① 27.02.07

שגיאה

מהדפסה

בסמסטר ב'!

בוקר טוב!

המרצה: שמואל ברגר

המוטיבציה לחלק הראשון של הקורס היא משפט האי-שלמות של גדל.
נסתכל במבנה של המספרים הטבעיים $\langle \mathbb{N}, 0, 1, S, +, \cdot, < \rangle$ ואנחנו
שואלים את עצמנו מה הפסוקים האמיתיים ומה הפסוקים השקריים
במבנה הזה. יש אקסיומות מסדר ראשון מקובלות למבנה הזה. אבל מסתבר
שהן לא מספיקות כדי להוכיח את כל הפסוקים האמיתיים במבנה. כלומר יש
פסוק אמיתי שלא ניתן להוכחה. באופן טבעי נרצה להוסיף את הפסוק
הזה לאחת האקסיומות. אבל, עדיין יהיה פסוק אמיתי שלא ניתן להוכחה
מעזרת מע' האקסיומות המורחבת הזאת. נוסיף אותו ונמשיך ככה הלאה.
בקיצור, בכל מע' אקסיומות נוכל למצוא פסוק אמיתי שלא נוכל להוכיח.

במבוא שאנו נוסח את האקסיומות של המספרים הטבעיים והייתה שם אקסיומת
האינדוקציה - כל קבוצה שמכילה את 0 וסגורה לפעולת העוקב מכילה
את כל המספרים הטבעיים. האקסיומה הזאת קצת בעייתית כי היא מסדר
שני. אז מחליפים אותה באינסוף אקסיומות מסדר ראשון. לכל נוסחה בנפרד
מכניסים אקסיומת האינדוקציה ספציפית עבורה - אם הנוסחה נכונה עבור 0
ואם נכונות עבור n גוררת נכונות עבור $n+1$ אז היא נכונה לכל המספרים
הטבעיים. אז לכל נוסחה מכניסים את האקסיומה הזאת. אבל זה לא
תחליף מלא לאקסיומת האינדוקציה מסדר שני כי בדרך הזאת אנחנו
מקבלים $\aleph_0$ אקסיומות, כלומר עבור $\aleph_0$ קבוצות אבל זה לא כולל את
כל האפשרויות.

בתורה אקסיומטית קבוצת האקסיומות צריכה להיות כריעה - כלומר יש דרך
לבדוק אם פסוק הוא אכן אקסיומה או לא. אם נחזור רגע למספרים הטבעיים.
נניח שנתפוס שכל הפסוקים האמיתיים הם אקסיומות. אבל המע' הזאת אינה
כריעה!

*כלומר שבמע' אקסיומות כריעה אפשר למצוא פסוק שנכון במבנה אבל לא ניתן להוכחה.

אנחנו מדברים על איזו קבוצה של עצמים ואנחנו מסתכלים באיזו תת קבוצה ושואלים אם היא כריעה, כלומר האם יש אלגוריתם שבודק השתייכות לאותה קבוצה. למשל אם מסתכלים בקבוצת הפסוקים בשפת המבנה של המספרים הממשיים. אז קבוצת הפסוקים חסרי הכמתים היא כמובן כריעה - בוחנים את הפסוק משמאל לימין. אם מוצאים כמת את הפסוק אינו בקבוצה. אם הגענו לסוף ולא מצאנו כמת אז הפסוק בקבוצה. קבוצת הפסוקים שנכונים בכל מודל אינה כריעה (משפט צ'רץ').

אנחנו נדבר רק על קבוצות בנות מניה. אם תת הקבוצה היא סופית אז ברור שהיא כריעה. אז מה שמעניין אותנו הוא כמובן קבוצות אינסופיות.
מאחר שהקבוצה בת מניה יש התאמה חח"ע ועל לטבעיים ולכן אנחנו יכולים לשכוח אותם.

הערה: אנחנו מדברים על אלגוריתם ולא אכפת לנו מה היעילות שלו. למשל, נניח שאנחנו רוצים לבדוק אם פסוק הוא טאוטולוגיה בעזרת טבלאות אמת. אם הפסוק מורכב מ-10 פסוקים יסודיים (שזה לא הרבה כ"כ) אז בטבלת האמת יש 1024 שורות. לכו תבדקו את זה! בכל אופן, מה שמעניין אותנו הוא שקיים אלגוריתם שנותן הכרעה אחרי מספר סופי (וגדול ככל שיהיה) של צעדים.

"אחד מחברי טען שזה לא טוב להאמין באמונות טפלות כי זה מביא מזל רע"

אנחנו מסתכלים בקבוצת המספרים הטבעיים N ונדבר על פונקציות חלקיות מ-N^n ל-N. פונקציה שלמה זו פונקציה שמוגדרת על כל ה-n-יות של מספרים שלמים. פונקציה חלקית יכולה להיות מוגדרת רק על חלק מה-n-יות. אז אנחנו מסתכלים על פונקציות מתת-קבוצה של N^n ל-N. n הוא מספר המשתנים שמקבלת הפונקציה. אם $n=0$ אז זה פשוט מספר טבעי קבוע.

דוגמה לפונקציה חלקית בשני משתנים: $f(x,y) = x-y$. זאת פונקציה חלקית כי היא לא יכולה להיות מוגדרת לכל הטבעיים. למשל $f(1,2)$ אינה מוגדרת. כדי שיהיה יותר נוח נהפוך את הפונקציות החלקיות לפונקציות שלמות ע"י ההרחבות הבאות: נגדיר ל-N עצם חדש שנקרא לו ∞ (למה ∞? ככה! והנה גם קראנו לו כמו)

ואז במקום הפונקציה $f: A \to \mathbb{N}$ $A \subseteq \mathbb{N}^n$ נסתכל בפונקציה

$\bar{f}: (\mathbb{N}\cup\{\infty\})^n \longrightarrow \mathbb{N}\cup\{\infty\}$

שמוגדרת באופן הבא:

- אם $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ ו- $f(x_1, \dots, x_n)$ לא מוגדרת אז $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \infty$
- אם לפחות אחד מ- $x_1, \dots, x_n$ הוא ∞ אז גם $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \infty$
- ביתר המקרים ($x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ ו- $f(x_1, \dots, x_n)$ מוגדרת) אז $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

כלומר, כי פשוט הרחבה של f לכל ה-n-יות.

אנחנו לא נסתכל בכל הפונקציות, אלא נסתכל רק בפונקציות מ- $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^n$ ל- $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ אשר נותנות לכל n-יה שבה לא כל רכיביה טבעיים את הערך ∞.

תחום של פונקציה הוא $\mathrm{dom} f = \{\underline{x} \in \mathbb{N}^n : f(\underline{x}) \neq \infty\}$. כלומר כל ה-n-יות שעבורן הפונקציה מוגדרת.

פונקציה f נקראת שלמה אם $\mathrm{dom} f = \mathbb{N}^n$.

פונקציה ב-0 משתנים היא מספר קבוע או הפונקציה הריקה.

עכשיו נדבר על יחסים. אל יחס n מקומי R על $\mathbb{N}$ נתייחס כאל פונקציה שלמה $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ רק ש- $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & R(x_1, \dots, x_n) \\ 1 & \neg R(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$. אז בעצם $f = 1 - \chi_R$ (χ_R - הפונקציה המציינת של R). למה אנחנו מגדירים ככה ולא כמו הבן אדם הסביר? - כי בהמשך זה יהיה לנו נוח.

נשתמש בסימון λ של צ'רץ'. נסתכל בפונקציה $\sin x$. אפשר להתייחס אליה בשני אופנים - 1) פונקציית הסינוס (כלומר מתייחסים רק לפונקציה עצמה) 2) הסינוס של x.

כשבאים להתייחס לפונקציה עצמה נרשום $\lambda x \sin x$ והכוונה היא שנתעלם מ-x. למה זה טוב? הרי יכולנו פשוט לרשום "פונקציית הסינוס". אבל מה לגבי $\sin(x+1)$? אין לה שם. אז רושמים $\lambda x \sin(x+1)$. בצורה דומה רושמים עבור שני משתנים. למשל פונקציית החזקה היא $\lambda xy\, x^y$.

פונקציה נותנת לחישוב היא: פונקציה שקיים אלגוריתם שמחשב אותה. מה זה אלגוריתם? אלגוריתם זה סדרה סופית של סימנים (יש מספר סופי של סימנים - אותיות, מספרים, סימני פיסוק וכו'). אז יש $\aleph_0$ אלגוריתמים. כל אלגוריתם

אחשב לכל היותר פונקציה אחת. לכן יש לכל היותר $\aleph_0$ פונקציות חשיבות. אבל אנחנו יודעים שיש $\aleph$ פונקציות מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$. לכן יש פונקציות שאינן חשיבות!

<u>נגדיר את קבוצת הפונקציות הרקורסיביות</u>

<u>פונקציות רקורסיביות יסודיות:</u>

1) פונקצית האפס בכל מספר של משתנים כלומר 0. נסמן $Z(\underline{x}) = 0$

2) פונקצית העוקב במשתנה אחד $S(x) = x+1$

3) אוסף פונקציות הטלה על אחד הרכיבים, כלומר אם $n \geq 1$; $1 \leq i \leq n$
In_i היא פונק' ב-n משתנים שהיא הטלה של הרכיב ה-i $In_i(\underline{x}) = x_i$.

אלה הן הפונקציות הרקורסיביות היסודיות ורק שלוש!

<u>סכמות מעבר:</u>

א) הרכבה. אם G פונקציה ב-k משתנים $(k \geq 0)$; $H_1, \dots, H_k$ פונקציות ב-n משתנים $(n \geq 0)$ סכמת ההרכבה מעבירה אותנו לפונקציה $W(\underline{x})$ ב-n משתנים -

$$W(\underline{x}) = G(H_1(\underline{x}), \dots, H_k(\underline{x}))$$

אם $n=0$ או $k=0$ אז $W(\underline{x})$ זה קבוע או הפונקציה הריקה.

ב) רקורסיה פרימיטיבית. אם G פונקציה ב-n משתנים $(n \geq 0)$; H פונקציה ב-$n+2$ משתנים אז הסכמה מעבירה אותנו לפונקציה ב-$n+1$ משתנים $F(\underline{x}, y)$ המוגדרת כך:

$$F(\underline{x}, 0) = G(x)$$
$$F(\underline{x}, y+1) = H(\underline{x}, y, F(\underline{x}, y))$$

(ומשם בדורה הלאה אפשר להגדיר את פונקציית העצרת)

ג) מינימיזציה (מזער). אם G פונקציה ב-$n+1$ משתנים $(n \geq 0)$. הסכמה מעבירה אותנו לפונקציה ב-n משתנים $\mu y\, G(\underline{x}, y)$. לכל $\underline{x}$ $\mu y\, G(\underline{x}, y)$ הוא ה-a היחיד כך ש-$G(\underline{x}, a) = 0$ ולכל $y < a$ $\infty \neq G(\underline{x}, y) > 0$. אם לא קיים a כזה נאמר ש-$\mu y\, G(\underline{x}, y) = \infty$. (היא צריכה להיות מוגדרת בכל המבואות עד המבוא הראשון שמתאפס).

<u>קבוצת הפונקציות הרקורסיביות</u> היא המחלקה המינימלית שמכילה את הפונקציות הרקורסיביות היסודיות והיא סגורה לשימוש סכמות מעבר. <u>פונקציה רקורסיבית</u> היא פונקציה השייכת למחלקה זו.

ברור שהפונקציות הרקורסיביות נתנות לחישוב. יוצאים מהפונקציות הרקורסיביות היסודיות שהן נתנות לחישוב ואז מפעילים מספר סופי של סכמות.

(3) נשאלת השאלה האם הפונקציות הרקורסיביות הן כל הפונקציות הניתנות לחישוב. פונקציה ניתנת לחישוב זה לא מושג מתמטי. פונקציה רקורסיבית זה מושג מתמטי. אז אין שום דרך להוכיח בצורה מתמטית שיש חפיפה בין המושגים. כל הפונקציות שניתן לתכנת בכל שפות התכנות שאנחנו מכירים הן בדיוק הפונקציות הרקורסיביות. כל הפונקציות שאפשר לחשב באמצעות מכונת טיורינג הן בדיוק הפונקציות הרקורסיביות. בכל אופן, יש המון עדויות שתומכות בהשערה שהפונקציות הרקורסיביות הן בדיוק הפונקציות הניתנות לחישוב, אבל זאת לא הוכחה. זה נקרא התזה של צ'רץ'.

(פ"ר) <u>פונקציה פרימיטיבית-רקורסיבית</u> היא פונקציה המתקבלת בלי שימוש במזעור. כל הפונקציות הללו הן כמובן שלמות. שהרי הפונקציות הרקורסיביות הבסיסיות הן שלמות והרי הרכבה ורקורסיה פרימיטיבית לא יכולות לייצר פונקציה לא שלמה.

דוגמאות

(א) כל פונקציה קבועה היא פ"ר. הפונקציה הבאה היא $f(\underline{x})=n$. נוכיח באינדוקציה על n. אם $n=0$ זו הפונקציה Z, שהיא פרימיטיבית לפי ההגדרה. נניח נכונות ל-n - הפונקציה $F_n(\underline{x})=n$ פרימיטיבית. אזי $F_{n+1}(\underline{x})=S(F_n(\underline{x}))$ כלומר קיבלנו אותה באמצעות הרכבה. לכן היא פרימיטיבית-רקורסיבית. ☺

(ב) פונקציית הזהות $f(x)=x$ היא פ"ר. פשוט $f(x)=I_{1,1}(x)$. ☺

פורים שמח!

ספרים מומלצים: ⇒ Bell-Machover

Shoenfield

Enderton

בוקר טוב

הגדרנו פונקציות רקורסיביות. הפונקציות הרקורסיביות היסודיות:

- אינסוף פונקציות האפס בכל מספר של משתנים
- פונקציית העוקב במשתנה אחד
- אינסוף פונקציות ההטלה בכל מספר של משתנים ועל כל אחד מהרכיבים.

פונקציות רקורסיביות הן הפונקציות שמתקבלות מהפונקציות הרקורסיביות היסודיות ע"י שימוש במספר סופי של פעולות מעבר שהן הרכבה, רקורסיה פרימיטיבית ומינימיזציה.

פונקציות שמתקבלות רק באמצעות הרכבה ורקורסיה פרימיטיבית נקראות פונקציות פרימיטיב-רקורסיביות.

למשל, פונקציית החיסור היא רקורסיבית אבל אינה פרימיטיב רקורסיבית שכן היא אינה מוגדרת תמיד.

פונקציה רקורסיבית היא חשיבה - פשוט עוברים על תהליך ההגדרה שלה עד הפונקציות הרקורסיביות היסודיות.

ראינו שהפונקציה הקבועה $f(x) = n$ היא פ"ר. הוכחנו זאת באינדוקציה על n. בפרט יש עוד המון דוגמאות לפונקציות רקורסיביות ופ"ר.

חיסור מקוצץ: רשמנו $x \dot{-} y = \max\{x-y, 0\}$ אבל בהגדרה הפורמלית לא משתמשים בפונק' המקס'. זה פשוט מה שיוצא מההגדרה הרקורסיבית.

ועכשיו באמצעות החיסור המקוצץ אפשר להגדיר את פונק' המקסימום.
פשוט $\max\{x,y\} = (x \dot{-} y) + y$

באופן דומה מגדירים את המינימום.

יחס רקורסיבי R הוא יחס שעבורו הפונקציה ה-χ_R היא רקורסיבית.
מה זה χ_A הפונקציה האופיינית? אם $A \subseteq X$ אז הפונקציה האופיינית של A מוגדרת ע"י $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

מחלקת היחסים הרקורסיביים סגורה לכמתים חסומים. אם $P(x,y)$ פונקציה רקורסיבית אז: $Q(x,y)=\exists z<y\, P(x,z)$ פונקציה רקורסיבית.
אם מסתכלים על $\exists z\, P(x,z)$ זה לא כמת חסום. זה נותן בתרגיל אז זה לא נכון אבל נותן רמז דק כפול: זה קשור למחלות ממושכות.
ורמון מספיק להוכיח רק לכמתים ובעזרתו אפשר להגדיר את הכמת הכולל.

חילוק עם שארית - יש פונקציה שנותנת את המנה ויש פונקציה שנותנת את השארית. שתיהן פר' ורצוי שנוכל להגדיר דיוק להרחיב את ההגדרה גם לחילוק ב - 0: $q(a,0)=rm(a,0)=a$.

משפטים מתורת המספרים אפשר להצפין סדרה של טבעיים ע"י מספר טבעי אחד. אם יש סדרה $\langle n_0 \dots n_k \rangle$ נצפין אותה באמצעות $p_0^{n_0}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$.
אבל ההצפנה הזאת היא לא חח"ע כי יכול להיות $n_i=0$.
הפענוח $(z)_x=\min y<z(rm(z,p_x^{y+1})>0)$
נותן את התוצאה עבור הסדרה המינימלית ש-z מצפין.

מספר של שנפילד הפונקציות הרקורסיביות מוגדרות בצורה קצת שונה אבל דומה מאוד. הפונקציות הרקורסיביות הבסיסיות הן $I_{n,i}, +, \cdot, <$
והסכמות הן הרכבה ומזעור.
ברור שכל פונק' רקורסיבית לפי שנפילד היא רקורסיבית גם לפי ההגדרה שלנו. כרגע אין לנו הכלים הדרושים אבל אנחנו נראה בעתיד שגם את הרקורסיה הפרימיטיבית ניתן לקבל ברגע שיש לנו חיבור וכפל ואז גם כל הפונק' הרקורסיביות לפי ההגדרה שלנו הן רקורסיביות לפי שנפילד.

מכונת האוגרים URIM

Unlimited Register Ideal Machine

זו מכונה דמיונית שיש בה סדרה אינסופית של אוגרים $\langle R_i \mid i=1,2,\dots \rangle$. האינדקס i נקרא הכתובת של האוגר. תפקידו של האוגר הוא לאחסן מספר טבעי. אם הוא מאחסן את המספר 0 נאמר שהוא ריק.

בנוסף לאוגרים יש מונה פקודות K שמחזיק בתוכו מספרים טבעיים והוא אומר את הפקודה הנוכחית שאנחנו עומדים לבצע. בנוסף K - יש 0 אומרים ש-K ריק.

להריק את האוגר פירושו למחוק את התוכן שלו ולרשום בו 0.

אנחנו נניח שבכל רגע משתמשים במספר סופי של אוגרים וכל השאר ריקים.

<u>סוגי הפקודות</u>

- פקודות Z (Zero): לכל $i>0$ הפקודה Z_i אומרת: להריק את האוגר R_i ולהוסיף 1 ל-K.
- פקודות S (successor): לכל $i>0$ הפקודה S_i אומרת: להוסיף 1 לאוגר R_i ולהוסיף 1 ל-K.
- פקודות J (Jump): נסמן ב-r_i, r_j את המספרים הכתובים באוגרים R_i, R_j בהתאמה. הפקודה $J_{i,j,k}$ אומרת:

* אם $r_i = r_j$ אז תכתוב את k ב-K במקום מה שהיה שם.
* אם $r_i \neq r_j$ אז הוסף 1 ל-K.

תכנית היא סדרה סופית ולא ריקה של פקודות $P = \langle c_0, \dots c_{h-1} \rangle$ אורך התכנית הוא h ולכל $k<h$ c_k היא הפקודה ה-k. מתחילים בפקודה c_0.

יש שני מקרים שבהם לא מבצעים את הפקודה הבאה בתור: אם השתמשנו ב: $J_{i,j,k}$ כאשר $r_i = r_j$ ואז קפצנו למקום אחר; ואם הגענו לפקודה האחרונה ועשינו $k \leftarrow k+1$.

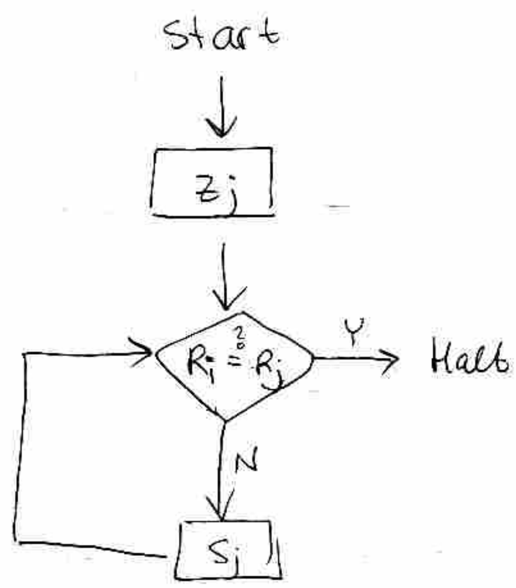
לפי תכנית מסוימת המכונה מבצעת מספר סופי או אינסופי של צעדים. (אינסופי אפילו אם יש לולאה אינסופית): נניח שבצעד מסוים רשום k ב-K. אם $k<h$ אז המכונה תבצע את הפקודה c_k. אם $k \geq h$ המכונה עוצרת.

נתונה תכנית P. באוגרים מופיע מה שמופיע ובהתחלה K ריק. הפקודה שמבצעת היא c_0 ואז הפקודות מתבצעות לפי הסדר אלא אם כן מופיעה $J_{i,j,k}$ כאשר $r_i = r_j$ ואז קופצים ל-c_k. אם $k<h$ או עוצרים אם $k \geq h$.

מניחים בהתחלה שכל האוגרים פרט למספר סופי ריקים. כאשר התכנית פועלת באים לידי ביטוי רק הרגיסטרים שכתובותיהם מופיעות בתכנית.

<u>דוגמה</u>

יהיו i, j מספרים חיוביים. נמצא תכנית $P_{i,j}$ המעתיקה את המספר המאוחסן ב-R_i לאוגר R_j במקום מה שהיה בו.
אם $j=i$ התכנית תהיה $\langle J_{1,1,1} \rangle$. התכנית הזאת בעצם לא עושה כלום.
(היא עוברת לפקודה מס' 1 אבל אין כזאת אז המכונה עוצרת).
ביתר המקרים נעשה קודם תרשים זרימה ואז נהפוך אותו לתכנית.



בתכנית הזאת יש לולאה. מאפסים את R_j ואז מגדילים אותו כל פעם ב-1 עד שמתקבל הערך הדרוש. עכשיו נרשום את התכנית:

$$P_{i,j} = \langle Z_j,\ J_{i,j,4},\ S_j,\ J_{1,1,1} \rangle$$

מוחק את מה שהיה ב-R_j

אם $R_i=R_j$ אזי עבור לפקודה הרביעית $n=4$ $\Rightarrow$ המכונה עוצרת

אחרת, תוסיף 1 לרגיסטר ה-j

תחזור לפקודה 1, כלומר לכאן

<u>הגדרה</u> אם P תכנית באורך h ו- Q תכנית כלשהי, השרשור PQ הוא תכנית שמתקבלת מביצוע הפקודות של P לפי הסדר כמו שהן ולאחר מכן ביצוע הפקודות של Q לפי סדרן אלא שכל פקודה $J_{i,j,k}$ מוחלפת ב- $J_{i,j,k+h}$.

<u>הגדרה</u> לכל תכנית P התכנית $P^{(m)}$ היא התכנית המתקבלת מ- P ע"י הוספת m לכל הכתובות שמופיעות ב- P.

בנוסף יש הגדרה של <u>פונקציה חשיבה</u> (computable)

אנחנו מדברים על מכונות האורם. לכל תכנית של המכונה מתאימות אינסוף פונקציות: P_n - פונקציה ב-n משתנים $X_1 \ldots X_n$. ב-n האוגרים מיועדים הפרמטרים ובסוף המכונה מסיימת לעבוד התוצאה מופיעה באוגר R_1. אם המכונה לא עוצרת אף פעם (נאמר שערך הפונקציה הוא ∞ או שהפונקציה לא מוגדרת. הבעיה היא שאם היא לא מסיימת אף פעם אנחנו לא נוכל לדעת את זה. אם היא מסיימת אז אחרי שנחכה זמן ארוך מספיק נראה שהיא עוצרת. ואם אנחנו מסתכלים עליה והיא לא עוצרת אז אנחנו לא יודעים אם זה בגלל שהיא לא אמורה לעצור או שהיא תעצור בעוד מיליון שנה.

פונקציה שניתן לחשב בעזרת מכונות אורם נקראות פונקציה חשיבה.

<u>משפט:</u> כל פונקציה רקורסיבית היא חשיבה

<u>הוכחה:</u> נראה ראשית שכל הפונקציות הרקורסיביות היסודיות הן חשיבות.

1) פונקציה מהצורה $Z(x)=0$ ניתנת לחישוב ע"י התכנית $<Z_1>$ - פשוט שמים ב-R_1 את התוצאה 0 וזה בכלל לא משנה כמה משתנים יש.

2) הפונקציה $S(x)$ ניתנת לחישוב ע"י התכנית $<S_1>$ - פשוט מגדילים את R_1 ב-1.

3) פונקציות מהצורה $I_{n,i}$ ניתנות לחישוב ע"י התכנית $<Z_1, J_{i,1,4}, S_1, J_{1,1,1}>$.

למעשה צריך להבחין בין שני מקרים:

- $i=1$ אז לכאורה התכנית צריכה להיות "אל תעשה כלום". אבל מאחר שהתכנית חייבת להיות לא ריקה אז נשים פקודה שבעצם לא עושה כלום $<J_{1,1,1}>$ או $<S_2>$ או משהו אחר שלא משפיע על R_1.
- $i>1$ אז מה שהתכנית עושה הוא שהיא לוקחת את מה שיש ב-R_i ושמה אותו ב-R_1. היא מאפסת את R_1 ואז מגדילה אותו ע"י פעולת עוקב עד שמה שיש ב-R_1 שווה למה שיש ב-R_i.

רואים את שני המקרים האלה אפשר לאחד לתכנית אחת $<J_{i,1,5}, Z_1, J_{i,1,5}, S_1, J_{1,1,2}>$

עכשיו נראה שכל פונקציה שמתקבלת מ-3 הסכמות מפונקציות חשיבות גם היא חשיבה. ומכאן נקבל שכל פונקציה רקורסיבית היא חשיבה.

1) סכמת ההרכבה. נניח שכל אחת מבין $H_1,\dots,H_k$ חשיבה (ב-n משתנים) וכן G (ב-k משתנים) ונראה שגם $W(\underline{x})=G(H_1(\underline{x}),\dots,H_k(\underline{x}))$ חשיבה (ב-n משתנים). כמובן יכול להיות שאחד ה-H-ים לא מוגדר עבור $\underline{x}$ כלשהו ואז $W(\underline{x})=\infty$. ויכול להיות שכל ה-H-ים כן מוגדרים אבל G לא מוגדר עליהם, וגם אז $W(\underline{x})=\infty$

תהי R תכנית המחשבת את G ויהיו $Q_1,\dots,Q_k$ תכניות המחשבות את $H_1,\dots,H_k$ בהתאמה.

ל-n האוגרים $R_1\dots R_n$ אנחנו עושים k העתקים כדי שכל ה-Q-ים יוכלו לעבוד איתם. איפה נשים את ההעתקים? במרווחים מספיק גדולים כדי שהעתק ה-i לא ייפגע מפעולת Q_{i-1}. למשל אם Q_1 משתמשת במליון אוגרים נוספים על $R_1,\dots,R_n$ אז נשמור העתק של $R_1,\dots,R_n$ עבור Q_2 החל מ-$R_{n+1000000}$ וכך גם עבור התכניות האחרות. עכשיו נפעיל את התכניות אחת אחרי השנייה אבל בשני שינויים:

- צריך לעדכן את הכתובות בהתאם למיקום של העותקים של הקלט
- כל התוצאות יהיו כתובות באוגרים בהתאם לאן שהעתקנו את העותק של הקלט. אז בסוף צריך להשתמש בתכנית $P_{i,j}$ שמעבירה את הפלט להתחלה.

בסוף התהליך הזה אנחנו מקבלים שברגיסטרים $R_1,\dots,R_k$ נמצאות התוצאות של הפעלת הפונקציות $H_1,\dots,H_k$.

עכשיו אפשר להפעיל את R והתוצאה שהיא $W(\underline{x})$ תופיע ב-R_1. אם אחד ה-H-ים אינו מוגדר אז ניכנס לתכנית אינסופית ולכן לא "נגמר" אף פעם והתוצאה תהיה ∞. כנ"ל אם G אינה מוגדרת.

2) הרקורסיה הפרימיטיבית. נגדיר $U_{n,m}=P_{1,m}P_{2,m+1}\dots P_{n,m+n-1}$ - שרשור של תכניות שמעתיק את n האוגרים הראשונים ומעתיק אותם לאוגרים $R_m,R_{m+1},\dots,R_{m+n-1}$.

נזכיר מה זו הרקורסיה הפרימיטיבית: G פונקציה חשיבה ב-n משתנים, H פונקציה חשיבה ב-n+2 משתנים ויש להראות שגם F ב-n+1 משתנים חשיבה:

$$F(\underline{x},0) = G(\underline{x})$$
$$F(\underline{x},y+1) = H(\underline{x},y,F(\underline{x},y))$$

(7)

נניח ש- P תכנית שמחשבת את G ו- Q תכנית שמחשבת את H.
אזי תכנית שמחשבת את F הינה

$$U_{n,n+3} P^{(n+2)} J_{n+1,n+2,m_0} P_{n+3,2n+4} P_{n+2,2n+3} U_{n,n+3} Q^{(n+2)} S_{n+2} J_{1,1,m_1} P_{n+3,1}$$

כאשר m_0 = המספר הסידורי בתכנית של הפקודה הראשונה בהופעה של התת תכנית $P_{n+3,1}$.

m_1 = האורך של P + האורך של $U_{n,n+3}$ + 1, כלומר זה המספר הסידורי של הפקודה $J_{n+1,n+2,m_0}$.

מה קורה כאן? קודם מעתיקים את n האוגרים הראשונים למקום ה- n+3 והלאה. האוגר n+2 נשאר ריק. לאחר מכן מחשבים את G על התוכן של האוגרים והתוצאה תהיה באוגר R_{n+3}.

אם $R_{n+1}=R_{n+2}$, כלומר $R_{n+1}=0$, כלומר אם $y=0$ אז אנחנו בבסיס וצריך לחשב את הפונקציה G אז מעבירים את R_{n+3} ל- R_1, כלומר רושמים את תוצאת P ב- R_1 וסיימנו את הבסיס.

אם $y \neq 0$ עוברים הלאה, את תוצאת G מעתיקים וגם את R_{n+2} ומפעילים את Q על הקלט שכבר כתוב ל- n האוגרים שמתחילים ב- n+3.
אז מגדילים את R_{n+2} וחוזרים להשוואה. חוזרים על הכל עד ש $R_{n+2}=y$.

3) מזעור. אם P מחשבת את G (ב- n+1 משתנים) אז התוכנית הבאה מחשבת את $\mu y\, G(x,y)$: $U_{n+1,n+2} P^{(n+1)} Z_{n+3} J_{n+2,n+3,m_0} S_{n+1} J_{1,1,1}, P_{n+2,1}$

כאשר m_0 = המספר הסידורי של הפקודה הראשונה בהופעה של $P_{n+1,1}$.
ראשית אנחנו מעתיקים את הקלט פעם נוספת מיד אחרי ההופעה שלו ב- n+1 האוגרים הראשונים. ואז מחשבים את G על התוכן של הקלט.
המצב של האוגרים הוא למעשה כזה: $X_1 \dots X_n\ 0\ X_1 \dots X_n\ 0$.
עכשיו מאפסים את R_{n+3}. אם התוצאה הייתה אז סיימנו. אם התוצאה אינה אפס אז מגדילים את R_{n+1} ב- 1 ועושים את הכל מחדש.

11

אם הכיוון השני נכון. כל פונקציה חשיבה היא רקורסיבית. כאן יש בעיה. כי כל ההגדרות של פונקציות חשיבות הן לא "ידועים" מתמטיים. אז אנחנו מצפינים את כל ההגדרות ומתקבל משהו שאפשר לעבוד איתו.

(8) 20.3.07
לוגיקה

בשיעור הקודם ראינו שכל פונקציה רקורסיבית היא חשיבה.
אם הכיוון השני הוא נכון. אבל פונקציה חשיבה לה לא ייצור מתמטי אז
אנחנו צריכים להצפין את הפקודות ע"י פונקציות מספריות.
לכל פקודה C נתאים צפן מספרי $\#C$ באופן הבא:

Z_i	S_i	$J_{i,j,m}$
2^i	3^i	$5^i 7^j 11^m$

לכל תכנית $P=\langle c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\rangle$ נתאים את הקוד $\#P = \prod_{k<n} p_k^{\#c_k}$
כאשר p_k המספר הראשוני ה-k. הקוד של התכנית הריקה הוא 1.
לצורך הדיון יהיה לנו נוח להתחשב גם בתכנית הריקה (למרות שקודם אמרנו שלא) וזה בסדר) אופן לה לא פוגע כי גם של התכניות וגם התכנית הריקה מייצגות פונקציה רקורסיבית, אז בפרט לה נכון עבור התוכניות הלא ריקות.
נגדיר יחס $Prog(z)$ ($= z$ מצפין תכנית). יחס לה הוא פ"ר:

$lh z =$ האורך של z

$$Prog(z) = (z>0) \wedge \forall x<lh z\, (\exists u<z \exists v<z \exists w<z \; [(z)_x = 2^{u+1} \vee (z)_x = 3^{u+1} \vee (z)_x = 5^{u+1}7^{v+1}11^{w}])$$

יש מספרים שמקודדים תכנית ויש כאלה שלא. למשל 2^{2^3} מקודד את $\langle Z_3\rangle$
ויש מספרים שלא מקודדים תכנית, למשל 0 ו- 13.
נגדיר את הפונקציה $\lambda z(\hat{z})$ ע"י $\hat{z} = \begin{cases} z & \text{if } Prog(z) \\ 1 & \text{if } \neg Prog(z) \end{cases}$
נשים לב שזו פונקציה פ"ר משום שכך הוגדרה לפי מקרים.
ראו כן, $\hat{z}$ תמיד מקודד תכנית, כי אם z לא מקודד תכנית אז $\hat{z}=1$
וזו התכנית הריקה.
לכל מספר טבעי z נסמן ב- $\{z\}$ התכנית אשר $\hat{z}$ מקודד אותה.
אפשר להסתכל על $\{z\}$ כפונקציה ואנחנו נראה שהיא רקורסיבית.
לכל $u>0$ נאמר שבזמן נתון המכונה נמצאת במצב u אם: המספר במונה הפקודות הוא $(u)_0$ ולכל $i>0$ באוגר R_i מופיע $(u)_i$.
ה תכנית היא מה צורה $\{z\}$. נאמר שהמצב u הוא מצב עצירה אם $u>0$
ו $(u)_0 \geq lh(\hat{z})$ ($lh(\hat{z})$ הוא הרי אורך התכנית).
לכל מצב u יש מצב יחיד הנקרא המצב הבא, שיסומן $Nex(u,z)$.
אם u מצב עצירה אז $Nex(u,z)=u$ ובשאר המקרים המצב הבא יהיה

המצב שבו תימצא המכונה אחרי שהמכונה מוציאה את הפקודה ה- $(u)_0$ מתכנית $\{z\}$. נגדיר $Nex(0,z)=0$ (כדי שהפונקציה תהיה שלמה).
זו פונקציה פ"ר (ההוכחה מורכבת ודורשת הרבה פרטים קטנים והיא נמצאת בדפים של שמואל).

כעת נראה שפונקציה שמחושבת במכונה היא רקורסיבית. נבחר מספר טבעי n ונניח שהמכונה במצב u_0 וכן $(u_0)_0=0$. האוגרים $R_1,\dots,R_n$ מכילים את $x_1,\dots,x_n$ בהתאמה ושאר האוגרים ריקים. ואז התכנית $\{z\}$ מתחילה לעבוד.

המצב ההתחלתי הוא u_0. המצב הבא יהיה $u_1=Nex(u_0,z)$. אח"כ $u_2=Nex(u_1,z)$ וכן הלאה. יש שתי אפשרויות:

1) אם $\{z\}(\underline{x})\neq\infty$ אז לאיזשהו t הוא u_t הוא מצב עצירה. יהי h הוא t הראשון כך ש-$(u_t)_0\geq lh(z)$, כלומר המקום הראשון שבו התכנית עוצרת.
קוד החישוב של $\langle z,\underline{x}\rangle$ מוגדר ע"י המספר $\prod_{t\leq h}p_t^{u_t}$

2) אם $\{z\}(\underline{x})=\infty$ אז קוד החישוב אינו מוגדר כלל (נאמר שהוא ∞.

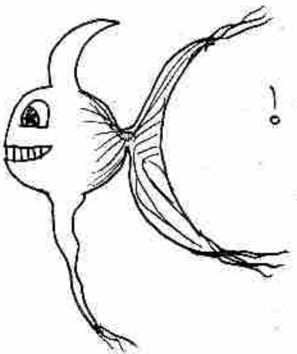
בזאת הצפנו את כל מה שיש בתכנית ומכאן הדרך לסיום היא קצרה.

נגדיר יחס $n+2$-מקומי T_n (לכל $n\in\mathbb{N}$) באופן הבא: $T_n(z,\underline{x},y)$ אם y הוא קוד חישוב ל-$\langle z,\underline{x}\rangle$, כלומר כאשר מפעילים את התכנית $\{z\}$ על הקלט $\underline{x}$ קוד החישוב הוא y.

היחס T_n הוא פ"ר (הנוסחה שלו מופיעה בדפים אבל למעשה זה ברור).
נגדיר את הפונקציה החד מקומית U ע"י $U(y)=((y)_{lh\,y\dot{-}1})_1$
ברגע ש-y הוא קוד החישוב זה פשוט נותן את התוצאה.
זאת פונקציה פ"ר.
התוצאה היא $\{z\}(\underline{x})=U(\mu y\,T_n(z,\underline{x},y))$ וזאת פונקציה רקורסיבית (לא פ"ר כי השתמשנו במזעור)!

אני מבקש מכולם לשבת. רק לי מותר לעמוד כי אני מגיש הבמה

בזאת סיימנו את הוכחת המשפט.
אז פונקציות רקורסיביות ופונקציות חשיבות זה אותו הדבר!



מסקנה חשובה: משפט הצורה הנורמלית

קיימת פונקציה פר' חד-מקומית U ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים יחס פר' T_n ב-$n+2$ משתנים כך שלכל מספר z ולכל $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\{z\}(\underline{X}) = U(\mu y\, T_n(z, \underline{X}, y))$$

במילים אחרות, לכל n קיימת פונקציה רקורסיבית $F(z,\underline{X})$ ב-$n+1$ משתנים בעלת התכונה הבאה: לכל ערך e שנותן ל-z נקבל פונקציה רקורסיבית ב-n משתנים וכך מתקבלות כל הפונקציות הרקורסיביות ב-n משתנים.
כלומר $\langle \lambda \underline{X} F(e,\underline{X}) \mid e \in \mathbb{N} \rangle$ כי מנ"ה (עם חזרות - כי אולי יש כמה תכניות שמחשבות את אותה פונקציה) של כל הפונקציות הרקורסיביות ב-n משתנים.

התבוננות בשאלה: האם כל הפונקציות בעולם הן רקורסיביות? בוודאי שלא!
יש $\aleph_0$ פונקציות רקורסיביות אבל יש יותר מ-$\aleph_0$ פונקציות. זה שיקול קומבינטורי אבל עכשיו נותן דוגמה קונקרטית.

דוגמה: פונקציית האלכסון במשתנה אחד $\lambda x[\{x\}(x)]$

כי פונקציה רקורסיבית. $\{x\}(y)$ פונקציה רקורסיבית בשני משתנים. נציב את x במקום y ונקבל פונקציה רקורסיבית. אבל (!!) היא אינה שלמה (כלומר לא מוגדרת לכל x). יתר על כן, אם g היא הרחבה שלה אז g אינה יכולה להיות גם שלמה וגם רקורסיבית בבת ובעונה אחת.
תהי g הרחבה רקורסיבית ונראה שאינה שלמה. g הרחבה רקורסיבית של $\lambda x[\{x\}(x)]$. לכן גם הפונקציה $\lambda x[g(x)+1]$ רקורסיבית. (כי כן פשוט הרכבה של g עם פונקציית העוקב). לכן קיים e כך שלכל x בתחום ההגדרה של g מתקיים $g(x)+1 = \{e\}(x)$.
רוצים להראות ש-g אינה שלמה. לצורך זה נראה ש-$g(e)$ אינו מוגדר.
נניח ש-$g(e)$ מוגדר. אז $g(e)+1 = \{e\}(e) \Rightarrow \{e\}(e)$ מוגדר.
g היא הרחבה של $\lambda x[\{x\}(x)] \Rightarrow g(e) = \{e\}(e)$ קיבלנו
$g(e)+1 = g(e)$ וזה מנוגד (סתירה). $\Rightarrow g$ אינה שלמה, משום ש-$g(e)$ אינו מוגדר. אז נסתכל מפונקציה $f(x) = \begin{cases} \{x\}(x) & \text{מוגדר} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. כי הרחבה שלמה של $\{x\}(x)$ לכן אינה רקורסיבית.

__דוגמת תשובה__

נסתכל בפונקציה הרקורסיבית $f(x)=\lambda x[\{x\}(x)]$.

נראה שתחום ההגדרה של $f(x)$ אינו רקורסיבי. זה אומר שאין אלגוריתם שיוכל להגיד לנו אם המכונה שמחשבת אותה עבור קלט מסוים תעצור או לא.

זו נקראת בעיית העצירה ואין לזה שום קשר לבעיית אגוים.

תחום ההגדרה הוא $\lambda x P(x)$ כאשר ($P(x)=(\{x\}(x)$ מוגדר)

אילו $P(x)$ היה רקורסיבי היינו מסתכלים בפונקציה

$$g(x)=\begin{cases}\{x\}(x) & P(x)\\ 0 & \neg P(x)\end{cases}$$

זאת פונקציה שלמה והיא רקורסיבית כי זאת הגדרה לפי מקרים. אבל בדוגמה הקודמת ראינו שזאת לא יכולה להיות פונקציה רקורסיבית. סתירה!

בשיעור הבא נעסוק בפונקציות ניתנות למניה רקורסיבית.

__הגדרה:__ __קבוצות ניתנות למניה רקורסיבית__ (נל"ר)

יחס ניתן למניה רקורסיבית הוא יחס המתקבל מיחס רקורסיבי ע"י תוספת כמת קיים מהתחלה.

כלומר יחס n-מקומי R הוא נל"ר אמ"מ יש יחס רקורסיבי n+1-מקומי P רק ש- $R(\underline{z})=\exists y P(\underline{z},y)$.

ראינו שמחלקת היחסים הרקורסיביים סגורה לקשרים וכמתים חסומים. כאן אנחנו רואים יחס עם כמת לא חסום. נראה דוגמאות ליחסים נל"ר שאינם רקורסיביים. אבל יחס רקורסיבי הוא תמיד נל"ר. שהרי אם $P(\underline{x})$ רקורסיבי אז $P(\underline{x})=\exists y(P(\underline{x})\wedge y=y)$.

(10) 27.3.07
לוגיקה

<u>בוקר טוב</u>

הדבר האחרון שדיברנו עליו היה <u>יחסים ניתנים למנייה רקורסיבית</u> (נל"ר).

יחס n-מקומי R נקרא נל"ר (r.e) אם הוא מהצורה $\exists y P(\underline{x},y)$ כאשר P יחס רקורסיבי n+1 מקומי.

ראינו שקבוצת היחסים הרקורסיביים סגורה לגבי קשרים ולגבי כמתים חסומים. אבל היא לא סגורה לגבי כמתים לא חסומים.

אנחנו נתקלים ביחסים נל"ר במקום חשוב מאוד. אנחנו מדברים על תורות אקסיומטיות אז התורה צריכה להיות כריעה וכך גם ההוכחות. אז הטענה מעניינת אותו הקבוצת המשפטים של התורה הזאת. מסתבר שקבוצת המשפטים היא לא כריעה, אבל היא נל"ר. מתי x הוא משפט? כאשר קיימת הוכחה y רק ש- y מוכיחה את x ...

למשל, כל יחס רקורסיבי הוא נל"ר - זה ברור. אם P רקורסיבי אז $P(\underline{x}) = \exists y (P(\underline{x}) \wedge y=y)$. זו סתם התחכמות אבל זה נכון!

<u>לגבי</u> הפעולות הללו על יחסים נל"ר מניבות יחסים נל"ר:

1. הרכבה עם פונקציות רקורסיביות שלמות
2. כמת ישי (<u>ולא</u> כמת כולל)
3. גימום $\wedge$
4. איווי $\vee$
5. כמתים ישיים חסומים
6. כמתים כוללים חסומים

<u>הוכחה</u> (נוכיח חלק מהם. השאר אמור להופיע בדפים)

1. $R(\underline{x})=\exists y P(\underline{x},y)$ כאשר R k-מקומי ו- P k+1 מקומי רקורסיבי. ונניח $f_1, \dots, f_k$ n-מקומיות רקורסיביות שלמות. אזי $R(f_1(\underline{x}),\dots,f_k(\underline{x}))=\exists y P(f_1(\underline{x}),\dots,f_k(\underline{x}))$ אבל P רקורסיבי $\Rightarrow$ $P(f_1(\underline{x}),\dots,f_k(\underline{x}))$ רקורסיבי $\Rightarrow$ $R(f_1(\underline{x}),\dots,f_k(\underline{x}))$ נל"ר.
למה דרשנו שלמות? כי יחס צריך להיות מוגדר תמיד.
2. ע"י שימוש בזיווג במקום $\exists y \exists z P(\underline{x},y,z)$ אפשר לכתוב $\exists u P(\underline{x},k(u),L(u))$ כאשר u מצפין את y ו- z רק ש- $k(u)=y$, $L(u)=z$. ומכאן $P(\underline{x},k(u),L(u))$ רקורסיבי וסיימנו.

(5) $\exists w<u \exists y P(\underline{x},w,y) = \exists w \exists y (w<u \wedge P(\underline{x},w,y))$. $<$ הוא יחס נ"ר.
ויש סגירות לגימום ⇐ $\exists y[w<u \wedge P(\underline{x},w,y)]$ זה נ"ר ואז אנחנו מוסיפים
(את ישי וזה נסגר.

(6) $\forall w<u \exists y P(\underline{x},w,y) = \exists z \forall w<u P(\underline{x},w,(z)_w)$.

הגדרה: הגרף של פונקציה f ב-$\overset{1}{n}$ משתנים הוא הקבוצה ה- $n+1$ ממדות

$$\{\langle \underline{x}, f(\underline{x})\rangle : \underline{x} \in dom f\}$$

תזכורת: $dom f = \{\underline{x} : f(\underline{x}) \neq \infty\}$

בעצם הגרף הוא היחס $\lambda \underline{x} u (f(\underline{x}) = u)$

משפט: אם A הוא הגרף של f, אז A נ"ר אמ"מ f רקורסיבית.
הוכחה: אם f רקורסיבית אז לפי משפט הצורה הנורמלית יש e כך שלכל $\underline{x}$ $f(\underline{x}) = U(\mu y T(e,\underline{x},y))$. אז $\langle \underline{x},u\rangle \in A$ פירושו
$\exists y (T(e,\underline{x},y) \wedge (U(y)=u))$. $T(e,\underline{x},y) \wedge (U(y)=u)$ הוא פר' ⇐ $\langle \underline{x},u\rangle \in A$ נ"ר.
מצד שני, אם A נ"ר אז $\langle \underline{x},u\rangle \in A = \exists y R(\underline{x},u,y)$ כאשר R רקורסיבי,
נשתמש בפונקציית הזיווג ונקבל $f(\underline{x}) = K(\mu z R(\underline{x},K(z),L(z)))$ וזה רקורסיבי.

אם f שלמה אז A רקורסיבית: $\langle \underline{x},u\rangle \in A = (f(\underline{x}) = u)$

האם קבוצת היחסים הנ"ר סגורה לשלילה?

משפט: יחס הוא רקורסיבי אמ"מ הוא ושלילתו שניהם נ"ר.
הוכחה: אם R רקורסיבי אז גם $\neg R$ רקורסיבי ⇐ R, $\neg R$ נ"ר.
מצד שני, נניח ש- R, $\neg R$ נ"ר. אז $R(\underline{x}) = \exists y P(\underline{x},y)$ כאשר P רקורסיבי
וכן $\neg R(\underline{x}) = \exists y Q(\underline{x},y)$ כאשר Q רקורסיבי. אזי

$$R(\underline{x}) = P(\underline{x}, \mu y (P(\underline{x},y) \vee Q(\underline{x},y)))$$

אם $P(\underline{x}, \mu y (P(\underline{x},y) \vee Q(\underline{x},y)))$ אז קיים y שהוא המינימלי מבין $P(\underline{x},y)$,
$Q(\underline{x},y)$ רק ש- $P(\underline{x},y)$ ⇐ $R(\underline{x})$.
מצד שני אם $\neg P(\underline{x}, \mu y (P(\underline{x},y) \vee Q(\underline{x},y)))$ אז ה-y הראשון שמקיים את $P(\underline{x},y) \vee Q(\underline{x},y)$
לא מקיים את P ולכן $Q(\underline{x},y)$ ⇐ $\neg R(\underline{x})$

מכאן נובע שקבוצת היחסים הנ"ר אינה סגורה לשלילה. כי אם היא היתה סגורה אז כל היחסים היו רקורסיביים אבל זה לא נכון!

<u>משפט:</u> לקבוצה n-מקומית התנאים הבאים שקולים:

1. A נ"ר
2. A הוא התחום של פונקציה רקורסיבית ב-n משתנים
3. $A=\emptyset$ או A נמנית ע"י n-יה של פונקציות פר' במשתנה אחד.
4. A נמנית ע"י n-יה של פונקציות רקורסיביות במשתנה אחד.

<u>הוכחה:</u> בספרים - לקרוא בבית!

אם e מספר אז $\{e\}_n$ הפונקציה הפר' המתאימה ב-n משתנים. אם e מצפין תכנית אז $\{e\}_n$ היא התכנית שהוא מצפין ואחרת $\{e\}_n$ כמו התכנית ש-$\hat{e}$ מצפין - כלומר אפס. בצורה הזאת קיבלנו מניה של כל הפונקציות הרקורסיביות ב-n משתנים - פשוט עוברים על כל המספרים...

<u>מסקנה:</u> הקבוצות הנ"ר ה-n מקומיות הן בדיוק הקבוצות $dom\{e\}_n$ - התחומים של הפונקציות הרקורסיביות. כך יש לנו צורה נורמלית לכל הקבוצות הנ"ר.

<u>הגדרה:</u> נאמר ש-e הוא אינדקס של הקבוצה הנ"ר ה-n מקומית $dom\{e\}_n$. נשים ♡ שאינדקס הוא לא יחיד כי יכולים להיות e ו-e' שמצפינים את אותה הפונקציה.

<u>הגדרה:</u> היחס ה-n+1 מקומי $\lambda\underline{x}z(\underline{x}\in dom\{z\}_n)$ הוא נ"ר וזה היחס $\exists y T(z,\underline{x},y)$.

<u>מסקנה:</u> כל יחס נ"ר מתקבל ע"י כימות ישי מיחס פר'.

<u>הוכחה:</u> $\underline{x}\in dom\{e\}_n \equiv \exists y T(e,\underline{x},y)$

<u>שפת תורת המספרים</u>

סוף סוף מתחילים לעסוק בלוגיקה.

בכל שפה יש סימנים לוגיים וסימנים לא לוגיים. הסימנים הלוגיים הם הקשרים וכמתים ואלה משותפים לכל השפות. סימנים לא לוגיים הם הסימנים

שיתופיים לשפה. אנחנו נדבר על שפת תורת המספרים.

<u>הסמנים הלא-לוגיים:</u>

- קבוע אישי $\bar{0}$
- קבוע פעולה חד מקומי $\bar{S}$
- קבועי פעולה דו מקומיים $\oplus$, $\circ$

נניח שיש מבנה $\mathcal{A}$ ו- D קבוצה חלקית לעולמו של המבנה. נאמר שהיא <u>גדירה</u> במבנה (definable) אם קיימת נוסחה φ בשפת המבנה עם משתנה חופשי אחד x כך ש- $D=\{a\in A : \mathcal{A}\models\varphi[a]\}$
אז אומרים ש- φ מגדירה את D.

<u>דוגמה:</u> במבנה המספרים הטבעיים, קבוצת המספרים הזוגיים גדירה ע"י הנוסחה $\varphi(x)=\exists y(y\oplus y\approx x)$. בצורה דומה קבוצת המספרים האי-זוגיים גדירה ע"י הנוסחה $\psi(x)=\neg\varphi(x)$.

האם יש קבוצות שהן לא גדירות? כל נוסחה יכולה להגדיר רק קבוצה אחת. יש $\aleph_0$ נוסחאות אבל קבוצות של מספרים טבעיים יש $\aleph$. $\Leftarrow$ חייבות להיות קבוצות לא גדירות.

תהי D קבוצה n-מימדית החלקית ל- A^n. נאמר ש- A גדירה ב- $\mathcal{A}$ אם קיימת נוסחה φ בשפה עם n משתנים חופשיים כך ש-
$$D=\{\langle a_1,\dots,a_n\rangle\in A^n : \mathcal{A}\models\varphi[a_1,\dots,a_n]\}$$

למשל, הקבוצה $\{\langle n,n+1\rangle : n\in\mathbb{N}\}$ גדירה ע"י הנוסחה $\varphi(x,y)=y\approx\bar{S}(x)$

איבר $a\in A$ נקרא גדיר אם הקבוצה $\{a\}\subseteq A$ גדירה, כלומר אם קיימת נוסחה φ במשתנה חופשי אחד כך ש- a הוא האיבר היחיד במבנה $\mathcal{A}$ שמקיים את φ.

תהי f פעולה n מקומית במבנה. נאמר ש- f גדירה במבנה אם יש נוסחה φ עם $n+1$ משתנים חופשיים כך ש- $\mathcal{A}\models\varphi[a_1,\dots,a_n,b]\iff f(a_1,\dots,a_n)=b$
אפשר להסתכל על זה גם כיחס $n+1$ מקומי.

(12) 29.5.07

לוגיקה

הדבר האחרון שעסקנו בו הוא שפת תורת המספרים. בשפה יש קבוע אישי אחד $\bar{0}$, קבוע פעולה חד-מקומית $\bar{S}$ ושני קבועי פעולה דו מקומיים $\bar{+}$, $\bar{\cdot}$. בינתיים כשמדברים על שמות עצם, נוסחאות ופסוקים הם כולם בשפה הזאת. אנחנו מדברים על מבנה המספרים הטבעיים $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot \rangle$. עם הזמן נראה שאפשר להסתפק בפחות מאלה, אבל בינתיים שיהיה ככה.

לכל מספר טבעי k נגדיר שם עצם קבוע $\bar{k} = \underbrace{\bar{S}\dots\bar{S}}_{k \text{ פעמים}}\bar{0}$

ליצורים מהצורה $\bar{k}$ נקרא שמות מספר (numerals).

אם $\underline{k} = \langle k_1, \dots, k_n \rangle$ נגדיר $\underline{\bar{k}} = \langle \bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n \rangle$ – זה n-יה של שמות המספרים.

טענה: תהי φ נוסחה שמשתניה החופשיים לקוחים מתוך $x_1, \dots, x_n$ ותהי σ השמה ל-$\mathcal{N}$ הנותנת לכל x_i את הערך k_i. אזי

$$\mathcal{N} \models \varphi[k_1, \dots, k_n] \text{ אמ"מ } \mathcal{N} \models \varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$$

הסבר: $\varphi[k_1, \dots, k_n]$ היא הצבה של המספרים הטבעיים $k_1, \dots, k_n$ ו-$\varphi(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$ זה פסוק בשפה שבו במקום המשתנים החופשיים מופיעים שמות המספרים. בקיצור אפשר לרשום $\mathcal{N} \models \varphi[\underline{k}]$ אמ"מ $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{\bar{k}})$.

זאת טענה ידועה מלוגיקה 1.

נסמן ב-Ω את התורה מסדר ראשון של $\mathcal{N}$, כלומר קבוצת פסוקי השפה שאמיתיים ב-$\mathcal{N}$. מסמנים את Ω גם ע"י $Tr_1(\mathcal{N})$.

Ω נקראת האריתמטיקה השלמה מסדר ראשון.

יחס n-מקומי על $\mathcal{N}$ יקרא אריתמטי אם הוא גדיר ב-$\mathcal{N}$. פירוש הדבר שהוא גדיר ע"י נוסחה מסויימת. כלומר R אריתמטי אמ"מ יש נוסחה φ עם n משתנים חופשיים כך ש- $R(a_1, \dots, a_n)$ אמ"מ $\mathcal{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

פעולה n מקומית נקראת גדירה אם הגרף שלה שהוא יחס n+1 מקומי הוא גדיר. קבוצה היא פשוט יחס חד מקומי אז ברור מהי קבוצה גדירה.

איבר k הוא גדיר אם $\{k\}$ גדירה.

ב-$\mathfrak{N}$ כל איבר הוא גדיר, שכן אם $k \in \mathbb{N}$ אז k מוגדר ע"י הנוסחה $\varphi(x) = (x = \bar{k})$.

טענה: כל הפונקציות הרקורסיביות הן אריתמטיות

הוכחה: נראים באינדוקציה על בניית הפונקציה. ראשית נראים לפונקציות היסודיות ואז נראים שהפונקציות הרקורסיביות סגורות תחת הפעולות.
למשל, פונקציית האפס $Z_n(x_1,\dots,x_n) = 0$ מוגדרת ע"י הנוסחה $x_{n+1} = \bar{0}$
פונקציית ההטלה $I_{n,j}(x_1,\dots,x_n) = x_j$ מוגדרת ע"י הנוסחה $x_{n+1} = x_j$
ופונקציית העוקב S מוגדרת ע"י הנוסחה $x_2 = Sx_1$
סגירות להרכבה: שינוי הקלות.
סגירות לרקורסיה פרימיטיבית לא יותר מסובך. נרצה להגיד שקיימת סדרה של מספרים כך, שהאיבר הראשון הוא הערך ב-0 והאיברים הבאים מתקבלים ע"י כלל הרקורסיה. בשביל לעבוד עם סדרת מספרים היינו רוצים לקודד אותה אבל זאת בעיה. מה שאנחנו מכירים משתמשים בפעולת החזקה ואנחנו לא יודעים שהיא אריתמטית...
אז אנחנו נמצא דרך אחרת לקודד בעזרת פונקציית β של גדל. זאת פונקציה תלת מקומית שמוגדרת ע"י $\beta(x,y,z) = rm(x, y(z+1)+1)$. בשביל לקודד בעזרת β אנחנו נזדקק למשפט מתורת המספרים - משפט השאריות הסיני - עבור $n \geq 0$ יהיו $d_0,\dots,d_n$ $n+1$ מספרים טבעיים חיוביים זרים בזוגות ונסמן את מכפלתם ב-d. לכל סדרה $\langle r_i : 0 \leq i \leq n\rangle$ המקיימת $r_i < d_i$ קיים מספר c הקטן מ-d כך שלכל i: $r_i = rm(c, d_i)$.
עוד משפט אומר של-$n \geq 0$ אם $r_0,\dots,r_n$ טבעיים אז קיימים מספרים a,c כך שלכל $i \leq n$ $\beta(c,a,i) = r_i$ שזה בעצם אומר שכל סדרה אפשר לקודד ע"י פונקציית β. אבל, עדיין יש לנו את אותה הבעיה. מי אמר ש-rm אריתמטית?

טענה: היחסים $<$, $\leq$ והפונקציות rm ו-β כולם אריתמטיים.

הוכחה: $(x \leq y) = \exists z(x \oplus z = y)$

$(x < y) = (x \oplus \bar{1} \leq y)$

$(rm(x,y) = z) = [(y=0) \wedge (z=x)] \vee [z<y \wedge \exists u(x = y \circ u \oplus z)]$

β זו הרכבה של פונקציות גדירות (יי)

הוכחה שהפונקציות האריתמטיות סגורות תחת הקורסיה פרימיטיבית נמצאת בדפים.

אז כאן בעצם ראינו שכל יחס וכל פונקציה פ"ר הם אריתמטיים.

⇐ כל יחס נ"ר הוא אריתמטי. שהרי יחס נ"ר הוא מהצורה $\exists x P(x)$ כאשר P פ"ר. אז יחס נ"ר מתקבל ע"י כימות ישי מיחס פ"ר. אבל בנוסף קבוצת היחסים הגדירים סגורה לכימות ישי. ⇐ כל יחס נ"ר הוא אריתמטי.

עכשיו אנחנו יכולים להראות שכל פונק' רקורסיבית (לא רק פ"ר) היא אריתמטית. אם f רקורסיבית אז הגרף שלה הוא יחס נ"ר ולכן אריתמטי, כלומר הפונק' אריתמטית. ויחס רקורסיבי הוא נ"ר ולכן אריתמטי.

משפטי טרסקי וגדל

מספור גדל

את כל ביטויי השפה אנחנו רוצים להצפין בעזרת מספרים טבעיים. זה רעיון שמוכר לנו. הצפנו כבר הרבה דברים ע"י מספרים טבעיים.

נציג אופציה אחת מהדרכים להצפין את השפה. לצורך כך אנחנו מניחים שהקשרים היחידים בשפה הם $\neg$, $\to$ והכמת היחיד הוא $\forall$. ושאר הקשרים והכמתים נתייחס אליהם כסימני קיצור: זה רק כדי שההגדרות תהיינה פשוטות יותר. ההגדרות של מספרי גדל משתמשות בפעולת ההצבה ומה שהוכחנו קודם נובע שהיא אריתמטית, שהרי היא פ"ר.

בעזרת ההצפנה של נוסחאות מצפינים סדרה סופית של נוסחאות. למה? סדרה סופית של נוסחאות מייצגת הוכחה!

פונקציית האלכסון d מוגדרת כך: לכל נוסחה φ עם משתנה חופשי אחד $d(\#\varphi)=\#[\varphi(\overline{\#\varphi})]$ וגם אם k אינו מספר גדל של נוסחה עם משתנה אחד אז $d(k)=k$. $d(\#\varphi)$ זה מספר הגדל של φ שמוצב בה $\overline{\#\varphi}$.

קל לראות ש-d רקורסיבית

משפט טרסקי: קבוצת מספרי גדל של ℕ אינה אריתמטית.

הסבר: פירוש הדבר שאי אפשר להגדיר את הפסוקים האמיתיים של ℕ. ומכאן נובע גם שהיא לא כריעה. סה"כ זה אומר שהאמת אינה ניתנת להגדרה.

הפרדוקס של טרסקי: לו היה ניתן להגדיר את מושג האמת היה מתקבל פרדוקס: אם כן אדם אומר: "אני משקר", אם אם זה אמת, אז הוא משקר ואם זה שקר אז הוא דובר אמת.

⇐ אי אפשר להגדיר את האמת.

בשביל להוכיח את זה פורמלית אנחנו נשתמש בפונקציית האלכסון - שהפסוק יוכל להגיד על עצמו שהוא שקר.

(14) 5/6/07

לוגיקה

בוקר טוב

שבוע שעבר דיברנו על מספר גדל.

הכי חשוב שלנו היא פונקצ"יה האלכסון $d: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שמוגדרת רק:

לכל נוסחה φ עם משתנה חופשי אחד $d(\#\varphi) = \#\varphi(\overline{\#\varphi})$

הסבר: $\#\varphi$ מספר טבעי

$\overline{\#\varphi}$ השם של המספר הזה

$\varphi(\overline{\#\varphi})$ פסוק שמתקבל ע"י הצבת $\overline{\#\varphi}$ ב-φ

$\#\varphi(\overline{\#\varphi})$ מספר גדל של אותו פסוק

(למעשה הפסוק הזה מדבר על עצמו!

משפט טרסקי: אומר שקבוצת מספרי גדל של פסוקים אמיתיים היא לא אריתמטית, כלומר לא גדירה. רעיון ההוכחה היה פרדוקס השקרן. פורמלית אנחנו יכולים לגרום לפסוק להגיד על עצמו שהוא לא נכון.

אם k איננו מספר גדל של נוסחה עם משתנה חופשי אחד אז $d(k)=k$

פונקצ"יה האלכסון היא בוודאי רקורסיבית.

<u>משפט טרסקי:</u> תהי T התכונה הבאה של מספרים: $T(k)$ פירושו $k=\#\varphi$ כאשר $\varphi\in\omega\Omega$, כלומר φ אמיתי ב-$\mathfrak{N}$.

T אינה אריתמטית.

<u>הוכחה:</u> d רקורסיבית ולכן אריתמטית. אילו T הייתה אריתמטית, הייתה גם שלילתה אריתמטית. לכן גם הנוסחה $\lambda x[\neg T(d(x))]$ היא אריתמטית. תהי Ψ נוסחה עם משתנה חופשי אחד המגדירה את $\lambda x[\neg T(d(x))]$ ב-$\mathfrak{N}$. אז לכל x מתקיים $\Psi(\bar{x})\in\omega\Omega$ אמ"מ $\neg T(d(x))$ מתקיים. הנוסחה $\Psi(\bar{x})$ אומרת ש-$d(x)$ שקרי.

ניתן ל-x את הערך $\#\Psi$. נקבל $\Psi(\overline{\#\Psi})\in\omega\Omega$ אמ"מ מתקיים $\neg T(d(\#\Psi))$. לפי הגדרת T אנו יודעים $\neg T(d(\#\Psi))$ מתקיים אמ"מ $\Psi(\overline{\#\Psi})\notin\omega\Omega$. סתירה. $\Rightarrow$ T איננה אריתמטית.

מסקנה: משפט אי השלמות של גדל
קבוצה אקסיומטית החלקית ל- Ω אינה שלמה.

הסברים: - תורה אקסיומטית היא קבוצת המסקנות הלוגיות של קבוצה כריעה של אקסיומות

הוכחה: זה נובע במישרין ממשפט טרסקי. (האמת היא שמבחינה היסטורית משפט גדל קדם למשפט טרסקי).

תהי Σ תורה אקסיומטית החלקית ל- Ω. אז קבוצת מספרי גדל של פסוקי Σ היא נ"ר, לכן אריתמטית. אילו Σ הייתה שלמה אז $\Omega=\Sigma$ ואז קבוצת מספרי גדל של פסוקי Ω אריתמטית, בסתירה למשפט טרסקי.

הערה: למה $\Omega=\Sigma$? אם לא אז יש פסוק ב- Ω שאינו נמצא ב- Σ. אבל גם שלילת הפסוק אינה ב- Σ משום ששלילתו אינה ב- Ω. ואז Σ אינה שלמה.

הוכחה מפורשת: גדל הביא פסוק הנמצא ב- Ω ואיננו נמצא ב- Σ.
נניח ש- Σ היא קבוצת הפסוקים הנובעים מ- Γ כאשר Γ קבוצה כריעה של אקסיומות. $\Sigma=Th_1(\Gamma)$
נסתכל בתכונה $T_\Sigma(k)$ האומרת $k=\#\varphi$ כאשר $\varphi\in\Sigma$ (כלומר קבוצת מספרי גדל של פסוקים ב- Σ). T_Σ היא נ"ר ולכן אריתמטית.
תהי Ψ נוסחה המגדירה את $\forall x(\neg T_\Sigma(d(x)))$ ב- $\mathcal{N}$. אז $\Psi(\bar{x})\in\Omega$ אמ"מ $\neg T_\Sigma(d(x))$. ניתן ל- x את הערך $\#\Psi$. אז $\Psi(\overline{\#\Psi})\in\Omega$ אמ"מ $\neg T_\Sigma(d(x))$ מתקיים.
לא ייתכן שפסוק זה שקרי כי זה היה נותן שהוא יכיח ולכן אמיתי. ומכאן נובע שאינו יכיח. (Ω עקבית כי יש לה מודל. Σ חלקית ל- Ω ולכן בוודאי עקבית).
$\Rightarrow$ מצאנו פסוק שהוא אמיתי אבל לא יכיח!

ממשפט טרסקי נובע בפרט שקבוצת הפסוקים האמיתיים היא לא כריעה.

מה בדבר הפסוקים האמיתיים לוגית בשפה $\mathcal{N}$? פסוקים אמיתיים לוגית

<u>סימון</u>: Φ_n - קבוצת הנוסחאות בשפה עם n משתנים חופשיים.
למשל Φ_0 היא קבוצת הפסוקים.

<u>הגדרה</u>: תהי Σ תורה בשפת תורת המספרים. יהי P יחס n-מקומי על $\mathbb{N}$. נוסחה $\varphi \in \Phi_n$ <u>מייצגת חלש</u> את P ב-Σ אם מתקיים:
לכל $\underline{x} \in \mathbb{N}^n$ $\varphi(\underline{x}) \in \Sigma$ אמ"מ $P(\underline{x})$.
φ <u>מייצגת חזק</u> את P אם מתקיים: לכל $\underline{x} \in \mathbb{N}^n$ אם $P(\underline{x})$ אז $\varphi(\underline{x}) \in \Sigma$
ואם $\neg P(\underline{x})$ אז $\neg\varphi(\underline{x}) \in \Sigma$.
במקרים הללו נאמר ש-P <u>מיוצג</u> חלש (חזק) ע"י φ ב-Σ.
אם קיימת נוסחה φ המייצגת חלש (חזק) את P ב-Σ, נאמר ש-P <u>ניתן לייצוג</u> חלש (חזק) ב-Σ.

<u>הערות</u>:
(א) אם P ניתן לייצוג חזק ב-Σ אז הוא ניתן לייצוג חזק בכל תורה המכילה את Σ.
(ב) אם Σ עקבית, ו-φ מייצגת חזק את P אז φ מייצגת חלש את P.
(ג) אם Σ שלמה ו-φ מייצגת חלש את P ב-Σ, אז היא מייצגת אותה חזק. שהרי אם φ מייצגת חלש את P אז $\varphi(\underline{x}) \in \Sigma$ אמ"מ $P(\underline{x})$. $\Leftarrow$ אם $P(\underline{x})$ אז $\varphi(\underline{x}) \in \Sigma$ ואם $\neg P(\underline{x})$ אז $\varphi(\underline{x}) \notin \Sigma$. ואז התורה היא שלמה $\Leftarrow$ $\neg\varphi(\underline{x}) \in \Sigma$ וקיבלנו ייצוג חזק.
(3) בתורה עקבית ושלמה ייצוג חזק וייצוג חלש הם היינו הך. בתורה כזו נדבר על "ייצוג" באופן כללי.

נשים ♥ שבתורה כזו P ניתן לייצוג אמ"מ הוא אריתמטי.

<u>משפט</u>: תהי Σ תורה אקסיומטית בשפת תורת המספרים. כל יחס n-מקומי הניתן לייצוג חלש ב-Σ הינו נ"ר.
<u>הוכחה</u>: נסתכל בנוסחה $\varphi \in \Phi_n$ ובפונקציה ה-n-מקומית $f(\underline{x}) = \#\varphi(\underline{x})$

משפט: כל יחס n-מקומי הניתן לייצוג חלק מתורה אקסיומטית ועקבית הוא רקורסיבי.

הוכחה: אם R ניתן לייצוג חלק ע"י φ אז גם R^c ניתן לייצוג חלק ע"י $\neg\varphi$. הואיל והתורה הנ"ל היא עקבית אז R ו-R^c ניתנים לייצוג חלש (מכך שיהיה נ"ל). $\Leftarrow$ R רקורסיבי.

הגדרה: תורה אקסיומטית-סופית היא תורה הנובעת מקבוצה סופית של אקסיומות. זו כמובן תורה אקסיומטית. (הכוונה היא לאקסיומות הלא לוגיות).

משפט: קיימת תורה אקסיומטית-סופית החלקית ל-N שכל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חלק בה.

(16) 12.6.07

לוגיקה

בשיעור הקודם התחלנו לדבר על "ייצוג חלש" וייצוג חזק של יחס.

אם Σ תורה בשפה של תורת המספרים ו- P יחס n-מקומי. נוסחה φ עם n משתנים חופשיים $\boxed{\text{מייצגת חלש}}$ את P ב- Σ אם לכל $\underline{x} \in \mathbb{N}^n$ $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma \iff P(\underline{x})$. φ $\boxed{\text{מייצגת חזק}}$ את P ב- Σ אם לכל $\underline{x} \in \mathbb{N}^n$ אם $P(\underline{x})$ אז $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma$ ואם $\neg P(\underline{x})$ אז $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Sigma$.

מה ההבדל בין הדברים? במקרה החלש אם $\varphi(\bar{x}) \notin \Sigma$ זה לא אומר ש- $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Sigma$. בתורה שלמה אם $\varphi(\bar{x}) \notin \Sigma$ אז בהכרח $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Sigma$. לכן בתורה שלמה "ייצוג חלש גורר ייצוג חזק".
בתורה עקבית לא יכול להיות שגם $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma$ וגם $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Sigma$. לכן בתורה עקבית "ייצוג חזק גורר ייצוג חלש". סה"כ אם Σ תורה שלמה ועקבית אז ייצוג חלש וייצוג חזק זה אותו דבר ולכן אנחנו פשוט קוראים לזה $\boxed{\text{ייצוג}}$. ב- Ω תורה עקבית ושלמה והיחסים הניתנים לייצוג בה הם היחסים האריתמטיים. פשוט ככה הגדרנו אותם.

$\boxed{\text{משפט}}$: אם Σ תורה אקסיומטית בשפת תורת המספרים אז כל יחס שניתן לייצוג חלש ב- Σ הוא נ"ר.

$\boxed{\text{משפט}}$: אם Σ תורה אקסיומטית ועקבית בשפת תורת המספרים אז כל יחס שניתן לייצוג חזק ב- Σ הוא רקורסיבי.

$\boxed{\text{משפט}}$: קיימת תורה אקסיומטית $\Pi \subseteq \Omega$ שכל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק בה.

Π היא כמובן עקבית כי היא חלקית ל- Ω. לכן יחס הוא רקורסיבי אמ"מ הוא ניתן לייצוג חזק ב- Π. זו הגדרה חלופית ליחס ניתן לייצוג חזק. באותו אופן אם יחס ניתן לייצוג חזק ב- Π אז הוא ניתן לייצוג חזק בכל תורה עקבית שמרחיבה את Π.

$\boxed{\text{משפט}}$: אם Δ תורה אקסיומטית עקבית, המרחיבה את Π, אז כל יחס ניתן לייצוג חזק ב- Δ אמ"מ הוא רקורסיבי.

משפט: אם Σ תורה שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חלש, אז T_Σ (קבוצת הפסוקים ב-Σ, או למעשה קבוצת מספרי הגדל שלהם) אינה רקורסיבית.

הוכחה: נניח בשלילה ש-T_Σ רקורסיבית. אזי התכונה $\lambda x[\neg T_\Sigma(d(x))]$ גם היא רקורסיבית. לכן תכונה זו ניתנת לייצוג חלש ב-Σ ע"י $\varphi\in\Phi_1$.
לכן לכל x טבעי: $\neg T_\Sigma(d(x))$ אמ"מ $\varphi(\bar{x})\in\Sigma$, וזה נכון בפרט ל-$x=\#\varphi$. לכן $\neg T_\Sigma(d(\overline{\#\varphi}))$ אמ"מ $\varphi(\overline{\#\varphi})\in\Sigma$ שהרי φ מייצגת חלש את התכונה. אבל $\varphi(\overline{\#\varphi})\in\Sigma$ אמ"מ $T_\Sigma(d(\overline{\#\varphi}))$.
זאת סתירה. ☺

מסקנה: אם Σ תורה עקבית שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק, אז T_Σ אינה רקורסיבית.

הערה: הדרישה של העקביות היא חיונית כי התורה הלא עקבית היחידה שיש היא התורה שמכילה את כל הפסוקים וזאת כמובן כריעה.

מסקנה: אם Σ תורה עקבית המכילה את Π אז T_Σ אינה רקורסיבית.

הוכחה: כי בכל תורה עקבית המכילה את Π כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק. $\Leftarrow$ T_Σ אינה רקורסיבית. ☺

משפט: אם Σ תורה כך ש-$\Sigma\cup\Pi$ עקבית, אז T_Σ אינה רקורסיבית.

הערה: לא דרשנו ש-$\Pi\subseteq\Sigma$ אלא רק ש-Σ מתיישבת עם Π.

הוכחה: נסמן $\Delta=\{\varphi\in\Phi_0:\Sigma\cup\Pi\models\varphi\}$ = קבוצת הפסוקים שנובעים מ-$\Sigma\cup\Pi$. Π מתקבלת מקבוצה סופית של אקסיומות. יהי π הגימום של כל האקסיומות הללו. אז $\Delta=\{\varphi\in\Phi_0:\Sigma,\pi\models\varphi\}$ אבל ידוע ש-$\Sigma,\pi\models\varphi$ אמ"מ $\Sigma\models\pi\to\varphi$ $\Leftarrow$ $\varphi\in\Delta$ אמ"מ $\pi\to\varphi\in\Sigma$ $\Leftarrow$ $T_\Delta(x)=T_\Sigma(64\cdot 3^{\#\pi}\cdot 5^x)$ לכן אם T_Σ רקורסיבית אז גם T_Δ רקורסיבית. אבל Δ היא תורה עקבית המכילה את Π.
$\Leftarrow$ T_Δ אינה יכולה להיות רקורסיבית $\Leftarrow$ T_Σ אינה רקורסיבית. ☺

מסקנה: כל תורה תקינה ל-$\mathfrak{N}$ אינה רקורסיבית.

הוכחה: אם $\Sigma\subseteq\mathfrak{N}$ אז $\Sigma\cup\Pi\subseteq\mathfrak{N}$ ולכן $\Sigma\cup\Pi$ עקבית.

⇐ T_Σ אינה רקורסיבית.

משפט צ'רץ': קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפת תורת המספרים אינה רקורסיבית.

הוכחה: קבוצה זו תקינה ל-$\mathfrak{N}$ ולכן אינה רקורסיבית.

נשים ♡ שקבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית היא נל"ר.

נסתכל על $\mathfrak{N}=\langle \mathbb{N},0,S,+,\cdot,<\rangle$. אם נסתכל על $\mathcal{A}=\langle\mathbb{N},+,\cdot\rangle$

אז נראה זה מבנה דל יותר אבל כל הדברים החסרים ב-$\mathfrak{N}$ גדירים ב-$\mathcal{A}$:

- 0 גדיר ע"י $x+x=x$
- 1 גדיר ע"י $\forall y(x\cdot y=y)$
- S גדיר ע"י $S(x)=x+1$, כלומר $\exists z(\forall w(zw=w)\wedge y=x+z)$
- $<$ גדיר ע"י $x<y \leftrightarrow \exists z(x+z=y\wedge z+z\neq z)$

אז $\mathcal{A}$ שקול ל-$\mathfrak{N}$. לכן גם בשפת המבנה $\langle\mathbb{N},+,\cdot\rangle$ קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית אינה כריעה.

מסקנה: בכל שפה המכילה שני קבועי פעולה דו-מקומיות קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית אינה כריעה.

הוכחה: אילו בשפה $\mathcal{L}$ קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית הייתה כריעה, נסתכל בשני קבועי פעולה דו-מקומיות בשפה g_1, g_2. קבוצת פסוקי השפה, שלא מופיעים בהם הקבועים פרט ל- g_1, g_2 (וכמובן שוויון) היא כריעה. לכן החיתוך של קבוצה זו עם קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפה גם היא כריעה. אבל הקבוצה זו היא קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפת המבנה $\langle\mathbb{N},+,\cdot\rangle$ וזו סתירה למה שראינו קודם.

נסתכל במבנה $\langle \mathbb{N}, E\rangle$ כאשר E היא פונקציית החזקה דו-מקומית.
אבל 0^0 לא מוגדר אז נרחיב את ההגדרה של E ע"י $0E0=0$.
במבנה הזה גם החיבור וגם הכפל גדירים:

- $z=x\cdot y \quad \leftrightarrow \quad \forall w\,(w^z=(w^x)^y)$
- $z=x+y \quad \leftrightarrow \quad \forall w\,(w^z=w^x\cdot w^y)$

אז $\langle \mathbb{N}, E\rangle$ שקול ל- $\mathcal{A}$. לכן גם קבוצת הפסוקים הנכונים לוגית ב- $\langle \mathbb{N}, E\rangle$ אינה כריעה.
לכן קבוצת הפסוקים בשפה המכילה בסה"כ קבוע פעולה דו-מקומית אחד האמיתיים לוגית אינה כריעה. לכן קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפה המכילה קבוע פעולה דו-מקומי אינה כריעה. זה נקרא $\boxed{\text{משפט צ'רץ' המתוגבר}}$.

משפט טרסקי אמר ש- $Th_{\mathcal{N}}$ הוא לא אריתמטית.

$\boxed{\text{משפט טרסקי המוכלל}}$: תהי Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים שבה פונקציית האלכסון d ניתנת לייצוג חלק. אז קבוצת מספרי גדל של הפסוקים ב- Σ אינה ניתנת לייצוג חלק ב- Σ.

רצינו להוכיח את המשפט אבל נשתמש במשפט $\boxed{\text{נקודת השבת של גדל}}$:

- תהי Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים, אשר פונקציית האלכסון d ניתנת לייצוג חלק בה, אז לכל $\varphi\in\Phi_1$ קיים פסוק ψ כך שהפסוק $\varphi(\#\psi)\leftrightarrow(\neg\psi)$ נמצא ב- Σ.

(18) 19.6.07
לוגיקה

פונקצית האלכסון - אם χ נוסחה עם משתנה חופשי אז
$$d(\#\chi) = \#(\chi(\overline{\#\chi}))$$
$$d(k) = k$$

זאת פונקציה רקורסיבית!

משפט טרסקי המוכלל: תהי Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים (ואבהכרח $\mathfrak{N}\models\Sigma$). נניח ש-$d$ ניתנת לייצוג חלק ב-Σ אז הקבוצה A של מספרי גדל של פסוקי Σ אינה ניתנת לייצוג חלק ב-Σ.

הערה: אם נבחר $\mathfrak{N}=\Sigma$ אז נקבל את משפט טרסקי (הלא מוכלל).
מדוע? ב-$\mathfrak{N}$ "ייצוג חלש" ו"ייצוג חלק" זה אותו דבר. ב-$\mathfrak{N}$ קבוצה ניתנת לייצוג אמ"מ היא אריתמטית. d רקורסיבית ולכן אריתמטית ולכן ניתנת לייצוג חלק ב-$\mathfrak{N}$. $\Leftarrow$ $\mathfrak{N}$ אינה ניתנת לייצוג חלק ב-$\mathfrak{N}$, כלומר האמת אינה כריעה.

משפט נקודת השבת של גדל: תהי Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים רק ש-d ניתנת לייצוג חלק בה. לכל נוסחה φ עם משתנה חופשי אחד בשפה קיים פסוק ψ כך שהפסוק $\neg\psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\#\psi})$ נמצא ב-Σ.
הסבר: כאשר מציבים את $\overline{\#\psi}$ ב-φ מקבלים פסוק ששקול דווקא לשלילת ψ.

הוכחה: d ניתנת לייצוג חלק. תהי $\delta(x,y)$ נוסחה עם שני משתנים חופשיים, המייצגת חלק את d ב-Σ. נסתכל בנוסחה
$$\chi(x) := \neg\forall y(\delta(x,y)\to\varphi(y))$$
יהי ψ הפסוק $\psi := \chi(\overline{\#\chi})$ נראה ש-$\neg\psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\#\psi})$ ב-Σ.
ההוכחה נמצאת בדפים.

הוכחת משפט טרסקי המוגבל: תהי A קבוצת מספרי גדל של הפסוקים ב-Σ. נניח בשלילה שהיא ניתנת לייצוג חלק ב-Σ. נניח ש-A מיוצגת חלק ע"י הנוסחה $\varphi(x)$. לפי משפט נקודת השבת קיים פסוק ψ כך ש- $\left(\varphi(\overline{\#\psi}) \leftrightarrow \neg\psi\right) \in \Sigma$.

מן הסתם $\psi \in \Sigma$ או $\psi \notin \Sigma$ (חוק השלישי הנמנע)

אם $\psi \in \Sigma$ אז $\neg\varphi(\overline{\#\psi}) \in \Sigma^{(*)}$ אבל Σ עקבית. $\Leftarrow$ $\varphi(\overline{\#\psi}) \notin \Sigma$

וזאת סתירה לכך ש- φ מייצגת חלק את A.

אם $\psi \notin \Sigma$ אז $\#\psi \notin A$. $\Leftarrow$ $\neg\varphi(\overline{\#\psi}) \in \Sigma$ $\Leftarrow$ $\psi \in \Sigma$

וזאת סתירה גם כן. $\Leftarrow$ A אינה ניתנת לייצוג חלק. ☺

הסבר ל-(*): נתון $\Sigma \vdash \varphi(\overline{\#\psi}) \leftrightarrow \neg\psi$

$$\Rightarrow \Sigma \models \varphi(\overline{\#\psi}) \leftrightarrow \neg\psi$$

$$\Rightarrow \Sigma, \varphi(\overline{\#\psi}) \models \neg\psi$$

$$\Rightarrow \Sigma, \psi \models \neg\varphi(\overline{\#\psi})$$

כי $\psi \in \Sigma$ $\Rightarrow \Sigma \models \neg\varphi(\overline{\#\psi})$

כי Σ תורה $\Rightarrow \Sigma \vdash \neg\varphi(\overline{\#\psi})$

הכללת משפט האי-שלמות של גדל: תהי Σ תורה אקסיומטית עקבית בשפת תורת המספרים, המכילה את Π. אז Σ אינה שלמה.

הוכחה: תהי T_Σ קבוצת מספרי גדל של הפסוקים ב-Σ. T_Σ היא נ"ר. תהי $\{n : n \text{ אינו מספר גדל של פסוק}\} = A$ (סמן)

$B = \{n : T_\Sigma(32 \cdot 3^n)\} \cap A^c$ - קבוצת מספרי גדל של הפסוקים ששלילתם נמצאת ב-Σ.

אם Σ שלמה, אז $T_\Sigma^c = A \cup B$. A רקורסיבית וגם A^c רקורסיבית וברור ששתיהן נ"ר. נסתכל על $\{n : T_\Sigma(32 \cdot 3^n)\}$ היא נ"ר כי היא הרכבה של יחס נ"ר עם יחס רקורסיבי.

אז B חיתוך של שתי קבוצות נ"ר. $\Leftarrow$ B נ"ר. $\Leftarrow$ $T_\Sigma^c = A \cup B$ נ"ר. כי הקבוצה המשלימה ל-T_Σ. לכן T_Σ ומשלימתה שתיהן נ"ר $\Leftarrow$ T_Σ רקורסיבית. $\Pi \subseteq \Sigma$ לכן T_Σ ניתנת לייצוג חלק ב-Σ.

(19)

פונקציית האלכסון הינה רקורסיבית, לכן גם d ניתנת לייצוג חלק ב-Σ. וזאת סתירה למשפט המוטל של טרסקי.

הערה: אפשר היה לקצר את ההוכחה. תורה אקסיומטית ועקבית שמכילה את Π הינה לא רקורסיבית. לכן יכולנו לסיים ברגע שאמרנו ש-T_Σ הינה רקורסיבית.

משפט האי שלמות השני של גדל (ללא הוכחה): אם Σ תורה אקסיומטית עקבית בשפת תורת המספרים, המכילה את Π אז $Con_\Sigma \notin \Sigma$ כאשר $Con_\Sigma = \neg T_\Sigma(\#(\bar{0}\neq\bar{0}))$ (זה למעשה פסוק שאומר ש-Σ עקבית).

הסבר: אז אם Σ עקבית אי אפשר להוכיח את זה. אם Σ לא עקבית אז אפשר להוכיח שהיא עקבית (הרי אפשר להוכיח הכל).

זה משפט חשוב מאוד והוא נכון לא רק לתורת המספרים אלא גם להרבה תורות אחרות שאפשר לעשות להן רדוקציה.

תורת המודלים

אולטרה מכפלות

הגדרה: תהי A קבוצה. תת קבוצה לא ריקה $F \subseteq 2^A$ תיקרא **פילטר** (מסנן) אם מתקיימים התנאים הבאים:

א) $\emptyset \notin F$

ב) F סגורה לחיתוך. כלומר אם $A,B \in F$ אז $A \cap B \in F$

ג) F סגורה להרחבה. כלומר אם $B \in F$ ו-$B \subseteq C$ אז $C \in F$.

נובע מההגדרה שאין ב-F קבוצות זרות. שהרי אם $A \cap B = \emptyset$ נובע ש-$\emptyset \in F$ בסתירה להגדרה.

חוץ מזה $A \in F$ משמע שאם $B \in F$ אז $B \subseteq A$ ואז $A \in F$.

באינדוקציה קל לראות ש-F סגורה לגבי חיתוכים סופיים כלשהם.

לגבי חיתוכים אינסופיים - בד"כ אין סגירות.

דוגמאות:

① $\{A\}$ הוא מסנן

② תהי $\emptyset \neq B \subseteq A$ אז קבוצת ההרחבות שלה $\{C : B \subseteq C \subseteq A\}$ הוא מסנן על A. מסנן זה סגור גם לחיתוכים אינסופיים. כיוון שיש $\aleph_{17}$ קבוצות שמכילות את B אז גם חיתוכן מכיל את B.

הגדרה: בהינתן A ו- $\emptyset \neq B \subseteq A$ הפילטר $\{C : B \subseteq C \subseteq A\}$ נקרא ==פילטר ראשי==.

דוגמה: קיימים גם פילטרים לא ראשיים. תהי A קבוצה אינסופית. קבוצת תתי הקבוצות של A בעלות משלים סופי הוא פילטר והוא לא ראשי. הפילטר הזה לא סגור לחיתוכים אינסופיים. נסתכל מסדרה אינסופית של איברי A $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subseteq A$ ונסתכל על

$$A_1 = A \setminus \{a_1\}$$

$$A_2 = A \setminus \{a_2\}$$

$$\vdots$$

$$A_n = A \setminus \{a_n\}$$

$$\vdots$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in F$ אבל $\bigcap A_n \notin F$!

דוגמה: תהי a נקודה במרחב טופולוגי X. קבוצת הסביבות של a הוא פילטר על X.
אם $X = \mathbb{R}$ אז הפילטר כזה אינו ראשי, כי אין סביבה שמוכלת בכל הסביבות.

הגדרה: פילטר F נקרא ==אולטרה פילטר== אם הוא מקסימלי, כלומר אין פילטר F' כך ש- $F \subsetneq F'$.

תנאי הכרחי ומספיק לכך הוא שלכל $B \subseteq A$ או $B \in F$ או $B^c \in F$

טענה: אולטרה פילטר ראשי של A הוא כל הקבוצות המכילות איבר מסוים (קבוע) של A.

(20) 266.07
לוגיקה

בשבוע שעבר דיברנו על פילטרים.
בהינתן קבוצה A פילטר על A הוא קבוצה חלקית של $P(A)$ שלא מכילה את $\emptyset$ וסגורה לחיתוכים סופיים ולהרחבות.
פילטר ראשי הוא פילטר שבו כל הקבוצות מכילות קבוצה מסויימת. פילטר ראשי סגור גם לחיתוכים אינסופיים.
קיימים פילטרים שאינם ראשיים.

דוגמא: X מ"ט. $a\in X$. קבוצת הסביבות של a היא פילטר של X. אם a מבודדת זה פילטר ראשי, אחרת זה פילטר לא ראשי!

דוגמא: תהי A קבוצה אינסופית. I משפחת תתי הקבוצות הסופיות של A. נגדיר פילטר על I. לכל $\alpha\in A$ (כלומר α תת קבוצה סופית של A) נסמן $X_\alpha=\{\beta\in I:\alpha\subseteq\beta\}$ (כלומר תת קבוצה של I שמכילה את כל הקבוצות הסופיות שמכילות את α). ונסמן $F=\{B\subseteq I: X_\alpha\subseteq B,\ \alpha\in I\}$
(קבוצת הקבוצות שמכילות איזשהו X_α).
לא קשה להוכיח שזה פילטר אבל לא ראשי!

הגדרה: פילטר F נקרא אולטרה פילטר (על אמנן) אם הוא מקסימלי (כלומר אין פילטר שמכיל אותו ממש) וזה אומר שלכל תת קבוצה $B\subseteq A$, $B\in F$ או $B^c\in F$. (הוכחה בדפים)

* זה אומר לתורת הקבוצות שמה אבל לא נרחיב על זה כי אין זמן.

טענה: אולטרה-פילטר הוא ראשי אמ"מ הוא מהצורה $\{B\subseteq A: a\in B\}$ כאשר a איבר קבוע ב-A.

טענה: אולטרה פילטר הוא לא ראשי אמ"מ הוא מכיל כל קבוצה שמשלימתה סופית (עבור קבוצה A אינסופית).

משפט: לכל פילטר יש אולטרה-פילטר שמכיל אותו.

אולטרה מכפלות

נסתכל במשפחה מבנים לשפה $\mathcal{L}$ $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ כאשר I קבוצת אינדקסים לא בהכרח בת-מניה.

יהי $\mathcal{U}$ אולטרה-פילטר על I ונגדיר את האולטרה מכפלה $\underset{i\in I}{\times}\mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ כדלהלן: העולם הוא $\underset{i\in I}{\times}M_i/\mathcal{U}$ (M_i עולמו של $\mathcal{M}_i$).

- $\underset{i\in I}{\times}M_i$ כל קבוצת הפונקציות f מ-I ל-$\bigcup M_i$ רק שלכל i מתקיים $f(i) \in M_i$ (זה שהיא לא ריקה דורש בדיוק אקסיומת הבחירה).

- נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $\underset{i\in I}{\times}M_i$: $f \sim g$ אמ"מ $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

- רפלקסיביות: $f \sim f$ כי $\{i \in I : f(i) = f(i)\} = I$ ו-$I \in \mathcal{U}$.
- סימטריות: $f \sim g$ אז $\mathcal{U} \ni \{i\in I: f(i)=g(i)\}=\{i\in I: g(i)=f(i)\}$

$\Leftarrow g \sim f$

- טרנזיטיביות: $f \sim g$ ו-$g \sim h$. אז $A=\{i\in I: f(i)=g(i)\}\in\mathcal{U}$ ו-$B=\{i\in I: g(i)=h(i)\}\in\mathcal{U}$

אז $\{i\in I: f(i)=h(i)\} \supseteq A\cap B \in \mathcal{U}$

$\Leftarrow f \sim h$.

- $M=\underset{i\in I}{\times}M_i/\mathcal{U}$ כל קבוצת מחלקות השקילות לפי היחס $\sim$ על $\underset{i\in I}{\times}M_i$

הגדרה: אולטרה-מכפלה (בהסתייגות): בסימונים הקודמים, $\mathcal{M}=\underset{i\in I}{\times}\mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ הוא המבנה הבא ל-$\mathcal{L}$: העולם הוא $M=\underset{i\in I}{\times}M_i/\mathcal{U}$ לכל קבוע אישי a ב-$\mathcal{L}$ $\mathcal{M}(a)$ יוגדר כמחלקת השקילות $g/\mathcal{U}$ של הפונקציה $g\in\underset{i\in I}{\times}M_i$ שלכל $i\in I$ $g(i)=\mathcal{M}_i(a)$.

לכל סימן יחס n-מקומי $\bar{R}$ ב-$\mathcal{L}$ $\mathcal{M}(R)$ הוא היחס ה-n
מקומי R של M כדלהלן:
$\langle f_1/U \dots f_n/U\rangle \in R$ אמ"מ $\{i\in I : \langle f_1(i),\dots,f_n(i)\rangle \in \mathcal{M}_i(\bar{R})\}\in U$
(כאן נכנסת ההסתייגות - צריך להראות שזה בלתי תלוי בנציגים).
יהי F קבוע פעולה ב-$\mathcal{L}$ n-מקומי ונגדיר את $\mathcal{M}(F)$ כך:
זו הפעולה ה-n-מקומית F של M כדלהלן: $F(f_1/U,\dots,f_n/U)=h/U$
כאשר לכל $i\in I$: $h(i)=\mathcal{M}_i(F)(f_1(i),\dots,f_n(i))$. (וגם כאן צריך להראות
שאין תלות בבחירת הנציגים).

כדי להסביר את ההסתייגות יש להוכיח ש-$\mathcal{M}(R)$; $\mathcal{M}(F)$
אינן תלויות בנציגים. זה לא קשה ונשאר כתרגיל.

<u>הגדרה:</u> אם כל ה-$\mathcal{M}_i$ הם אותו מבנה A אז האולטרא-מכפלה נקראת
אולטרא-חזקה ומסמנים אותה A^I/U.

<u>טענה:</u> אם האולטרא-פילטר U הוא ראשי אז $\mathcal{M}$ איזומורפי
לאחד ה-$\mathcal{M}_i$-ים - לזה i_0 שיוצר את U, כלומר
$U=\{B\subseteq I : i_0\in B\}$. כלומר $\mathcal{M}\cong\mathcal{M}_{i_0}$.
<u>הוכחה:</u> נגדיר $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{M}_{i_0}$ ההטלה על הרכיב ה-i_0.
כלומר $\varphi(f/U)=f(i_0)$. זה לא תלוי בבחירת הנציג משום
ש- $f\sim g$ אמ"מ $f(i_0)=g(i_0)$. זו העתקה חח"ע ועל
ואפשר לראות שהיא שומרת על הקבועים.
$\mathcal{M}(\bar{a})=f/U$ רק אם לכל $i\in I$; $f(i)=\mathcal{M}_i(\bar{a})$ ובפרט $f(i_0)=\mathcal{M}_{i_0}(\bar{a})$
ומכאן מקבלים שההטלה על הרכיב ה-i_0 שומרת על $\bar{a}$.
בצורה דומה מראים לסימני יחס ולקבועי פעולה.

מכאן שמה שמעניין הוא אולטרא-מכפלות כאשר הפילטר לא ראשי.

משפט Łoś: תהי $\{\mathcal{M}_i : i\in I\}$ סדרת מבנים ל-$\mathcal{L}$.

על $\mathcal{M}_i$ יהי M_i עולמו. יהי $\mathcal{U}$ אולטרה פילטר על I ונסמן

$\mathcal{M} = \prod_{i\in I}\mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ אז:

א) יהי $t=t(x_1,\dots,x_n)$ שם עצם בשפה $\mathcal{L}$ שהמשתנים המופיעים בו לקוחים מבין $x_1,\dots,x_n$ (ייתכן $n=0$ ואז הוא קבוע). אז לכל השמה ב-$\mathcal{M}$ הנותנת ל-$x_1,\dots,x_n$ את ערכים $f_1/\mathcal{U},\dots,f_n/\mathcal{U}$ בהתאמה הערך של שם העצם t ב-$\mathcal{M}$ הוא $f/\mathcal{U}$ כאשר לכל $i\in I$ $f(i)=V_{\mathcal{M}_i}^{[x_1,\dots,x_n/f_1(i),\dots,f_n(i)]}$

ב) תהי $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ נוסחה שהמשתנים המופיעים בה הם מבין $x_1,\dots,x_n$ (אולי $n=0$). אז $\mathcal{M}\models\varphi[f_1/\mathcal{U},\dots,f_n/\mathcal{U}]$ אמ"מ $\{i\in I : \mathcal{M}_i\models\varphi[f_1(i),\dots,f_n(i)]\}\in\mathcal{U}$.

שימוש ראשון שנראה במשפט Łoś הוא הוכחת משפט הקומפקטיות:

תהי Γ קבוצת פסוקים שכל תת קבוצה סופית שלה עקבית. אז Γ עקבית.

הוכחה: תהי I משפחת התת קבוצות הסופיות של Γ.

לכל $\alpha\in I$ יהי $\mathcal{M}_\alpha$ מבנה לשפה $\mathcal{L}$ שהוא מודל של α.

לכל $\alpha\in I$ תהי X_α קבוצת איברי I המכילים את α ונגדיר $F=\{B\subseteq I : \text{יש } \alpha\in I\ X_\alpha\subseteq B\}$. זה פילטר על I.

יהי $\mathcal{U}$ אולטרה פילטר המכיל את F. נסתכל במכפלה המצומצמת $\mathcal{M}=\prod_{\alpha\in I}\mathcal{M}_\alpha/\mathcal{U}$ ונראה שזה מודל של Γ. צ"ל שכל פסוק φ ב-Γ הוא אמיתי ב-$\mathcal{M}$. יהי φ פסוק ב-Γ.

לכל תת קבוצה סופית α ש-$\varphi\in\alpha$ מתקיים $\mathcal{M}_\alpha\models\varphi$.

לפי הגדרת F ולפי הגדרת $\mathcal{U}$ הקבוצה $X_{\{\varphi\}}$, דהיינו קבוצת הקבוצות הסופיות ב-Γ המכילות את φ, שייכת ל-$\mathcal{U}$.

לכן קבוצת האינדקסים i כך ש-$\mathcal{M}_i\models\varphi$ נמצאת ב-$\mathcal{U}$.

$\Leftarrow$ לפי משפט Łoś $\mathcal{M}\models\varphi$. $\Leftarrow$ $\mathcal{M}$ מודל של Γ ☺

(22) 3.07.07

לוגיקה

התחלנו לדבר על אולטרה-מכפלות. הגולה שלהן הוא משפט Łoš :

תהי $\{\mathfrak{M}_i : i\in I\}$ סדרת מבנים לשפה $\mathcal{L}$. לכל $\mathfrak{M}_i$ יהי M_i העולם ויהי U אולטרה-פילטר על I. נסתכל במכפלה $\mathfrak{M} = \prod_{i\in I}\mathfrak{M}_i/U$ אזי:

א) יהי $t(x_1,\dots,x_n)$ שם ע' ב-$\mathcal{L}$. בהשמה שנותנת ל-$x_1,\dots,x_n$ את הערכים $f_1/U,\dots,f_n/U$ בהתאמה, ערכו של t הוא f/U כאשר לכל $i\in I$ $f(i) = V_{\mathfrak{M}_i}^{[x_1,\dots,x_n|f_1(i),\dots,f_n(i)]}(t)$

ב) תהי $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ נוסחה ב-$\mathcal{L}$ ויהיו $f_1,\dots,f_n$ פונקציות מתוך $\prod_{i\in I} M_i$. אזי $\mathfrak{M}\models\varphi[f_1/U,\dots,f_n/U]$ אמ"מ קבוצת האינדקסים $\{i\in I: \mathfrak{M}_i\models\varphi[f_1(i),\dots,f_n(i)]\}$ נמצאת ב-U.

הוכחה:

א) (סקירה של ההוכחה) באינדוקציה על בניית שם העצם. אם $t=\bar a$ קבוע אישי, אז הטענה מתקבלת מהגדרת הערך של קבוע אישי באולטרה מכפלה, שהרי $\mathfrak{M}(\bar a) = f/U$ כאשר לכל i $f(i)=\mathfrak{M}_i(\bar a)$.

אם $t=x_k$ משתנה אז ערכו בהשמה המתוארת בחלק א' של הטענה הוא f_k/U. מצד שני, לכל $i\in I$: ערכו של $t=x_k$ במבנה $\mathfrak{M}_i$ בכל השמה הנותנת ל-x_k את הערך $f_k(i)$ הוא $f_k(i)$ $\Leftarrow$ השוויון נכון לכל משתנה.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות ל-$t_1,\dots,t_m$ ונראה נכונות ל-$t=\bar F(t_1,\dots,t_m)$ כאשר $\bar F$ קבוע פעולה m-מקומי.

המעבר מ-$t_1,\dots,t_m$ ל-t נובע מהגדרת הפירוש של $\bar F$ ב-$\mathfrak{M}$.

ב) (בקצרה) באינדוקציה על בניית הנוסחה φ

לנוסחה אטומית $\bar R(t_1,\dots,t_m)$. את הערך של שמות העצם אנחנו יודעים מ-א' ואז זה נובע במישרין מהגדרת הפירוש של $\bar R$ ב-$\mathfrak{M}$.

נניח נכונות ל-ψ ונראה נכונות ל-$\varphi=\neg\psi$.

$\mathcal{M}\models\varphi[f_1/U,\dots,f_n/U]$ אמ״מ $\mathcal{M}\models\neg\psi[f_1/U,\dots,f_n/U]$
אמ״מ $\mathcal{M}\not\models\psi[f_1/U,\dots,f_n/U]$ אמ״מ $\{i\in I:\mathcal{M}_i\models\psi[f_1(i),\dots,f_n(i)]\}$
לא ב-U אמ״מ $\{i\in I:\mathcal{M}_i\not\models\psi[f_1(i),\dots,f_n(i)]\}$ נמצאת ב-U
(משום ש-U אולטרה פילטר) אמ״מ $\{i\in I:\mathcal{M}_i\models\varphi[f_1(i),\dots,f_n(i)]\}$
ב-U וזה מה שרצינו.

נניח נכונות ל-φ ו-ψ ונוכיח נכונות ל- $\varphi\wedge\psi$.
$\mathcal{M}\models\varphi[f_1/U,\dots,f_n/U]\wedge\psi[f_1/U,\dots,f_n/U]$ אמ״מ $\mathcal{M}\models\varphi[\dots]$
וגם $\mathcal{M}\models\psi[\dots]$ אמ״מ קבוצת האינדקסים עבורם φ
נכון נמצאת ב-U וגם קבוצת האינדקסים עבורם ψ נכונה
נמצאת ב-U משום הסגירות לחיתוך, קבוצת האינדקסים
עבורם $\varphi\wedge\psi$ נכונה היא ב-U. הכיוון השני
מתקבל מסגירות להרחבות.
אם $\varphi=\exists x\psi$ זה גם לא מסובך.

<u>מסקנה</u>: מהסימונים של משפט Łoš: פסוק ב-$\mathcal{L}$ אמיתי
ב-$\mathcal{M}$ אמ״מ קבוצת האינדקסים בה שהוא אמיתי ב-$\mathcal{M}_i$
נמצאת באולטרה-פילטר.

<u>מסקנה</u>: אם $\mathcal{A}$ מבנה, I קבוצת אינדקסים, U
אולטרה פילטר על I (נסתכל באולטרה חזקה $\mathcal{M}=\mathcal{A}^I/U$).
כל פסוק φ אמיתי ב-$\mathcal{M}$ אמ״מ הוא אמיתי ב-$\mathcal{A}$.
(כלומר $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{A}$ שקולים אלמנטרית).
אם U אולטרה פילטר ראשי אז $\mathcal{M}$ איזומורפי ל-$\mathcal{A}$.

<u>מסקנה</u>: אם $\mathcal{A}$ סופי אז $\mathcal{A}^I/U$ גם הוא סופי ומספר
איבריו שווה לזה של $\mathcal{A}$ והוא אפילו איזומורפי לו.
<u>הוכחה</u>: אם $\mathcal{A}$ סופי אז יש פסוק מסדר ראשון
שאומר כמה איברים יש בו והפסוק הזה נכון גם ב-$\mathcal{A}^I/U$.
אם $\mathcal{A}$ סופי אז קבוצת הפסוקים האמיתיים ב-$\mathcal{A}$ היא קטגורית (כל
שני מודלים שלה איזומורפיים) לכן $\mathcal{A}^I/U$ איזומורפי ל-$\mathcal{A}$.

אם $\mathcal{A}$ אינסופי אז יש לו אולטרה חזקות בעוצמות גדולות כרצוננו. מכאן מתקבל שכל קבוצת פסוקים, אם יש לה מודל אינסופי אז יש לה מודלים בעוצמות גדולות כרצוננו.

<u>תזכורת:</u> $\mathcal{B}$ תת מבנה אלמנטרי של $\mathcal{A}$ פירושו שכל נוסחה $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ וכל $b_1,\dots,b_n\in\mathcal{B}$ $\mathcal{A}\models\varphi[b_1,\dots,b_n]$ אמ"מ $\mathcal{B}\models\varphi[b_1,\dots,b_n]$. מסמנים $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$

ברור שאם $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$ אז $\mathcal{B}$ שקול אלמנטרית ל-$\mathcal{A}$, שהרי בפרט שיש פסוק (לא) תלוי בהשמה.

האם גם הכיוון ההפוך נכון? נניח $\mathcal{B}$ תת מבנה של $\mathcal{A}$ שהוא שקול אלמנטרית ל-$\mathcal{A}$. האם נובע ש-$\mathcal{B}$ תת מבנה אלמנטרי של $\mathcal{A}$? - לא! נסתכל על $N=\{0,1,2,\dots\}$

$M=\{1,2,3,\dots\}$

ונסתכל במבנים $\langle N,<\rangle$, $\langle M,<\rangle$. כמובן $\langle M,<\rangle$ הוא תת מבנה של $\langle N,<\rangle$ והוא איזומורפי לו: נסתכל בפונקציה $f: N\to M$, $x\mapsto x+1$. כי פונק' חח"ע ועל ושומרת על סדר $<$.

$\Leftarrow$ הם שקולים אלמנטרית. אבל $\langle M,<\rangle\nprec\langle N,<\rangle$

נסתכל על הנוסחה $\varphi(x)\stackrel{\text{def}}{=}\exists y(y<x)$. אז הנוסחה אומרת ש-$x$ אינו ראשון. אבל $\langle M,<\rangle\models\varphi[1]$ ואילו $\langle N,<\rangle\not\models\varphi[1]$!

יהי $\mathcal{A}$ מבנה ונסתכל באולטרה חזקה שלו $\mathfrak{M}=\mathcal{A}^I/U$. ב-$\mathfrak{M}$ נסתכל רק באיברים מהצורה f/U כאשר קיים $a\in\mathcal{A}$ כך שלכל $i\in I$ $f(i)=a$ (כלומר נסתכל רק במחלקות השקילות של הסדרות הקבועות)

<u>טענה:</u>

(א) קבוצה זו היא עולם של תת מבנה של $\mathfrak{M}$. תת מבנה זה ייקרא $\mathfrak{M}_0$.

(ב) $\mathfrak{M}_0$ איזומורפי ל-$\mathcal{A}$

(ג) M_0 הוא תת מבנה אלמנטרי של M.

<u>הוכחה:</u>

(א) יהי $\bar{a}$ קבוע אישי. אז $M(\bar{a})=f/U$ כאשר לכל i
$f(i)=A(\bar{a})$. לכן $M(\bar{a})$ נמצא בעולמו של M_0.
נניח שגם $f_1/U,\dots,f_n/U$ ב-M_0 ו-F קבוע
פעולה n-מקומית אז $M_0 \ni M(F)(f_1/U,\dots,f_n/U)$
מותר להניח ש-

$$f_1=(a_1,a_1,\dots)$$
$$f_2=(a_2,a_2,\dots)$$
$$\vdots$$
$$f_n=(a_n,a_n,\dots)$$

שהרי $f_1,\dots,f_n$ שקולות לפונקציות קבועות.
ברור ש- $M(F)(f_1/U,\dots,f_n/U)=f/U$ כאשר
f היא פונקציה כך שלכל i $f(i)=A(F)(a_1,\dots,a_n)$
וזו שוב פונק' קבועה $\Rightarrow$ $M(F)(f_1/U,\dots,f_n/U)\in M_0$
$\Rightarrow$ M_0 הוא תת מבנה.

(ב) נסתכל בפונקציה $h: A\to M_0$ (כאשר A עולמו של A
ו-M_0 עולמו של M_0) המוגדרת ע"י $h(a)=\langle a,a,\dots\rangle/U$.
קל לראות שזה חח"ע ועל וגם שומר על קבועי השפה.
(פונקציות ויחסים)

(ג) צריך להראות ש-M_0 תת מבנה אלמנטרי של M.
לצורך ההוכחה נשתמש בקריטריון טרסקי-ווט (Vaught)
לתת מבנה אלמנטרי: אם B תת מבנה של A אזי
B תת מבנה אלמנטרי אם לכל נוסחה $\varphi(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$
ולכל $a_1,\dots,a_n\in B$ אם $A\models\psi[a_1,\dots,a_n]$ אז
קיים $b\in B$ כך ש- $A\models\varphi[a_1,\dots,a_n,b]$ כאשר
$\psi(x_1,\dots,x_n)=\exists x_{n+1}\varphi(x_1,\dots,x_{n+1})$ (הדגש הוא שאם קיים
עד ב-A אז דבר ההכרח קיים עד ב-B שזה לא
בהכרח נכון).

(24) 107 C7

<u>מבנה רווי</u>

המבחן – כאן המבנה קודם
– לא אמור להיות קשה יותר.

הדבר האחרון שאמרנו היה הטענה הבאה:
$\mathfrak{A}$ מבנה, I קבוצת אינדקסים, U אולטרה פילטר על I. נסתכל ב- $\mathfrak{A}^I/U$. נסתכל בה על קבוצת מחלקות השקילות של הפונקציות הקבועות. אזי
(א) M הוא מבנה של תת יקום $\mathfrak{A}^I/U$ $M \leq \mathfrak{A}^I/U$.
(ב) יש איזומורפיזם טבעי בין M ו- $\mathfrak{A}$ הנ"ל $a \mapsto (a,a,\ldots)/U$.
(ג) M תת מבנה אלמנטרי של $\mathfrak{A}^I/U$.

שני מבנים שקולים אלמנטרית לא חייבים להיות איזומורפיים.

<u>משפט לוונהיים-סקולם היורד</u>: תהי $\mathcal{L}$ שפה בת-מניה ו- $\mathfrak{A}$ מבנה אינסופי ל- $\mathcal{L}$. אזי יש ל- $\mathfrak{A}$ תת מבנה אלמנטרי בן מניה.
<u>דוגמה</u>: ל- $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ יש תת מבנה אלמנטרי בן מניה.
אבל תת המבנה הזה כמובן לא יהיה איזומורפי לו.

<u>משפט</u> (ללא הוכחה): אם $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ מבנים בשפה $\mathcal{L}$ אז $\mathfrak{A}$ שקול אלמנטרית ל- $\mathfrak{B}$ אמ"מ $\mathfrak{A}$ ניתן לשכון אלמנטרית באולטרה חזקה של $\mathfrak{B}$.

<u>משפט</u> (שלח) (ללא הוכחה) $\mathfrak{B}, \mathfrak{A}$ שקולים אלמנטרית אמ"מ יש להם אולטרה חזקות איזומורפיות. יתרה מכן, אמ"מ יש קבוצת אינדקסים I ואולטרה פילטר U על I כך ש- $\mathfrak{A}^I/U \cong \mathfrak{B}^I/U$.

משפט סקולם לוונהיים העולה (משפט ה[illegible]) :

לכל מבנה ניתן להרחיב אלמנטרי מעוצמה גדולה כרצוננו.

רעיון ההוכחה: $\mathfrak{A}$ ניתן לשכון אלמנטרית ב- $\mathfrak{A}^I/U$, אז נקח קבוצת אינדקסים מאוד גדולה. אבל צריך לדאוג שאולטרה הפילטר מיוחד כדי שהמבנה של מחלקות השקילות יהיה גדול כי זה מוריד את העוצמה של $\mathfrak{A}^I/U$ (למשל אם האולטרה ראשי כזה לא היה עובד).

בו נראה שאם $\mathfrak{A}$ מבנה אינסופי ו- κ עוצמה אינסופית, אז יש אולטרה חזקה של $\mathfrak{A}$ שעוצמתה אינה קטנה מ- κ. תהי A קבוצה בעוצמה κ: ותהי I משפחת הקבוצות הסופיות החלקיות ל- A. ויהי U אולטרה פילטר על I כך שלכל $\alpha \in I$ הקבוצה $\{\beta \in I : \alpha \subseteq \beta\}$ נמצאת ב- U.

מה שנותר להראות הוא $|A| \leq |\mathfrak{A}^I/U|$. כדי להוכיח אותה נבנה פונקציה מ- A לתוך $\mathfrak{A}^I/U$ ונראה שהיא חח"ע.

מסקנה: יהי $\mathfrak{A}$ מבנה אינסופי, ו- κ עוצמה שעוצמתה גדולה או שווה לעוצמת $\mathfrak{A}$ ולעוצמת $\mathcal{L}$. יש ל- $\mathfrak{A}$ הרחבה אלמנטרית בעוצמה κ.

הוכחה: יהי $\mathfrak{C}$ הרחבה מעוצמה $\geq \kappa$ של $\mathfrak{A}$. אותה הרחבה בה יש את קבוצת A שמכילה את עוצמה של $\mathfrak{A}$ (לפי מה שהוכחנו היא הרחבה אלמנטרית) ולפי משפט היורד יש הרחבה של מבנה אלמנטרי שעוצמתה κ המכיל את C. כך נראה ש- $\mathfrak{A}$ ניתן להכין אלמנטרי ב- $\mathfrak{B}$.

(:)