatorname{dom} f\}$.
למעשה הגרף הוא היחס $\lambda \vec{x} u(f(\vec{x}) = u)$.

<u>**משפט**</u>: יהי A הגרף של f. A נל"ר אמ"מ f רקורסיבית.

<u>**הוכחה**</u>:

($\Leftarrow$) נניח ש-A נל"ר. אזי $A(\vec{x}, u) = \exists yP(\vec{x}, u, y)$ כאשר P יחס רקורסיבי. נשתמש בפונקציית הזיווג ונקבל $f(\vec{x}) = \mathrm{K}(\mu zP(\vec{x}, \mathrm{K}(z), \mathrm{L}(z)))$.

($\Rightarrow$) אם f רקורסיבית אז לפי משפט הצורה הנורמלית קיים e כך שלכל $\vec{x}$ מתקיים $f(\vec{x}) = U(\mu yT(e, \vec{x}, y))$. לכן $(\vec{x}, u) \in A$ אמ"מ $\exists y(T(e, \vec{x}, y) \wedge U(y) = u)$. אבל $T(e, \vec{x}, y) \wedge U(y) = u$ רקורסיבי ולכן A נל"ר.

נשים לב שאם f שלמה אז A רקורסיבית כי $f(\vec{x}) = u \leftrightarrow (\vec{x}, u) \in A$.

☺

משפט: יחס הוא רקורסיבי אמ"מ הוא ושלילתו נל"ר.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח ש- R רקורסיבי, אזי גם $\neg R$ רקורסיבי אבל יחס רקורסיבי הוא נל"ר ולכן R ושלילתו נל"ר.

($\Rightarrow$) נניח ש- R ו- $\neg R$ נל"ר. אזי $R(\vec{x}) = \exists y P(\vec{x}, y)$ ו- $\neg R(\vec{x}) = \exists y Q(\vec{x}, y)$ כאשר P ו- Q רקורסיביים. נטען שמתקיים $R(\vec{x}) = P\left(\vec{x}, \mu y\left(P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)\right)\right)$. אם $P\left(\vec{x}, \mu y\left(P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)\right)\right)$ אז קיים y מינימלי כך ש- $P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)$. עבור y זה מתקיים $P(\vec{x}, y)$ ולכן $R(\vec{x})$. אחרת, אם $\neg P\left(\vec{x}, \mu y\left(P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)\right)\right)$ אז ה- y המינימלי שמקיים את $P(\vec{x}, y) \vee Q(\vec{x}, y)$ לא מקיים את $P(\vec{x}, y)$ ולכן הוא מקיים את $Q(\vec{x}, y)$ ומכאן ש- $\neg R(\vec{x})$.

☺

מסקנה: קבוצת היחסים הנל"ר אינה סגורה לשלילה כי אם הייתה סגורה לשלילה אז כל היחסים היו רקורסיביים וזה לא נכון.

משפט: תהי $A \subset \mathbb{N}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. A נל"ר
2. A היא התחום של פונקציה רקורסיבית ב- n משתנים
3. $A = \varnothing$ או A נמנית ע"י n-יה של פונקציות פ"ר במשתנה אחד
4. A נמנית ע"י n-יה של פונקציות רקורסיביות במשתנה אחד

הוכחה:

($1 \Leftarrow 2$) נניח ש- $A(\vec{x}) = \exists y R(\vec{x}, y)$ כאשר R רקורסיבי. נסתכל על הפונקציה $\lambda \vec{x}\left(\mu y R(\vec{x}, y)\right)$. זאת כמובן פונקציה רקורסיבית והתחום שלה הוא A.

($2 \Leftarrow 3$) תהי f פונקציה רקורסיבית כך ש- $\operatorname{dom} f = A$. לפי משפט ההצגה הנורמלית קיים e כך ש- $f(\vec{x}) = U\left(\mu y T(e, \vec{x}, y)\right)$ ולכן $A(\vec{x}) = \exists y T(e, \vec{x}, y)$. נניח ש- $A \neq \varnothing$. יהי $\vec{a} \in A$. נגדיר פונקציות פ"ר חד-מקומיות $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ באופן הבא:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} (t)_i & T\left(e, (t)_1, \ldots, (t)_n, (t)_0\right) \\ a_i & else \end{cases}$$

נראה ש- $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ מונה את A.

יהי t כך ש- $T\left(e, (t)_1, \ldots, (t)_n, (t)_0\right)$. אזי $\exists y T\left(e, (t)_1, \ldots, (t)_n, y\right)$ ולכן $\left((t)_1, \ldots, (t)_n\right) \in A$. אם לא מתקיים $T\left(e, (t)_1, \ldots, (t)_n, (t)_0\right)$ אז $\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) = \vec{a} \in A$. לכן $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ מונה תת קבוצה של A.

מצד שני, אם $\vec{c} \in A$ אז מתקיים $\exists y T(e, \vec{c}, y)$, כלומר קיים b כך ש- $T(e, \vec{c}, b)$. נסתכל על $t = 2^b p_1^{c_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{c_n}$. קל לראות ש- $\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) = \vec{c}$ ולכן $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ מונה את כל A.

($3 \Leftarrow 4$) אם $A=\varnothing$ נסתכל על $f(t)=\mu y(t+y=t+y+1)$. אז $\text{dom} f=\varnothing$ ולכן $(f,...,f)$ מונה את $A=\varnothing$. ואילו אם A אינה ריקה ונמנית ע"י פונקציות פ"ר במשתנה יחיד בוודאי היא נמנית ע"י פונקציות רקורסיביות במשתנה יחיד, שהרי פונקציה פ"ר היא בפרט רקורסיבית.

($4 \Leftarrow 1$) תהי $(f_1,...,f_n)$ n-יה של פונקציות רקורסיביות המונה את A. לכל $1 \le i \le n$ יהי B_i הגרף של f_i. אז מתקיים $A(\vec{x})=\exists t((t,x_1)\in B_1 \wedge ... \wedge (t,x_n)\in B_n)$. כל f_i היא רקורסיבית ולכן הגרף שלה נל"ר. לכן לפי למה קודמת A נל"ר.

☺

<u>מסקנה</u>: הקבוצות הנל"ר ה-n-ממדיות הן בדיוק הקבוצות $\text{dom}\{e\}_n$ - התחומים של הפונקציות הרקורסיביות.

<u>הגדרה</u>: נאמר ש-e הוא **אינדקס** של הקבוצה הנל"ר ה-n-ממדית $\text{dom}\{e\}_n$. נשים לב שאינדקס של קבוצה הוא לא יחיד משום שאותה פונקציה יכולה להיות מוצפנת ע"י שני מספרים שונים.

<u>מסקנה</u>: היחס ה-$n+1$-מקומי $\lambda \vec{x} z\left(\vec{x}\in \text{dom}\{z\}_n\right)$ הוא נל"ר ומתלכד עם $\exists y T(z,\vec{x},y)$. ולכן כל יחס נל"ר מתקבל ע"י כימות ישי מיחס פ"ר משום ש-$\vec{x}\in \text{dom}\{e\}_n=\exists y T_n(e,\vec{x},y)$ והרי T יחס פ"ר ו-$\left\{\text{dom}\{e\}_n\right\}$ הם כל היחסים הנל"ר.

<u>טענה</u>: קיימת פונקציה חשיבה g_0 כך ש-$\{g_0(y)\}(0)=y$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $g_0(y)=\prod_{i<y} p_i^3$. g_0 בוודאי רקורסיבית ולכן חשיבה. נשים לב ש-$g_0(y)$ למעשה מקודדת את התכנית $\underbrace{\langle S_1,...,S_1\rangle}_{y\text{ times}}$. ולכן אם התכנית מתחילה בכך שהאוגר R_1 ריק בסופה הוא מכיל את y.

☺

<u>טענה</u>: קיימת פונקציה חשיבה g_1 כך ש-$\{g_1(x,y)\}=\{x\}\{y\}$, כלומר $\{g_1(x,y)\}$ היא השרשור של $\{x\}$ ו-$\{y\}$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $g_1(x,y)=x\cdot\prod_{i=0}^{\text{lh}(y)-1} p_{\text{lh}(x)+i}^{\left(y^*\right)_i}$ כאשר $z^*=\text{q}\left(z,11^{(z)_{11}}\right)\cdot 11^{(z)_{11}+\text{lh}(x)}$. ברור ש-$g_1$ חשיבה. נבין מה היא עושה. ראשית, נסתכל על z^*. $\text{q}\left(z,11^{(z)_{11}}\right)$ הוא מספר שהפירוק שלו לראשוניים זהה לזה של z אלא שלא מופיע בו 11. אז כאשר כופלים את $\text{q}\left(z,11^{(z)_{11}}\right)$ ב-$11^{(z)_{11}+\text{lh}(x)}$ מקבלים את אותה הפקודה אלא שאם היא מהצורה $J_{i,j,k}$ אז הכתובת גדלה ב-$\text{lh}(x)$ שהוא האורך של התכנית $\{x\}$.

לכן סה"כ $g_1(x,y)$ היא הקידוד של התכנית שקודם מבצעת את $\{x\}$ ואח"כ את $\{y\}$ עם כל הכתובות מוזזות ב- $\mathrm{lh}(x)$, כלומר זהו בדיוק הקידוד של $\{x\}\{y\}$.

☺

<u>טענה</u>: קיימת פונקציה חשיבה g_2 כך שאם x מקודד את התכנית P אז $g_2(x,m)$ מקודדת את $P^{(m)}$.

<u>הוכחה</u>: בדומה לטענה הקודמת נגדיר $g_2(x,m)=\prod_{i=0}^{\mathrm{lh}(x)-1} p_i^{(x)_i^*}$ כאשר $z^*=\mathrm{q}\left(z,11^{(z)_{11}}\right)\cdot 11^{(z)_{11}+m}$.

☺

<u>למה</u>: לכל פונקציה חשיבה $F(\vec{x},\vec{y})$ קיימת פונקציה חשיבה g כך ש- $\{g(\vec{y})\}(\vec{x})=F(\vec{x},\vec{y})$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש- z הוא הקוד של F וש- $\vec{x}=(x_1,...,x_m)$ ו- $\vec{y}=(y_1,...,y_k)$. אז $g(\vec{y})$ הוא הקוד של השרשור $\{z\}\{g_0(y_k)\}^{(m+k)}...\{g_0(y_1)\}^{(m+1)}$. זאת כמובן פונקציה חשיבה וברור שהיא מקיימת את הדרוש.

☺

<u>משפט הרקורסיה המוכלל</u>: תהי $F(\vec{x},y,z)$ פונקציה חשיבה. אזי קיימת פונקציה חשיבה φ כך ש- $\{\varphi(z)\}(x)=F(\vec{x},\varphi(z),z)$.

<u>הוכחה</u>: ע"י הפעלת הלמה על $F_0(\vec{x},y)=\{y\}(\vec{x},y)$ נקבל שקיימת פונקציה σ חשיבה כך ש- $\{\sigma(y)\}(\vec{x})=\{y\}(\vec{x},y)$. ע"י הפעלת הלמה על $G(\vec{x},y,z)=F(\vec{x},\sigma(y),z)$ נקבל שקיימת פונקציה חשיבה ψ כך ש- $\{\psi(z)\}(\vec{x},y)=F(\vec{x},\sigma(y),z)$.

כעת נגדיר $\varphi(z)=\sigma(\psi(z))$. אז מתקיים:

$$\{\varphi(z)\}(\vec{z})=\{\sigma(\psi(z))\}(\vec{x})=\{\psi(z)\}(\vec{x},\psi(z))=F(\vec{x},\sigma(\psi(z)),z)=F(\vec{x},\varphi(z),z)$$

☺

<u>משפט הרקורסיה</u>: אם $F(\vec{x},y)$ חשיבה אז קיים e כך ש- $\{e\}(\vec{x})=F(\vec{x},e)$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $F'(\vec{x},y,z)=F(x,y)$. לפי משפט הרקורסיה המוכלל קיימת פונקציה חשיבה φ כך ש- $\{\varphi(z)\}(\vec{z})=F'(\vec{x},\varphi(z),z)$. ניקח $e=\varphi(1)$. אזי עבור $z=1$ נקבל $\{e\}(\vec{x})=F'(\vec{x},e,1)=F(\vec{x},e)$.

☺

משפט נקודת השבת: תהי σ פונקציה חשיבה שלמה. אזי קיים e כך ש- $\{\sigma(e)\}(\vec{x})=\{e\}(\vec{x})$ לכל $\vec{x}$.

הוכחה: נסתכל על $G(\vec{x},y)=\{\sigma(y)\}(\vec{x})$. לפי משפט הרקורסיה קיים e כך ש- $G(\vec{x},e)=\{e\}(\vec{x})$, כלומר $\{\sigma(e)\}(\vec{x})=\{e\}(\vec{x})$.

☺

טענה: אם $A\subset\mathbb{N}$ נל"ר אינסופית אז יש $A'\subset A$ רקורסיבית.

הערה: הטענה הזאת נכונה גם לקבוצת מכל ממד, אך נוכיח אותה רק למקרה פרטי של קבוצה חד-ממדית.

הוכחה: A נל"ר ולכן יש פונקציה פ"ר g כך ש- $g(\mathbb{N})=A$. נגדיר פונקציה g' באופן הבא:

$$g'(0)=g(0)$$
$$g'(n+1)=g\left(\mu y\left(g(y)>g'(n)\right)\right)$$

למעשה $g'(n)$ היא תת סדרה עולה ממש של $g(n)$. נסמן $A'=g'(\mathbb{N})$. ברור שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $g'(n)\geq n$. לכן $x\in A'$ אמ"מ $\exists y\left(g'(y)=x\right)$ אמ"מ $\exists y\leq x\left(g'(y)=x\right)$ וזה יחס רקורסיבי.

☺

מכונות טיורינג

הגדרה: **מכונת טיורינג** היא רביעייה $T=\langle Q,\Sigma,q_0,\delta\rangle$ כאשר:

1. Q קבוצה סופית של מצבים
2. Σ קבוצה סופית של אותיות
3. $q_0\in Q$ מצב התחלתי
4. $\delta:\Sigma\times Q\to\left(\Sigma\cup\{L,R\}\right)\times Q$ פונקציית מצבים

למכונת טיורינג יש סרט אינסופי וראש קורא. בכל שלב המכונה קוראת את מה שיש מתחת לראש הקורא, וזזה ימינה או שמאלה או כותבת אות אחרת באותו מקום ועוברת מצב התאם לפונקציית המצבים. המכונה מתחילה לפעול תמיד מהמצב ההתחלתי.

קונפיגורציה של T היא שלשה (n,f,q) כאשר:

1. $n\in\mathbb{N}$ מקום בסרט
2. $f:\mathbb{N}\to\Sigma$ תוכן הסרט
3. $q\in Q$ המצב שבו במכונה נמצאת

אם המכונה נמצאת במצב $M=(n,f,q)$ אז אם $\delta(f(n),q)=(x,q')$ **המצב העוקב** לו הוא $M^{(T)}=(m,g,p)$ כאשר:

1. $m=\begin{cases} n+1 & x=R \\ n\dot{-}1 & x=L \\ n & x\in\Sigma \end{cases}$
2. $p=q'$
3. $g(i)=\begin{cases} x & i=n\wedge x\in\Sigma \\ f(i) & else \end{cases}$

מסע (או **ריצה**) של T הוא סדרה $M_0,M_1,...,M_k$ כך ש-

1. $M_0=(0,f,q_0)$ עבור פונקציה $f:\mathbb{N}\to\Sigma$ כלשהי
2. $M_{i+1}=M_i^{(T)}$ לכל $0\le i<k$

נאמר ש**המסע מסתיים** אם אין פקודה שמתייחסת לקונפיגורציה האחרונה.

פונקציה $f:\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ נקראת **חשיבה טיורינג** אם יש מכונת טיורינג T כך שאם מריצים את המכונה על הסרט

1^{x_1+1}	0	1^{x_2+1}	0	$\ldots$	0	1^{x_n+1}	0	0	$\ldots$

מספר ה-1-ים על הסרט בסוף הריצה הוא $f(x_1,...,x_n)$ (בפרט המסע אמור להסתיים).

קבוצת מילים Γ מעל א"ב Σ נקראת **כריעה** (או **רקורסיבית**) אם קיימת מכונת טיורינג שהריצה שלה על כל מילה ב-Γ מחזירה 1 ועל כל מילה מחוץ ל-Γ היא מחזירה 0.

Γ **ניתנת למניה רקורסיבית** אם יש מכונת טיורינג שרצה על הסרט הריק ומדפיסה את כל המילים מ-Γ ורק אותן (אולי עם חזרות) עם סימן הפרדה ביניהן.

<u>**משפטים שלא נוכיח**</u>:

1. המושג נל"ר שהגדרנו קודם מתלכד עם קבוצות נל"ר לפי מכונות טיורינג וכנ"ל עבור קבוצות רקורסיביות.
2. קיימת מכונת טיורינג אוניברסאלית U כך ש-$U(\langle T\rangle,\langle w\rangle)=T(w)$ כאשר
   - $\langle T\rangle$ קוד של מכונת טיורינג
   - $\langle w\rangle$ קוד של מילה

   כלומר, U מריצה את T על w ומחזירה את התוצאה (אם הריצה נגמרת).
3. קיימת מכונת טיורינג $U(\langle T\rangle,\langle w\rangle,\langle n\rangle)$ אשר מריצה את T על w בדיוק n צעדים. נשים לב שמכונה זו תמיד עוצרת אחרי n צעדים.

סימונים:

1. כל מכונת טיורינג T מגדירה פונקציה n-מקומית f_T^n. הפונקציה מוגדרת באופן הבא: בהינתן קלט $\vec{x}$ ערך הפונקציה $f_T^n\left(\vec{x}\right)$ הוא מספר ה-1-ים המופיע על סרט המכונה בריצה שלה על הסרט

1^{x_1+1}	0	1^{x_2+1}	0	$\ldots$	0	1^{x_n+1}	0	0	$\ldots$

.

2. לכל תכנית P במכונת URIM נסמן ב-f_P^n את הפונקציה ה-n-מקומית שמגדירה התכנית.

טענה:

1. לכל n ותכנית P יש מכונת טיורינג T כך ש-$f_T^n = f_P^n$.
2. לכל n ומכונת טיורינג T יש תכנית P כך ש-$f_T^n = f_P^n$.

הוכחה:

1. תהי תכנית P במכונת URIM. נתאר איך פועלת מכונת טיורינג T אשר מחשבת את f_P^n:

בהתחלה הסרט של המוכנה נראה כך

1^{x_1+1}	0	1^{x_2+1}	0	$\ldots$	0	1^{x_n+1}	0	0	$\ldots$

.

צעד ראשון:

תורת המספרים

<u>**הגדרה**</u>: **שפת תורת המספרים** מורכבת מהסימנים הבאים:

1. הסימנים הלוגיים הרגילים
2. הסימנים הלא לוגיים:
   - קבוע אישי $\overline{0}$
   - קבוע פעולה חד-מקומי $\overline{s}$
   - קבועי פעולה דו-מקומיים $\oplus,\circ$

המבנה לשפה זו שנעסוק בו הוא מבנה המספרים הטבעיים $\mathscr{N}=\langle \mathbb{N},0,s,+,\cdot\rangle$ ובו $\overline{0}$ מתפרש כ- 0, $\overline{s}$ מתפרשת כפעולת העוקב s ו- $\oplus$ ו- $\circ$ מתפרשים כחיבור וכפל בהתאמה.

לכל מספר $k\in\mathbb{N}$ נגדיר את שם העצם הקבוע $\overline{k}$ באופן הבא:

$$\begin{aligned}&\overline{0}=\overline{0}\\&\overline{k+1}=\overline{s}\left(\overline{k}\right)\end{aligned}$$

במבנה $\mathscr{N}$ כל שם עצם $\overline{k}$ מתפרש כמספר הטבעי k. ל- $\overline{k}$ נקרא **שם מספר**.

אם φ נוסחה עם משתנים חופשיים $x_1,\dots,x_n$ ו- σ השמה שנותנת ל- x_i את הערך k_i קל לראות ש- $\mathscr{N}\vDash\varphi\left[\vec{k}\right]$ אמ"מ $\mathscr{N}\vDash\varphi\left(\overline{\vec{k}}\right)$.

נסמן ב- Ω את התורה מסדר ראשון $Th\left(\mathscr{N}\right)$. Ω היא תורה שלמה ונקראת **האריתמטיקה השלמה מסדר ראשון**. ידוע שכל המבנים האיזומורפיים ל- $\mathscr{N}$ הם מודלים ל- Ω.

<u>**הגדרה**</u>: תהי $\mathcal{L}$ שפה ויהי $\mathscr{A}$ מבנה לשפה. תהי $D\subset A$ קבוצה חלקית לעולמו של המבנה. נאמר ש- D **גדירה** במבנה אם קיימת נוסחה φ ב- $\mathcal{L}$ אם משתנה חופשי אחד x כך ש- $D=\left\{a\in A:\mathscr{A}\vDash\varphi[a]\right\}$. במקרה זה נאמר ש- φ **מגדירה** את D.

תהי $D\subset A^n$. נאמר ש- D גדירה ב- $\mathscr{A}$ אם קיימת נוסחה φ עם n משתנים חופשיים כך ש- $D=\left\{\left(a_1,\dots,a_n\right)\in A^n:A\vDash\varphi\left[a_1,\dots,a_n\right]\right\}$.

איבר $a\in A$ נקרא **גדיר** אם $\{a\}\subset A$ גדירה.

פעולה n-מקומית f במבנה נקראת **גדירה** אם יש נוסחה φ עם $n+1$ משתנים חופשיים כך ש- $\mathscr{A}\vDash\varphi\left[a_1,\dots,a_n,n\right]\leftrightarrow f\left(a_1,\dots,a_n\right)\approx b$.

יחס n-מקומי נקרא **אריתמטי** אם הוא גדיר ב- $\mathscr{N}$ ע"י נוסחה מסדר ראשון.

פונקציה נקראת **אריתמטית** אם הגרף שלה הוא יחס אריתמטי.

נשים לב שמאחר שיש $\aleph_0$ נוסחאות אך $\aleph$ קבוצות חלקיות של $\mathbb{N}$, יש קבוצות שאינן גדירות.

<u>דוגמה</u>: נסתכל על מבנה המספרים הטבעיים. קבוצת המספרים הזוגיים גדירה ע"י הנוסחה $\varphi(x)=\exists y(y\oplus y\approx x)$ וקבוצת המספרים האי זוגיים גדירה ע"י הנוסחה $\psi(x)=\neg\varphi(x)$.

הקבוצה $\{(n,n+1):n\in\mathbb{N}\}$ גדירה ע"י הנוסחה $\varphi(x,y)=y\approx\bar{s}(x)$.

<u>הגדרה</u>: **פונקציית β של גדל** היא פונקציית תלת-מקומית המוגדרת ע"י

$$\beta(x,y,z)=\mathrm{rm}(x,y\cdot(z+1)+1)$$

<u>משפט השאריות הסיני</u>: יהיו $d_0,\dots,d_n$ $n+1$ מספרים טבעיים חיוביים וזרים בזוגות. יהי $d=\prod_{i=0}^{n} d_i$. אז לכל סדרה $\{r_i:0\le i\le n\wedge r_i<d_i\}$ קיים מספר $c<d$ כך שלכל $0\le i\le n$ מתקיים $r_i=\mathrm{rm}(c,d_i)$.

<u>הוכחה</u>: סדרה $\{r_i:0\le i\le n\}$ תיקרא טובה אם לכל $0\le i\le n$ מתקיים $r_i<d_i$. יש בדיוק d כאלה משום שעבור האיבר ה-i בסדרה יש d_i אפשרויות. לכל מספר c יש סדרה טובה $\{\mathrm{rm}(c,d_i):0\le i\le n\}$.

נראה שלכל $0\le c<c'<d$ $\{\mathrm{rm}(c,d_i):0\le i\le n\}\ne\{\mathrm{rm}(c',d_i):0\le i\le n\}$ ונקבל שכל סדרה טובה מתקבל בצורה הנ"ל מאיזה $c<d$.

ואכן, אם $0\le c<c'<d$ ולכל $0\le i\le n$ מתקיים $\mathrm{rm}(c,d_i)=\mathrm{rm}(c',d_i)$ אז $c-c'$ מתחלק בכל אחד מה-d_i-ים. אבל הם זרי בזוגות ולכן $c-c'$ מתחלק במכפלה שלהם d, בסתירה לכך ש-$c-c'<d$.

לכן יש d סדרות טובות שמתאימות לכל המספרים $c<d$. ולכן בהינתן סדרה $\{r_i:0\le i\le n\wedge r_i<d_i\}$ קיים $c<d$ כדרוש.

☺

<u>משפט</u>: יהיו $r_0,\dots,r_n$ מספרים טבעיים. אזי קיימים מספרים a ו-c כך שלכל $0\le i\le n$ מתקיים $\beta(c,a,i)=r_i$.

<u>הוכחה</u>: יהי s מספר הגדול מ-n מכל r_i. יהי $a=s!$ ולכל $0\le i\le n$ יהי $d_i=a(i+1)+1$. ברור שלכל $0\le i\le n$ $r_i<d_i$. נראה ש-$d_0,\dots,d_n$ זרים בזוגות.. נניח בשלילה ש-p ראשוני מחלק הן את d_i והם את d_j. אזי הוא מחלק גם את d_j-d_i, כלומר הוא מחלק את $a(j-i)$. אבל p ראשוני ולכן הוא מחלק את $j-i$ או הוא מחלק את a. אבל p לא מחלק את a כי הוא מחלק את $d_i=a(i+1)+1$ והוא גם לא מחלק את $j-i$ כי $j-i$ מחלק את $s!=a$ וראינו ש-p לא מחלק את a. לכן קיבלנו סתירה ו-$d_0,\dots,d_n$ זרים בזוגות.

לפי משפט השאריות הסיני קיים מספר c כך לכל $0 \le i \le n$ $\beta(c,a,i) = r_i$.

☺

<u>למה</u>: היחסים $<$ ו-$\le$ והפונקציות rm ו-β הם אריתמטיים.

<u>הוכחה</u>: הטענה ברורה מהזהויות הבאות:

$$x \le y \leftrightarrow \exists z(x+z=y)$$
$$x < y \leftrightarrow x+1 \le y$$
$$\mathrm{rm}(x,y) = z \leftrightarrow (y=0 \wedge z=x) \vee (z<y \wedge \exists u(x=yu+z))$$
$$\beta(x,y,z) = \mathrm{rm}(x, y\cdot(z+1)+1)$$

☺

<u>טענה</u>: כל פונקציה פ"ר היא אריתמטית.

<u>הוכחה</u>: נראה באינדוקציה על בניית הפונקציה.

ראשית, נוכיח עבור הפונקציות הרקורסיביות היסודיות.

1. פונקציית האפס $Z(x_1,\dots,x_n)=0$ מוגדרת ע"י הנוסחה $x_{n+1} \approx \vec{0}$
2. פונקציית העוקב $S(x)=x+1$ מוגדרת ע"י הנוסחה $x_2 \approx \bar{s}x_1$
3. פונקציית ההטלה $I_{n,i}(x_1,\dots,x_n)=x_i$ מוגדרת ע"י הנוסחה $x_{n+1} \approx x_i$

כעת נראה עבור סכמות המעבר:

1. סכמת ההרכבה: תהי G פונקציה רקורסיבית ב-k משתנים הגדירה ע"י $\varphi(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$ ותהיינה $H_1,\dots,H_k$ פונקציות רקורסיביות ב-n משתנים הגדירות ע"י $\varphi_1(x_1,\dots,x_n.x_{n+1}),\dots,\varphi_k(x_1,\dots,x_n.x_{n+1})$. אזי הגרף של הפונקציה המורכבת $G(H_1(\vec{x}),\dots,H_k(\vec{x}))$ מוגדר ע"י $\varphi(\varphi_1(\vec{x}),\dots,\varphi_n(\vec{x}),x_{n+1})$.
2. רקורסיה פרימיטיבית: נניח ש-$G(\vec{x})$ פ"ר ו-$H(\vec{x},y,z)$ פ"ר ו-$F(\vec{x},y)$ מוגדרת ברקורסיה פרימיטיבית ע"י:
$$F(\vec{x},0)=G(\vec{x})$$
$$F(\vec{x},y+1)=H(\vec{x},y,F(\vec{x},y))$$
אזי נשתמש בפונקציית גדל כדי להצפין את הסדרה שבעזרתה מחשבים את $F(\vec{x},n)$.
מתקיים $F(\vec{x},n)=y$ אמ"מ קיימת סדרה של מספרים $r_0,\dots,r_n$ כך ש-$r_0=G(\vec{x})$ ולכל $0 \le i < n$ $r_{i+1}=H(\vec{x},i,r_i)$. את הסדרה הנ"ל ניתן להצפין באמצעות פונקציית גדל. לכן $F(\vec{x},n)=y$ אמ"מ מתקיימת הנוסחה הבאה:
$$\exists c \exists a \forall i\left[(i=0 \to \beta(a,c,i) \approx G(\vec{x})) \wedge (0 \le i \wedge i < n \to \beta(a,c,i+1) \approx H(\vec{x},i,\beta(a,c,i)))\right]$$
מאחר שהנחנו ש-G ו-H אריתמטיות והוכחנו סגירות להרכבה נקבל ש-F אריתמטית.

☺

<u>מסקנה</u>: כל יחס נל"ר הוא אריתמטי שהרי יחס נל"ר הוא מהצורה $\exists\vec{x}P(\vec{x})$ כאשר P פ"ר.

<u>מסקנה</u>: כל פונקציה רקורסיבית היא אריתמטית שהרי ראינו שאם פונקציה רקורסיבית אז הגרף שלה נל"ר ולכן הוא אריתמטי.

<u>מסקנות</u>:

א. כל יחס פ"ר ב-$\mathbb{N}$ הוא אריתמטי
ב. כל יחס נל"ר ב-$\mathbb{N}$ הוא אריתמטי

<u>טענה</u>: מחלקת היחסים האריתמטיים היא המחלקה המינימאלית שמכילה את כל היחסי הרקורסיביים וסגורה תחת כל הפעולות הלוגיות (גם קשרים וגם כמתים).

<u>הגדרה</u>: נניח שהקשרים היחידים בשפה הם $\rightarrow$ ו-$\neg$ ושאר הקשרים הם רק קיצורים של ביטויים מורכבים יותר. כמו כן, נניח שהכמת הכולל $\forall$ הוא הכמת היחיד בשפה והכמת הישי $\exists$ הוא קיצור לסימון ארוך יותר. לכל שם עצם בשפה t נגדיר את **מספר גדל** שלו $\#t$ באופן הבא:

א. $\#\vec{0}=1$
ב. לכל משתנה x_i $\#x_i=3^i$
ג. יהיו r,t שמות עצם עם מספרי גדל $\#r,\#t$ בהתאמה.
- $\#\overline{s}(r)=2\cdot 3^{\#r}$
- $\#(r\oplus t)=4\cdot 3^{\#r}\cdot 5^{\#t}$
- $\#(r\circ t)=8\cdot 3^{\#r}\cdot 5^{\#t}$

לכל נוסחה φ בשפה נתאים מספר גדל $\#\varphi$ באופן הבא:

1. עבור נוסחאות אטומיות: בהינתן שמות עצם r,t $\#(r=t)=16\cdot 3^{\#r}\cdot 5^{\#t}$
2. תהיינה φ,ψ נוסחאות בשפה.
   - $\#(\neg\varphi)=32\cdot 3^{\#\varphi}$
   - $\#(\varphi\rightarrow\psi)=62\cdot 3^{\#\varphi}\cdot 5^{\#\psi}$
   - $\#(\forall x_i\varphi)=2^{6+i}\cdot 3^{\#\varphi}$

עבור סדרה סופית של נוסחאות נצפין אותה ע"י $\#\langle\varphi_0,\ldots,\varphi_n\rangle=\prod_{i=0}^{n}p_{i+3}^{\#\varphi_i}$.

טענה: הקבוצות הבאות הן רקורסיביות:

1. קבוצת מספרי גדל של שמות עצם
2. קבוצת מספרי גדל של נוסחאות
3. קבוצת מספרי גדל של פסוקים
4. קבוצת מספרי גדל של סדרות סופיות של פסוקים

טענה:

תהי Γ קבוצה כריעה של פסוקים בשפה. אזי הקבוצות הבאות כריעות:

1. קבוצת מספרי גדל של סדרות הוכחה מתוך Γ
2. היחס $\mathrm{pr}(x,y)$ האומר ש- y מספר גדל של פסוק ו- x מספר גדל של הוכחה של $y\in\Gamma$

הגדרה: פונקציית האלכסון המשתנה אחד d מוגדרת באופן הבא:

$$d(k)=\begin{cases}\#\varphi\left(\overline{\#\varphi}\right) & k=\#\varphi\\ k & else\end{cases}$$

ברור ש- d רקורסיבית משום ש- $\#\varphi\left(\overline{\#\varphi}\right)$ רקורסיבית ו- d היא הגדרה לפי מקרים.

משפט טרסקי: קבוצת מספרי גדל של Ω אינה אריתמטית. כלומר, אם $T(k)$ פירושו $k=\#\varphi$ עבור $\varphi\in\Omega$ אזי T אינו אריתמטי.

הוכחה: פונקציית האלכסון היא רקורסיבית ולכן אריתמטית. נניח כעת בשלילה ש- T אריתמטי. אזי $\neg T$ אריתמטי ולכן $\lambda x\left(\neg T\left(d\left(x\right)\right)\right)$ אריתמטית. תהי ψ נוסחה בשפה שמגדירה את $\lambda x\left(\neg T\left(d\left(x\right)\right)\right)$ ב- $\mathscr{N}$. כלומר, לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $\psi(\overline{x})\in\Omega$ אמ"מ $\neg T\left(d\left(x\right)\right)$. נסתכל על $x=\#\psi$. אזי $\psi\left(\overline{\#\psi}\right)\in\Omega$ אמ"מ $\neg T\left(d\left(\#\psi\right)\right)=\neg T\left(\#\psi\left(\overline{\#\psi}\right)\right)$. אבל לפי הגדרת T פירוש הדבר ש- $\psi\left(\overline{\#\psi}\right)\notin\Omega$ בסתירה.

☺

מסקנה: קבוצת מספרי גדל של Ω אינה כריעה, כלומר קבוצת הפסוקים האמיתיים ב- $\mathscr{N}$ אינה כריעה.

משפט אי השלמות של גדל: תהי $\Gamma\subsetneq\Omega$ קבוצה כריעה של אקסיומות. אזי $Th(\Gamma)$ אינה שלמה.

כלומר, קיים פסוק ב- Ω שאינו ניתן להוכחה מ- Γ (ז"א קיים פסוק אמיתי ב- $\mathscr{N}$ שאינו ניתן להוכחה).

<u>הוכחה א</u>: כל פסוק יכיח במבנה הוא אמיתי וקבוצת מספרי גדל של הפסוקים היחיכים מקבוצת אקסיומות היא כמובן נל"ר. נניח בשלילה שכל פסוק אמיתי הוא יכיח. אזי קבוצת הפסוקים האמיתיים היא קבוצת הפסוקים היחידים מהאקסיומות ולכן קבוצת מספרי גדל של הפסוקים האמיתיים במבנה היא נל"ר ולכן אריתמטית, בסתירה למשפט טרסקי.

☺

<u>הוכחה ב</u>: תהי $\Sigma = Th_1(\Gamma)$. נגדיר את התכונה $T_\Sigma(k)$ האומרת ש- $k = \#\varphi$ עבור $\varphi \in \Sigma$, כלומר φ יכיח מ- Γ. תכונה זו היא נל"ר ולכן אריתמטית. תהי ψ נוסחה בשפה שמגדירה את $\lambda x(\neg T_\Sigma(d(x)))$ ב- $\mathscr{N}$. לכל $x \in \mathbb{N}$ מתקיים $\psi(\overline{x}) \in \Omega$ אמ"מ $\neg T_\Sigma(d(x))$. נסתכל על $x = \#\psi$. אז $\psi(\overline{\#\psi}) \in \Omega$ אמ"מ $\neg T_\Sigma(d(\#\psi)) = \neg T_\Sigma(\#\psi(\overline{\#\psi}))$, אבל לפי הגדרת T_Σ זה נכון אמ"מ $\psi(\overline{\#\psi})$ אינו יכיח מ- Γ ואילו $\psi(\overline{\#\psi}) \in \Omega$ פירושו שהפסוק נכון. לא ייתכן שהפסוק שקרי משום שאז היינו מקבלים שהוא יכיח בסתירה. לכן הפסוק אמיתי ולכן אינו יכיח. כלומר, מצאנו פסוק אמתי במבנה שאינו נמצא ב- Σ ולכן Σ אינה שלמה.

☺

<u>הגדרה</u>: תורה Σ נקראת **אקסיומטית** אם קיימת קבוצה כריעה של אקסיומות Γ כך ש- $\Sigma = Th_1(\Gamma)$.

<u>טענה</u>: תורה אקסיומטית היא נל"ר.

<u>הוכחה</u>: תהי $\Sigma = Th_1(\Gamma)$ תורה אקסיומטית. לפי משפט השלמות של גדל Σ היא קבוצת הפסוקים היחיכים מ- Γ. לכן k הוא מספר גדל של פסוק ב- Σ אמ"מ קיים l שהוא מספר גדל של הוכחה של הפסוק המוצפן ע"י k. אבל התכונה ש- l מצפין הוכחה של k מ- Γ היא רקורסיבית. לכן קבוצת מספרי גדל של פסוקי Σ היא נל"ר.

☺

<u>הגדרה</u>: בהינתן שפה $\mathcal{L}$ נסמן ב- Φ_n את קבוצת הנוסחאות בשפה עם n משתנים חופשיים. למל, Φ_0 היא קבוצת הפסוקים בשפה.

<u>הגדרה</u>: תהי Σ תורה בשפת תורת המספרים ויהי P יחס n-מקומי על $\mathbb{N}$. נוסחה $\varphi \in \Phi_n$ **מייצגת חלש** את P ב- Σ אם מתקיים התנאי הבא: לכל $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ $\varphi(\overline{\vec{x}}) \in \Sigma$ אמ"מ $P(\vec{x})$. במקרה זה נאמר ש- P **מיוצג חלש** ע"י φ ו- P **ניתן לייצוג חלש** ב- Σ.

φ **מייצגת חזק** את P אם מתקיים התנאי שלכל $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ אם $P(\vec{x})$ אז $\varphi(\overline{\vec{x}}) \in \Sigma$ ואם $\neg P(\vec{x})$ אז $\neg\varphi(\overline{\vec{x}}) \in \Sigma$. במקרה זה נאמר ש- P **מיוצג חזק** ע"י φ ו- P ניתן לייצוג חזק ב- Σ.

טענה:

1. אם P ניתן לייצוג חלש ב- Σ אז הוא ניתן לייצוג חזק בכל תורה המכילה את Σ.
2. אם Σ עקבית ו- φ מייצגת חזק את P אז φ מייצגת חלש את P.
3. אם Σ שלמה ו- φ מייצגת חלש את P אז φ מייצגת חזק את P.
4. בתורה עקבית ושלמה ייצוג חזק וייצוג חלש הם שקולים.
5. בתורה Ω יחס P ניתן לייצוג אמ"מ הוא אריתמטי.

הוכחה:

1. נניח $\Sigma \subset \Gamma$ ונניח P מיוצג חזר ע"י φ ב- Σ. אזי לכל $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ אם $P(\vec{x})$ אז $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma \subset \Gamma$ ואם $\neg P(\vec{x})$ אז $\neg\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma \subset \Gamma$.
2. נניח Σ עקבית ו- P מיוצג חלש ע"י φ. אזי לכל $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ אם $P(\vec{x})$ אז $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$ ואם $\neg P(\vec{x})$ אז $\neg\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$. מהעקביות של Σ נובע שאם $\neg P(\vec{x})$ אז לא יכול להיות ש- $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$. ולכן $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$ אמ"מ $P(\vec{x})$.
3. נניח Σ שלמה ו- P מיוצג חזק ע"י φ. אזי לכל $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ $P(\vec{x})$ אמ"מ $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$. כלומר אם $P(\vec{x})$ אז $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$. כעת, אם $\neg P(\vec{x})$ אז לא נכון ש- $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$ אבל מהשלמות נובע ש- $\neg\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$.
4. זאת מסקנה ישירה משני הסעיפים הקודמים.
5. Ω היא שלמה ועקבית ולכן אם יחס P ניתן לייצוג אז הוא ניתן לייצוג חלש. כלומר, קיימת נוסחה φ כך שלכל $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ $P(\vec{x})$ אמ"מ $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Omega$, כלומר $P(\vec{x})$ אמ"מ $\mathscr{N} \models \varphi\left[\overline{\vec{x}}\right]$ וזה בדיוק אומר ש- P אריתמטי. מצד שני, אם הוא אריתמטי אז קיימת נוסחה φ כך שלכל $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ $P(\vec{x})$ אמ"מ $\mathscr{N} \models \varphi\left[\overline{\vec{x}}\right]$, כלומר $P(\vec{x})$ אמ"מ $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Omega$ וזה אומר ש- P ניתן לייצוג.

☺

משפט: תהי Σ תורה אקסיומטית בשפת תורת המספרים. כל יחס n-מקומי הניתן לייצוג חלש ב- Σ הוא נל"ר.

הוכחה: נניח ש- P ניתן לייצוג חלש ע"י $\varphi \in \Phi_n$. נסתכל על הפונקציה $f\left(\vec{x}\right) = \#\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right)$. הפונקציה היא בוודאי רקורסיבית ומתקיים $P(\vec{x}) = T_\Sigma\left(f\left(\vec{x}\right)\right)$ שהרי אם $P(\vec{x})$ אז $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$ ולכן $T_\Sigma\left(\#\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right)\right) = T_\Sigma\left(f\left(\vec{x}\right)\right)$. מצד שני, אם $T_\Sigma\left(f\left(\vec{x}\right)\right)$ אז $T_\Sigma\left(\#\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right)\right)$ כלומר $\varphi\left(\overline{\vec{x}}\right) \in \Sigma$ ולכן $P(\vec{x})$.

אבל P הוא נל"ר משום ש- f רקורסיבית ו- T_Σ נל"ר.

☺

משפט: כל יחס n-מקומי הניתן לייצוג חזק בתורה אקסיומטית ועקבית בשפת תורת המספרים הוא רקורסיבי.

<u>הוכחה</u>: אם P ניתן לייצוג חזק ע"י φ אז $\neg P$ ניתן לייצוג חזק ע"י $\neg\varphi$. התורה עקבית ולכן שנח היחסים ניתנים ייצוג חלש. משפט הקודם P ו-$\neg P$ הם נל"ר ולכן P כריע.

☺

<u>הגדרה</u>: **תורה אקסימטית-סופית** היא תורה הנובעת מקבוצה סופית שלאקסיומות. בפרט, זו תורה אקסיומטית.

<u>משפט</u>: קיימת תורה אקסיומטית-סופית החלקית ל-Ω שכל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק בה.

<u>הוכחה</u>: נגדיר $\Pi = Th_1(\Gamma)$ כאשר Γ היא קבוצת האקסיומות הבאות:

1. $\forall x_1 \left(\bar{s}(x_1) \not\approx \bar{0}\right)$
2. $\forall x_1 \forall x_2 \left(\bar{s}(x_1) \approx \bar{s}(x_2) \rightarrow x_1 \approx x_2\right)$
3. $\forall x_1 \left(x_1 \oplus \bar{0} \approx x_1\right)$
4. $\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 \oplus \bar{s}(x_2) \approx \bar{s}(x_1 \oplus x_2)\right)$
5. $\forall x_1 \left(x_1 \circ \bar{0} \approx \vec{0}\right)$
6. $\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 \circ \bar{s}(x_2) \approx (x_1 \circ x_2) \oplus x_1\right)$
7. $\forall x_1 \left(x_1 \leq \bar{0} \rightarrow x_1 \approx \bar{0}\right)$
8. $\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 \leq \bar{s}(x_2) \rightarrow x_1 \leq x_2 \vee x_1 \approx \bar{s}(x_2)\right)$
9. $\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 \leq x_2 \vee x_2 \leq x_1\right)$

כאשר הסימון $x \leq y$ הוא קיצור ל-$\exists z (x \oplus z = y)$.

נראה שכל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק ב-Π.

<u>משפט</u>: אם Δ תורה אקסיומטית עקבית המכילה את Π אז כל יחס ניתן לייצוג חזק ב-Δ אמ"מ הוא רקורסיבי.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) אם P יחס ניתן לייצוג חזק ב-Δ לפי משפט קודם הוא רקורסיבי.

($\Rightarrow$) אם P רקורסיבי הוא ניתן לייצוג חזק ב-Π ובגלל ש-Δ מכילה את Π הוא ניתן לייצוג חזק גם ב-Δ.

☺

<u>משפט</u>: אם Σ תורה שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חלש, אז T_Σ אינה רקורסיבית.

הוכחה: נניח בשלילה ש- T_Σ רקורסיבית. אזי התכונה $\lambda x\left(\neg T_\Sigma\left(d\left(x\right)\right)\right)$ גם היא רקורסיבית ולכן ניתנת לייצוג חלש ב- Σ ע"י נוסחה כלשהי $\varphi\in\Phi_1$, כלומר לכל $x\in\mathbb{N}$ מתקיים $\neg T_\Sigma\left(d\left(x\right)\right)$ אמ"מ $\varphi\left(\overline{x}\right)\in\Sigma$. בפרט זה נכון עבור $x=\#\varphi$. אז $\varphi\left(\overline{\#\varphi}\right)\in\Sigma$ אמ"מ $\neg T_\Sigma\left(\#\varphi\left(\overline{\#\varphi}\right)\right)$ ולי ההגדרה זה נכון אמ"מ $\varphi\left(\overline{\#\varphi}\right)\notin\Sigma$ בסתירה.

☺

מסקנה: אם Σ תורה עקבית שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק, אז T_Σ אינה רקורסיבית.

הוכחה: בגלל שהתורה עקבית, אם יחס ניתן לייצוג חזק אז הוא ניתן לייצוג חלש ולכן זה נובע מיידית מהמשפט הקודם.

☺

מסקנה: אם Σ תורה עקבית המכילה את Π אז T_Σ אינה רקורסיבית.

הוכחה: ראינו שבכל תורה עקבית המכילה את Π כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק.

☺

משפט: אם Σ תורה כך ש- $\Sigma\cup\Pi$ עקבית, אז T_Σ אינה רקורסיבית.

הוכחה: נסמן $\Delta=\left\{\varphi\in\Phi_0:\Sigma\cup\Pi\vDash\varphi\right\}$. זאת קבוצת הפסוקים שנובעים מ- $\Sigma\cup\Pi$. Π מתקבלת ע"י מספר סופי של אקסיומות. אזי יהי π הגימום של כל האקסיומות הללו. אז מתקיים $\Delta=\left\{\varphi\in\Phi_0:\Sigma,\pi\vDash\varphi\right\}$. אבל $\Sigma,\pi\vDash\varphi$ אמ"מ $\Sigma\vDash\pi\to\varphi$. לכן $\varphi\in\Delta$ אמ"מ $\pi\to\varphi\in\Sigma$. לכן $T_\Delta\left(x\right)=T_\Sigma\left(64\cdot3^{\#\pi}\cdot5^x\right)$ ומכאן שאם T_Σ רקורסיבית אז גם T_Δ רקורסיבית. אבל Δ היא תורה עקבית שמכילה את Π ולכן T_Δ אינה רקורסיבית. לכן T_Σ אינה רקורסיבית.

☺

מסקנה: כל תורה חלקית ל- Ω אינה רקורסיבית.

הוכחה: תהי $\Sigma\subset\Omega$. אזי $\Sigma\cup\Pi\subset\Omega$ עקבית. לכן T_Σ אינה רקורסיבית ולכן Σ אינה רקורסיבית.

☺

משפט צ'רץ': קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפת תורת המספרים אינה רקורסיבית.

הוכחה: קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפת תורת המספרים היא קבוצה חלקית ל- Ω ולכן אינה רקורסיבית.

☺

דוגמה: נסתכל על המבנה $\mathscr{A}=\langle \mathbb{N},+,\cdot \rangle$. לכאורה הוא דל יותר מ- $\mathscr{N}$ אך למעשה הם שקולים משום שכל הפריטים החסרים מ- $\mathscr{N}$ גדירים ב- $\mathscr{A}$:

- 0 גדיר ע"י הנוסחה $x+x\approx x$
- 1 גדיר ע"י הנוסחה $\forall x\left(x\cdot y\approx x\right)$
- s גדיר ע"י $s\left(x\right)=x+1$

אז $\mathscr{A}$ שקול ל- $\mathscr{N}$ ולכן גם קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית ב- $\mathscr{A}$ אינה כריעה.

משפט: בכל שפה המכילה שני קבועי פעולה דו-מקומית קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית אינה כריעה.

הוכחה: נניח בשלילה שקבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית ב- $\mathscr{L}$ A היא כריעה. נסתכל על שני קבועי מעולה דו-מקומית g_1,g_2. קבוצת פסוקי השפה שלא מופיעים פעם קבועי פעולה פרט ל- g_1,g_2 היא כמובן כריעה ולכן החיתוך של A עם קבוצה זו הוא כריעה. אבל חיתוך זה הוא בדיוק קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפת המבנה $\langle \mathbb{N},+,\cdot \rangle$ וזו סתירה למה שראינו קודם.

☺

דוגמה: תסכל במבנה $\mathscr{B}=\langle \mathbb{N},E \rangle$ כאשר E היא פונקציית החזקה מורחבת כך ש- $0E0=0$. נסמן $x^y=xEy$. במבנה $\mathscr{B}$ מוגדרות גם פעולת החיבור וגם פעולת הכפל:

- $z=x\cdot y\Leftrightarrow \forall w\left(w^z\approx \left(w^x\right)^y\right)$
- $z=x+y\Leftrightarrow \forall w\left(w^z=w^x\cdot w^y\right)$

לכן $\mathscr{B}$ שקול ל- $\mathscr{A}$ מהדוגמה הקודמת וקבוצת הפסוקים הנכונים לוגית ב- $\mathscr{B}$ אינה כריעה.

משפט צ'רץ' המתוגבר: קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפה המכילה קבוע פעולה דו-מקומית אחד אינה כריעה.

הוכחה: בדומה למשפט הקודם אז בשימוש במבנה $\langle \mathbb{N},E \rangle$ במקום $\langle \mathbb{N},+,\cdot \rangle$.

☺

משפט נקודת השבת של גדל: תהי Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים אשר פונקציית האלכסון ניתנת לייצוג חזק בה. אז לכל $\varphi\in\Phi_1$ קיים פסוק ψ כך שהפסוק $\psi\leftrightarrow\neg\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$ נמצא ב- Σ.

הוכחה: תהי $\varphi\in\Phi_1$ נוסחה. נניח ש-$\delta(x,y)$ נוסחה עם שני משתנים חופשיים שמייצגת חזק את פונקציית האלכסון d ב-Σ. נסתכל על הנוסחה במשתנה אחד $\chi(x)=\neg\forall y\left(\delta(x,y)\to\varphi(y)\right)$. נגדיר פסוק $\psi=\chi\left(\overline{\#\chi}\right)$, כלומר $\psi=\neg\forall y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\to\varphi(y)\right)$. נראה ש-$\neg\psi\leftrightarrow\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$ ב-Σ. מספיק להראות ש-$\Sigma\cup\{\psi\}\models\neg\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$ וש-$\Sigma\cup(\neg\psi)\models\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$.

1. $\Sigma\cup\{\psi\}\models\neg\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$: ברור ש-$\Sigma\cup\{\psi\}\models\exists y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\wedge\left(\neg\varphi(y)\right)\right)$, שהרי הפסוק מימין שקול ל-ψ. נסמן $\alpha=\exists y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\wedge\left(\neg\varphi(y)\right)\right)$.

   δ מייצגת ב-Σ את פונקציית האלכסון d. לכן $\Sigma\models\forall y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\leftrightarrow y=d\left(\overline{\#\chi}\right)\right)$. נסמן $\beta=\forall y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\leftrightarrow y=d\left(\overline{\#\chi}\right)\right)$.

   מ-α נובע שקיים y כך ש-$\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)$ וגם $\neg\varphi(y)$. ומ-β נובע ש-$y=d\left(\overline{\#\chi}\right)$. לכן $\alpha,\beta\models\neg\varphi\left(d\left(\overline{\#\chi}\right)\right)$, כלומר $\alpha,\beta\models\neg\varphi\left(\#\chi\left(\overline{\#\chi}\right)\right)$ או $\alpha,\beta\models\neg\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$ ולכן $\Sigma\cup\{\psi\}\models\neg\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$.

2. $\Sigma\cup(\neg\psi)\models\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$: מספיק להראות ש-$\Sigma\cup\left\{\forall y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\to\varphi(y)\right)\right\}\models\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$. ואכן, δ מייצגת ב-Σ את פונקציית האלכסון ולכן $\Sigma\models\delta\left(\overline{\#\chi},\overline{\#\chi\left(\overline{\#\chi}\right)}\right)$. לכן $\Sigma\cup\left\{\forall y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\to\varphi(y)\right)\right\}\models\delta\left(\overline{\#\chi},\overline{\#\chi\left(\overline{\#\chi}\right)}\right)\to\varphi\left(\overline{\#\chi\left(\overline{\#\chi}\right)}\right)$. לפי ההגדרה של ψ נקבל ש-$\Sigma\cup\left\{\forall y\left(\delta\left(\overline{\#\chi},y\right)\to\varphi(y)\right)\right\}\models\delta\left(\overline{\#\chi},\overline{\#\chi\left(\overline{\#\chi}\right)}\right)\to\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$. לכן $\Sigma\cup(\neg\psi)\models\delta\left(\overline{\#\chi},\overline{\#\chi\left(\overline{\#\chi}\right)}\right)\to\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$. בגלל ש-$\Sigma\models\delta\left(\overline{\#\chi},\overline{\#\chi\left(\overline{\#\chi}\right)}\right)$ נקבל ש-$\Sigma\cup(\neg\psi)\models\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$.

☺

משפט טרסקי המוכלל: תהי Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים שבה פונקציית האלכסון d ניתנת לייצוג חזק. אזי קבוצת מספרי גדל של הפסוקים ב-Σ אינה ניתנת לייצוג חזק ב-Σ.

הוכחה: תהי A קבוצת מספרי גדל של הפסוקים ב-Σ. נניח בשלילה שהנוסחה φ מייצגת חזק את A. לפי משפט נקודת השבת של גדל קיים פסוק ψ כך ש-$\neg\psi\leftrightarrow\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$ נמצא ב-Σ. מתקיים אחד מהשניים: $\psi\in\Sigma$ או $\psi\notin\Sigma$.

אם $\psi\in\Sigma$ אז $\neg\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$ ב-Σ ובגלל ש-Σ עקבית $\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)$ אינו ב-Σ בסתירה להנחה ש-φ מייצגת חזק את A.

אם $\varphi\notin\Sigma$ אז $\#\psi$ אינו מספר גדל של פסוק ב-Σ ולכן אינו ב-A. אבל φ מייצגת חזק את A ולכן $\neg\varphi\left(\overline{\#\psi}\right)\in\Sigma$ ומכאן ש-$\psi\in\Sigma$ בסתירה.

בכל מקרה קיבלנו סתירה ולכן A אינה ניתנת לייצוג חזק ב-Σ.

☺

<u>משפט אי השלמות המוכלל של גדל</u>: תהי Σ תורה אקסיומטית עקבית בשפת תורת המספרים המכילה את Π. אז Σ אינה שלמה, כלומר קיים פסוק σ בשפה שהוא ושלילתו אינם ב- Σ.

<u>הוכחה</u>: תהי T_Σ קבוצת מספרי גדל של הפסוקים ב- Σ. ידוע ש- T_Σ נל"ר. תהי $A=\{n:\forall\varphi\in\Phi_0\left(\#\varphi\neq n\right)\}$, כלומר קבוצת המספרים שאינם מספרי גדל של פסוקים. תהי $B=\{n:T_\Sigma\left(32\cdot 3^n\right)\}\cap A^c$, כלומר קבוצת המספרי גדל של פסוקים ששלילותיהם נמצאות ב- Σ. אם Σ שלמה, אז $T_\Sigma^c=A\cup B$. A היא כמובן רקורסיבית ולכן גם A^c רקורסיביות ובפרט הן נל"ר. T_Σ נל"ר ולכן $\{n:T_\Sigma\left(32\cdot 3^n\right)\}$ נל"ר. מכאן ש- B נל"ר ולכן גם $T_\Sigma^c=A\cup B$ נל"ר. קיבלנו ש- T_Σ ומשלימתה נל"ר ולכן T_Σ רקורסיבית. אבל תורה אקסיומטית ועקבית שמכילה את Π היא לא רקורסיבית. לכן Σ אינה שלמה.

☺

<u>משפט האי שלמות השני של גדל</u> (ללא הוכחה): אם Σ תורה אקסיומטית עקבית בשפת תורת המספרים המכילה את Π אז $\mathrm{con}(\Sigma)\notin\Sigma$ כאשר $\mathrm{con}(\Sigma)=\neg T_\Sigma\left(\#\left(\bar{0}\not\approx\bar{0}\right)\right)$.

תורת המודלים

<u>הגדרה</u>: תהי A קבוצה. תת קבוצה לא ריקה $F\subset 2^A$ תיקרא **פילטר** (**מסנן**) אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\varnothing\notin F$
2. F סגורה לחיתוך: אם $A,B\in F$ אז $A\cap B\in F$
3. F סגורה להרחבות: אם $B\in F$ ו- $B\subset C$ אז $C\in F$

ברור מההגדרה שלא יכולות להיות במסנן קבוצות זרות, שכן אם $A\cap B=\varnothing$ היינו מקבלים ש- $\varnothing\in F$. כמו כן, $A\in F$ משום שלכל $B\in F$ $B\subset A$. באינדוקציה קל להראות ש- F סגורה לחיתוכים סופיים.

<u>דוגמאות</u>:

1. לכל קבוצה A הקבוצה $\{A\}$ היא מסנן.
2. תהי $\varnothing\neq B\subset A$. אז קבוצת כל ההרחבות שלה $F=\{C:B\subset C\subset A\}$ היא מסנן על A. ברור ש- $\varnothing\notin F$ משום ש- $B\not\subset\varnothing$. אם $D,E\in F$ אז $C\subset D$ וגם $C\subset E$ לכן בוודאי $C\subset D\cap E$ ו- $D\cap E\in F$ ובוודאי F סגורה להרחבות לפי ההגדרה.
נשים לב שהפילטר הזה סגור גם לחיתוכים אינסופיים שהרי אם $B_\alpha\in F$ לכל $\alpha\in I$ אז לפי ההגדרה $C\subset\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha$ ולכן $\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\in F$.
3. תהי A קבוצה אינסופית. אזי קבוצת כל תתי הקבוצות בעלות משלים סופי היא פילטר. ברור ש- $\varnothing$ אינה בעלת משלים סופי שהרי המשלים הוא A. כעת, אם B,C בעלות משלים סופי אז $(B\cap C)^c=B^c\cup C^c$ וזאת קבוצה סופית ומכאן ש- $B\cap C$ בעלת משלים סופי. ובוודאי שאם B בעלת משלים סופי ו- $B\subset C\subset A$ אז C בעלת משלים סופי.
4. תהי a נקודה במרחב טופולוגי X. קבוצת כל הסביבות של a היא פילטר על X.

<u>הגדרה</u>: בהינתן A ו- $\varnothing\neq B\subset A$ הפילטר $\{C:B\subset C\subset A\}$ נקרא **פילטר ראשי**.

<u>דוגמה</u>: קיימים גם פילטרים לא ראשיים. תהי A קבוצה אינסופית כלשהי. קבוצת תתי הקבוצות של A בעלות משלים סופי F אינה פילטר ראשי. תהי $(a_n)\subset A$ סדרה אינסופית של איברים שונים. נסתכל על הקבוצות $A_n=A\setminus\{a_n\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. ברור ש- $A_n\in F$ משום שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $A_n^c=\{a_n\}$. ומצד שני, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\notin F$ משום שהמשלים שלה אינו סופי ומכיל את כל (a_n).

עוד דוגמה לפילטר לא ראשי היא קבוצת כל הסביבות של נקודה ב- $\mathbb{R}$, שהרי לא קיימת סביבה שמוכלת בכל הסביבות.

<u>הגדרה</u>: פילטר F נקרא **אולטרה-פילטר** אם הוא מקסימלי, כלומר אין פילטר F' כך ש- $F \subsetneq F'$.

<u>טענה</u>: יהיו A קבוצה ו- F פילטר עליה. אזי F אולטרה-פילטר אמ"מ לכל $B \subset A$ או $B \in F$ או $B^c \in F$.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$ נניח ש- F אולטרה-פילטר. תהי $B \subset A$. אם גם $B \notin F$ וגם $B^c \in F$ בה"כ $B \neq \varnothing$. נסתכל על הקבוצה $F' = F \cup \{C : B \subset C \subset A\} \cup \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i : n \in \mathbb{N} \wedge \forall 1 \le i \le n (C_i \in F \vee B \subset C_i \subset A) \right\}$, כלומר זוהי הרחבה של F לפילטר שמכיל את B. אבל F מקסימלי ו- $F \subsetneq F'$ בסתירה.

$(\Rightarrow)$ נניח ש- $F \subsetneq F'$. אזי קיימת $B \in F' \setminus F$. אבל לפי ההנחה לכל $B \subset A$ או $B \in F$ או $B^c \in F$. לכן $B^c \in F$ ולכן $B^c \in F'$ בסתירה.

☺

<u>טענה</u>: פילטר F על A הוא ראשי אמ"מ קיים $a \in A$ כך ש- $F = \{B : a \in B \subset A\}$.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$ ברור מההגדרה של פילטר ראשי.

☺

<u>טענה</u>: אם A קבוצה סופית ולא ריקה אז כל פילטר על A הוא פילטר ראשי.

<u>הוכחה</u>: יהי F פילטר על A. נסתכל על $B = \bigcap_{C \in F} C$. זהו חיתוך סופי ולכן $B \in F$. מצד שני, לפי הגדרת B נובע ש- $B \subset C$ לכל $C \in F$. F סגור להרחבות ולכן לכל $C \subset A$ כך ש- $B \subset C$ מתקיים $C \in F$. לכן $F = \{C : B \subset C \subset A\}$.

☺

<u>טענה</u>: תהי A קבוצה אינסופית. אולטרה-פילטר F על A הוא לא ראשי אמ"מ הוא מכיל כל קבוצה שמשלימתה סופית.

<u>הוכחה</u>:

$(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$

מסקנה: אם F הוא הפילטר על A שאיבריו הם הקבוצות בעלות משלימים סופיים אז כל אולטרה-פילטר שמכיל את F הוא לא ראשי.

טענה: תהי A קבוצה אינסופית. תהי I משפחת התת קבוצות הסופיות של A. לכל $\alpha \in I$ נסמן $X_\alpha = \{\beta \in I : \alpha \subset \beta\}$. תהי $F = \{B \subset I : \exists \alpha \in I (X_\alpha \subset B)\}$. הקבוצה F היא פילטר על I.

משפט: יהי F פילטר על קבוצה לא ריקה A. יש אולטרה-פילטר U על A כך ש- $F \subset U$.

הוכחה: תהי D קבוצת כל הפילטרים על A שמכילים את F. $\subset$ הוא סדר חלקי על D. כמובן, D אינה ריקה כי $F \in$ D.

תהי C שרשרת[2] ב-D. קל לראות שאיחוד איברי C הוא פילטר שמכיל את F והוא חסם מלעיל ל-C. אז לכל שרשרת ב-D יש חסם מלעיל ב-D ולכן לפי הלמה של צורן[3] יש ב-D איבר מקסימלי U. U הוא פילטר שמכיל את F ואינו מוכל באף פילטר אחר (כי אחרת הוא לא היה מקסימלי). לכן U הוא אולטרה-פילטר שמכיל את F.

☺

הגדרה: תהי $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ סדרת מבנים לשפה $\mathcal{L}$ כאשר I קבוצת אינדקסים כלשהי ו- M_i הוא העולם של $\mathcal{M}_i$. יהי U אולטרה-פילטר על I.

$\prod_{i\in I}\mathcal{M}_i$ היא קבוצת הפונקציות מהצורה $f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ כך שלכל $i \in I$ מתקיים $f(i) \in M_i$. קבוצה זו אינה ריקה בגלל אקסיומת הבחירה. נגדיר יחס $\sim$ על $\prod_{i\in I} M_i$ באופן הבא: $f \sim g$ אמ"מ $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$. ברור שזהו יחס שקילות:

- רפלקסיביות: $\{i \in I : f(i) = f(i)\} = I \in U$ ולכן $f \sim f$.
- סימטריות: $\{i \in I : f(i) = g(i)\} = \{i \in I : g(i) = f(i)\}$ ולכן אם $f \sim g$ אז $g \sim f$.
- טרנזיטיביות: אם $f \sim g$ ו- $g \sim f$ אז $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$ וגם $\{i \in I : g(i) = h(i)\} \in U$. בגלל סגירות לחיתוך נקבל ש- $A \cap B \in U$. אבל $A \cap B \subset \{i \in I : f(i) = h(i)\}$ ומהסגירות להרחבות $\{i \in I : f(i) = h(i)\} \in U$ ולכן $f \sim h$.

$M = \prod_{i\in I} M_i \big/ U$ היא קבוצת מחלקות השקילות לפי היחס $\sim$ על $\prod_{i\in I} M_i$.

---

[2] תת קבוצה סדורה לינארית

[3] תהי A קבוצה סדורה חלקית שלכל שרשרת בה יש חסם מלעיל ב- A. אזי יש ב- A איבר מקסימלי.

האולטרה-מכפלה $\mathcal{M}=\prod_{i\in I}\mathcal{M}_i\big/U$ היא מבנה ל-$\mathcal{L}$ שהעולם שלו הוא $M=\prod_{i\in I}M_i\big/U$. הסימנים הלא לוגיים מתפרשים באופן הבא:

- לכל קבוע אישי $\bar{a}$ ב-$\mathcal{L}$ $\mathcal{M}(\bar{a})$ הוא מחלקת השקילות $g\big/U$ של הפונקציה $g\in\prod_{i\in I}M_i$ כך שלכל $i\in I$ $g(i)=\mathcal{M}_i(\bar{a})$.
- לכל סימן יחס n-מקומי $\bar{R}$ ב-$\mathcal{L}$ $\mathcal{M}(\bar{R})$ הוא היחס ה-n-מקומי R על M המוגדר כך: $\left(f_1\big/U,\dots,f_n\big/U\right)\in R$ אמ"מ $\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\in U$.
- יהי $\bar{F}$ קבוע פעולה n-מקומית ב-$\mathcal{L}$. אז $\mathcal{M}(\bar{F})$ הוא פעולה n-מקומית על M המוגדרת ע"י $F\left(f_1\big/U,\dots,f_n\big/U\right)=h\big/U$ כאשר לכל $i\in I$ $h(i)=\mathcal{M}_i\left(\bar{F}\right)\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)$

<u>טענה</u>: המבנה של אולטרה-מכפלה $\mathcal{M}=\prod_{i\in I}\mathcal{M}_i\big/U$ מוגדר היטב.

<u>הוכחה</u>: צריך להראות שההגדרות של $\mathcal{M}(\bar{a})$ ושל $\mathcal{M}(\bar{F})$ אינן תלויות בבחירת הנציגים.

- נניח ש-$f_j\sim g_j$ עבור $1\le j\le n$ ונראה ש-$\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\in U$ אמ"מ $\left\{i\in I:\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\in U$. נניח ש-$\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\in U$. בגלל ש-$f_j\sim g_j$ לכל $1\le j\le n$ נובע ש-$\left\{i\in I:f_j(i)=g_j(i)\right\}\in U$ לכל $1\le j\le n$. מתקיים $\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)=\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\right\}=\bigcap_{j=1}^{n}\left\{i\in I:f_i(i)=g_j(i)\right\}\in U$. בוודאי
$$\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)=\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\subset\left\{i\in I:\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}$$
ולכן מהסגירות להרחבה נקבל ש-$\left\{i\in I:\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\in U$. באותו אופן אם $\left\{i\in I:\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\in U$ אז $\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\in U$.
- נניח ש-$f_j\sim g_j$ עבור $1\le j\le n$ ונראה ש-$h_f\big/U=h_g\big/U$ כאשר לכל $i\in I$ $h_f(i)=\mathcal{M}_i\left(\bar{F}\right)\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)$ ו-$h_g(i)=\mathcal{M}_i\left(\bar{F}\right)\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)$. נניח ש-$s\in h_f\big/U$. אזי $\left\{i\in I:s(i)=h_f(i)\right\}=\left\{i\in I:s(i)=\mathcal{M}_i\left(\bar{F}\right)\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)\right\}\in U$. לפי הסעיף הקודם, מתקיים $\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)=\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\right\}\in U$ ובוודאי
$$\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)=\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\right\}\cap\left\{i\in I:\left(f_1(i),\dots,f_n(i)\right)\in\mathcal{M}_i\left(\bar{R}\right)\right\}\subset$$
$$\subset\left\{i\in I:s(i)=\mathcal{M}_i\left(\bar{F}\right)\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\right\}$$
אבל $\left\{i\in I:s(i)=\mathcal{M}_i\left(\bar{F}\right)\left(g_1(i),\dots,g_n(i)\right)\right\}=\left\{i\in I:s(i)=h_g(i)\right\}$, כלומר $s\in h_g\big/U$. באופן סימטרי אם $s\in h_g\big/U$ אז $s\in h_f\big/U$ ולכן $h_f\big/U=h_g\big/U$.

☺

הגדרה: בסימונים של ההגדרה הקודמת, אם כל המבנים בסדרה הם אותו מבנה $\mathcal{A}$ האולטרה-מכפלה נקראת אולטרה-חזקה ומסמנים $\mathcal{M} = \mathcal{A}^I/U$.

משפט Łoš: תהי $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ סדרת מבנים לשפה $\mathcal{L}$. לכל מבנה $\mathcal{M}_i$ יהי M_i העולם שלו. יהי U אולטרה-פילטר על I. נסתכל באולטרה-מכפלה $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i / U$. אזי:

א. יהי $t = t(x_1,...,x_n)$ שם עצם ב- $\mathcal{L}$ עבור $0 \le n$ ותהיינה $f_1,..., f_n \in \prod_{i\in I} M_i$. אז לכל השמה ל- $\mathcal{M}$ שנותנת ל- $x_1,...,x_n$ את הערכים $f_1/U,..., f_n/U$ בהתאמה, הערך של שם העצם t ב- $\mathcal{M}$ הוא $\mathcal{M}(t)$ f/U כאשר לכל $i \in I$ מתקיים $f(i) = v_{\mathcal{M}_i}^{[x_1,...,x_n | f_1(i),..., f_n(i)]}(t)$.

ב. תהי $\varphi = \varphi(x_1,...,x_n)$ נוסחה ב- $\mathcal{L}$ עבור $0 \le n$. תהיינה $f_1,..., f_n \in \prod_{i\in I} M_i$. אזי $\mathcal{M} \vDash \varphi[f_1/U,..., f_n/U]$ אמ"מ $\{i \in I : \mathcal{M}_i \vDash \varphi[f_1(i),..., f_n(i)]\} \in U$.

הוכחה:

א. באינדוקציה על בניית שם העצם.

- אם $t = \bar{a}$ קבוע אישי אז לפי ההגדרה $\mathcal{M}(\bar{a})$ הוא מחלקת השקילות f/U של הפונקציה $f \in \prod_{i\in I} M_i$ כך שלכל $i \in I$ $f(i) = \mathcal{M}_i(\bar{a}) = v_{\mathcal{M}_i}(\bar{a})$.
- אם $t = x_k$ משתנה אז לכל השמה שנותנת ל- x_k את הערך f_k/U זה בדיוק הערך של t ב- $\mathcal{M}$. מצד שני $v_{\mathcal{M}_i}^{[x_1,...,x_n | f_1(i),..., f_n(i)]}(x_k) = v_{\mathcal{M}_i}^{[x_k | f_k(i)]}(x_k) = f_k(i)$ ולכן הפונקציה f שמקיימת $f(i) = f_k(i)$ לכל $i \in I$ היא שקולה ל- f_k ולכן $f/U = f_k/U$.
- כעת יהי $\bar{F}$ סימן פעולה m-מקומית ויהיו $t_1,...,t_m$ שמות עצם שעבורם המשפט נכון. נסתכל על $t = \bar{F}(t_1,...,t_m)$ ונניח שהמשתנים בו לקוחים מ- $x_1,...,x_n$. הערך של t בהשמה שנותנת לכל x_k את הערך f_k/U הוא $\mathcal{M}(\bar{F})\left(v_{\mathcal{M}}^{[x_1,...,x_n | f_1/U,..., f_n/U]}(t_1),..., v_{\mathcal{M}}^{[x_1,...,x_n | f_1/U,..., f_n/U]}(t_m)\right)$. לפי הנחת האינדוקציה ערך זה הוא $\mathcal{M}(\bar{F})\left(f^1/U,..., f^m/U\right)$ כאשר לכל $i \in I$ ולכל $1 \le j \le m$ מתקיים $f^j(i) = v_{\mathcal{M}_j}^{[x_1,...,x_n | f_1(i),..., f_n(i)]}(t_j)$. $\mathcal{M}(\bar{F})$ היא F כאשר $F\left(f^1/U,..., f^n/U\right) = f/U$ ולכל $i \in I$

ב. נוכיח באינדוקציה על הבנייה של φ.

- עבור נוסחה אטומית $\varphi = \bar{R}(t_1,...,t_m)$

מסקנה: בסימונים של משפט Łoš כל פסוק φ בשפה $\mathscr{L}$ אמיתי ב- $\mathscr{M}$ אמ"מ קבוצת האינדקסים $i \in I$ שלגביהם φ אמיתי במנה $\mathscr{M}_i$ נמצאת ב- U.

מסקנה: יהי $\mathscr{A}$ מבנה לשפה $\mathscr{L}$. תהי I קבוצת אינדקסים ויהי U אולטרה-פילטר על I. כל פסוק מסדר ראשון φ ב- $\mathscr{L}$ הוא אמיתי באולטרה-חזקה $\mathscr{M} = \mathscr{A}^I / U$ אמ"מ הוא אמיתי ב- $\mathscr{A}$. ואם U אולטרה פילטר ראשי אז $\mathscr{M}$ איזומורפי ל- $\mathscr{A}$.

מסקנה: אם $\mathscr{A}$ סופי אז $\mathscr{A}^I / U$ גם הוא סופי ומספר איבריו שווה לזה של $\mathscr{A}$ והם איזומורפיים.

הוכחה: בגלל ש- $\mathscr{A}$ סופי יש פסוק מסדר ראשון שאומר כמה איברים יש ב- $\mathscr{A}$. לפי המסקנה הקודמת הפסוק הזה נכון גם ב- $\mathscr{A}^I / U$. כעת, אם $\mathscr{A}$ סופי אז קבוצת הפסוקים האמיתיים בו היא קטגורית. לכן כל שני מודלים שלה איזומורפיים ומכאן ש- $\mathscr{A}$ איזומורפי ל- $\mathscr{A}^I / U$.

☺

תת מבנים אלמנטאריים

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- $\mathcal{A}$ **שקול אלמנטארית** ל- $\mathcal{B}$ אם לכל פסוק φ מתקיים $\mathcal{A}\vDash\varphi$ אמ"מ $\mathcal{B}\vDash\varphi$.

$\mathcal{B}$ **תת מבנה אלמנטארי** של $\mathcal{A}$ אם לכל נוסחה $\varphi(x_1,...,x_n)$ ולכל $b_1,...,b_n\in B$ מתקיים $\mathcal{A}\vDash\varphi[b_1,...,b_n]$ אמ"מ $\mathcal{B}\vDash\varphi[b_1,...,b_n]$. במקרה זה מסמנים $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$.

ברור שאם $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$ אז הם שקולים אלמנטארית, שהרי ברגע שמדובר בפסוקים אין בכלל תלות בהשמה.

<u>דוגמה</u>: אם $\mathcal{A}$ שקול אלמנטארית ל- $\mathcal{B}$ ו- $\mathcal{B}$ תת מבנה של $\mathcal{A}$ זה לא בהכרח אומר ש- $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$. למשל, נסתכל על $N=\{0,1,2,3,...\}$ ו- $M=\{1,2,3,...\}$. ונסתכל על המבנים $\langle N,<\rangle,\langle M,<\rangle$. ברור ש- $\langle M,<\rangle$ הוא תת מבנה של $\langle N,<\rangle$ והוא אפילו איזומורפי לו ע"י הפונקציה $f:x\mapsto x+1$ (שהרי זו פונקציה חח"ע ושומרת סדר). לכן הם שקולים אלמנטארית. אבל $\langle N,<\rangle\nprec\langle M,<\rangle$. נסתכל על הנוסחה $\varphi(x)=\neg\exists y(y<x)$. הנוסחה הזאת אומרת ש- x הוא המספר הראשון בעולם. אבל $\langle M,<\rangle\vDash\varphi[1]$ ואילו $\langle N,<\rangle\nvDash\varphi[1]$!

<u>טענה</u>: יהי $\mathcal{A}$ מבנה ונסתכל באולטרה-חזקה שלו $\mathcal{M}={\mathcal{A}^I}/{U}$. נבחן את האיברים ${f}/{U}$ כך שקיים $a\in A$ כך שלכל $i\in I$ $f(i)=a$ (כלומר אלה מחלקות השקילות של הסדרות הקבועות). אזי:

א. קבוצה זו היא עולמו של תת מבנה $\mathcal{M}_0<\mathcal{M}$.
ב. $\mathcal{M}_0$ איזומורפי ל- $\mathcal{A}$.
ג. $\mathcal{M}_0$ הוא תת מבנה אלמנטארי של $\mathcal{M}$.

<u>הוכחה</u>:

א. יהי $\bar{a}$ קבוע אישי ב- $\mathcal{A}$. אזי $\mathcal{M}(\bar{a})={f}/{U}$ כאשר לכל $i\in I$ $f(i)=\mathcal{A}(\bar{a})$. לכן $\mathcal{M}(\bar{a})$ נמצא בעולמו של $\mathcal{M}_0$.

נוכיח שאם ${f_1}/{U},...,{f_n}/{U}$ ב- M_0 ו- $\bar{F}$ קבוע פעולה n-מקומית אז $\mathcal{M}(\bar{F})\left({f_1}/{U},...,{f_n}/{U}\right)\in M_0$. בגלל ש- $f_1,...,f_n$ שקולות לפונקציות קבועות ניתן להניח ש- $f_j=(a_j,a_j,...)$ לכל $1\le j\le n$. ברור ש- $\mathcal{M}(\bar{F})\left({f_1}/{U},...,{f_n}/{U}\right)={f}/{U}$ כאשר לכל $i\in I$ $f(i)=\mathcal{A}(\bar{F})(a_1,...,a_n)$ וזו פונקציה קבועה. לכן $\mathcal{M}(\bar{F})\left({f_1}/{U},...,{f_n}/{U}\right)\in M_0$ ו- $\mathcal{M}_0$ הוא תת מבנה.

ב. נסתכל בפונקציה $h:A\to M_0$ המוגדרת ע"י $h(a)={(a,a,\dots)}/{U}$. קל לראות שהיא חח"ע ועל ושומרת על קבועי השפה. מכאן ש- $\mathscr{M}_0$ איזומורפי ל- $\mathscr{A}$.

ג. צריך להראות ש- $\mathscr{M}_0$ תת מבנה אלמנטארי של $\mathscr{M}$. נשתמש בקריטריון טרסקי-ווט. צריך להראות שלכל נוסחה $\varphi(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$ ולכל $a_1,\dots,a_n\in M_0$ אם $\mathscr{M}\vDash\psi[a_1,\dots,a_n]$ אז קיים $b\in M_0$ כך ש- $\mathscr{M}\vDash\varphi[a_1,\dots,a_n,b]$ כאשר $\psi(x_1,\dots,x_n)=\exists x_{n+1}\varphi(x_1,\dots,x_n)$.
אבל זה בוודאי נכון כי אם $\mathscr{M}\vDash\psi[a_1,\dots,a_n]$ אז