- < מתקבל ע"י $\lambda xy(1 \dot- (y \dot- x))$
- מזעור חסום $\min z<y P(\underline{x},y) = \sum_{z<y} \exists v<z P(\underline{x},v)$
- $\max(x,y) = (x \dot- y)+y$
- כל פונקציה רקורסיבית היא חשיבה במכונת מונים
- כל פונקציה חשיבה היא רקורסיבית: מקודדים תוכניות כך: $\#P = \prod_{k<h} p_k^{\#C_k}$

כאשר $\#Z_i = 2^i$, $\#S_i = 3^i$, $\#J_{i,j,k} = 5^i 7^j 11^k$.
$Prog(z)$ יחס פ"ר שאומר ש-z מקודד תכנית. $\hat{z} = \begin{cases} z & Prog(z) \\ 1 & \neg Prog(z) \end{cases}$ פ"ר.
$\{z\}$ היא התכנית ש-$\hat{z}$ מקודד. כלומר $\#\{z\} = \hat{z}$. $\{z\}_n$ היא הפונקציה ש-$\{z\}$ מחשבת. u מייצג מצב של מכונה כך: ה-K-ים $(u)_0$ וב-R_i יש $(u)_i$. u מצב עצירה של $\{z\}$ אם $(u_0) \geq lh(\hat{z})$. למצב u יש מצב עוקב יחיד $Nex(u,z)$ וזו פונק' פ"ר. u_0 זה המצב ההתחלתי: $u_0 = p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n}$. $\{z\}$ מתחילה לעבוד ועוברת מצבים $u_{i+1} = Nex(u_i,z)$. אם $\{z\}$ עוצרת יהי u_h מצב העצירה הראשון. קוד החישוב של $\langle z,\underline{x}\rangle$ הוא $\prod_{t \leq h} p_t^{u_t}$. אם התכנית לא עוצרת אין קוד חישוב והוא ∞.
היחס $T_n(z,\underline{x},y)$ אומר ש-y הוא קוד החישוב של $\langle z,\underline{x}\rangle$. זה יחס פ"ר. נגדיר פונקציה $U(y) = ((y)_{lh(y)\dot-1})_1$. הטענה היא ש- $\{z\}(\underline{x}) = U(\mu y T_n(z,\underline{x},y))$.

- משפט הצורה הנורמלית: קיימת פונקציה פ"ר U ולכל n יחס פ"ר T_n כך שלכל פונקציה רקורסיבית f ב-n משתנים יש מספר e כך ש- $f(\underline{x}) = U(\mu y T_n(e,\underline{x},y))$.

ניסוח שקול: לכל n קיימת פונקציה רקורסיבית ב-$n+1$ משתנים $F(z,\underline{x})$ כך שלכל מספר e הפונקציה $G(\underline{x}) = F(e,\underline{x})$ היא פונקציה רקורסיבית ב-n משתנים. יתר על כן, כאשר עוברים על כל הערכים האפשריים ל-z מקבלים את כל הפונקציות הרקורסיביות ב-n משתנים.
ניסוח שקול: $\langle \lambda \underline{x} F(e,\underline{x}) : e \in \mathbb{N} \rangle$ זו מניה (עם חזרות) של כל הפונקציות הרקורסיביות ב-n משתנים.

- הפונקציה $\lambda x \{x\}(x)$ רקורסיבית אבל אינה שלמה וכל הרחבה שלמה שלה אינה רקורסיבית.

אם g הרחבה רקורסיבית אז $\lambda x (g(x)+1)$ רקורסיבית $\Rightarrow$ קיים e כך שלכל $x \in dom\, g$ $\{e\}(x) = g(x)+1$. $g(e)$ לא מוגדר כי מתקבל $g(e) = g(e)+1$, ולכן g אינה שלמה.
תחום ההגדרה של $\lambda x \{x\}(x)$ אינו רקורסיבי. כי אם כן, נסתכל על $g(x) = \begin{cases} \{x\}(x) & P(x) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$
זו הרחבה שלמה ורקורסיבית, סתירה.

- יחסים ר"ר סגורים תחת: הרכבה עם פונק' רקורסיביות שלמות, כמת ישי, $\wedge$, $\vee$, כמתים חסומים. כמת ישי - ע"י כיווץ של $\exists y \exists z P(\underline{x},y,z)$ ל- $\exists u P(\underline{x},K(u),L(u))$
- f רקורסיבית אמ"מ הגרף שלה ר"ר. $(\Leftarrow)$ ברור. $(\Rightarrow)$ אם $A(\underline{x},y) = \exists u R(\underline{x},u,y)$ אז $f(\underline{x}) = K(\mu z R(\underline{x},K(z),L(z)))$. אם f שלמה אז הגרף הוא רקורסיבי.
- R רקורסיבי אמ"מ R ו-$\neg R$ ר"ר. $R(x) = P(x, \mu u(P(x,u) \vee Q(x,u)))$

- התנאים הבאים שקולים: A נ"ר, A תחום של פונק' רקורסיבית, A נמנית ע"י ח-ח"ע של פונק' רקורסיביות.

אם- $A(\underline{x}) = \exists y R(\underline{x},y)$ אז $\lambda x(\mu y\, R(\underline{x},y))$.

אם- $A = \mathrm{dom} f$ יש e כך ש- $A(\bar{x}) = \exists y T_n(e,\underline{x},y)$. ניקח $\bar{a} \in A$! $\varphi_i(t) = \begin{cases} (t)_i & T(e,(t)_1,\ldots,(t)_n,(t)_0) \\ a_i & \text{else} \end{cases}$

אם $A = \emptyset$ אז $\langle f,\ldots,f\rangle$ כאשר $f(t) = \mu y(t+y \cdot t+y+1)$

- אם A נמנית ע"י $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ אז $A(\underline{x}) = \exists t(\langle t,x_1\rangle \in B_1 \wedge \ldots \wedge \langle t,x_n\rangle \in B_n)$ כאשר B_i הגרף של f_i

- הקבוצות הנ"ר הן בדיוק הקבוצות $\mathrm{dom}\{e\}_n$ - תחום של פונק' רקורסיבית.
- כל יחס נ"ר מתקבל ע"י כמת ישי מיחס פ"ר $\underline{x} \in \mathrm{dom}\{e\}_n = \exists y T(e,\underline{x},y)$
- כל פונקציה פ"ר היא אריתמטית. באינדוקציה על בניית הפונקציה. עבור היסודיות זה ברור. עבור הרכבה זה ברור. בשביל רקורסיה פרימיטיבית צריך את פונקציית β. $\beta(x,y,z) = rm(x,y(z+1)+1)$
- משפט השאריות הסיני: $d_0,\ldots,d_n$ זרים בזוגות. $d = \prod_{i=0}^{n} d_i$. לכל סדרה $\langle r_i : 0 \le i \le n\rangle$ כך שלכל i $r_i < d_i$ קיים מספר $c < d$ כך ש- $r_i = rm(c,d_i)$. ח-ח"ע היא טובה. אם $r_i < d_i$. יש בדיוק d כאלה. לכל c נותן ח-ח"ע $\langle rm(c,d_i) : 0 \le i \le n\rangle$. ארגומנטים שונים עוברים לכל ה- $c<d$ ה-ח-ח"ע שונות.
- $r_0,\ldots,r_n$ טבעיים. קיימים a,c כך ש- $\beta(c,a,i) = r_i$: יהי s גדול מ-n ומ-r_i. ניקח $a = s!$ ו- $d_i = a(i+1)+1$. ברור ש- $r_i < d_i$. ה- d_i זרים בזוגות $\Rightarrow$ יש c כך ש- $\beta(c,a,i) = r_i$.
- היחסים $<, \le$ והפונקציות rm ו- β אריתמטיים.
- עכשיו אפשר להוכיח את הרקורסיה הפרימיטיבית. אם $f(\underline{x},0) = g(\underline{x})$ $f(\underline{x},y+1) = h(\underline{x},y,f(\underline{x},y))$ השוויון $f(\underline{a},b) = c$ שקול לקיום $r_0,\ldots,r_b$ כך ש- $r_0 = g(\underline{a})$ $r_{i+1} = h(\underline{a},i,r_i)$ $r_b = c$ ואת זה אפשר לבטא ע"י פונקציית β.
- כל יחס נ"ר הוא אריתמטי משום שהוא מתקבל ע"י כמת ישי מיחס פ"ר.
- כל פונקציה רקורסיבית היא אריתמטית כי הגרף שלה נ"ר ולכן אריתמטי.
- מספור גדל: $\#\bar{0} = 1$, $\#x_i = 3^i$, $\#S(t) = 2 \cdot 3^{\#t}$, $\#(r \oplus t) = 4 \cdot 3^{\#r} 5^{\#t}$, $\#(r \odot t) = 8 \cdot 3^{\#r} \cdot 5^{\#t}$
$\#\forall x_i \varphi = 2^{6+i} 3^{\#\varphi}$, $\#(\varphi \to \psi) = 64 \cdot 3^{\#\varphi} \cdot 5^{\#\psi}$, $\#(\neg\varphi) = 32 \cdot 3^{\#\varphi}$, $\#(r = t) = 16 \cdot 3^{\#r} \cdot 5^{\#t}$

$$\#\langle \varphi_0,\ldots,\varphi_n\rangle = \prod_{i=0}^{n} p_{i+3}^{\#\varphi_i}$$

- הקבוצות הבאות רקורסיביות: מספרי גדל של שמות עצם, מספרי גדל של נוסחאות, מספרי גדל של פסוקים, מספרי גדל של סדרות סופיות של פסוקים, מספרי גדל של סדרות הוכחה מ- Γ כאשר Γ קבוצה כריעה של פסוקים, היחס $pr(x,y)$ שאומר ש- y מספר גדל של פסוק ו- x מספר גדל של הוכחה של y מתוך Γ כאשר Γ קבוצה כריעה של פסוקים
- משפט טרסקי: T קבוצת מספרי גדל של פסוקים אמיתיים ב- $\mathbb{N}$. T אינה אריתמטית. אם T אריתמטית אז גם $\lambda x \neg T(d(x))$. אם ψ מגדירה אותה נקבל את [illegible]

$x = \#\psi$

- משפט האי-שלמות של גדל: שום תורה אקסיומטית התקפה ל-Th אינה שלמה. אם $\Sigma \subseteq Th$ תורה אקסיומטית קבוצת פסוקיה היא נ"ר. אבל בגלל השלמות $Th \neq \Sigma$ ולכן קבוצת פסוקי Th נ"ר ולכן ארתמטית בסתירה למשפט טרסקי.
- קבוצת הפסוקים האמיתיים ב-$\mathfrak{N}$ היא לא נ"ר כי אחרת היא הייתה ארתמטית.
- אם P ניתן לייצוג חזק ב-Σ אז הוא ניתן לייצוג חזק בכל $\Sigma \subseteq \Delta$
- אם Σ עקבית ו-P ניתן לייצוג חזק אז הוא גם ניתן לייצוג חלש.
- אם Σ שלמה ו-P ניתן לייצוג חלש אז הוא גם ניתן לייצוג חזק
- ב-Th יחס P ניתן לייצוג אמ"מ הוא ארתמטי.
- Σ תורה אקסיומטית. כל יחס הניתן לייצוג חלש ב-Σ הוא נ"ר. אם φ מייצגת חלש את P אז $P(x) = T_\Sigma(\#\varphi(x))$ ו-T_Σ נ"ר ⇐ P נ"ר.
- ב-Th יחס הוא נ"ר אמ"מ הוא ארתמטי.
- יחס הניתן לייצוג חזק בתורה אקסיומטית ועקבית הוא רקורסיבי: P ניתן לייצוג חזק ⇐ ¬P ניתן לייצוג חזק, התורה עקבית ⇐ הם (שניהם) ניתנים לייצוג חלש ⇐ נ"ר.
- קיימת תורה אקסיומטית סופית $\Pi \subseteq Th$ שכל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק בה.
- יחס הוא רקורסיבי אמ"מ הוא ניתן לייצוג חזק ב-Π.
- אם Δ תורה אקסיומטית עקבית ו-$\Pi \subseteq \Delta$ אזי יחס ניתן לייצוג חזק ב-Δ אמ"מ הוא רקורסיבי.
- אם Σ תורה שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חלש אז T_Σ אינה רקורסיבית.
אם T_Σ רקורסיבית אסתכל על $\lambda x \neg T_\Sigma(d(x))$ שמיוצגת ע"י φ ואז $x = \#\varphi$.
- אם Σ תורה עקבית שבה כל יחס רקורסיבי ניתן לייצוג חזק אז T_Σ אינה רקורסיבית.
- אם Σ תורה כך ש-$\Pi \cup \Sigma$ עקבית אז T_Σ אינה רקורסיבית: (נסמן Δ = קבוצת הפסוקים שנובעים מ-$\Pi \cup \Sigma$. (נסמן π את גימום האקסיומות של Π.
אז $\Delta = \{\varphi : \Sigma, \pi \models \varphi\}$. $\Sigma, \pi \models \varphi$ אמ"מ $\Sigma \models \pi \to \varphi$ וכן $\varphi \in \Delta$ אמ"מ $\pi \to \varphi \in \Sigma$. ⇐: $T_\Delta(x) = T_\Sigma(64 \cdot 3^{\#\pi} \cdot 5^x)$ Δ תורה עקבית שמרחיבה את Π ולכן אינה רקורסיבית ⇐ T_Σ אינה רקורסיבית
- ∅ תורה תקפה ו-Th אינה רקורסיבית.
- משפט צ'רץ': קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפת תורת המספרים אינה רקורסיבית (אך היא נ"ר כי זו תורה אקסיומטית והאקסיומות הן ∅)
- בכל שפה המכילה שני קבועי פעולה דו-מקומיים קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית לא כריעה. המבנה $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ שקול ל-$\mathfrak{N}$. אם היא הייתה כריעה היינו מסתפקים בפסוקים שמופיעים בהם רק +, ·. אלה הפסוקים הנכונים לוגית בשפת תורת המספרים ויודעים שלא כריעה, הסתירה.

משפטצ'ל המתמבר:

- קבוצת הפסוקים הנכונים לוגית בשפה המכילה קבוע פעולה דו-מקומי אחד אינה כריעה.
  כמו המשפט הקודם רק בעזרת המבנה $\langle \mathbb{N}, E\rangle$ כאשר E פונקציית החזקה.
- משפט נקודת השבת (של) גדל: Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים אשר פונקציית האכסון (ניתנת) לייצוג חלק בה. אזי לכל $\varphi\in\Phi_1$ קיים פסוק ψ רק ש- $\Sigma\vdash\psi\leftrightarrow\varphi(\#\psi)$
- משפט טרסקי (המוכלל): תהי Σ תורה עקבית בשפת תורת המספרים שפונקציית האכסון ניתנת לייצוג חלק בה. אזי קבוצת מספרי גדל של הפסוקי Σ אינה ניתנת לייצוג חלק.
  אם $\varphi(x)$ מייצגת את Θ, יהי ψ רק ש- $\Sigma\vdash\psi\leftrightarrow\neg\varphi(\#\psi)$. אם $\psi\in\Sigma$ יש סתירה ואם $\psi\notin\Sigma$ יש סתירה.
- הכללת משפט הא' שלמות: Σ תורה אקסיומטית עקבית בשפת תורת המספרים המכילה את Π. אז Σ אינה שלמה: נסמן ב-A את קבוצת המספרים שאינם מספר גדל של פסוק. ונסמן ב-B את קבוצת מספרי גדל של פסוקים ששלילותיהם ב-Σ.
  אם Σ שלמה אז $T_\Sigma^c = A\cup B$. $B=\{n: T_\Sigma(32\cdot 3^n)\}\cap A^c$. A כריעה $\Leftarrow$ A^c כריעה $\Leftarrow$ B נ"ר $\Leftarrow$ T_Σ^c נ"ר $\Leftarrow$ T_Σ כריעה בניגוד לכך שתורה אקסיומטית ועקבית שמכילה את Π אינה רקורסיבית.
- פילטר לא ראשי: A אינסופית ו-F הפילטר שמכיל את כל הקבוצות הקו-סופיות. $(a_n)\subseteq A$ סדרה של איברים שונים. $A_n=A\setminus\{a_n\}$. אז $\bigcap A_n\notin F$ והרי פילטר ראשי מכיל גם לחיתוכים אינסופיים. עוד דוגמה: סביבות של $a\in\mathbb{R}$
- פילטר הוא אולטרה-פילטר אמ"מ לכל $B\subseteq A$ או $B\in F$ או $B^c\in F$.
- אולטרה פילטר ראשי על A הוא כל הקבוצות שמכילות איבר מסוים קבוע של A.
- אם A קבוצה סופית ולא ריקה אז כל פילטר הוא פילטר ראשי.
- A אינסופית אולטרה פילטר U על A הוא לא ראשי אמ"מ הוא מכיל כל קבוצה שמשלימה סופית.
- יהי F פילטר על קבוצה לא ריקה A. יש אולטרה פילטר U על A רק ש- $F\subseteq U$.
  $\mathcal{F}$ קבוצת הפילטרים על A שמכילים את F ומה סדר חלקי $\subseteq$. לכל שרשרת C ב-$\mathcal{F}$ איחוד איברי C הוא חסם עליון $\Leftarrow$ יש ב-$\mathcal{F}$ איבר מקסימלי.
- $\mathcal{M}$ אולטרה-מכפלה $\mathcal{M}(\bar a)=g/U$ כאשר $g(i)=\mathcal{M}_i(a)$.
  $\mathcal{M}(R)$ היחס R על M רק ש- $(f_1/U,\dots,f_n/U)\in R\leftrightarrow\{i\in I: (f_1(i),\dots,f_n(i))\in\mathcal{M}_i(R)\}\in U$
  $\mathcal{M}(F)(f_1/U,\dots,f_n/U)=h/U$ $\quad h(i)=\mathcal{M}_i(F)(f_1(i),\dots,f_n(i))$
- אם U אולטרה פילטר ראשי אז $\mathcal{M}$ איזומורפי ל-$\mathcal{M}_{i_0}$ כאשר $U=\{B\subseteq I: i_0\in B\}$
  האיזומורפיזם הינו $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{M}_{i_0}$ - $\varphi(f/U)=f(i_0)$

- משפט Łoś: $\mathcal{M}_i$ סדרת מבנים ל-$\mathcal{L}$, U אולטרה פילטר על I. $\mathcal{M}$ אולטרה-מכפלה.
  - $t=t(x_1,\dots,x_n)$ ש"ע אז בכל השמה שנותנת ל-$x_1,\dots,x_n$ את הערכים $f_1/U,\dots,f_n/U$: $\mathcal{M}(t)=f/U$ כאשר לכל i, $f(i)=V_{\mathcal{M}_i}^{[x_1\dots x_n|f_1(i),\dots,f_n(i)]}(t)$
  - $\varphi=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ נוסחה. אז $\mathcal{M}\models\varphi[f_1/U,\dots,f_n/U]$ אמ"מ $\{i\in I:\mathcal{M}_i\models\varphi[f_1(i),\dots,f_n(i)]\}\in U$
  ההוכחה באינדוקציה על בניית הש"ע והנוסחה
- משפט הקומפקטיות: Γ קבוצת פסוקים שכל תת קבוצה סופית שלה עקבית, אז Γ עקבית: I משפחת תתי הקבוצות הסופיות. לכל $\alpha\in I$ $\mathcal{M}_\alpha$ מודל של α. X_α קבוצת איברי I שמכילים את α. $F=\{B\subseteq I : X_\alpha\subseteq B$ ש-$\alpha\in I$ יש$\}$. U אולטרה פילטר שמכיל את F. $\mathcal{M}$ אולטרה מכפלה. $\mathcal{M}$ מודל של Γ: יהי φ פסוק ב-Γ. לכל α ש-φ נמצא בה $\mathcal{M}_\alpha\models\varphi$. ולפי הגדרת F $X_{\{\varphi\}}$ - קבוצת הקבוצות הסופיות שמכילות את φ שייכת ל-F ולכן ל-U. $\Rightarrow$ קבוצת האינדקסים i כך ש-$\mathcal{M}_i\models\varphi$ נמצאת ב-U, ולפי משפט Łoś $\mathcal{M}\models\varphi$.
  $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ מודל של Γ
- יהי $\mathcal{A}$ מבנה ל-$\mathcal{L}$, I קבוצת אינדקסים ו-U אולטרה פילטר על I. כל פסוק φ ב-$\mathcal{L}$ אמיתי באולטרה חזקה אמ"מ הוא אמיתי ב-$\mathcal{A}$.
- אם U אולטרה פילטר ראשי אז $\mathcal{M}$ איזומורפי ל-$\mathcal{A}$.
- אם $\mathcal{A}$ סופי אז גם האולטרה חזקה שלו והם איזומורפיים.
- אם $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ איזומורפיים אז הם שקולים אלמנטרית.
- אם $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$ אז $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ שקולים אלמנטרית. ההפך לא נכון!
- יהי $\mathcal{A}$ מבנה ו-$\mathcal{M}$ אולטרה חזקה של $\mathcal{A}$.
  - הקבוצה $M_1=\{f/U : f$ קבועה$\}$ סגורה ב-$\mathcal{M}$. נסמן את תת המבנה ב-$\mathcal{M}_1$.
  - $h:A\to M_1$ כאשר $h(a)=f_a/U$ ולכל i $f_a(i)=a$ הוא איזומורפיזם.
  - $\mathcal{M}_1\prec\mathcal{M}$.
- קריטריון טרסקי-ווט: יהי $\mathcal{A}$ מבנה ל-$\mathcal{L}$ ו-$\mathcal{B}$ תת מבנה. אז $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$ אמ"מ לכל נוסחה $\varphi=\varphi(x,x_1,\dots,x_n)$ ולכל $b_1,\dots,b_n\in B$ אם קיים $a\in A$ כך ש-$\mathcal{A}\models\varphi(a,b_1,\dots,b_n)$ אז קיים $b\in B$ כך ש-$\mathcal{B}\models\varphi(b,b_1,\dots,b_n)$
  ($\Leftarrow$) ברור. ($\Rightarrow$) באינדוקציה על הבניה של φ.
- משפט סקולם-לוונהיים העולה: יהי $\mathcal{A}$ מבנה אינסופי ותהי K עוצמה אינסופית. אז $\mathcal{A}$ ניתן לשיכון אלמנטרי במבנה שעוצמתו אינה קטנה מ-K.
- משפט סקולם-לוונהיים היורד: יהי $\mathcal{A}$ מבנה לשפה בת מניה $\mathcal{L}$ ותהי $C\subseteq A$. לכל עוצמה אינסופית K כך ש-$|C|\le K\le|A|$ קיימת קבוצה B המקיימת $C\subseteq B\subseteq A$ שעוצמתה K והיא סגורה ב-$\mathcal{A}$ ותת המבנה $\mathcal{B}$ שנקבע על ידה מקיים $\mathcal{B}\prec\mathcal{A}$

- משפט הרקורסיה המוכלל: אם $F(\underline{x},y,z)$ חשיבה אז יש פונקציה חשיבה φ רק ש- $\{\varphi(z)\}(\underline{x}) = f(\underline{x}, \varphi(z), z)$
- משפט הרקורסיה: אם $F(\underline{x},y)$ חשיבה אז יש e רק ש- $\{e\}(\underline{x}) = F(e,\underline{x})$
- משפט נקודת השבת: אם σ פונקציה חשיבה מלאה אז יש e רק ש- $\{\sigma(e)\}(\underline{x})=\{e\}(\underline{x})$
- אם A נ"ר אינסופית אז יש $A'\subseteq A$ אינסופית כריעה. A נ"ר $\Rightarrow$ היא תמונה של פונקציה פר' כלומר $g(\mathbb{N})=A$. נגדיר $g'(n)$ שהיא בעצם ת"ס עולה ממש של $g(n)$ ונאמר $A'=g'(\mathbb{N})$. היא כריעה כי $x\in A' \leftrightarrow \exists y\leq x(g'(y)=x)$
- אם A מבנה סופי לשפה סופית אז יש פסוק $\psi\in Th(A)$ רק שלכל מבנה B $B\models\psi$ אמ"מ $B\cong A$
- לכל מבנה סופי לשפה סופית $Th(A)$ כריעה (זה לא נכון עבור שפות אינסופיות!)
- אם A,B סופיים רק ש- $Th(A)=Th(B)$ אז $A\cong B$.
- אם T עקבית ויחס חשב ניתן לייצוג בה אזי $\{\varphi: T\vdash\varphi\}, \{\varphi: T\vdash\neg\varphi\}$ אינן ניתנות להפרדה חשיבה.
- אם T תורה המייצגת כל יחס רקורסיבי אז T לא כריעה
- התורה $Th(=)$ היא כריעה.
- התורה Σ בשפה $\mathcal{L}=\{<\}$ שאומרת ש-$<$ סדר קווי צפוף בלי איבר ראשון ואחרון היא שלמה.