

תיקונים

שנה	מועד	שאלה	תיקון
תש"ס	א	2	אם $x \leq 0$ זה לא נכון שאסטרטגיה R נשלטת ע"י האחרות. אלא היא שולטת על האחרות דווקא אבל אז נשארים עם עמודה שיש בה אפסים ו- $x \leq 0$ ולכן שחקן השורות בהכרח יבחר ב-0 וזה יהיה ערך המשחק.
תש"ס	א	4	הפתרון לא נכון משום שהשחקנים 1, 2, ..., 100 הוא לא שחקני אפס (על אף שהגדרה של פונקציית השווי כתובה למעלה פתרתי את השאלה כאילו ההגדרה היא $v(S) = \begin{cases} 1, & 1 \in S \\ 0, & 1 \notin S \end{cases}$. אבל השחקנים דווקא כן סימטריים כי אם $1 \in S$ ו-$S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ אז $v(S \cup \{j\}) = S + 1 = v(S \cup \{i\})$ ואילו אם $1 \notin S$ אז $v(S \cup \{i\}) = 0 = v(S \cup \{j\})$. לכן ערך שפלי שלהם זהה. לכן מספיק לחשב את $\psi_1 v$ ואז את האחרים ניתן לגזור. עכשיו נשים לב שאם $1 \notin S$ אז $v(S \cup \{i\}) - v(S) = S + 1 - 0 = S + 1$ לכן, לפי הנוסחה האלטרנטיבית לערך שפלי נקבל $\psi_1 v = \sum_{S \subseteq N \setminus \{1\}} \binom{n-1}{ S }^{-1} \frac{1}{n} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) =$ $= \sum_{S \subseteq N \setminus \{1\}} \binom{n-1}{ S }^{-1} \frac{1}{n} (S + 1) =$ $= \sum_{ S =0}^{n-1} \binom{n-1}{ S } \binom{n-1}{ S }^{-1} \frac{1}{n} (S + 1) =$ $= \frac{1}{n} \sum_{ S =0}^{n-1} S + 1 = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{99}{2} + 1 = \frac{101}{2}$ לכל האחרים מתקיים $\psi_i v = \frac{100 - \frac{101}{2}}{99} = \frac{1}{2}$
תשס"ב	ב	3	בחישוב של שיווי משקל מעורב ממש לקראת הסוף הפכתי באחת המשוואות את $x - 3$ ל- $x + 3$. צריך לתקן את זה ולפתור מחדש. שאר המקרים אמורים להיות בסדר.
תשס"ד	ב	4	הפתרון של המשוואה הריבועית $4y^2 - y = 3$ לא נכון ואמור להיות $y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{1 \pm 7}{8}$ אז עכשיו הפתרונות פשוט יוצאים יפים יותר. הדרך עדיין נכונה.
תשס"ב	א	4	בסעיף א אמור לצאת $x = 6$. יש לי טעות במשוואה כי בטעות לקחתי את התשלום של שחקן העמודות. כמובן, צריך לבדוק איך זה משפיע על שאר הסעיף.

(1) נסת ודומה את משפט נאש - ואם קיים שיווי משקל במשחקי
הצורה אסטרטגית.

משפט נאש: אם משחק הצורה אסטרטגית (עם מספר סופי של
מקנים ואסטרטגיות) קיים ש"ל (האסטרטגיות).

משפט זה זכה וזלל הודות: משפט וקוצת השבת של בראונר:
תהי C קבוצה קמורה קואמפקטית ולא חקה במרחב אוקלידי
ותהי $f: C \rightarrow C$ וציפה אולי f קיימת וקוצת שבת ב- C ,
בומר קיימת $x \in C$ רק $x = f(x)$.

הוכחת משפט נאש: נתבונן בקבוצה $X = \prod_{i \in N} X^i$
בומר המעלה הקטניות של האסטרטגיות המצורחות של כל השחקנים
(זו מעלה סופית). אם תהי X^i המעלה הוא קבוצה קמורה
וקואמפקטית אז גם X קמורה וקואמפקטית (כמעלה של
מאלי). יתר על כן, אחת ל- $X^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ (ובעל ש-
 $X \in \mathbb{R}^{\sum m_i}$ וזמן X קבוצה במרחב אוקלידי.
נצייר $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{\sum m_i}$ באופן הבא:

כל $i \in N$ כל $j \in m_i$ (יצייר) $f_j^i: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$h_j^i = \max(0, G^i(x|e_j^i) - G^i(x))$$

$$f_j^i(x) = \frac{x_j^i + h_j^i(x)}{1 + \sum_k h_k^i(x)}$$

$$f^i(x) = (f_1^i, \dots, f_{m_i}^i)$$

(נסביר את ההצעה: $x|e_j^i$ האפרופי אסטרטגיה של השחקן

i - משחק את האסטרטגיה הטהורה j שלו.

אז $G^i(x|e_j^i) - G^i(x)$ הוא הרווח של השחקן i (יחיד) אקס

"ה" בחירה באסטרטגיה הטהורה j במקום האסטרטגיה המצורחת i

לפני משחק. אכן אולי אין בזה רווח אלא אומתו מסתם

$$\max(0, G^i(x|e_j^i) - G^i(x))$$

• נראה של $x \in X$ מתקיים $f^i(x) = (f_1^i(x), \dots, f_{m_i}^i(x)) \in X^i$

צדק, והראו שהרעיון אי-שלילי ושלילי 1. אכן, נזכור ש-

$$f_j^i(x) = \frac{x_j^i + h_j^i(x)}{1 + \sum_k h_k^i(x)}$$

$x \in X$ ואם $x_j^i \geq 0$ ומההצבה של h_j^i (מקסימום) ברור של $h_j^i(x) \geq 0$ וספר $\sum_k h_k^i(x) \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{m_i} f_j^i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} x_j^i + \sum_{j=1}^{m_i} h_j^i(x)}{1 + \sum_k h_k^i(x)} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{m_i} h_j^i(x)}{1 + \sum_k h_k^i(x)} = 1$$

$f^i(x) \in X^i \Leftrightarrow f^i(x) \in X^i \Leftrightarrow X$

• נראה ש- f רציף. אם $i \neq j$, אז $G^i(x) \cap G^j(x) = \emptyset$. מקווארנטות אם רציף $\Leftrightarrow$ ההפרש $G^i(x) - G^j(x)$ פתח רציף. $\Leftrightarrow h_j^i(x)$ רציף (מקסימום של שני פונקציות רציפות). ההסרה $x \mapsto x_j^i$ רציף ואם הסכום $x_j^i + h_j^i(x)$ רציף. מהרציף של $h_j^i(x)$ נובע שגם הסכום

$1 + \sum_{k=1}^{m_i} h_k^i(x)$ רציף. נוסח כמותי לא מתאפשר, כי ראוי $f_j^i(x) = \frac{x_j^i + h_j^i(x)}{1 + \sum_k h_k^i(x)}$ אם $\sum_{k=1}^{m_i} h_k^i(x) \geq 0$ רציף. אז f מקווארנטות רציף אם $f: X \rightarrow X$ רציף.

קובנו פונקציה רציפה f מקווארנטות קווארנטות רציפה $\Leftrightarrow$ אם מלפני וקווארנטות של הראוי קווארנטות זה וק' של $x \in X$ $(x^1, \dots, x^n) = x$ ק' ש- $f(x) = x$ פתח פתח של $1 \leq i \leq m_i$ ואם $1 \leq j \leq m_i$ מתקיים $f(x_j^i) = x_j^i$

נניח ש- x אינו נמצא בקבוצת S ונניח ש- x אינו נמצא בקבוצת S^* .
 או אולי נניח ש- x אינו נמצא בקבוצת S ונניח ש- x אינו נמצא בקבוצת S^* .

$$G^{i^*}(x|e_j^{i^*}) > G^{i^*}(x)$$

$$h_j^{i^*}(x) = \max(0, G^{i^*}(x|e_j^{i^*}) - G^{i^*}(x)) > 0 \quad \Leftarrow$$

$$\sum_{j=1}^{m_{i^*}} h_j^{i^*}(x) > 0 \quad \Leftarrow$$

x אינו נמצא בקבוצת S

$$x_j^{i^*} = f_j^{i^*}(x) = \frac{x_j^{i^*} + h_j^{i^*}(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_{i^*}} h_k^{i^*}(x)}$$

$$\Rightarrow x_j^{i^*} + x_j^{i^*} \frac{\sum_{k=1}^{m_{i^*}} h_k^{i^*}(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_{i^*}} h_k^{i^*}(x)} = \frac{x_j^{i^*} + h_j^{i^*}(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_{i^*}} h_k^{i^*}(x)} \geq x_j^{i^*}$$

$$h_j^{i^*}(x) > 0 \quad \text{אם } x_j^{i^*} > 0 \quad \Leftarrow$$

$$G^{i^*}(x|e_j^{i^*}) > G^{i^*}(x) \quad (*)$$

$$G^{i^*}(x) = \sum_{j=1}^{m_{i^*}} x_j^{i^*} \cdot G^{i^*}(x|e_j^{i^*}) = \sum_{j=1}^{m_{i^*}} x_j^{i^*} G^{i^*}(x|e_j^{i^*}) >$$

$$> \sum_{j=1}^{m_{i^*}} x_j^{i^*} G^{i^*}(x) = \sum_{j=1}^{m_{i^*}} x_j^{i^*} G^{i^*}(x) = G^{i^*}(x) \sum_{j=1}^{m_{i^*}} x_j^{i^*} = G^{i^*}(x) \quad (*)$$

וכן סתירה! רק x שבו x אינו נמצא בקבוצת S ונניח ש- x אינו נמצא בקבוצת S^* .

(ii)

(2) נניח ש- x אינו נמצא בקבוצת S ונניח ש- x אינו נמצא בקבוצת S^* .

	L	C	R
T	1	0	0
M	0	2	0
B	0	0	x

ראשית, נשים לב ש $x \leq 0$ אינו האסטרטגיה T, M שחסרת חזק על B וכן האסטרטגיה L, C שחסרת חזק על האסטרטגיה R ואינה יכולה להיות אופטימלית. האסטרטגיה B או R תהיה בתוחם של האסטרטגיה של שחקן 1. 1-2: בהתאמה, רק, הערך של המשחק הוא B או R והוא הערך של המשחק המקורי. (וחלילה):

	q	1-q
p	1	0
1-p	0	2

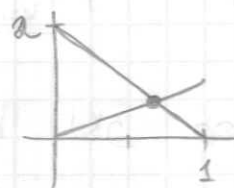
$$v = \max_p \min_q u(p, q) =$$

$$= \max_p \min_q (pq + 2(1-p)(1-q)) =$$

$$= \max_p \min (p, 2(1-p)) =$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} p &= 2(1-p) \\ \Rightarrow p &= 2-2p \\ \Rightarrow 3p &= 2 \\ \Rightarrow p &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow v &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



כמות ערך המשחק הוא $\frac{2}{3}$ והאסטרטגיה האופטימלית עבור שחקן 1 היא $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. האסטרטגיה אופטימלית עבור שחקן 2 היא $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

נניח דעתו של $x > 0$, נראה למעשה זה הוכחה. האסטרטגיה B או R (מציאת בתוחם של האסטרטגיה האופטימלית של שחקן 1. 2-1: בהתאמה.

נניח ששחקן 1. ההנחה עבור שחקן 2 זהה לחישוב. נניח ששחקן 1 אינו משחק B האסטרטגיה האופטימלית שלו. אזי אם אסטרטגיה של שחקן 2, שחקן 1 צריך לקבל אסטרטגיה את ערך המשחק v . נשים לב שערך המשחק גדול מ-0 כי עדיף תחומה האסטרטגיה $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ שחקן 1

אסטרטגיה אחרת אסטרטגיה $\min(1, 2, x) > 0$. נניח ששחקן אופטימלית של שחקן 1 היא $(p_1, p_2, 0)$

(י) הוגד לא משחק (B). שם אם למחקן 2 הותר האסטרטגיה
הסתברות R נקבע ששחקן 1 יקבל תשלום $0 < v$ וזה
לא יורו להיות כי האסטרטגיה האופטימלית שלו $(p_1, p_2, 0)$
אחרי היותה אהבתי או אפילו v . זמן ההסתברות תלוי
לשחקן 1 בהכרח משחק B. כאופן צומח וטו יא
בהכרח משחק T: M ובהאופן סמלית לשחקן 2
משחק בהכרח ההסתברות תלוי את B האסטרטגיה הטהורה
שלו L, C, R

כעת נוכל לתת אסטרטגיה אופטימלית. אמצע אחריו אסטרטגיה

וק' של המשחק ואחריו 'וצעים' שוק' השלם בהכרח אחריות ממש (רשמי) (השחקנים) לפי עיקרון הצדקיות מתקיים

	q_1	q_2	q_3	
p_1	1	0	0	T
p_2	0	2	0	M
p_3	0	0	x	B
	L	C	R	

$$u'(p, L) = u'(p, C) = u'(p, R)$$

$$\Rightarrow p_1 = 2p_2$$

$$p_1 = x \cdot (1 - p_1 - p_2)$$

$$\Rightarrow 2p_2 = x(1 - 2p_2 - p_2) = x(1 - 3p_2) = x - 3xp_2$$

$$\Rightarrow (2+3x)p_2 = x \Rightarrow p_2 = \frac{x}{2+3x}$$

$$p_1 = \frac{2x}{2+3x}$$

} $x > 0$

אם ערך המשחק הוא $\frac{x}{2+3x}$ האופן צומח $-u^2(q, T) = -u^2(q, M) = -u^2(q, B)$

$$q_1 = 2q_2$$

$$q_1 = x(1 - q_1 - q_2) \Rightarrow q_1 = \frac{x}{2+3x}$$

$$q_2 = \frac{2x}{2+3x}$$

שם הערך הוא $\frac{x}{2+3x}$ ולכן השחקנים אסטרטגיה אופטימלית
(ותי) $(\frac{x}{2+3x}, \frac{2x}{2+3x}, \frac{2}{2+3x})$ וכן תוצאה!

(4) נתון את דרך שלילי של המרחק השיתופי הבא:

$$N = \{1, 2, \dots, 100\}$$

$$V(S) = \begin{cases} |S| & 1 \in S \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נשים $\in$ מהמקנים $2, \dots, 100$ חולקים כי $1 \in S$ $2 \leq i \leq j$ $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ $1 \in S$ $1 \notin S$ $1 \in S$ $1 \notin S$

$$V(S \cup \{i\}) = V(S \cup \{j\}) = 1$$

$$V(S \cup \{i, j\}) = V(S \cup \{j, i\}) = 0$$

כחוק, $1 \in S$ $1 \notin S$ $1 \in S$ $1 \notin S$

$$V(S) = V(S \cup \{i\}) = 1$$

$$V(S) = V(S \cup \{i, j\}) = 0$$

דרך שלילי עבור מרחק i נחזיר "ע"

$$\psi_i V = \frac{1}{n!} \sum_R \psi_i^R V$$

נניח R 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$\psi_{ij}^R = V(i_1, \dots, i_j) - V(i_1, \dots, i_{j-1})$$

נניח $i_1, \dots, i_n$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$i_k = 1$$

$$\psi_{i_1}^R = V(i_1) = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\psi_{i_k}^R = V(i_1, \dots, i_k) - V(i_1, \dots, i_{k-1}) = 1 - 0 = 1$$

$$\psi_{i_{k+1}}^R = V(i_1, \dots, i_{k+1}) - V(i_1, \dots, i_k) = 1 - 1 = 0$$

$$\psi_{i_n}^R = V(i_1, \dots, i_n) - V(i_1, \dots, i_{n-1}) = 1 - 1 = 0$$

כאשר $i_1, \dots, i_n$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$\psi_i V = 0 \quad i \neq 1$$

$$\psi_1 V = \frac{1}{n!} \sum_R 1 = \frac{1}{n!} \cdot n! = 1$$

מבחן א' תשס"ב

(1) תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה מסדר 3×3 , והי u הערך של המשחק בשני שחקנים עבור מסדר 3×3 המתייחס $a_{ii} = u + 2$ לכל $(i, j) \neq (1, 1)$.
 $b_{ij} = a_{ij}$

(2) הערך של המשחק המיוצג ב- $2A$ הוא כהכרח $2u$.

וכן. הוכחה: (א) ה- u את התשלום של שחקן

1 במשחק A וה- $\hat{u}$ את התשלום במשחק $2A$.

במהלך $u = 2\hat{u}$. אכן, הערך של $2A$ הוא

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \max_p \min_q \hat{u}(p, q) = \max_p \min_q 2u(p, q) = \\ &= \max_p 2 \cdot \min_q u(p, q) = 2 \cdot \max_p \min_q u(p, q) \\ &= 2u\end{aligned}$$

(3) הערך של המשחק B הוא כהכרח $u + 2$.
ראו וכן. ראשון, נניח $u = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ה- A כחוק $u = 0$ אכן B היא $u = 0$

שהיא אין משחק 1 שום צדק אחרות שיקראו יתר

א-0. משחק 2 היא פשוט אחרת אולי אחרת R וזהו

(4) הערך של המשחק B הוא כהכרח $u + 2$.
ראו וכן. ראשון, נניח $u = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערך של A הוא 0 כי שורה 1 שולטת חלק על

שאר השורות ואין עמומה 1 שולטת חלק על שאר

העמומות

הערך של B הוא $2 = 0 + 2$ כי שורה 1 שולטת חלק

אם שאר השורות ואז נשארנו רק עק (222)

(2) הערך של משחק 2 השתתפים סכום אפס המיוצג

ע"י המטריצה $C = (C_{ij})$ של $C_{ij} = a_{ij} + 2$ כל זוג i, j הוא סהכום $u+2$.

נכון. הוכחה: נסמן את הערך של C ב- u . כל

$$u = \max_p \min_q \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_i q_j C_{ij} =$$

$$= \max_p \min_q \sum_i \sum_j p_i q_j (a_{ij} + 2) =$$

$$= \max_p \min_q \left(\sum_i \sum_j p_i q_j a_{ij} + 2 \cdot \sum_i \sum_j p_i q_j \right) =$$

$$= \max_p \min_q \left(\sum_i \sum_j p_i q_j a_{ij} + 2 \right) =$$

$$= \left(\max_p \min_q \sum_i \sum_j p_i q_j a_{ij} \right) + 2 = u + 2$$

(3) הערך של משחק שני השתתפים סכום אפס המיוצג

ע"י B הוא סהכום $u+2 \geq$

נכון. הוכחה: נסמן את הערך המזל של B ב- u . ראשית,

ברור ש- $u \geq u$ שהרי u בחינת אומדן אסל

מקסימלי כמו במשחק A שכן 1 אסיה זרזמו

אפחות u במשחק B .

נניח שאלה ל- $u+2 > u$. ע"י הוספת 2 ל- a_{ij}

עבור $1 \leq i \leq 3$ ו- $1 \leq j \leq 3$ נוסף זקנה סכומ

משחקים $B_{11}, B_{12}, B_{13}, \dots, B_{31}, B_{32}, B_{33}$ רק שההבדל בין

ב זוג עוקב הוא הוספת 2 למשלבת הודעת!

$B_{33} = C$ כמו בסעיף (2). נסמן את הערכים המתאימים

ב- u_{ij} . אפיהאמור לעי ברור ש- $u_{33} = u+2 \leq \dots \leq u_{11} \leq u$

אם $u+2 > u$ וזו סתירה. לכן ההכרח

$u \leq u_{11} \leq u+2$ וזה מה שרצינו.

(2) נסח והוכח את משפט נאש על קיום שיווי משקל במשחקים בצורה אסטרטית.

משפט נאש: יהי G משחק עם מספר סופי של שחקנים n ואם לשחקן $i=1, \dots, n$ מספר סופי של אסטרטיות m_i , אז קיים למשחק G באסטרטיות מצומדות.

נידון המשפט הוא לא הוכחה: משפט נק' הנלכת של הראוור: תהי $C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה, קונפקטית ואם ריקה, אז פונקציה רציפה $f: C \rightarrow C$ קיימת נק' שלבת C , סוגר קיימת $x \in C$ נק' ש- $f(x) = x$.

הוכחת משפט נאש: נתבונן בקבוצה $X = \prod_{i=1}^n X^i$ כאשר $X^i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ קבוצה באסטרטיות המצומדות של השחקן i . $X \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n m_i}$ היא קבוצה קונפקטית וקמורה אם גם X^i היא קבוצה קונפקטית וקמורה (כחפלה של נאש) והיא

באמצע אינה ריקה. נגדיר פונקציה $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n m_i}$ באופן הבא: ראשית, אם $1 \leq i \leq n$ ואם $1 \leq j \leq m_i$ נגדיר $h_j^i: X \rightarrow \mathbb{R}$ כך

$$h_j^i(x) = \max(0, G^i(x | e_j^i) - G^i(x))$$

כאשר $x | e_j^i$ הוא פרופיל אסטרטגיית שבו המקום האסטרטגי של השחקן i מופעה האסטרטגיה j -ית שלו. כעת, נגדיר $f_j^i: X \rightarrow \mathbb{R}$ כך

$$f_j^i(x) = \frac{x_j^i + h_j^i(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} h_k^i(x)}$$

ואם $f = (f^1, \dots, f^n)$ $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^n m_i}$ אז נגדיר את $f^i = (f_1^i, \dots, f_{m_i}^i)$ כסוגר f_j^i בן הקואורדינטות של f .

קראנו את f רציפה, רציף ההכאות לא נאש משקל, והראוור של אחת מהקואורדינטות f_j^i היא פונק' רציפה ואכן,

f_j^i היא מנה של m_i פונקציות המונה והמונח פונקציה
 רצפה ממשל x_j^i רצפה וכן $h_j^i(x)$ רצפה
 שכן $G^i(x), G^i(x|e_j^i)$ רצפות (הן פולינומים ב- x) אכן
 אם $\max(0, G^i(x|e_j^i) - G^i(x)) = h_j^i \geq 0$ מאחר ש-
 (ע"פ ההגדרה) נובע ש- $0 \leq \sum_{k=1}^{m_i} h_k^i$ אכן
 $1 + \sum_{k=1}^{m_i} h_k^i(x)$ פונקציה רצפה (כסכום של רצפות)

והיא אינה מתאפסת. הראינו שלמנה והמנה פונקציה
 רצפה והמנה אנו מתאפס. $f_j^i \Leftarrow$ רצפה ב-
 j אכן אם f רצפה

נשים לב ש- $f_j^i \geq 0$ ללא $x_j^i, h_j^i \geq 0$ וכן כן,

$$\sum_{j=1}^{m_i} f_j^i(x) = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{x_j^i + h_j^i(x)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} h_k^i(x)} = \frac{\sum x_j^i + \sum h_j^i(x)}{1 + \sum h_k^i(x)} =$$

$$= \frac{1 + \sum h_j^i(x)}{1 + \sum h_k^i(x)} = 1$$

$\Leftarrow$ ב- i מתקיים $f^i(x) \in X^i$ אכן
 קיבלנו פונקציה רצפה $f: X \rightarrow X$

כאמור, X היא קמורה וקונסקוויקסית אכן לפי משפט נ'
 הישגת קיימת $x \in X$ כך ש- $f(x) = x$ נראה ש-
 זו היא שליל של המלך. (ניח שהמלך של X אינו
 קיים למקרה i וזו קיימת אס" $1 \leq j^* \leq m_i$ שרצפה או

$$G^i(x|e_{j^*}^i) > G^i(x)$$

$$\Leftarrow G^i(x|e_{j^*}^i) - G^i(x) > 0 \Leftarrow$$

$$h_{j^*}^i(x) = \max(0, G^i(x|e_{j^*}^i) - G^i(x)) > 0$$

$$\text{אכן } f(x) = x$$

$$x_j^i = f_j^i(x) = \frac{x_j^i + h_j^i(x)}{1 + \sum_k h_k^i(x)}$$

$$\Rightarrow x_j^i + x_j^i \sum_k h_k^i(x) = x_j^i + h_j^i(x)$$

$$\Rightarrow x_j^i \sum_{k=1}^{m_i} h_k^i(x) = h_j^i(x)$$

$$h_j^i(x) > 0 \text{ אכן } \sum_{k=1}^{m_i} h_k^i(x) > 0 \text{ אכן } h_{j^*}^i(x) > 0$$

א"מ, רכ, $x_j^i > 0$, נאמר, זה אם $G^i(x|e_j^i) - G^i(x) > 0$

$$\begin{aligned} G^i(x) &= \sum_{j=1}^{m_i} x_j^i G^i(x|e_j^i) = \sum_{x_j^i > 0} x_j^i G^i(x|e_j^i) > \\ &> \sum_{x_j^i > 0} x_j^i G^i(x) = \sum_{j=1}^{m_i} x_j^i G^i(x) = G^i(x) \sum_{j=1}^{m_i} x_j^i = \\ &= G^i(x) \cdot 1 = G^i(x) \end{aligned}$$

וכן סתירה. לכן x בהכרח שלם במלשון וזה בדיוק מה שרצנו. (11)

(4) נתבונן במלשון של שחקנים עם תשלומים המיוחסים למלשנים x, y :

	L	R
T	x, y	$0, 1$
B	$0, 2$	$3, 6$

(10) נמצא עבור x, y זוגי האסטרטגיות $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ שלם. שחקן 1: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ - שחקן 2: הם שלם. נשמע בדיוקן האדישות.

עבור שחקן 1: לאחר $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ זוגי, זהות שלם הוא אדיש בין האסטרטגיות הטובות

$$u_1(T, (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) = u_1(B, (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 6 \Rightarrow x = 12$$

עבור שחקן 2: לאחר $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ זוגי, זהות שלם הוא אדיש בין שתי האסטרטגיות הטובות. לכן:

$$u_2((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), L) = u_2((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), R) \quad (**)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \Rightarrow y = 5$$

קיבלנו שם האסטרטגיה הנ"ל שלם אז בהכרח $y=5, x=12$ נוצר שהמקרה זה, אך מתקבל שלם ה- $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$

אם זה ברור כי x ו- y (**) נובע שזה שחקנים

אדישים וממחר ששתי האסטרטגיות הטובות אחת אף לא זוכות ונובע שזה אכן שלם.

(ה) נמצא את ערכי x ו- y שלמים המרביים

	L	R
T	x, y	0, 1
B	0, 2	3, 6

(L, D) הוא ש"ל

מפוקד הש"ל מהורה. צריך לבדוק

שכל אחד מהלוקים לא

תהיה טיפה רבאית ואם

מהורה אחת, הכינתם האם הטהורה של הלוק

השני.

• אם הלוק 1 מלוק D אז אם $y \geq 1$

לוק 2 לא רבאי אסור

• אם הלוק 2 מלוק L אז אם $x \geq 0$

לוק 1 לא רבאי אסור

אסורים, אם $x \geq 0$; $y \geq 1$ אז (D, L)

ש"ל המלוק

מרחב תל"ב

(1) נסח ונותר את משפט האיננקס על קיום זרם ואסטרטגיות אופטימליות במשחק שני שחקנים סתום אולם.

משפט האיננקס: תהי A מטריצה מאי $n \times k$. אזי קיימים $v \in \mathbb{R}$; $p \in \Delta^k$; $q \in \Delta^n$ כך שלב $n \geq 1$ אב $1 \leq i \leq k$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^k p_i a_{ij} \geq v \geq \sum_{j=1}^n q_j a_{ij}$$

משפט ההפכני: תהינה K, C קבוצות קמורות, סגורות, לא ריקות ולרוח. אם C תהווה קומפקטיות אזי קיים פוקציונל אינארי f וקיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלב $x \in C$ ואם $y \in K$
 $f(x) < c < f(y)$

הצגת משפט האיננקס: נתבונן בקבוצה

$$K = \text{conv}\{a_{*1}, \dots, a_{*n}\} + \mathbb{R}_+^k$$

הקמור של הוועדות של A

$\text{conv}\{a_{*1}, \dots, a_{*n}\}$ היא קמורה, סגורה וחסומה ואם קומפקטיות $\mathbb{R}_+^k$ היא קמורה וסגורה, לכן K סגורה (כסכום של סגורה וקומפקטיות) וקמורה (כסכום של קמורות) כחוקן K לא ריקה.

I קיים $u \in \mathbb{R}$ כך שלב $(u, \dots, u) \notin K$. למשל, נסתק אחרת $u = \min_{i,j} a_{ij} - 1$.

II קיים $u \in \mathbb{R}$ כך שלב $(u, \dots, u) \in K$. למשל, ניקח $u = \max_{i,j} a_{ij}$.

יהי $u \in \mathbb{R}$ אפי I כך שלב $(u, \dots, u) \notin K$. הקבוצה $C = \{(u, \dots, u)\}$ סגורה וחסומה ואם קומפקטיות אזי אפי משפט ההפכני קיים פוקציונל אינארי f כך שלב $\alpha \in C$ אם $x \in K$ מתקיים $f(\alpha) < f(x)$

אם נהדח $\alpha = (u, \dots, u)$ וידוע ש α פורק צורה
 איננו ניתן זיכר "ע" משהו פנימי זה וקטור של α
 נניח f -ל מיוצג "ע" y אז נקח של $x \in K$

$$\sum_{i=1}^k u y_i = \langle (u, \dots, u), y \rangle = \langle x, y \rangle \quad (*)$$

יהי e^i וקטור היחידה ה- i ב- $\mathbb{R}^k$ ויהי $x^* \in K$
 אם נהדח α ב- K , אז $x^* + \alpha e^i \in K$
 וכן $\alpha > 0$ מתקיים

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k u y_i &< \langle x^* + \alpha e^i, y \rangle = \\ &= \langle x^*, y \rangle + \alpha \langle e^i, y \rangle = \\ &= \langle x^*, y \rangle + \alpha y_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha y_i > \sum_{i=1}^k u y_i - \langle x^*, y \rangle \quad (**)$$

$$\Rightarrow y_i > \frac{\sum_{i=1}^k u y_i - \langle x^*, y \rangle}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

$\Leftarrow$ $y_i \geq 0$ ב- K כחוק, נשים $\alpha = 1$
 $y \neq 0$ כי אחרת ב- $(*)$ לא יוכל להיות אי-שוויון חלק

$\Leftarrow$ $\sum_{i=1}^k y_i > 0$ וניתן להגדיר
 $p_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^k y_j}$ כחוק ש- $p_i \geq 0$ ו- $\sum_{i=1}^k p_i = 1$

סוגר Δ^k כעת, ב- K מתקיים

$$\sum p_i u = \frac{\sum u y_i}{\sum y_i} < \frac{\langle x, y \rangle}{\sum y_i} = \langle x, p \rangle \quad (*)$$

גדור $U = \{u \in \mathbb{R}^k : (u, \dots, u) \in K\}$ אם Π הקטורה הבו

אנה ניקח כחוק, מהדח K כחוק ש- $u \in K$

! $u' > u$ אז $u' \in K$ סגור I - U

אנה מחלה את $\mathbb{R}$ ב- U וייתכן תסומה אחרת

$\Leftarrow$ קיים $v = \inf U \neq -\infty$

ע"י הצורה הנחס התחתון ב- $m \in \mathbb{N}$ מתקיים $v - \frac{1}{m} \notin U$

$\Leftarrow$ $(v - \frac{1}{m}, \dots, v - \frac{1}{m}) \notin K$ קיים $p \in \Delta^k$

ב- $\langle x, p^m \rangle < \langle p^m, (v - \frac{1}{m}, \dots, v - \frac{1}{m}) \rangle$ - $(*)$

הסדרה $\{p^m\}_{m=1}^\infty$ חסומה ואם יש לה תת סדרה מתכנסת

$p^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} p^*$. המעלה הנקראת היא פונק' רצפה ואם

$$v \xleftarrow{\omega \leftarrow \ell} v - \frac{1}{m_\ell} = \langle p^m, (v - \frac{1}{m_1}, \dots, v - \frac{1}{m_n}) \rangle \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \langle p^*, x \rangle$$

אם $v \leq \langle p^*, x \rangle$ אז $x \in K$ הפרט, בר $1 \leq j \leq n$

$$v \leq \sum_{i=1}^k p_i^* a_{ij} \quad \text{אם } v \leq \langle p^*, a_{*j} \rangle \quad \text{אז } v \leq \sum_{i=1}^k p_i^* a_{ij}$$

זה האי שוויון הראשון שרצינו להוכיח.

ע"ם הגדרת v , קיימת סדרה $(u_m)_{m=1}^\infty \subseteq U$ כך ש- $u_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v$

אחר של $u_m \in U$ $m \in \mathbb{N}$ נובע ש- $(u_m, \dots, u_m) \in K$

אם K סגורה ואם $(v, \dots, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} (u_m, \dots, u_m) \in K$

נבחר ש- $K = \text{conv}(a_{*1}, \dots, a_{*n}) + \mathbb{R}_+^k$ ואם $(v, \dots, v) \in K$

נובע שקיים $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*) \in \Delta^n$ וקיים $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k$

כך ש- $(v, \dots, v) = \sum_{j=1}^n q_j^* a_{*j} + (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ הפרט $\alpha_i \geq 0$

$$\sum_{j=1}^n q_j^* a_{ij} \leq v \quad \text{אם } i \text{ מתקיים}$$

השלישייה (v, p^*, q^*) מקיימת בדיוק את מה שרצינו.

Ⓜ

ⓓ) נתנה את S (נקודות שיווי המשקל) (באס"ט טהורות) (באס"ט

מחורבות) של המשחק הבא כפונקציה של x :

	L	R
T	5, 5	4, 6
B	3, 3	3, x

• אס"ט טהורות ראשוני המשחקים:

-(T, L) אם יורו להיות ש"ה כי משחק 2 עדיף אס"ט ל-R

-(T, R) תמיד ש"ה כי $3 < 4$! $5 < 6$

-(B, L) יורו להיות ש"ה רק אם $x \leq 3$! $3 \geq x$ (בא"ט משחק 1) (בא"ט משחק 2)

-(B, R) אם יורו להיות ש"ה כי משחק 1 עדיף אס"ט ל-T

• אס"ט מחורבות ראשוני המשחקים. נניח שמשחק 1

משחק $(p, 1-p)$ ומשחק 2 משחק $(q, 1-q)$ בנק'

ש"ה מחורבת ממש.

		L	R
		q	1-q
T	p	x, 5	4, 6
B	1-p	3, 3	3, x

רשימת הערכות מתקיים

$$u_1(T, q) = u_1(B, q)$$

$$\Rightarrow xq + 4(1-q) = 3q + 3(1-q) = 3$$

$$\Rightarrow (x-4)q = -1$$

והעבור שחקן 2 מתקיים

$$u_2(p, L) = u_2(p, R)$$

$$\Rightarrow 5p + 3(1-p) = 6p + x(1-p)$$

$$\Rightarrow 5p + 3 - 3p = 6p + x - xp$$

$$\Rightarrow (x-4)p = x-3$$

$$\begin{cases} (x-4)q = -1 \\ (x-4)p = x-3 \end{cases} \quad \text{במקרה קבוצת מע' משוואות}$$

אם $x \neq 4$ רמת המשוואות הנו ייש פתרון, אבל זה לא

אפשר. רצי ל- $0 < q$ זכך ל- $x-4 < 0$, בומר

$x < 4$ ולכן רצי ל- $0 < p$ זכך $x+3 < 0$

בומר $x < -3$, אפשר זכך ל- $p < 1$, בומר $\frac{x+3}{x-4} < 1$

אם זה דומה לא וזה יהיה. רכן זה לא

יכול להיות ש"ה

זה אכן ש"ה כי הוא מעורב ממש וזכך אין אלטרנטיב
לאן לסטות.

• אם שחקן 1 משחק סתור ושחקן 2 מערב ממש ע"י

$$(q, 1-q)$$

- אם שחקן 1 משחק T אז העיקרון האצילות משחק

$$5 = u_2(T, L) = u_2(T, R) = 6 \quad \text{מתקיים}$$

אם זו סתירה. רכן אין ש"ה שבו שחקן 1 משחק T

ושחקן 2 מערב ממש.

- אם שחקן 1 משחק B אז העיקרון האצילות

$$3 = u_2(B, L) = u_2(B, R) = x$$

אם אז משחקן 1 עדיף לסטות ל-T כי הוא שולט

חלק ב. זמן אם זה לא ש"א.
 • אם אדם 2 משחק סתם ויש לו 1 מערה אחת $\epsilon'' (p, 1-p)$

- אם אדם 2 משחק L אז מחזיקו האזינות משחק 1

$$x = u_1(T, L) = u_1(B, L) = 3$$

אם אז משחק 2 דבר אסור ל-R כי היא שולטת חלק

על L. אז זה לא ש"א.

- אם אדם 2 משחק R אז מחזיקו האזינות משחק 1

$$y = u_1(T, R) = u_1(B, R) = 3$$

ולו סתירה אז גם זה לא ש"א.

אסיכום:

• ש"א סתם -

- (T, R) תמיד ש"א ולא תלוי ב-X.

- (B, L) ש"א אם $x \leq 3$

• ש"א מערה אחת -

- אין.

• ש"א שבו אחד המשחקים משחק סתם והשני מערה

- אין!

(5) נחשב את הערך ואת האסטרטגיות של ב אחד

מהמשחקים המשחק הבא בעוקציה ל X:

	L	M	R
T	x	0	0
M	0	2x	0
B	0	0	x ²

אם $x=0$ אז כמובן ערך המשחק הוא אפס ול אסטרטגיה

משחק 1 משחק 2 היא אסטרטגיה אופטימלית.

אם $x < 0$ אז שורה 3 שולטת ממש על שורה 1 ו-2 ועל

מספק יחסינות המשחק

0	0	x ²
---	---	----------------

אם כן עמודה 3 (שלילית ממש ϵ'') עמודה 1 ו-2

וזמן ואספק אחרת במחיר המלך $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

כעת נחזור שחקן המלך הוא 0 ואספק האופטימלית

היחידה עבור שחקן 1 היא $(0, 0, 1)$

ואספק אופטימלית עבור שחקן 2 הן $(p, 1-p, 0)$

אם $0 < x$ אז ע"י האספק $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ שחקן 1

מבטיח לעצמו תשלום גבוה מאספק אחר $v > 0$.

כעת, קי אפלטון שם (p_1, p_2, p_3) אספק אופטי

עבורו אז נהפך $0 < p_1, p_2, p_3$ שחקן 1

אם $0 = p_1$ אז שחקן 2 יכול לזכות בתשלום

אופטימלי יותר 0 (פחות v) וזה בניגוד להיות

$p_1, p_2, p_3 > 0$ האופן צומח

והאופן סימטרי אם (q_1, q_2, q_3) אספק אופטימלית

של שחקן 2 אז $0 < q_1, q_2, q_3$

כעת נשאל עדיין האזינות

עבור שחקן 1 מתקיים

$$u(T, q) = u(M, q) = u(B, q)$$

$$\Rightarrow x q_1 = 2x q_2 \Rightarrow q_1 = 2q_2$$

$$x q_1 = x(1 - q_1 - q_2) \Rightarrow q_1 = x(1 - q_1 - q_2)$$

$$\Rightarrow 2q_2 = x - 2x q_2 - x q_2 = x - 3x q_2$$

$$\Rightarrow q_2 = \frac{2x}{2+3x} \quad q_1 = \frac{2x}{2+3x} \quad q_3 = \frac{2}{2+3x}$$

כאשר $0 < x$ נחזור שם הערכים האלה גבוהים מאספק

אקסנים $1 - x$ נשים כן שחקן הפתרון היחיד

אם מסתמים על עדיין האזינות עבור שחקן 2

מתקבלות בדיוק אותן הנוסחאות עבור p אך

ש"ח מתקדם נשפך שני השחקנים מלפנים

$(\frac{x}{2+3x}, \frac{2x}{2+3x}, \frac{2}{2+3x})$ וערך המלך הוא אז

$$v = x \left(\frac{2x}{2+3x} \right)^2 + 2x \left(\frac{2x}{2+3x} \right)^2 + x^2 \left(\frac{2}{2+3x} \right)^2$$

אחרונה תלמוד

(1) נסח והוכח את משפט המינמקס על קיום ערך המינמקס
אם כזוהי אסטטיות

משפט המינמקס: תהי $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ כלי קיימים $p \in \Delta^k$
 $q \in \Delta^n$ - $v \in \mathbb{R}$ כך שלב $k \leq n$ ו

$$\sum_{i=1}^k p_i a_{ij} \geq v \geq \sum_{j=1}^n q_j a_{ij}$$

משפט עזר זל הוכחה: משפט הפסד: תהיה $C, K \subseteq \mathbb{R}^n$
 קבוצות סגורות, קמורות ולא ריקה. אם C קומפקטית
 אזי קיים $v \in \mathbb{R}^n$ וקיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלב $x \in C$ ו

$$\langle v, x \rangle < c < \langle v, y \rangle \quad y \in K$$

הוכחת משפט המינמקס: נתבונן בקבוצה

$$K = \text{conv}\{a_{*1}, \dots, a_{*n}\} + \mathbb{R}_+^k$$

הקמור של הממוצות של A

$\mathbb{R}_+^k$ - $\text{conv}\{a_{*1}, \dots, a_{*n}\}$ היא קבוצה קמורה וקומפקטית
 היא קבוצה קמורה וסגורה. לכן K היא קמורה (כסכום
 של קמורות) וסגורה (כסכום של קומפקטיות וסגורה).
 סגור של K לא ריקה.

נניח ש- $(u, \dots, u) \notin K$ עבור $u \in \mathbb{R}$ כלשהו

הקבוצה $C = \{(u, \dots, u)\}$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית

$\Leftarrow$ קיים וקטור $y \in \mathbb{R}^n$ כך שלב $x \in K$ וקיים

$$\sum_{i=1}^k y_i u = \langle y, (u, \dots, u) \rangle < \langle y, x \rangle \quad (*)$$

(שים לב שלפי הגדרת K , אם $x \in K$ אז $x = z + w$ אם $0 < \alpha \in \mathbb{R}$

אם $1 \leq i \leq k$ אז $x + \alpha e_i \in K$ וכל e_j וקטור

הוויכוח ה-י. אם $\alpha \in \mathbb{R}^+$ אז $1 \leq i \leq k$

$$\sum_{i=1}^k y_i u < \langle y, x + \alpha e_i \rangle = \langle y, x \rangle + \alpha y_i$$

$$\Rightarrow y_i > \frac{\sum y_i u - \langle y, x \rangle}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

$\Leftarrow 0 \leq y_i$ אז $y_i = 0$. יתר על כן, לא יתכן
 אחרות $y = 0$ כי אז $\sum y_i = 0$ לא יתכן אחרות או
 שוויון חלקי, נגזר $p = \frac{y}{\sum y_i}$, במידה $p \in \Delta^k$
 כאן, מתקיים אז $x \in K$

$$(*) \quad \langle p, (u, \dots, u) \rangle = \frac{\sum y_i u}{\sum y_i} < \frac{\langle y, x \rangle}{\sum y_i} = \langle p, x \rangle$$

סה"כ קיבלנו אז הסענה הבאה:

אם $(u, \dots, u) \notin K$ אז קיים $p \in \Delta^k$ כך שלב $(*)$
 $x \in K$ מתקיים $(**)$

(נתבונן בקסוס $U = \{u \in \mathbb{R} : (u, \dots, u) \in K\}$, הקסוס הבנוי

לא ריקה כי אם למשל $u = \max_{j=1, \dots, n} a_{ij}$ (יקח)

$(u, \dots, u) \in K$, כאן, להיפך K במידה

אם $u \in U$, $u < u'$ אז $u' \in U$.

מאידך, קיים $u \in \mathbb{R}$ כך ש- $u \notin U$, למשל, יקח

$u = \min_{j=1, \dots, n} a_{ij}$. מכאן נובע ש- U היא קרן חסומה

אחרת. $\Leftarrow$ קיים $v = \inf U \neq -\infty$.

להיפך, נחמס התחמנו, אז $m \in \mathbb{N}$, $v - \frac{1}{m} \notin U$,

כלומר $(v - \frac{1}{m}, \dots, v - \frac{1}{m}) \notin K$. לכן לפי $(*)$ קיים

$p^m \in \Delta^k$ כך שלב $x \in K$ מתקיים

$$\langle p^m, (v - \frac{1}{m}, \dots, v - \frac{1}{m}) \rangle < \langle p^m, x \rangle$$

היסוד $(p^m) \in \Delta^k$ היא חסומה ולכן קיימת לה תת-

סדרה מתכנסת $p \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} p^m$, אפשר להניח היא

סדורה וצפה ולכן מתקיים

$$v \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} v - \frac{1}{m_\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \langle p^{m_\ell}, (v - \frac{1}{m_\ell}, \dots, v - \frac{1}{m_\ell}) \rangle < \lim_{\ell \rightarrow \infty} \langle p^{m_\ell}, x \rangle = \langle p, x \rangle$$

כלומר $v \leq \langle p, x \rangle$ אז $x \in K$. במידה זו נכון

אם ניקח x להיות העמודה של A . כלומר $1 \leq j \leq n$

$$v \leq \langle p, a_{*j} \rangle = \sum_{i=1}^k p_i a_{ij}$$

זהו אי שוויון הראשון שרצינו.

ניגוד כזה - $(v, \dots, v) \in K$, אכן, מאחר $v = \inf U$

נובע שקיימת סדרה $(u^m) \subseteq U$ כך ש- $u^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v$

אם $u^m \in U$ אכן $(u^m, \dots, u^m) \in K$ $\forall m \in \mathbb{N}$

K קבוצה סגורה ואכן $(v, \dots, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} (u^m, \dots, u^m) \in K$

זהירות, מהירות K נובע שקיים $q = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta^n$

וקיים $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k$ כך ש-

$$(v, \dots, v) = \sum_{j=1}^n q_j a_j + (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$$v \geq \sum_{j=1}^n q_j a_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

סה"כ קיבלנו שהשלישייה (p, q, v) מקיימת את מה

שביקשנו. (11)

(2) נתונה את זרק שפלי המלחק הרה (המשוקל) v עם 50

שחקנים בו המרכה 53 ומשקלות שחקן 1 היא 6,

משקלות שחקן 2 היא 4 ומשקלות 6 אחז מהשחקנים

האחרים היא 2. אומר

$$v = [53, 6, 4, 2, 2, \dots, 2]$$

$$v(s) = \begin{cases} 1 & \sum w_i \geq 53 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

זרק שפלי מולצר "ע"

$$sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (v(P_i(\pi) \cup \{i\}) - v(P_i(\pi)))$$

הזור של השחקנים עם משקל 2 הם סימטריים (חשבונית)

זכור שחקן $i=50$ משקלו 2.

הזור $v(P_i(\pi) \cup \{i\}) - v(P_i(\pi)) = 1$ אם $P_i(\pi) \cup \{i\}$ הוא

אפחות 53 אנשים וב- $P_i(\pi)$ יש פחות מ- 53. אומר

שחקן i יש משקל 2 ואם המשקלים בוגרים פחותה הרכה

לה- $P_i(\pi)$ יש בדיוק 52 איש, ואז $\{i\}$ מה שנותן

אנו אעלות הנוא אספור את מספר התחבורות π כך ש- $P_i(\pi)$

יש 52 איש.



יש כמה אפשרויות:

- ב-52 יהיו יהיו מורכבים מקואליציות של 2, השבוי זה צריך 26 קואליציות מתוך ה-47 שנותנו ואותן אשף מסדר האסדר. כל סיפור כזה משאיר ו2 קואליציות באגד 2 ועוד אחת של 4 ואחת של 6, סה"כ 23 קואליציות שלא משנה איך נסדר, זכנן אפשרות זו יש

$$\binom{47}{26} \cdot 26! \cdot 23!$$

- אם הקואליציה של 6 מופיעה לפני $i=50$ ותוף ממנה רק קואליציות של 2 אז צריך עוד 23 קואליציות של 2 ואנשאות עוד 25 קואליציות מסדר בסדר בלתי זכנן סה"כ

$$\binom{47}{23} \cdot 24! \cdot 25!$$

- אם הקואליציה של 4 מופיעה לפני $i=50$ ותוף ממנה רק קואליציות של 2 אז צריך עוד 24 קואליציות של 2 ואנשאות עוד 24 קואליציות מסדר בסדר בלתי זכנן סה"כ

$$\binom{47}{24} \cdot 25! \cdot 24!$$

- אם אם הקואליציה של 6 אם הקואליציה של 4 מופיעות לפני $i=50$ אז צריך עוד 20 קואליציות של 2 ואנשאות 24 קואליציות מסדר, זכנן סה"כ

$$\binom{47}{21} \cdot 23! \cdot 26!$$

זכנן סה"כ

$$Sh_i(v) = \frac{1}{50!} \left[\binom{47}{26} \cdot 26! \cdot 23! + \binom{47}{23} \cdot 24! \cdot 26! + \binom{47}{24} \cdot 25! \cdot 24! + \binom{47}{21} \cdot 23! \cdot 26! \right]$$

$$i=3, \dots, 50 \quad \text{כל}$$

והשם את ערך שמי עבור המפלגה החדר 4.

השיקולים דומים כמו במקרה של משקל 2 אחריו (היורים
אספור את מספר התחבורות π שצבור $P_i(\pi) = 50$
שם יש 2 אפשרויות:

• המפלגה החדר 6 ואחריה לפני $i=2$ ואז יש אפשרות
רק מפלגות זה משקל 2, ואז צריך 25. אז נקבע
 $(48 \choose 25) \cdot 25! \cdot 24!$

• המפלגה החדר 6 נמצאת לפני $i=2$ ואז צריך אחריה עוד
44 קולות, נותר צריך 22 מפלגות החדר 2. אז נקבע
 $(48 \choose 22) \cdot 23! \cdot 26!$

$$Sh_2(v) = \frac{1}{50!} \left(\binom{48}{25} 25! 24! + \binom{48}{22} 23! 26! \right)$$

וזהו זהות גם ש- $P_i(\pi) = 52$, אז ה אופן דומה יש עוד
אם רק מפלגות 2 משתפרות ה- 52 אז
 $(48 \choose 26) \cdot 26! \cdot 23!$

• אם גם מפלגה 6 משתפרת ה- 52 אז
 $(48 \choose 23) \cdot 24! \cdot 25!$

$$Sh_2(v) = \frac{1}{50!} \left[\binom{48}{25} 25! 24! + \binom{48}{22} 23! 26! + \binom{48}{26} 26! 23! + \binom{48}{23} 24! 25! \right]$$

$$Sh_1 = 1 - 48 \cdot Sh_{50} - Sh_2$$

(3) נניח את האקסומות המאפיינות את ערך שמי:

$$\sum_{i=1}^n \psi_i v = v(N) \quad \text{יציאות:}$$

• אקסומות השמרים הסטטיים: אם i ו- j סטטיים

$$\psi_i v = \psi_j v$$

• אקסומות שיקן האפס:

אם $\psi_i v = 0$ לכל i אז $v = 0$.
 • אנליזה: אם $v = w + u$ אז $1 \leq i \leq n$ בר

$$\psi_i v = \psi_i w + \psi_i u$$

אם $\psi: G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ יחידה, פונקציה יחידה.
 המקיימת את אחד האקסיומות לעיל.

אם $u_s \in G^n$ (גזיר) $\emptyset \neq S \subseteq N$ בר

$$u_s(T) = \begin{cases} 1 & S \subseteq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אם $\{u_s\}_{s \in G^n}$ סיס של G^n .

הנחת יחידות: יהיו $\psi, \varphi: G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ כן, ויהי $v \in G^n$.

צריך להוכיח ל- $\psi v = \varphi v$, כלומר בר $1 \leq i \leq n$
 $\psi_i v = \varphi_i v$

כיות להמלמקים $(u_s)_{\emptyset \neq S \subseteq N}$ פורשים את G^n , קיימים
 $\alpha_s \in \mathbb{R}$ כך ל- $v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \alpha_s u_s$. אנליזה של
 ψ ושל φ מתקיים

$$\psi_i v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \psi_i(\alpha_s u_s)$$

$$\varphi_i v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \varphi_i(\alpha_s u_s)$$

אכן, מספיק להראות ל- ψ ; φ - מתכונות של $\alpha_s u_s$
 בר $\emptyset \neq S \subseteq N$, אכן, תפי $\emptyset \neq S \subseteq N$, אזי זפי
 גזירות u_s , S לא ש $i \notin S$ הוא לא שם.
 אכן האקסיומת שלקן האם נוסע ל-

$$\forall i \notin S \quad \psi_i(\alpha_s u_s) = 0 = \varphi_i(\alpha_s u_s) \quad (*)$$

ואז אם $i, j \in S$ אז i, j הם חילופיים ולכן
 האקסיומת השלישית (נוסע ל-)

$$(*) \quad \psi_i(\alpha_s u_s) = \psi_j(\alpha_s u_s)$$

$$(**) \quad \psi_i(\alpha_s u_s) = \psi_j(\alpha_s u_s)$$

נתון $W = \alpha_S U_S$, $W = \alpha_S U_S$ מתקיים

$$\alpha_S = W(N) = \sum_{i \in S} \psi_i W + \sum_{i \notin S} \psi_i W \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in S} \psi_i W =$$

$$\stackrel{(*)}{=} |S| \cdot \psi_{i_0} W$$

ראוי $i_0 \in S$ ולכן

$$i \in S \text{ בר } \psi_i W = \frac{\alpha_S}{|S|} \quad \Leftarrow$$

$$i \in S \text{ בר } \psi_i W = \frac{\alpha_S}{|S|} \quad \text{באופן זה מתקיים גם}$$

$$(**) \cdot \psi_i W = \frac{\alpha_S}{|S|} = \psi_i W \quad i \in S \quad \Leftarrow$$

$$i \in N \text{ בר } \psi_i W = \psi_i W \quad \text{ל- } (**) \text{ ו- } (*) \text{ מתקבל}$$

(11)

וכך הציקל מה שרצינו.

(4) נמצא עבור שני ערכים של המשתנים x, y, z ב-1

הפסד $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ של T : $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ של B

שני 2 הוא של המשחק

	L	M	R
T	1, y	x, x	z, z
B	2x, x ² -6	-2, 2y ²	0, 0

נשתמש בעיקרון האיזונים

אם הפסד איזון של T עבור משחק 1 מתקיים

$$u_1(T, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)) = u_1(B, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow 1+x = 2x-2 \Rightarrow x=3$$

ועבור משחק 2 מתקיים

$$u_2((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), L) = u_2((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), M)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot y + \frac{2}{3} \cdot (x^2-6) = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot 2y^2 \Rightarrow y+2 \cdot 3 = 3+4y^2$$

$$\Rightarrow 4y^2 - y - 3 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{8}$$

כל כרגע יש שני אפשרויות:

$y_1 > 0$

1, y ₁	3, 3	z, z
6, 3	-2, 2y ₁ ²	0, 0

(c)

$y_2 < 0$

1, y ₂	3, 3	z, z
6, 3	-2, 2y ₂ ²	0, 0

(d)

רבי עקיבן האדריסות אין זאלמן 1 סעיף כדאית
 פאר אס' סהרה.

רבי ע - $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ יהיה חלק משלם צריך שזאלמן
 2 לא יהיה כדאי אסות אסות וטהורה R.

סומר צריך ע - $u_2((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)) \geq u_2((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), R)$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + (x^2 - 6) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2y^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \cdot 7$$

$$\Rightarrow y + 3 + 3 \cdot 2 + 2y^2 \geq 27 \Rightarrow z \leq \frac{2y^2 + y + 9}{2}$$

אזכר יש שני אפסיות מהתאם אצחק ל y
 שמצאנו קודם. איך סוף ש שמי אפסיות ו

(c) $(3, y_1, z \leq \frac{2y_1^2 + y_1 + 9}{2})$

(d) $(3, y_2, z \leq \frac{2y_2^2 + y_2 + 9}{2})$

אורז א' תלס"ה

(1) נסת ודווח את משפט המינקס על קום ערך המלוק סכום אפס בצורה אסטרטגית.

משפט המינקס: תהי $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$, אזי קיימים $p \in \Delta^k$ $q \in \Delta^n$ - $v \in \mathbb{R}$ כך שלב אוליג אדם $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^k p_i a_{ij} \geq v \geq \sum_{j=1}^n q_j a_{ij}$$

משפט עזר (א) הוכחה: משפט ההפרדה: תהיה $K, C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה, קמורה, זרות אלא נקלה אם C קומפקטית אז קיים $v \in \mathbb{R}^n$ וקיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלב $x \in K$ אדם $y \in C$ מתקיים

$$\langle v, x \rangle < c < \langle v, y \rangle$$

הוכחת משפט המינקס: (נתבונן בקבוצה

$$K = \text{conv}\{a_{*1}, \dots, a_{*n}\} + \mathbb{R}_+^k$$

הקמור של המאוחדת של A

$\mathbb{R}_+^k$ - $\text{conv}\{a_{*1}, \dots, a_{*n}\}$ הוא קבוצה קמורה וקומפקטית - $\mathbb{R}_+^k$ הוא קבוצה סגורה וקמורה. לכן K היא קבוצה קמורה (סכום של קמורה וסגורה) (כסכום של סגורה וקומפקטית).
 נניח ש- $u \in \mathbb{R}^n$ ק - $(u, \dots, u) \notin K$ הקבוצה

$\{(u, \dots, u)\}$ היא נחובת קמורה וקומפקטית ומה K - K מה ששפירוץ לא נקלה אלא זמנית בתנאי משפט ההפרדה. קיים וקטור $y \in \mathbb{R}^k$ כך שלב $x \in K$ מתקיים

$$\sum y_i u = \langle y, (u, \dots, u) \rangle < \langle y, x \rangle \quad (*)$$

מההיגוה של K (ומע שם $x \in K$ - $\alpha \in \mathbb{R}^+$ $x + \alpha e_i \in K$ אוליג אדם e_i וקטור היחידה ה- i .
 אדם $1 \leq i \leq k$ מתקיים

$$\sum y_i u < \langle y, x + \alpha e_i \rangle = \langle y, x \rangle + \alpha y_i$$

$$y_i > \frac{\sum y_i u - \langle y, x \rangle}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0 \quad \Leftarrow$$

בומר $y_i \geq 0$ אז y_i חשיב. יתר על כן, אז יהיה
 זהות ל- $y=0$ כי אז לא יהיה אי שוויון חזק ב- (א)
 $\Leftarrow$ ניקח ארגומנט $p = \frac{y}{\sum y_i}$ ונראה ש- $p \in \Delta^k$.
 ונראה ש- φ זה מתקיים

$$u = \frac{\sum y_i u_i}{\sum y_i} < \frac{\langle y, x \rangle}{\sum y_i} = \langle p, x \rangle$$

אז למעשה קיבלנו את הטענה (הבאה):

ב- $u \in \mathbb{R}$ ק' ל- $(u, \dots, u) \notin K$ קיים $p \in \Delta^k$ (פ)
 כך שלכל $x \in K$ מתקיים $u < \langle p, x \rangle$.

(תמונה בקובץ $U = \{u \in \mathbb{R} : (u, \dots, u) \in K\}$. $U \neq \emptyset$.

למשל $u = \max_{i,j} a_{ij} \in U$, כמו כן, לפי הגדרת K

(בהם לכל $u \in U$, $u < u'$ אז $u' \in U$.

U גם לא מרוקנת את $\mathbb{R}$. למשל $u = \min_{i,j} a_{ij} - 1 \notin U$.

$U \Leftarrow$ היא קטן חסומה מלמעלה. קיים $v = \inf U \neq -\infty$.

ארגומנט חסם תחתון, אז $m \in \mathbb{N}$, $v - \frac{1}{m} \notin U$, בומר

$(v - \frac{1}{m}, \dots, v - \frac{1}{m}) \notin K$, אבל לפי הטענה (פ) קיים $p^m \in \Delta^k$

כך שלכל $x \in K$ $v - \frac{1}{m} < \langle p^m, x \rangle$.

הטענה $(p^m) \in \Delta^k$ חסומה ולכן יש לה תת סדרה

מתכנסת $p^m \rightarrow p$. בלוי ל- Δ^k סגור, $p \in \Delta^k$.

אם מנסה פנימית היא פוקציה רציפה אבל אז $x \in K$

מתקיים $\langle p, x \rangle \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \langle p^m, x \rangle < v - \frac{1}{m} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} v$

בומר אז $x \in K$, $v \leq \langle p, x \rangle$, בפרט זה נכון עבור

המאידות A (אם נחזיר ב- K) בומר אז $n \leq j \leq 1$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^k p_i a_{ij} \geq v$$

זה האי שוויון הראשון שרצינו

(כאן ל- $(v, \dots, v) \in K$, מכאן, ארגומנט חסם תחתון

יש סדרה $(u^m) \in U$ כך ל- $u^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v$. אבל

$u^m \in U$ אז m וכן $(u^m, \dots, u^m) \in K$.

סגור ולכן $(v, \dots, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} (u^m, \dots, u^m) \in K$

$$K = \text{conv}\{a_1, \dots, a_n\} + R_+^k$$

אם $(v, \dots, v) \in K$ פירושו הישר שקיים $q = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta^n$

$$(v, \dots, v) = \sum_{j=1}^n q_j a_{*j} + \alpha \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in R_+^k$$

אם זה בדיוק אותו של $k \leq i \leq k$ מתקיים

$$(\star\star) \quad \sum_{j=1}^n q_j a_{ij} \leq v$$

האי שוויונים $(\star)$ ו- $(\star\star)$ בדיוק מראים שהשלייה

$$(\star) \quad (v, q, q) \text{ מקיימת את מה שרצינו.} \quad (\star\star)$$

(2) נחשב את ערך שלבי במשחק הרחב האשוקלל v עם 50
 שחקנים בו המצבה 2 ומשקלות שחקנים 1 ו-2 היא g
 וחסר השחקנים משקלות 3. נאמר

$$v = [82; 9, 9, 3, 3, \dots]$$

ראשית, ברור שלשחקנים 3, ..., 50 הם סימטריים ולשחקנים

1, 2 הם סימטריים. לכן

$$\varphi_1 v = \varphi_2 v$$

$$\varphi_3 v = \dots = \varphi_{50} v$$

$\Leftarrow$ ומספיק נחשב את ערך שלבי של משחק 3 כזו את

$$\varphi_1 v = \frac{1 - 48 \cdot \varphi_3 v}{2}$$

נחשב את $\varphi_3 v$ מתקיים

$$\varphi_3 v = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (v(P_3(\pi)) - v(P_3(\pi)))$$

ברור ש- $1 = v(P_3(\pi)) - v(P_3(\pi))$ אם π ה- $P_3(\pi)$ יש

פחות מ- 2 איש אבל אפשרות 49. נאמר יש 80, 79 או 81.

אז צריך לספור את מספר התצורות π שבהן ה- $P_3(\pi)$

יש 80, 79 או 81 קולות. נספור את האפשרויות (אם

אפשרות):

• ה- $P_3(\pi)$ יש 79 קולות. 79 לא מתחלק ב-3 ומא 70

ומא 61 לא מתחלק ב-3. לכן אין תצורות כאלה

• ה- $P_3(\pi)$ יש 80 קולות. 80 לא מתחלק ב-3 ומא 71

48 א 62 ולכן יש זה לא יהיה אפילו.
 • ב- $P_3(\pi)$ יש 8 קואות ו8 מתחלק ב-3 אבל יש
 3 אפסיות:

• ו8 הקואות מורכבים מ3 קבוצות של 3. אז צריך 24
 קבוצות באלו אותן ניתן לבחור מתוך 47 אפסיות
 של 3 וניתן לסדר אותן בסדר. אז מספר הסידור
 (ולאחרות $(47-24)+2$ אפסיות שאותן ניתן לסדר בסדר.
 סה"כ מספר האפסיות הוא

$$\binom{47}{24} \cdot 24! \cdot 22!$$

• ו8 הקואות מורכבים מקבוצות של 3 וקבוצה אחת
 של 9. אז צריך 24 קבוצות של 3 אבל באופן
 צומח (קמט) שם האפסיות הם

$$\binom{2}{1} \binom{47}{24} \cdot 25! \cdot 24!$$

• ו8 הקואות מורכבים מקבוצות של 3 ושתי קבוצות של
 9. אז וקמט

$$\binom{47}{21} \cdot 23! \cdot 26!$$

$$\Rightarrow \varphi_3 v = \frac{1}{50!} \left[\binom{47}{27} 24! 22! + 2 \binom{47}{24} 25! 24! + \binom{47}{21} 23! 26! \right]$$

ומכאן ניתן לומר אז שזה הערכים הם למעשה
 אמורים.

(4) נמצא את β נק' השל"ה ממלך המא:

	L	M	R
T	1,8	1,2	0,0
B	1,4	2,12	9,3

האס' R (שאלת חק"ע" מ' זכין לא תשתל בארש"ה
 זכין מספיק זרע ש"ה ממלך

	L	M
T	1, 8	1, 2
B	1, 4	2, 12

• שני טהורים - הן זרות ל- (B, M) ; (T, L)

הם שני הטהורים היחידים

• אם משקן 1 משקן T ומשקן 2 מערב $(p, 1-p)$

אז מעיקרון האיזון והסדר

$$8 = u_2(T, L) = u_2(T, M) = 2$$

ולכן סתירה $\Leftarrow$ אין שני כזה

באופן דומה אין שני שבו משקן 1 משקן B ומשקן 2

מערב כי $4 \neq 12$

• אם משקן 2 משקן L אז רצוי שיתקיים עיקרון האיזון

משקן 1 ירוז לערב בל הסתברות $(p, 1-p)$ אכן

צריך לראות שלמשקן 2 לא יהיה כדאי לסטות ל-M, כלומר

$$u_2((p, 1-p), L) \geq u_2((p, 1-p), M)$$

$$\Rightarrow 8p + 4(1-p) \geq 2p + 12(1-p)$$

$$\Rightarrow 8p + 4 - 4p \geq 2p + 12 - 12p$$

$$\Rightarrow 14p \geq 8 \Rightarrow p \geq \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

אכן אם $p \geq \frac{4}{7}$ אז $(p, 1-p), L$ שני

אם משקן 2 משקן M אז משקן 1 לא ירוז לערב כי

כלומר עדיף לו לסטות ל-B.

• נותר למצוא שני מעורבים אחרים $((p, 1-p), (q, 1-q))$

מעיקרון האיזון ולמשקן 1:

$$1 = q + (1-q) = u_1(T, (q, 1-q)) = u_1(B, (q, 1-q)) = q + 2(1-q)$$

$$\Leftarrow 1 = -q + 2 \Leftarrow q = 1 \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ אין שני מעורב אחר

אם סה"כ במשקן המקורי שני שני טהורים $(B, M), (T, L)$

ושני מעורב - $((p, 1-p), L)$ עבור $p \geq \frac{4}{7}$

ערה 1

(א) יהי $\Gamma = \langle N, (S^i), (g^i) \rangle$ משחק ראשית עם סכום אסטרטגיות. שני משחקי המשחק הוא וקטור אסטרטגיות מעורבות $x \in \prod_{i=1}^n X^i$ רק של $x \neq 1$ אם $y^i \in X^i$ מתקיים $G^i(x|y^i) \leq G^i(x)$.
 נא G^i בהחלפה במעורבת של g^i : $x|y^i$.
 וקטור האסטרטגיות המתקדם x -א x החלפת x^i ב- y^i .

(ב) אם אחת מהתכונות הבאות נותן צימוד המשחק סכום אפס בשישית למתקיים אותה.

	L	R
T	0	0
B	0	0

(1) המשחק יש ש"ה באסטרטגיות:

	L	R
T	0	1
B	0	1

(2) נאן G באסטרטגיה ש"ה
 ראשית המשחקים יש באסטרטגיה (ש"ה):
 האסטרטגיה L (ש"ה חלק R (אסטרטגיה R כ $0 \leq 1$

(3) אין ש"ה באסטרטגיות אך יש באסטרטגיות מעורבות ידוע של המשחק יש ש"ה באסטרטגיות מעורבות ואכן מסתקף למצוא צימוד ש"ה או ש"ה סחור

	L	R
T	0	1
B	1	0

(T, L) א ש"ה כי עזיף המשחק 1 אסטרטגיה B.

T (B, R) " "

(T, R) א ש"ה כי עזיף המשחק 2 אסטרטגיה L.

R (B, L) " "

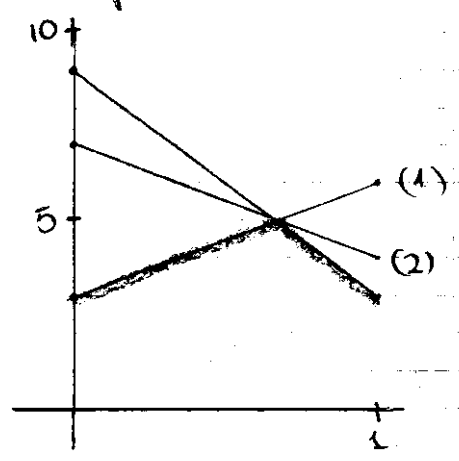
Ⓒ עבור המשחק סכום - אפס, נתלים את הערך של ורפחית של אחד בלסס מפורסות

	L	M	R
T	6	4	3
B	3	7	9

נתלים את הערך 'ה' הסתכיות שלססן 1

$$V = \max_p \min_q u(p, q) =$$

$$= \max_p \min \left(\underset{(1)}{6p + 3(1-p)}, \underset{(2)}{4p + 7(1-p)}, \underset{(3)}{3p + 9(1-p)} \right)$$



המקסימום של המינימום מתקבל בקצה הימני של הישרים

$$\begin{aligned} 6p + 3(1-p) &= 4p + 7(1-p) \\ \Rightarrow 2p &= 4(1-p) \\ \Rightarrow p &= 2 - 2p \\ \Rightarrow p &= \frac{2}{3} \\ V &= 6 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 5 \end{aligned}$$

אז ערך המשחק הוא 5 ובלסס מינימום שלססן 1 הוא $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

נניח ש- $(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$ בלסס מינימום שלססן 2 אז אפ' עקרון האצילות (מאחר ש- $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) > 0$ מתקיים

$$\begin{aligned} 6\alpha + 4\beta + 3(1-\alpha-\beta) &= 5 \\ 3\alpha + 4\beta + 9(1-\alpha-\beta) &= 5 \\ \Rightarrow 3\alpha + \beta &= 2 \\ -6\alpha - 2\beta &= -4 \end{aligned}$$

פתרון של משוואות אלה הוא $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ בלססן 2

בלססן 2 בלסס מינימום שלססן $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

© נניח $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, קבוצות סופיות A, B

$$\max_{a \in A} \min_{b \in B} f(a, b) = \min_{b \in B} \max_{a \in A} f(a, b)$$

אנחנו להקבוצות סופיות הם רגל אחת הוכחה.

יהי $a \in A$, $b \in B$ כל

$$f(a, b) \leq \max_{a \in A} f(a, b)$$

וכי נניח a חסר (יחיד) $\min$ משני הצדדים

$$\min_{a \in A} f(a, b) \leq \min_a \max_b f(a, b)$$

אנחנו נראה שיש a ו- b מספרים (אולי שונים) ש

ל b , a אחת לכל $a \in A$, $b \in B$ (וכי)

$$\max_b \min_a f(a, b) \leq \min_a \max_b f(a, b)$$

☺

© אם איתנו f - פונקציה (התוצאה) של a , b

הפונקציה f היא פונקציה, נניח f היא

$$\max_a \min_b f(a, b) = \min_b \max_a f(a, b)$$

אם יש a^* ו- b^* (אולי שונים) ש

$$V = \max_a \min_b f(a, b) = \min_b f(a^*, b) \quad (1)$$

$$V = \min_b \max_a f(a, b) = \max_a f(a, b^*)$$

(ראה) (a^*, b^*) - נניח $a \in A$, $b \in B$, $a^* \in A$, $b^* \in B$

$$(*) \quad f(a, b^*) \leq \max_a f(a, b^*) = V$$

$$(**) \quad f(a^*, b) \geq \min_b f(a^*, b) = V \quad b \in B$$

(*) - נניח $a^* \in A$, $b^* \in B$, $f(a^*, b^*) = V$ - נניח $a \in A$, $b \in B$, $a^* \in A$, $b^* \in B$

$$f(a^*, b^*) \leq V \quad (**) - נניח $a^* \in A$, $b^* \in B$, $f(a^*, b^*) = V$$$

$$f(a^*, b^*) \geq V$$

אם $a \in A$, $b \in B$, $a^* \in A$, $b^* \in B$, $a^* \in A$, $b^* \in B$

$$(*) \quad f(a^*, b) \geq f(a^*, b^*) \geq f(a, b^*)$$

שאלה 4

נמצא את σ שיווי המשקל האסטרטגיות
אזורים המשחק הבא ה-3 משחקים:

x, x, x	$0, 0, 0$
$0, 0, 0$	$2x, 3x, 4x$

כאשר משחק 1 יותר שורה, משחק 2 יותר עמודה
ומשחק 3 יותר x .
חשבו נותן אי"צ את המשחק יק:

	L	R
T	$0, 0, 0$	$0, 0, 0$
B	$0, 0, 0$	$0, 0, 0$

A

	L	R
T	$1, 1, 1$	$0, 0, 0$
B	$0, 0, 0$	$2, 3, 4$

B

בדיקה ישירה מראה שק' של הטורות הן
הנקודות הממוצעות

כאשר נונה (r, q, p) של מעורב ראש
הכוונה היא למעלה $(r, 1-r), (q, 1-q), (p, 1-p)$
אז או של σ מעורב אחד או שלמות אחד
מהמשחקים המשחק אחר.

אם זה של מעורב אחד אז צי עקרון האזיט
עבור משחק 3 מתקיים

$$u_3(p, q, A) = u_3(p, q, B)$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \cdot p \cdot q + 4 \cdot (1-p)(1-q)$$

אם $0 \neq p, q$; $1 \neq p, q \Rightarrow$ אף יצין הוא
חיוני אחד, זו סתירה. זכר ואוקים המשחק של
מעורב אחד:

ניגש רמת אבדוק את המקרים שבהם יש משחק
סבור. יש ששה מקרים אבדוק

- אם שחקן 1 משחק סתור T אז שחקן 2 ו-3 אחריהם משחקים את המשחק הבא:

	L	R
A	0,0	0,0
B	1,1	0,0

המשחק הזה יש שני ש"ח סתורים (החיסוחים) ואין ש"ח מצויבים: אם היה ש"ח מצויב ממש (r, q) אז מעדיפות האיזונים

$$1-r = u_2(L, r) = u_2(R, r) = 0$$

אם שחקן 2 משחק סתור L אז שחקן 3 לא רצוי לערב אלא פשוט לבחור B אם שחקן 3 משחק סתור B אז שחקן 2 לא רצוי לערב אלא פשוט לבחור L סתור.

אם שחקן 2 משחק R סתור אז שחקן 3 יכול לערב אם אז שחקן 2 עדיף לעבור ל-L.

ובאופן כללי אם שחקן 3 משחק A סתור אז שחקן 2 יכול לערב אם אז שחקן 3 עדיף לעבור ל-B. רק המשחק הקטן אין ש"ח מצויבים ולכן אם המשחק הזה אין ש"ח מצויב לבו שחקן 1 משחק T סתור.

- אם שחקן 1 משחק סתור B אז שחקן 2 ו-3 אחריהם משחקים את המשחק הבא:

	L	R
A	0,0	0,0
B	0,0	3,4

אם היה יש שני ש"ח סתורים (שלא מענינים אותנו) ובאופן כללי אנחנו במקרה שחקן 1 משחק T נוסע לבין פה ש"ח מצויבים ולכן אין ש"ח מצויבים בהם שחקן

1. משחק סתור B. משחק המקורי.
 • אם למקן 2 משחק L סתור A למקנים
 1: 3- משחקים את המשחק

	A	B
T	0,0	1,1
B	0,0	0,0

כדייק כמו קודם, אם מתקרה זה לא נקבע ש"ל
 מחזורים.

- אם למקן 2 משחק R סתור A למקנים
 1: 3- משחקים את המשחק

	A	B
T	0,0	0,0
B	0,0	2,4

ושם לא נקבע אם יש מחזור.

- אם למקן 3 משחק A סתור A למקנים 1
 2-: משחקים את המשחק

	L	R
T	0,0	0,0
B	0,0	0,0

כאן B איש מחזורים של B אחד
 מהלמקנים הוא ש"ל את מספר האפיון אחד
 מהלמקנים 1 או 2 יזרעו את אס' הדי שלמקן
 3 יזרעו את אס' B, ולכן זה לא
 סתם משחק יש ש"ל מחזור זה לא נקבע ש"ל
 מחזור המשחק המקורי.

- רמסוף, אם למקן 3 משחק את האס' הסתור
 B אז למקנים 1: 2- משחקים את המשחק
 המשחק

	L	R
T	1,1	0,0
B	0,0	2,3

ואם יש שני ש"מ סתוים (שלא מתוונים אותנו).
 ותפס ש"מ מסוים (p, q) .

אם עקרון האיזויות עבור שחקן 1 מתקיים

$$u_1(T, q) = u_1(B, q)$$

$$\Rightarrow q = 2(1-q) \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

אם עקרון האיזויות עבור שחקן 2 מתקיים

$$u_2(p, L) = u_2(p, R)$$

$$\Rightarrow p = 3(1-p) \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

← יש בתה משחק ש"מ מסוים $((\frac{3}{4}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$

בכך אף ש- $((\frac{3}{4}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), B)$ ש"מ

במשחק המקורי כי בהיותם האוסט B של שחקן

3 לאחרים לא נצאי לעבור זאלו בהיותם האוסט

של האחרים ושיחקן 3 יש תוחלת תשלום חיוסית אם

בווצאי לא נצאי או לעבור האוסט A שמה הוא מקבל

תשלום 0.

אסיום, אין בתה משחק ש"מ כמו שחקן אחד משחק

אחר והשני מסרב כי ברגע שמישהו משחק

סבור גם לפני עזר לבחור האוסט סבורה מתאימה

זכן, סה"כ גזאנו במשחק 5 נק' ש"מ, 4

נקודות סתומות ואחת גזומה שמה שחקן

3 משחק עבור והשניים האחרים מסרבים.

ψ תחביר (כך $A \ni g(b) = b$)
 $b = g(b) = f(\psi(b)) = f(b)$
 A כך $b \in A$ וכל f - ψ

2 2000

נתבונן במרחק שלוש מאות

	L	R
T	9, 8, 12	0, 0, 0
B	0, 0, 0	9, 8, 2

A

	L	R
T	0,0,0	3,4,6
B	3,4,6	0,0,0

B

(א) קו ארצות של"מ נוסדו הם לאה נחמניס.

-ע ה)) .פ'אלה בל ענן פאסט נ'ע (3N) @

(r, q, p) ז'ן כזה. אז אפ' עיקרון האינרסיה

אברהם אבינו

$$u_1(T, q_d, r) = u_1(B, q_d, r)$$

$$\Rightarrow g \cdot q_b r + 3 \cdot (1-q_b)(1-r) = g \cdot (1-q_b)r + 3q_b(1-r)$$

$$\Rightarrow 3q_r + (1-q_b)(1-r) = 3(1-q_b)r + q_b(1-r) \quad (1)$$

רפי עדיקרון האזיט את עמור שיקן 2 וקטל

$$u_2(p, L, r) = u_2(p, R, r).$$

$$\Rightarrow 8 \cdot p \cdot r + 4 \cdot (1-p)(1-r) = 8 \cdot (1-p)r + 4 \cdot p(1-r)$$

$$\Rightarrow 4pr + (1-p)(1-r) = 4(1-p)r + p(1-r) \quad (2)$$

חסי עקריו האיזילום עבור לזיון 3 וקמס

$$u_3(p, q, A) = u_3(p, q, B)$$

$$\Rightarrow 12 \cdot p \cdot q + 2 \cdot (1-p)(1-q) = 6 \cdot p(1-q) + 6(1-p) \cdot q$$

$$\Rightarrow 6pq + (1-p)(1-q) = 3p(1-q) + 3(1-p)q \quad (3)$$

צ'יב, אבדוק אם ל פתחון אמלואא (1), (2), (3)

משימה שלישית: משימות

$$a = \frac{p}{1-p} \quad b = \frac{q}{1-q} \quad c = \frac{r}{1-r}$$

תוצאות משימות אלה ניתנות אלפיתם את המשוואות (ק):

$$(1) \quad 3 \cdot b \cdot c + 1 = 3 \cdot c + b \Rightarrow 3bc - b = 3c - 1$$

$$(2) \quad 4 \cdot a \cdot c + 1 = 4c + a \Rightarrow 4ac - 4c = a - 1$$

$$(3) \quad 6ab + 1 = 3a + 3b \Rightarrow 6ab - 3a = 3b - 1$$

$$(c \neq \frac{1}{3} \text{ רק}) \quad b = \frac{3c+1}{3c-1} = 1 \quad \text{וקרה 1} \quad \text{משוואה}$$

$$(a \neq 1 \text{ רק}) \quad c = \frac{a-1}{4(a-1)} = \frac{1}{4} \quad \text{וקרה 2} \quad \text{משוואה}$$

$$(b \neq \frac{1}{2} \text{ רק}) \quad a = \frac{3b-1}{6b-3} = \frac{2}{3} \quad \text{וקרה 3} \quad \text{משוואה}$$

$\downarrow$
 $c \neq \frac{1}{3} \text{ רק}$

אם פתחנו אחד של המשוואות נקבל:

$$p = \frac{2}{5} \Leftarrow 3p = 2 - 2p \Leftarrow \frac{p}{1-p} = a = \frac{2}{3} \Leftarrow$$

$$q = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{q}{1-q} = b = 1$$

$$r = \frac{1}{5} \Leftarrow ur = 1 - r \Leftarrow \frac{r}{1-r} = c = \frac{1}{4}$$

אם יש לנו מערכת

זו, אבדוק מה קרה כאשר לא מתקיימות ההנחות שאינן
אנו אגידם אפואן וזוהי.

רק $c = \frac{1}{3}$ משוואות הן.

$$(1) \quad b + 1 = 1 + b \quad \text{תמיד נכון}$$

$$(2) \quad \frac{4}{3}a + 1 = \frac{4}{3} + a \Rightarrow \frac{1}{3}a = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 1$$

$$(3) \quad 6b + 1 = 3 + 3b \Rightarrow 3b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$p = \frac{1}{2} \Leftarrow a = 1 \quad \text{אם יש פתרון}$$

$$q = \frac{2}{5} \Leftarrow b = \frac{2}{3}$$

$$r = \frac{1}{4} \Leftarrow c = \frac{1}{3}$$

רק $a = 1$ משוואות הן.

$$(2) \quad 4c + 1 = 4c + 1 \quad \text{תמיד נכון}$$

$$(3) \quad 6b + 1 = 3 + 3b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

- Ⓒ וְאִם אֵת הַמִּשְׁתָּק הַצִּוְרָה אֶסְטִימֵהוּ
 אֲשֶׁר הֵן 1 יֵשׁ שְׁתֵּי תְּבִלּוֹת צִדָּה עִם 2 אֶסְטִימֵהוּ
 אֲחֵת $\Leftarrow$ סִדָּה יֵשׁ אִם 4 אֶסְטִימֵהוּ סְהוּמָה
 אֲשֶׁר הֵן 2 יֵשׁ 2 אֶסְטִימֵהוּ סְהוּמָה וְכֵן (קֶמֶץ)

	c	d
ae	5, -20	5, -20
af	5, -20	5, -20
be	20, 7	3, 6
bf	20, 7	4, 8

Ⓓ אִם כֵּן נֶאֱמָר שֶׁלֹּא שְׂמֵחָה??

Ⓔ (מִצָּח אֵת ב' נֶאֱמָר שֶׁלֹּא נֶאֱמָר)

הַדִּיקָה פְּשׁוּטָה מֵרָאה שֶׁלֹּא הַסְהוּמָה הוֹחִיצוֹת

הֵן הַנֶּגֶד הַמִּסְתָּמִּים

מִצָּח שֶׁלֹּא מִסְתָּמִּים מִמֶּנּוּ (נִיחַ) $(q, 1-q)$

(p, p_2, p_3, p_4)

שְׂמֵחָה הַדִּיקָה הַצִּוְרָה אֲשֶׁר הֵן 1
 $u_1(ae, q) = u_1(af, q) = u_1(be, q) = u_1(bf, q)$

$$\Rightarrow 5q + 5(1-q) = 5 = 20q + 3(1-q)$$

$$5 = 20q + 4(1-q)$$

$$\Rightarrow 0 = 0 = 1-q \Rightarrow q = 1$$

וְכֵן סְתִימָה אִם אֵין שֶׁלֹּא מִסְתָּמִּים מִמֶּנּוּ צִדָּה אֲשֶׁר הֵן

אִם יֵשׁ שֶׁלֹּא שְׂמֵחָה אֲשֶׁר הֵן 1 מִסְתָּמִּים מִמֶּנּוּ

אִם שְׂמֵחָה 2 אֲשֶׁר הֵן 2 מִסְתָּמִּים מִמֶּנּוּ אֲשֶׁר הֵן 1 יֵשׁ אֲשֶׁר הֵן

הֵן p ע"י $(0, 0, p, 1-p)$ (וְכֵן יֵשׁ אִם 20 תְּבִלּוֹת

וְאֲשֶׁר הֵן 2 כֵּן יֵשׁ 7 תְּבִלּוֹת) צִדָּה אֲשֶׁר הֵן אֲחֵת

$$7 \geq 6p + 8(1-p) = -2p + 8$$

יֵשׁ שְׂמֵחָה 2 אִם יֵשׁ אֲשֶׁר הֵן 2 קוֹרָה מִמֶּנּוּ

שֶׁלֹּא $(0, 0, p, 1-p)$, c $p \geq \frac{1}{2}$ אִם $p \geq \frac{1}{2}$ $\Leftarrow 2p \geq 1$

אם שחקן 2 משקל סתור R אז
 שחקן 1 יחזיק זכוכית $(0, 0, 1-p)$ וזכוכית
 ש"ה כזו שחקן 2 מקבל $20 - 20$ אם מקרה
 ושלשחקן 1 מקבל 3 אם מקרה ואלא אחר
 מהם אין זכוכית, זכוכית אל p $(R, (0, 1-p, p))$
 ש"ה.

אם שחקן 1 משקל ae סתור אז שחקן 2
 מקבל $20 - 20$ אם מקרה ואם יחזיק זכוכית סתור
 $(q, 1-q)$. אם אחרון זכוכית אזאז ש"ה אם לא
 ישתמש ושלשחקן 1. סתור זכוכית e .

$$-! \quad 5 \geq 20q + 3(1-q) \Rightarrow 2 \geq 17q \Rightarrow q \leq \frac{2}{17}$$

$$5 \geq 20q + 4(1-q) \Rightarrow 1 \geq 16q \Rightarrow q \leq \frac{1}{16}$$

$$\Leftarrow \text{עבור } q \leq \frac{1}{16} \text{ יש } (ae, (q, 1-q))$$

ובאופן כללי אם $(af, (q, 1-q))$
 ש"ה כאשר $q \leq \frac{1}{16}$.

אם שחקן 1 משקל be סתור סתור שלשחקן
 2 פשוט זכוכית אחר L ואם שחקן 1 משקל
 bs סתור אז שלשחקן 2 זכוכית אחר R אם לא
 לא ש"ה.