① 22.10.09

תורת המשחקים

הקורס הזה יתאר לנו כמה מודלים מתמטיים שמתארים משחקים. אלה יהיו מודלים פורמליים שיגדירו יצור מתמטי שנקרא לו משחק.

הגדרה: ~~משחק 2 שחקנים תחרותי~~ לחלוטין מורכב מ-

① קבוצת אסטרטגיות I של שחקן 1 ו-

קבוצת אסטרטגיות J של שחקן 2

② פונקצית תשלום g, המתאימה לכל זוג סדור $(i,j)\in I\times J$ מספר $g(i,j)$. כלומר $g: I\times J \longrightarrow \mathbb{R}$

I \ J	A	B	C	D	E	F
1	10	4	3	4	5	6
2	4	6	4	5	5	5
3	11	20	4	9	0	8
4	5	6	3	7	8	9
5	40	5	2	0	0	5

דוגמה: אם הקבוצות I,J סופיות נח להציג את g כמטריצה. למשל כאן
$I=\{1,2,3,4,5\}$
$J=\{A,B,C,D,E,F\}$
$g(1,A)=10$

נניח שהמספרים האלה מייצגים מיליוני שקלים. כמה היינו מוכנים לשלם כדי לקבל את הזכות להיות שחקן 1. כמובן, בחישובים צריך לקחת בחשבון שכל אחד מהשחקנים מנסה למקסם את g לטובתו (זה הסכום ש-2 צריך לשלם ל-1. כמובן 1 רוצה לקבל כמה שיותר ו-2 רוצה לשלם כמה שפחות). השחקנים בוחרים אסטרטגיה סימולטנית.

אם השחקן הראשון בוחר (2) הוא מרוויח לכל הפחות 4. לכן כדאי לו לשלם סכום עד 4. לשחקן השני כדאי להסכים לשחק תמורת סכום מעל 4 כי הוא יבחר את (C) ושם המקסימום שהוא ישלם הוא 4.

דוגמה:

	A	B
1	3	1
2	1	3

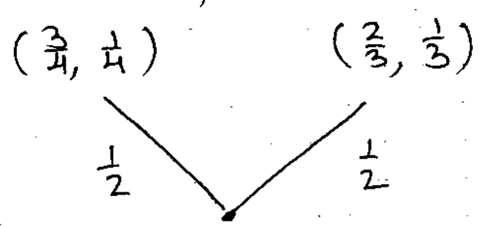
אם כאן השחקנים בוחרים אסטרטגיה סימולטנית.

לא לגמרי ברור כמה המשחק הזה שווה. אבל גם אופן ברור שיש כאן משמעות לא רק למספרים האבסולוטיים אלא ליחס של השחקנים למספרים האלה.

אם אני ירצה לקבל בוודאות מיליון דולר או להמר ואולי לזכות ב-10 אני בוודאי אעדיף את המיליון. אבל אולי ביל גייטס יחליט אחרת...
ישנם עניין של הסתברויות. אם ההגרלה היא כזאת שזוכים ב-10 מיליון בסיכוי מאוד מאוד גבוה אולי נעדיף את ההגרלה.

תועלת פון ניומן מורגנשטרן

נניח שאנחנו עומדים בפני הגרלה בין A ו-B. אנחנו מעדיפים את A על B. מסמנים כאת $A \succ B$.
נניח שיש שתי הגרלות: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
כאשר צד שמאל הסיכוי ל-A וצד השני הסיכוי ל-B.
ברור שנעדיף את ההגרלה השמאלית.
ונניח שיש לנו הגרלה מורכבת. בסיכוי $\frac{1}{2}$ מקבלים אחת מההגרלות:



? $(\frac{13}{24}, \frac{11}{24})$

ההגרלה המורכבת למעשה שקולה להגרלה $(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2})$ כלומר $(\frac{17}{24}, \frac{7}{24})$. אם בהינתן הגרלה נוספת, אנחנו רוצים להשוות ובמקרה הזה נעדיף את המורכבת.

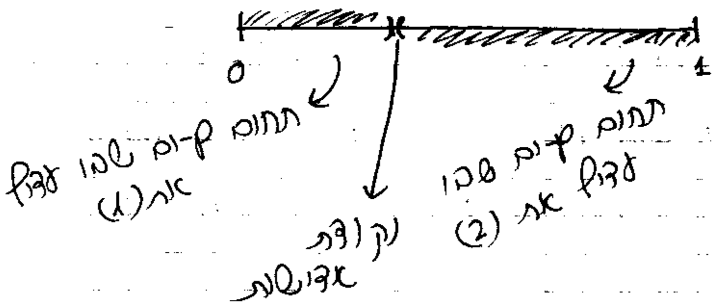
נסבך קצת. נניח שיש עוד תוצאה אפשרית ואנחנו מעדיפים $A \succ B \succ C$.
עכשיו את ההגרלות ניתן לייצג ע"י (p_1, p_2, p_3) , (q_1, q_2, q_3)
כאן פחות קל להחליט איזו הגרלה עדיפה.

(2)

נתבונן בהגרלות מהצורה (1) $(p, 0, 1-p)$ לעומת
(2) $(0, 1, 0)$

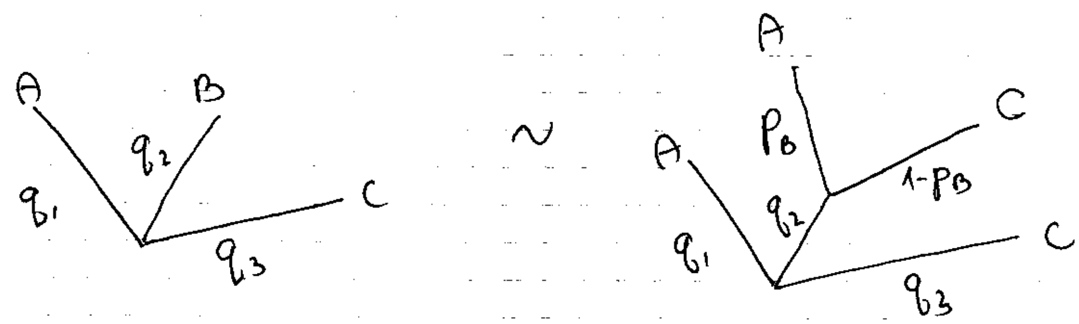
אם $p=1$ ברור שנעדיף את (1) ואם $p=0$ ברור שנעדיף את (2). אבל מה עם ערכי הביניים?

אם היינו אומרים שיש איזה תנאי רציפות על יחסי העדפות אז יש איזה p_B שמתחתיו ההגרלה $(p_B, 0, 1-p_B)$ שקולה להגרלה $(0,1,0)$.



<u>טענה:</u> $(p_1, p_2, p_3) \succ (q_1, q_2, q_3)$ אמ"מ
$$p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot p_B + p_3 \cdot 0 > q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot p_B + q_3 \cdot 0$$

<u>שכנוע:</u> ~~כיוון~~ שיש נקודת אדישות אפשר להחליף את ההגרלה בין שלושה ערכים להגרלה בין שניים בלבד



כאן הסיכוי ל-A הוא $q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot p_B + q_3 \cdot 0$

באותו אופן נעשה חילוף מהגרלה (p_1, p_2, p_3) ונקבל הגרלה שקולה שבה הסיכוי ל-A הוא $p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot p_B + p_3 \cdot 0$

ועכשיו אנחנו יכולים להשוות!

כך התאמנו למשתנה שלנו מספרים $(1, p_B, 0)$ שחישוב התוחלת שלהם מאפשר לנו לבחור הגרלות מועדפות.

באופן דומה אם יש פרסים $A_1 \succ \ldots \succ A_n$ שאפשר להתאים להם מספרים $U(A_1), \ldots, U(A_n)$ רק שהחלטה בין הגרלות נעשית באמצעות השוואת תוחלות - $\{p_i\} \succ \{q_i\}$ אמ"מ $\sum p_i U(A_i) > \sum q_i U(A_i)$

אז המספרים האלה נקראים <u>תועלות פון-נוימן מורגנשטרן</u>

איך מוצאים מספרים כאלה? ניקח $U(A_1)=1$

$U(A_n)=0$

ואז בינהם נחפש את נקודות ההכרעה שבהן למשל

A_2 מוצאת $\sim (P_{A_2},0,\dots,0,1-P_{A_2})$ או באופן כללי

A_i מוצאת $\sim (P_{A_i},0,\dots,0,1-P_{A_i})$

משפט: minimax (העתקתי מויקיפדיה)

בטבלה כלשהי, קיים ערך V וקיימת אסטרטגיה לכל שחקן, כך ש-

(א) בהינתן האסטרטגיה של שחקן (2), הערך המקסימלי ששחקן (1) יכול לקבל הוא V

(ב) בהינתן האסטרטגיה של שחקן (1), הרווח המקסימלי עבור שחקן (2) הוא -V

3 29.10.09
תורת המשחקים

אדמיניסטרציה – 10% תרגילים - חובת הגשה 70%
90% מבחן

משפט: תהיינה X,Y קבוצות ותהי $f: X\times Y \to \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
אזי
$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

דוגמה: אי שוויון יכול להיות חזק.
X - השלמים הזוגיים
Y - השלמים האי-זוגיים

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & x>y \\ -1 & x<y \end{cases}$$

אגף שמאל נותן מדד למינימום תשלום ששחקן 1 יכול להבטיח לעצמו
ואגף שמאל נותן מדד למקסימום ששחקן 2 צריך לשלם.

הוכחה: יהיו $x\in X$, $y\in Y$ נתונים. אזי

$$f(x,y) \le \sup_{x\in X} f(x,y)$$ אלה שתי פונקציות מ-y

$$\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \underbrace{\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)}_{\text{זה קבוע}}$$ ⇐ אפשר לקחת inf של שני האגפים.

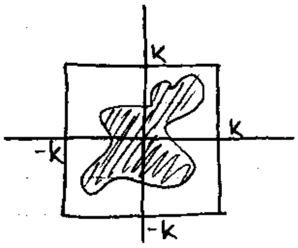
$$\Leftarrow \quad \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

☺

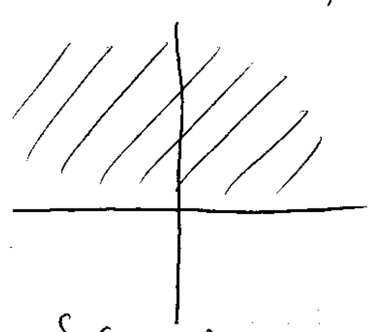
אנחנו מדברים על משחקים תחרותיים לחלוטין. אז מעניינים אותנו מקרים שבהם יש שוויון ומקרים שבהם יש גם ממש max וממש inf.
במשחקי ידיעה מלאה תמיד יש נקודת אוכף יש לנו X, Y - האסטרטגיות של השחקנים ; f - התשלום - רק שמתקבל שוויון.

הבנות:

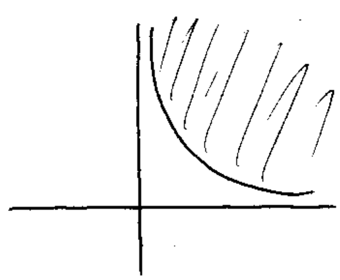
- סדרת איברים $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ ב- $\mathbb{R}^n$ (כלומר $X^k=(X^k_1,\dots,X^k_n)\in\mathbb{R}^n$) מתכנסת לאיבר $X\in\mathbb{R}^n$ אם לכל $n\ge i\ge 1$ $X^k_i \xrightarrow[k\to\infty]{} X_i$.
  במקרה זה נסמן $X^k \xrightarrow[k\to\infty]{} X$
  (הערה: אנחנו יודעים להפוך את זה ללשון ε ושימוש במרחקים)
- קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}^n$ תיקרא חסומה אם קיים $K>0$ כך שלכל $x\in X$ לכל $n\ge i\ge 1$ $|x_i|\le K$.



- תהיינה X,Y קבוצות ב- $\mathbb{R}^n$. אם X חסומה אז $X\cap Y$ חסומה.
- זה נובע מיד שאם X חסומה ו- $Y\subseteq X$ אז Y חסומה.
- נאמר ש- $X\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה אם לכל סדרת איברים $(X^k)_{k=1}^{\infty}$ ב- X (כלומר $x^k\in X$ לכל $k\in\mathbb{N}$) המתכנסת ל- $x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $x\in X$.
- קבוצה חלקית של קבוצה סגורה אינה בהכרח סגורה. למשל, $[0,1]$ סגורה ו- $(0,1)$ לא...
- תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות סגורות. אזי $\bigcap_\alpha X_\alpha$ סגורה.
  אכן, תהי סדרה $(X^k)_{k=1}^{\infty}\subseteq\bigcap_\alpha X_\alpha$ המתכנסת ל- $x\in\mathbb{R}^n$.
  אזי לכל α $(X^k)_{k=1}^{\infty}\subseteq X_\alpha$ ו- X_α סגורה. לכן $x\in X_\alpha$.
  ומכאן נובע כמובן ש- $x\in\bigcap_\alpha X_\alpha$.
- דוגמאות לקבוצות סגורות:



$\{(x,y) : y\ge 0\}$



$\{(x,y) : x\ge 0, y\ge 0, xy\ge 1\}$

- קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}^n$ תיקרא קומפקטית אם היא סגורה וחסומה
  (הגדרה זו מתלכדת עם ההגדרה הכללית של מרחבים טופולוגיים במקרה של $\mathbb{R}^n$).

(4)

- פונקציה $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ נקראת רציפה אם לכל סדרה $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ ב-$\mathbb{R}^n$ המתכנסת ל-$x\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $f(x^k)\xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$
- פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ אם לכל $1\le i\le l$ הפונקציה $f_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)_i$ רציפה. (זה לא קשה להוכיח.)
- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה ; c - ממשי. אזי הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\ge c\}$ היא סגורה. שהרי אם $x^k\xrightarrow[k\to\infty]{}x$ אז $f(x^k)\ge c$ לכל k ולכן $f(\lim\limits_{k\to\infty}x^k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)\ge c$.
$\Leftarrow$ $x=\lim\limits_{k\to\infty}x^k$ בקבוצה.
- דוגמאות לפונקציות רציפות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

(א) $f(x)\equiv c$ קבוע

(ב) לכל $1\le i\le n$ $f_i(x_1,\dots,x_n)=x_i$

- פעולות ששומרות על רציפות:

(1) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $\alpha\in\mathbb{R}$ קבוע. אזי $\alpha f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto\alpha f(x)$ רציפה.

(2) $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפות. אזי $f+g:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)+g(x)$ רציפה. וכן $f\cdot g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)g(x)$ רציפה.

התכונות האלה נובעות באופן ישיר מהתכונות המקבילות בסדרות.
וכמובן (1) נובע מ-(2) שהרי $f(x)\equiv\alpha$ רציפה.
נובע מהתכונות של פולינום במשתנים $x_1,\dots,x_n$ הוא פונקציה רציפה.

(3) אם $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפות ; $g(x)\neq0$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$ אז גם $f/g:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)/g(x)$ רציפה.

- בשימוש בתכונות הנ"ל ניתן להוכיח ש-$\{(x,y): x\ge0,\ y\ge0,\ xy\ge1\}$ סגורה. זה חיתוך של שלוש קבוצות סגורות. הן סגורות כי הפונקציות x, y, xy רציפות ואם f רציפה $\{x: f(x)\ge c\}$ סגורה.

<u>משפט</u>: תהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית. ותהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי קיים $x^*\in X$ כך ש-$f(x^*)\ge f(x)$ לכל $x\in X$. כלומר f מקבלת על X מקסימום.

הוכחה: ראשית נראה ש-f חסומה על X ואז נראה שהיא גם ממש מקבלת את המקסימום שלה.

טענת עזר: אם $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת איברים חסומה ב-$\mathbb{R}^n$ עם חסם K, אז קיימת ל-$(x^k)_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת $(x^{k_m})_{m=1}^{\infty}$ ל-$x \in \mathbb{R}^n$.

הוכחה: נסתכל על הקואורדינטה הראשונה. היא יוצרת סדרה חסומה ב-$\mathbb{R}$. לפי משפט בולצאנו ויירשטראס יש לה תת סדרה מתכנסת. זה בתורו מגדיר תת סדרה של x^k. כעת נתבונן בקואורדינטה השנייה של התת סדרה. היא מגדירה סדרה חסומה ב-$\mathbb{R}$ ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת. ובכן גם זה מגדיר תת סדרה של x^k. רק נמשיך באינדוקציה עד הקואורדינטה ה-n. בסוף נקבל תת סדרה של x^k שכל קואורדינטה בה מתכנסת. וזה אומר שהתת סדרה מתכנסת.

נניח ש-f אינה חסומה מלעיל. אז לכל K קיים $x^k \in X$ כך ש-$f(x^k) > k$. לסדרה $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ יש תת סדרה מתכנסת (כי X חסומה) $(x^{k_m}) = (y^m)_{m=1}^{\infty}$ כך ש-$y^m \xrightarrow[m\to\infty]{} y \in \mathbb{R}^n$ ומרציפות של f נובע $k_m \le f(y^m) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(y)$. זאת סתירה.

נסמן ב-α את החסם העליון של $\{f(x) : x \in X\}$. כלומר, לכל $x \in X$ $f(x) \le \alpha$ ולכל k טבעי קיים x^k כך ש-$f(x^k) \ge \alpha - \frac{1}{k}$. הסדרה $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ חסומה ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $(x^{k_m})_{m=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-$x \in X$. לכן $f(x) = \lim_{m\to\infty} f(x^{k_m})$. אבל $\alpha \leftarrow \alpha - \frac{1}{k} \le f(x^{k_m}) \le \alpha \rightarrow \alpha$
$\Leftarrow$ $f(x) = \alpha$ ומצאנו נקודה שמקבלת את החסם העליון, כלומר את המקסימום. ☺

• אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$, $Y\subseteq\mathbb{R}^m$ נזהה את $X\times Y$ כקבוצה חלקית של $\mathbb{R}^{n+m}$.

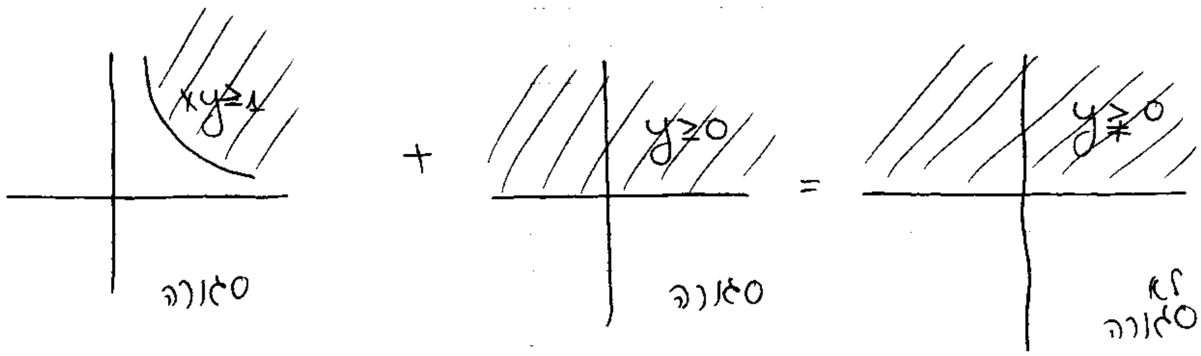
אם X,Y חסומות אז $X\times Y$ חסומה.

אם X,Y סגורות אז $X\times Y$ סגורה.

אם X,Y קומפקטיות אז $X\times Y$ קומפקטית.

• אם $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $X+Y=\{x+y : x\in X,\ y\in Y\}$

סכום קבוצות סגורות הוא לא בהכרח קבוצה סגורה. למשל



<u>טענה</u>: תהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה ותהי $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית. אזי $X+Y$ סגורה.

<u>הוכחה</u>: תהי $(z^k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה ב-$X+Y$ המתכנסת ל-z. אנחנו צריכים להראות ש-$z\in X+Y$. $z^k\in X+Y$ ולכן ניתן לכתוב $z^k=x^k+y^k$ כאשר $x^k\in X$, $y^k\in Y$. Y קומפקטית ולכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת $(y^{k_m})_{m=1}^{\infty}$ כך ש-$y^{k_m}\xrightarrow[m\to\infty]{} y\in Y$. (היא חסומה ולכן יש תת סדרה מתכנסת. היא סגורה ולכן הגבול נמצא ב-Y). תת $z^{k_m}=x^{k_m}+y^{k_m}$ סדרה של z^k ולכן גם היא מתכנסת לאותו הגבול z. אז $x^{k_m}+y^{k_m}\xrightarrow[m\to\infty]{} z$ וגם $y^{k_m}\xrightarrow[m\to\infty]{} y$. לכן הסדרה $x^{k_m}=z^{k_m}-y^{k_m}$ מתכנסת ל-$z-y$. והרי $x=z-y\in X$ שהרי X סגורה. $\Longleftarrow$ $z=(z-y)+y\in X+Y$. ☺

<u>תזכורת</u>: מכפלה פנימית. אם

$$x=(x_1,\dots,x_n),\quad y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$$

אז המכפלה הפנימית ביניהם היא

$$\langle x,y\rangle = x\cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

תכונות המכפלה הפנימית:

- סימטריות $\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle$
- לינאריות $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
- הומוגניות $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ $\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$

⇐

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k_1}\lambda_j x^j,\ \sum_{\ell=1}^{k_2}\theta_\ell y^\ell \right\rangle = \sum_{j=1}^{k_1}\sum_{\ell=1}^{k_2}\lambda_j\theta_\ell\langle x^j,y^\ell\rangle$$

- חיוביות $\langle x,x\rangle \geq 0$ ושוויון אמ"מ $x=0$

אי שוויון שכדאי לזכור: $2\langle x,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle$

זה נובע מרק ש- $\langle x-y,x-y\rangle \geq 0$.

<u>טענה</u>: הכדור הסגור ברדיוס $0\leq R$ סביב $\vec{0}$, כלומר

$$B=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,x\rangle \leq R^2\}$$

הינו קבוצה סגורה וקמורה.

<u>הוכחה</u>: יהיו $x,y\in B$. ויהי $0\leq\alpha\leq 1$. בכדי להוכיח ש- B קמורה צריך להוכיח ש- $\alpha x+(1-\alpha)y\in B$. אכן,

$$\langle \alpha x+(1-\alpha)y,\ \alpha x+(1-\alpha)y\rangle =$$
$$= \alpha^2\langle x,x\rangle + 2\alpha(1-\alpha)\langle x,y\rangle + (1-\alpha)^2\langle y,y\rangle \leq$$
$$\leq \alpha^2R^2 + (1-\alpha)^2R^2 + \alpha(1-\alpha)(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle) \leq$$
$$\leq \cancel{\alpha^2R^2} + R^2 - \cancel{2\alpha R^2} + \cancel{\alpha^2R^2} + \cancel{2\alpha R^2} - \cancel{2\alpha^2R^2} = R^2$$

$\alpha x+(1-\alpha)y\in B$ ⇐ B קמורה.

B סגורה כי $\langle x,x\rangle$ פונקציה רציפה ומשיעור הקודם ראינו שזה אומר ש- B סגורה.

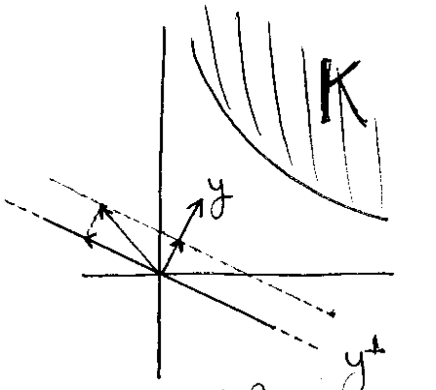
משפט ההפרדה: תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ לא ריקה, סגורה וקמורה
כך ש- $0 \notin K$. אז קיים פונקציונל לינארי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
ו- $0<c$ כך שלכל $x \in K$ $f(x) \ge c$.

תזכורות: ל-$\mathbb{R}^n$ יש בסיס שמורכב מווקטורי היחידה $e_i=(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)$
אם f פונקציונל לינארי (נסמן $f(e_i)=y_i$ ונסמן $y=(y_1,\dots,y_n)$. אז לכל $x\in\mathbb{R}^n$ ניתן לרשום $x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$ ומכאן

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x,y\rangle$$

אז אפשר לומר שהפונקציונל הלינארי f מיוצג ע"י y
(וזה עובד כמו מכפלה פנימית.
כל פונקציונל לינארי על מרחב וקטורי n-ממדי אפשר להציג כמכפלה פנימית! אז כל מה שהוכחנו בלינארית...

תת מישור $\{x: \langle x,y\rangle = 0\} = y^\perp$
ישרייה $\{x: \langle x,y\rangle = c>0\} =$



המרחב הניצב ל-y.

המשפט אומר שיש ישרייה שמפרידה את K (על-מישור) ו- 0.

הוכחה: עבור R מספיק לקחת את הקבוצה
$$C = \{x\in K:\ \langle x,x\rangle \le R^2\}$$
אינה ריקה. למשל, נבחר $x^*\in K$ וניקח $R = \|x^*\|$.
C קבוצה סגורה (כחיתוך של שתי קבוצות סגורות) וקמורה (כחיתוך של קמורות). נגדיר $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י $g(x)=\langle x,x\rangle$.
g הינה פונקציה רציפה (שהרי היא פולינום בקואורדינטות).
C כמובן חסומה (ע"י הכדור ברדיוס R) ומכאן קומפקטית.
$\Rightarrow$ g מקבלת מינימום ב-C, כלומר קיימת $y^*\in C$ כך ש- $g(y^*) \le g(y)$ לכל $y \in C$. מהגדרת C נובע ש- $g(y^*) \le R^2$ ואילו לכל $y\in K\setminus C$ $g(y) > R^2$. לכן לכל $y\in K$ $g(y^*) \le g(y)$.

נבחר f ע"י $f(x)=\langle x,y^*\rangle$ ו- $c=g(y^*)=\langle y^*,y^*\rangle$.

צריך להראות ש-f ו- c מקיימים את הדרוש.

ברור ש-$0<c$ שהרי $y^*\neq 0$ כי הוא ב- K והרי $0\notin K$.

יהי $x\in K$. K קמורה וגם $y^*\in K$. לכן לכל $0\le t\le 1$

$tx+(1-t)y^*\in K$. לכן

$$\langle y^*,y^*\rangle = g(y^*) \le g(tx+(1-t)y^*) =$$
$$= \langle tx+(1-t)y^*, tx+(1-t)y^*\rangle =$$
$$= t^2\langle x,x\rangle + 2t(1-t)\langle x,y^*\rangle + (1-t)^2\langle y^*,y^*\rangle$$

נגדיר $h(t)=t^2\langle x,x\rangle+2t(1-t)\langle x,y^*\rangle+((1-t)^2-1)\langle y^*,y^*\rangle$

מתקיים $0\le h(t)$ עבור $0\le t\le 1$ משום שהוא ההפרש

בין אגף ימין לאגף שמאל. כמו כן $h(0)=0$.

h גזירה מימין ב- 0 (כפונקציה של t) לכן $h'(0)\ge 0$.

אולם $h'(0)=2\langle x,y^*\rangle-2\langle y^*,y^*\rangle$.

$$\Rightarrow f(x)=\langle x,y^*\rangle \ge \langle y^*,y^*\rangle = c$$

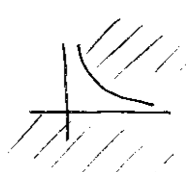
וזה מה שרצינו.

<u>שאלות:</u>

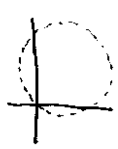
1 - מה היה קורה אם K לא הייתה סגורה?

2 - מה היה קורה אם היינו רוצים להפריד בין שתי קבוצות קמורות? האם יש מישור מפריד?

<u>תשובות:</u>

2 לא! למשל,  . אבל אם אחת אחת מהקבוצות

היא קומפקטית אז דווקא כן אפשר...



1- לא! למשל אם K כדור פתוח שמשיק ל- 0

<u>משפט הפרדה 2</u>: תהיינה K, C קבוצות קמורות סגורות

לא ריקות עם חיתוך ריק. אם C קבוצה קומפקטית

אזי קיים פונקציונל לינארי f ו- c כך שלכל $x\in C$

ולכל $y\in K$ $f(x)<c<f(y)$

הוכחה: C קמורה קומפקטית לא ריקה. אזי גם $-C$ קבוצה קמורה קומפקטית לא ריקה. אזי ההפרש ביניהן $K+(-C)=K-C$ הוא קבוצה סגורה לא ריקה וקמורה (סגורה לפי טענה מהשיעור הקודם וקמירות קל להוכיח).

$\vec{0}\notin K-C$ כי אחרת היו קיימים $y\in K$ ו- $x\in C$ כך ש- $y-x=0$. אבל אז $x=y$ וזו סתירה לכך שהחיתוך ריק.

ע"פ המשפט הקודם קיים $d>0$ וקיים פונקציונל לינארי g כך שלכל $z\in K-C$ מתקיים $g(z)\geq d$. כלומר, לכל $x\in C$ ו- $y\in K$

$$g(y-x)\geq d>0$$

אזי $g(y)-g(x)\geq d$.

C קומפקטית ו- g רציפה. לכן קיים $x^*\in C$ כך ש- $g(x)\leq g(x^*)$ לכל $x\in C$. לכן

$$g(y)-g(x^*)\geq d$$

$$\Leftarrow\quad g(y)\geq g(x^*)+d>g(x^*)+\frac{d}{2}>g(x^*)\geq g(x)$$

נבחר $c=g(x^*)+\frac{d}{2}$ ו- $f=g$. אז לכל $y\in K$ לכל $x\in C$ $f(x)<c<f(y)$. ☺

תרגיל: להוכיח שאפשר גם לבחור $c\neq 0$.

משפט: תהי A מטריצה מסדר $k\times n$ - $A=(a_{ij})_{i=1,j=1}^{k,n}$

אזי קיימים וקטורי הסתברות $p=(p_1,\dots,p_k)$ $p_i\geq 0$ $\sum_i^k p_i=1$

$q=(q_1,\dots,q_n)$ $q_j\geq 0$ $\sum_j^n q_j=1$

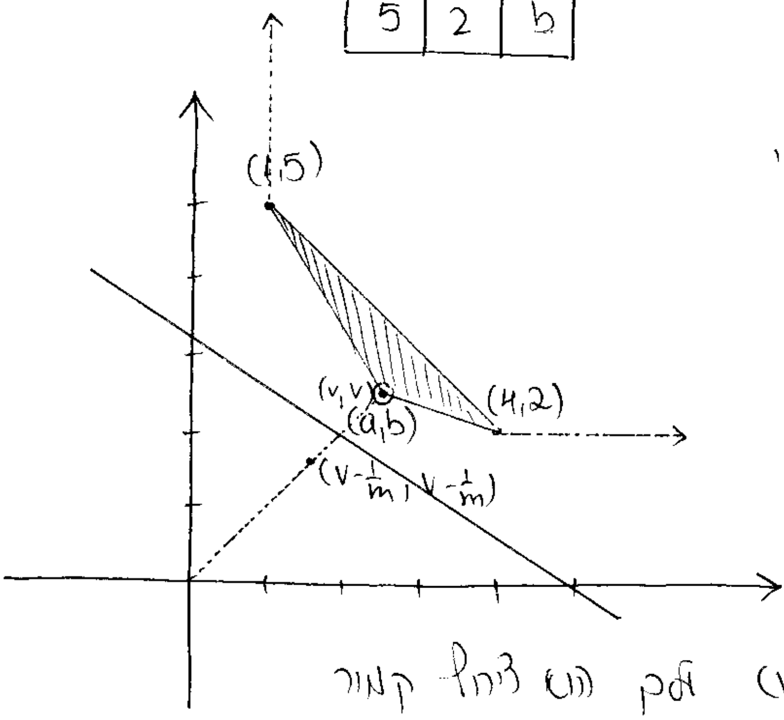
ומספר v כך שלכל $1\leq j\leq n$ ולכל $1\leq i\leq k$

$$\sum_{i=1}^{k}p_i a_{ij}\geq v\geq\sum_{j=1}^{n}q_j a_{ij}$$

הסבר: ההסתברויות p,q הן למעשה אסטרטגיות של שחקן השורות ושחקן העמודות שמבטיחות להם את ערך המשחק v.

<u>אינטואיציה:</u> נראה את מהלך ההוכחה על מטריצה ספציפית

q_1	q_2	q_3
1	4	a
5	2	b



נתבונן בקמור של וקטורי העמודה. - C.
ל- C נוסיף את כל הווקטורים האי-שליליים.
ונקבל $K=C+\mathbb{R}^2_+$
נגדיר
$=\sup\{u:(u,u)\notin K\}$
אז מהגדרה $(v,v)\in K$ ולכן הוא צירוף קמור של העמודות - $q_1(1,5)+q_2(4,2)+q_3(a,b)$ בתוספת וקטור חיובי כלשהו, שהרי $K=C+\mathbb{R}^2_+$. [q הוא כמובן וקטור הסתברות, כי זה צירוף קמור] ולכן $(v,v)\le q_1(1,5)+q_2(4,2)+q_3(a,b)$.
איך נמצא את p? יש m כך ש- $(v-\frac{1}{m}, v-\frac{1}{m})\notin K$ (מההגדרה של v). ממשפט ההפרדה יש מישור מפריד בין K לבין הנקודה הזאת. אבל זה נכון לכל m. אז לכל m יש מישור מפריד. נסמן ב- p^m את הנורמל למישור הזה.
ניקח את p להיות נקודת ההצטברות שלהם.
בפרק הבא נכתוב את ההוכחה הפורמלית.

⑨ 19|11|09

תורת המשחקים.

<u>משפט המינמקס</u>: תהי A מטריצה מסדר $k\times n$. אזי

קיימים $v\in\mathbb{R}$, $p=(p_1,\dots,p_k)\in\Delta^k$ ו- $q=(q_1,\dots,q_n)\in\Delta^n$

[תזכורת: $\Delta^m=\{(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m : x_i\ge 0 , \sum_{i=1}^m x_i=1$]

כך שלכל $1\le j\le n$ ולכל $1\le i\le k$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^k p_i a_{ij} \ge v \ge \sum_{j=1} q_j a_{ij}$$

<u>הוכחה</u>: נגדיר

$$K=\left\{ (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k \;\middle|\; \text{קיים } \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Delta^n \text{ כך שלכל } 1\le i\le k \;\; \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij}\le x_i \right\}$$

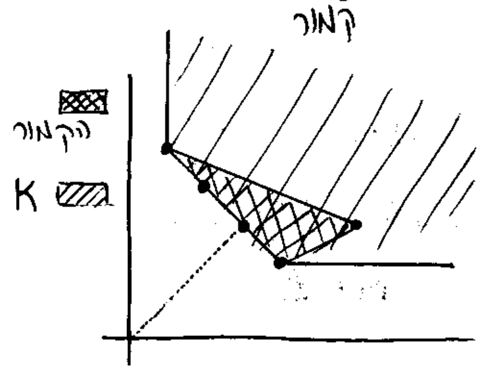
במילים אחרות, אם a_{*j} הינו הוקטור $\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots \\ a_{kj}\end{pmatrix}$ (העמודה ה-j של A)

אז $K=\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k \;\middle|\; \text{קיים } \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Delta^n \text{ כך ש- } (x_1,\dots,x_k)\underset{\text{קואורדינטה-קואורדינטה}}{\ge}\sum_{j=1}^n \lambda_j a_{*j}\right\}$

או לחילופין

$$K=\underbrace{co}_{\text{קמור}}\{a_{*1},\dots,a_{*n}\}+\mathbb{R}^k_+$$

$co\{a_{*1},\dots,a_{*n}\}$ היא קמורה, סגורה וחסומה. $\mathbb{R}^k_+$ קמורה וסגורה. לכן K היא קבוצה סגורה (כסכום של סגורה וקומפקטית) וקמורה (כסכום של קמורות). ברור גם ש- $K\neq\emptyset$.



$\begin{pmatrix}1&2&3&4&6\\5&4&3&2&3\end{pmatrix}$

I נטען שקיים $u\in\mathbb{R}$ ממשי כך ש- $\mathbb{R}^k\ni(u,\dots,u)\notin K$. נגדיר $u=\min_{i,j} a_{ij}-1$. הוא לא יכול להמצא ב- K (ק) (להשתכנע מההגדרה של K).

II קיים $u\in\mathbb{R}$ כך ש- $\mathbb{R}^k\ni(u,\dots,u)\in K$. נגדיר $u=\max_{i,j} a_{ij}$.

יהי $u\in\mathbb{R}$ כך ש- $\mathbb{R}^k\ni(u,\dots,u)\notin K$ (וישנו כזה לפי I).

עפ"י משפט ההפרדה קיים $y=(y_1,\dots,y_k)\in\mathbb{R}^k$ כך שלכל $x=(x_1,\dots,x_k)\in K$,
$$\sum_{i=1}^k u y_i < \langle x,y\rangle$$

יהי e^i וקטור היחידה ה-i ב-$\mathbb{R}^k$ $\left(e^i_j = \delta_{ij}\right)$ ויהי $x^* \in K$.

אזי מהגדרת K, לכל $\alpha > 0$, $x^* + \alpha e_i \in K$ ולכן

$$\sum_{i=1}^k u y_i < \langle x^*, y \rangle + \alpha \langle e_i, y \rangle$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k u y_i - \langle x^*, y \rangle < \alpha y_i \quad (**)$$

$$\underset{\alpha>0}{\Rightarrow} \quad y_i \geq \frac{\sum_{i=1}^k u y_i - \langle x^*, y \rangle}{\alpha} \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} 0$$

$\Leftarrow$ $0 \leq y_i$ לכל i ו-$y \neq 0$ (כי אחרת ב-(**)

לא יכול להיות אי שוויון חזק, אז להתחלף כי במשפט ההפרדה מובטח שאפשר לבחור $y \neq 0$).

נגדיר $p_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^k y_j}$. אז $p_i \geq 0$ ובמוכן $\sum_{i=1}^k p_i = 1$.

ולכן לכל $x \in K$

$$\frac{\sum_{i=1}^k u y_i}{\sum_{i=1}^k y_i} = \sum_{i=1}^k p_i u < \langle x, p \rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\sum_{i=1}^k y_i}$$

נגדיר $U = \{u \in \mathbb{R} : (u, \dots, u) \in K\}$

אם $u \in U$; $u' > u$ אזי $u' \in U$ ולכן U

הינה קרן חסומה מלרע. נבחר $v = \inf\{u \in U\} \neq -\infty$

לכל $m \in \mathbb{Z}$ $v - \frac{1}{m} \notin U$ (עפ"י הגדרת חסם תחתון) ולכן

מאחר ש- $\mathbb{R}^k \ni (v - \frac{1}{m}, \dots, v - \frac{1}{m}) \notin K$ קיים $\Delta^k \ni p^m$

כך ש- $\langle p^m, (v - \frac{1}{m}, \dots, v - \frac{1}{m}) \rangle < \langle p^m, x \rangle$ לכל

$x \in K$. תהי p^* נקודת הצטברות של p^m (כלומר יש תת סדרה p^{m_ℓ}

של p^m כך ש- $p^{m_\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} p^*$). אז בגלל שמכפלה

סקלרית היא רציפה נקבל

$$v \xleftarrow[\ell \to \infty]{} v - \frac{1}{m_\ell} = \langle \underset{\Delta^k \ni p^{m_\ell} \text{ כי}}{p^{m_\ell}}, (v - \frac{1}{m_\ell}, \dots, v - \frac{1}{m_\ell}) \rangle < \langle p^{m_\ell}, x \rangle \to \langle p^*, x \rangle$$

$\Leftarrow$ $v \leq \langle p^*, x \rangle$

בפרט, לכל $1 \leq j \leq n$ $v \leq \langle p^*, a_{*j} \rangle$. כלומר

$$v \leq \sum_{i=1}^k p_i^* a_{ij}$$

עפ"י הגדרת v, קיימת סדרה $u_m \in \mathcal{U}$ כך ש- $u_m \xrightarrow[m\to\infty]{} v$
מאחר ש- $u_m \in \mathcal{U}$ נובע ש- $(u_m, \dots, u_m) \in K$ ומהגבול
$u_m \xrightarrow[m\to\infty]{} v$ נובע ש- $(v,\dots,v) \longrightarrow (u_m,\dots,u_m)$. אבל K סגורה
ולכן $(v,\dots,v) \in K$.
עפ"י הגדרת K קיים $q=(q_1,\dots,q_n) \in \Delta^n$ כך ש-
$\sum_{j=1}^n q_j a_{*j} \le (v,\dots,v)$. במילים אחרות, לכל i $\sum_{j=1}^n q_j a_{ij} \le v$
ולכן השלישיה (v, p^*, q) מקיימת את מה שצריך. ☺

① ניסוח הבסיס של משפט המינמקס:
לכל מטריצה A מסדר $k\times n$ קיימים $v \in \mathbb{R}$, $p^* \in \Delta^k$, $q^* \in \Delta^n$
כך שלכל $1 \le i \le k$ ולכל $1 \le j \le n$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k p_i^* a_{ij}}_{\text{פונקציה של } j} \ge v \ge \underbrace{\sum_{j=1}^n q_j^* a_{ij}}_{\text{פונקציה של } i}$$

② ניסוח אלטרנטיבי:
לכל מטריצה A מסדר $k\times n$ קיימים $v \in \mathbb{R}$, $p^* \in \Delta^k$, $q^* \in \Delta^n$
כך שלכל $q \in \Delta^n$ ולכל $p \in \Delta^k$

$$g(p^*, q) \equiv \sum_{i,j} p_i^* q_j a_{ij} \ge v$$
$$g(p, q^*) \equiv \sum_{i,j} p_i q_j^* a_{ij} \le v$$

הוכחת שקילות:
$(\Leftarrow)$ יהיו v, p, q מהניסוח (1). יהיו $p \in \Delta^k$, $q \in \Delta^n$.
אז

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n p_i^* q_j a_{ij} = \sum_{j=1}^n q_j \underline{\sum_{i=1}^k p_i^* a_{ij}} \ge \sum_{j=1}^n q_j v = v$$
$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n p_i q_j^* a_{ij} = \sum_{i=1}^k p_i \sum_{j=1}^n q_j^* a_{ij} \le \sum_{i=1}^k p_i \cdot v = v$$

$(\Rightarrow)$ זה כמובן מקרה פרטי, אם ניקח את וקטורי היחידה. ☺

ניתן לזה פרשנות משמעות של תורת המשחקים. g^1 התשלום לשחקן 1
ו- g^2 התשלום לשחקן 2. אז p^*, q^* מקיימים

לכל $q \in \Delta^n$ ולכל $p \in \Delta^k$

$$v = g^1(p^*, q^*) \geq g^1(p, q^*)$$
$$-v = g^2(p^*, q^*) \geq g^2(p^*, q)$$

משחקים בצורה אסטרטגית

משחק בצורה אסטרטגית מורכב מ-

(א) קבוצת שחקנים סופית $N = \{1, \dots, n\}$

(ב) לכל שחקן $i \in N$ קבוצת אסטרטגיות טהורות S^i

אם S^i קבוצה סופית המכילה m_i איברים, נסמן

$$S^i = \{1, \dots, m_i\}$$

(זה לא אומר שאסטרטגיות של שחקנים שונים הן זהות. אנחנו רק מוותרים על אינדקס בסימון).

(ג) לכל שחקן $i \in N$ פונקצית תשלום $g^i : \bigtimes_{j \in N} S^j \to \mathbb{R}$

אז משחק הוא שלשה

$$\Gamma = \langle N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N} \rangle$$

ההרחבה המעורבת של המשחק $\langle N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N} \rangle$

הינו המשחק

$$\langle N, (X^i)_{i \in N}, (G^i)_{i \in N} \rangle$$

כאשר

- X^i קבוצת ההסתברויות על S^i, כלומר $x^i \in X^i$ הינו פונקציה $x^i : S^i \to \mathbb{R}_+$ רק ש- $\sum_{s^i \in S^i} x^i(s^i) = 1$
- $$G^i(x^1, \dots, x^n) = \sum_{s \in \bigtimes_{i=1}^n S^i} \left(\prod_{j=1}^n x^j(s_j) \right) g^i(s)$$

⑪ 26/11/09
משחקים.

משחק בצורה אסטרטגית:

- $N=\{1,\dots,n\}$ קבוצת השחקנים
- $S^i=\{1,\dots,m_i\}$ אוסף טהורות של שחקן i

$S=\underset{i\in N}{\times} S^i$ - אוסף שילובי האסטרטגיות של כל השחקנים

- $g^i: S\to\mathbb{R}$ פונק' התשלום של שחקן i
- $X^i=\Delta S^i=\{x^i\in\mathbb{R}^{m_i}_+ : \sum_{j=1}^{m_i} x^i_j=1\}$ - אוסף מעורבות של שחקן i

$X=\underset{i\in N}{\times} X^i$

- פונק' התשלום בהרחבה המעורבת של המשחק הינה $G^i: X\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$G^i(x^1,\dots,x^n)=\sum_{\substack{1\le j_1\le m_1\\ \vdots \\ 1\le j_n\le m_n}}\Big(\prod_{k=1}^{n} x^k_{j_k}\Big)g^i(j_1,\dots,j_n)$$

את הביטוי הזה אפשר לכתוב בצורה אחרת:

$$G^r(x^1,\dots,x^n)=\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{\substack{l\neq 1\\ 1\le j_l\le m_l}}\Big(x^1_{j_1}\prod_{k\neq 1}x^k_{j_k}\Big)g^r(j_1,\dots,j_n)=$$

$$=\sum_{j_1=1}^{m_1}x^1_{j_1}\sum_{\substack{l\neq 1\\ 1\le j_l\le m_l}}\Big(\prod_{k\neq 1}x^k_{j_k}\Big)g^r(j_1,\dots,j_n)$$

אבל ברור שבמקום להוציא את $x^1_{j_1}$ החוצה יכולנו לעשות את זה לכל $x^i_{j_i}$. לכן לכל $r\in N$ ולכל $i\in N$

$$G^r(x^1,\dots,x^n)=\sum_{j_i=1}^{m_i}x^i_{j_i}\sum_{\substack{l\neq i\\ 1\le j_l\le m_l}}\Big(\prod_{k\neq 1}x^k_{j_k}\Big)g^r(j_1,\dots,j_n)$$

$\Leftarrow$ לכל $y^i\in X^i$ נקבל

$$G^r(x|_i y^i)=G^r(x^1,\dots,x^{i-1},y^i,x^{i+1},\dots,x^n)=$$

$$=\sum_{j_i=1}^{m_i}y^i_{j_i}\cdot G^r(x|_i\ e^i_{j_i})$$

כאשר לכל $1\le j\le m_i$, e^i_j הוא וקטור היחידה ה-j.

<u>הערה</u>: בספרות במקום $G(x|_i y^i)$ כותבים רק $G(x|y^i)$ והאינדקס המוחלף ברור מה אינדקס העליון של y.

הגדרה: שיווי משקל במשחק $\Gamma = \langle N, (S^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N}\rangle$ (באסט' מעורבות) הינו נקודה $x=(x^1,\dots,x^n)\in X$ כך שלכל $1\le i\le n$ ולכל $y^i\in X^i$ מתקיים

$$G^i(x|y^i) \le G^i(x)$$

טענה: $x\in X$ ש"מ ב-Γ אמ"מ לכל $i\in N$ ולכל $1\le j\le m_i$

$$G^i(x|e^i_j) \le G^i(x)$$

הוכחה: יהי $x\in X$. נסמן את הטענות:

(*) לכל $1\le i\le n$ ולכל $y^i\in X^i$ $\quad G^i(X|y^i)\le G^i(x)$

(**) לכל $1\le i\le n$ ולכל $1\le j\le m_i$ $\quad G^i(X|e^i_j)\le G^i(x)$

צ"ל ש- (*) $\Longleftrightarrow$ (**)

נניח (*). יהיו $1\le i\le n$, $1\le j\le m_i$. $e^i_j\in X^i$ ולכן מ-(*) נובע $G^i(x|e^i_j)\le G^i(x)$ לכן (*) $\Longrightarrow$ (**).

מאידך, נניח (**). יהיו $1\le i\le n$ ו- $y^i\in X^i$. אזי

$$G^i(x|y^i) = \sum_{i=1}^{m_i} y^i_j\, G^i(x|e^i_j) \overset{(**)}{\le} \sum_{j=1}^{m_i} y^i_j\, G^i(x) = G^i(x)$$

☺

משפט: בכל משחק בצורה אסטרטגית (עם מספר סופי של שחקנים ואסטרטגיות) קיים שיווי משקל (באסט' מעורבות).

הערה: משפט המינמקס למעשה אומר שזה נכון במקרה של משחק סכום אפס בשני שחקנים.

משפט נקודת השבת של בראואר: תהי C קבוצה קמורה קומפקטית לא ריקה במרחב אוקלידי ($\mathbb{R}^k$) ותהי $f: C\to C$ רציפה. אזי ל-f קיימת נקודת שבת, כלומר קיימת נקודה $x\in$ כך ש- $f(x)=x$.

דוגמה:

- $C=\{a\}$ זה ברור.
- $C=[0,1]$ זה נובע ממשפט ערך הביניים. אם $f: C\to C$ רציפה אזי הפונקציה $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(x)=x-f(x)$

הינה רציפה. $g(0)\le 0$ ו- $g(1)\ge 0$ לכן עפ"י משפט
ערך הביניים של פונק' רציפות, קיים $x^*\in[0,1]$ כך ש-
$g(x^*)=0$, כלומר $f(x^*)=x^*$.

- אם הקבוצה לא קמורה אז המשפט לא נכון. למשל $G=\{1,2\}$ והפונקציה $f(1)=2$, $f(2)=1$.
- אם הקבוצה לא חסומה נסתכל פשוט על $G=\mathbb{R}$; $f(x)=x+1$
- אם הקבוצה לא סגורה נסתכל מקטע $G=(0,1]$; $f(x)=\frac{x}{2}$
- אם f לא רציפה זה בוודאי לא נכון כי f יכולה לעשות כל דבר.
- סתם קשירות לא מספיקה במקום קמירות. למשל נסתכל על המעגל ב- $\mathbb{R}^2$. לכל פונקצית סיבוב שאינה בכפולה של 2π אין נקודת שבת. דווקא מספיק ש- G תהיה כוכבית.

<u>הוכחת המשפט:</u> נגדיר $G=X=\times_{i\in N}X^i$. כל רכיב X^i
במכפלה הקרטזית הינו קבוצה קמורה קומפקטית לא ריקה ולכן
X קבוצה קמורה קומפקטית לא ריקה (כמכפלה של כאלה)
$X^i\subseteq\mathbb{R}^{m_i}$ $\Leftarrow$ $X\subseteq\mathbb{R}^{\sum_{i\in N}m_i}$ לכן X קבוצה במרחב אוקלידי.
נגדיר $f: X\longrightarrow\mathbb{R}^{\sum_{i\in N}m_i}$ באופן הבא: לכל $1\le i\le n$ ולכל
$1\le j\le m_i$ נגדיר $f^i_j: X\longrightarrow\mathbb{R}$ ע"י

(א) $h^i_j: X\longrightarrow\mathbb{R}$ כאשר $h^i_j=\max(0, G^i(x|e^i_j)-G^i(x))$

(ב) $$f^i_j(x)=\frac{x^i_j+h^i_j(x)}{1+\sum_{k=1}^{m_i}h^i_k(x)}$$

נגדיר $f^i=(f^i_1,\dots,f^i_{m_i}): X\rightarrow\mathbb{R}^{m_i}$

טענה 1: לכל $x\in X$, $f^i(x)=(f^i_1(x),\dots,f^i_{m_i}(x))\in X^i$
הוכחה: לכל $1\le j\le m_i$, $x^i_j\ge 0$, $h^i_j(x)\ge 0$ לכן גם
$f^i_j(x)\ge 0$. כמו כן,

$$\sum_{j=1}^{m_i}f^i_j(x)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m_i}h^i_k(x)}\sum_{j=1}^{m_i}(x^i_j+h^i_j(x))=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{m_i}h^i_k(x)}\left(1+\sum_{j=1}^{m_i}h_j(x)\right)$$
$$=1$$

הראנו ש- $f^i: X \to X^i$

טענה 2: f^i_j רציפה לכל $1 \le i \le n$ ולכל $1 \le j \le m_i$

הוכחה: $G^i(x|e^i_j)$ ו- $G^i(x)$ פולינומים בקואורדינטות של x ולכן פונקציות רציפות ב-X. $\Leftarrow$ $G^i(x|e^i_j) - G^i(x)$ רציפה כהפרש של שתי פונקציות רציפות. הפונקציה הקבועה 0 היא כמובן רציפה. ולכן $h^i_j(x)$ רציפה כמקסימום של מספר סופי של פונקציות רציפות. ההעתקה $x \mapsto x^i_j$ רציפה ולכן $x^i_j + h^i_j(x)$ רציפה. כמו כן $x \mapsto \sum_{j=1}^{m_i} h^i_j(x)$ רציפה כסכום של מספר סופי של פונקציות רציפות.

$\sum_{j=1}^{m_i} h^i_j(x) \ge 0$ ולכן $1 + \sum_{j=1}^{m_i} h^i_j(x) \gneq 0$ רציפה. ולכן לבסוף גם $f^i_j(x)$ רציפה כמנה של שתי פונקציות רציפות כאשר פונקציית המכנה אינה מתאפסת.

כעת נגדיר לבסוף את $f: X \to \mathbb{R}^{\sum_{i\in N} m_i}$ ע"י

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^n(x))$$

טענה 3: f פונקציה רציפה מ- X ל-X.

הוכחה: זה ברור כי הוכחנו שכל הקואורדינטות שלה רציפות וברור שהיא לתוך X כי $f^i: X \to X^i$.

אז f פונקציה רציפה מקבוצה קומפקטית קמורה ולא ריקה במרחב אוקלידי לעצמה ולכן יש לה נק' שבת.

תהי x נקודת שבת של f. כלומר לכל $1 \le i \le n$ ולכל $1 \le j \le m_i$ $f^i_j(x) = x^i_j$ (*).

נניח ש-x לא נ"ש במשחק. אזי קיים $1 \le i^* \le n$ וקיים $1 \le j \le m_{i^*}$ כך ש- $G^{i^*}(x|e^{i^*}_j) > G^{i^*}(x)$ $\Leftarrow$ $h^{i^*}_j(x) > 0$.

ולכן עבור i^* זה $\sum_{j=1}^{m_{i^*}} h^{i^*}_j(x) > 0$.

מ-(*) נקבל ש-

$$\cancel{x^{i^*}_j} + x^{i^*}_j \underbrace{\sum_{k=1}^{m_{i^*}} h^{i^*}_k(x)}_{>0} = \cancel{x^{i^*}_j} + h^{i^*}_j(x)$$

$\Leftarrow$ $x^{i^*}_j > 0$ אמ"מ $h^{i^*}_j(x) > 0$ ואז $G^{i^*}(x|e^{i^*}_j) > G^{i^*}(x)$

לבסוף,

$$G^{i^*}(x) = \sum_{j=1}^{m_i} x_j^{i^*} G^{i^*}(x \mid e_j^{i^*}) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ x_j^{i^*}>0}}^{m_i} x_j^{i^*} G^{i^*}(x \mid e_j^{i^*}) > \sum_{\substack{j=1 \\ x_j^{i^*}>0}}^{m_i} x_j^{i^*} G^{i^*}(x) = G^{i^*}(x)$$

וזו סתירה!

יש סיכוי גבוה מאוד שהמשפט הזה יופיע במבחן.

(14) 3/12/09

תורת המשחקים

<u>משפט בראואר:</u> היום נעבוד בשתי איטרציות: בראשונה נסביר מה המשפט נכון ובשנייה נוכיח אותו. הראשונה תהיה מרוככה. השנייה פתוחה.

נאמר שמרחב טופולוגי K מקיים את משפט נק' השבת של בראואר אם לכל $g: K \to K$ רציפה קיימת נקודת שבת.

<u>משפט:</u> אם C, K מרחבים טופולוגיים וקיימת $f: C \to K$ חח"ע ועל כך ש- f ו- f^{-1} רציפות אז K מקיימת את משפט נק' השבת של בראואר אמ"מ C מקיימת אותו.

<u>הוכחה:</u>

$$\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{f^{-1}} & K \\ g \downarrow & & \downarrow f\circ g\circ f^{-1} \\ C & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

נניח ש- K מקיימת את המשפט ותהי $g: C \to C$ רציפה. הפונקציה $f\circ g\circ f^{-1}: K \to K$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות. מתכונת K נובע שקיים $k^* \in K$ כך ש- $(f\circ g\circ f^{-1})(k^*) = k^*$ כלומר $f^{-1}(k^*) = (g\circ f^{-1})(k^*) = g(f^{-1}(k^*))$ ולכן $c^* = f^{-1}(k^*)$ מקיים $g(c^*) = c^*$ ולכן C מקיים את משפט נקודת השבת.

הכיוון השני סימטרי. ☺

<u>מסקנה:</u> אם $K \subseteq \mathbb{R}^1$ קמורה קומפקטית לא ריקה מספיק להוכיח את משפט נקודת השבת לקטע $[0,1]$ כי K בהכרח קטע סגור $[a,b]$ ובוודאי יש פונקציה רציפה והפיכה שההופכית שלה רציפה בין $[0,1]$ ל- K.

<u>הוכחת משפט בראואר ל- $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$:</u>

נניח ש- $f: [0,1] \to [0,1]$ רציפה. נוכיח שלכל n טבעי קיים $x^n \in [0,1]$ כך ש- $|f(x^n) - x^n| < \frac{1}{n}$.

f רציפה ולכן רציפה במ"ש. ולכן קיים $\delta_n > 0$ כך שאם $x, y \in [0,1]$ מקיימים $|x-y| \le \delta_n$ אזי $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2n}$

נחשב את הקטע [0,1] מנקודות שהמרחק בין כל שתיים סמוכות מהן הוא לכל היותר d_n. נניח בשלילה שאין נק' שבת.

אזי מההנחה $f(1)<1$ ו- $f(0)>0$. מההנחה יש זוג נק' סמוכות $x_n \le y_n$ כך ש- $f(x^n) > x^n$
$f(y^n) < y^n$

(כי לכל נק' z ברשות שלנו או $f(z)<z$ או $f(z)>z$).

ניתן להניח בה"כ ש- $d_n \le \frac{1}{2n}$ (אחרת נבחר $d_n=\frac{1}{2n}$ וזה עדיין נכון).

מהרציפות במ"ש נובע ש- $|f(x^n)-f(y^n)|<\frac{1}{2n}$. לכן

$$x^n < f(x^n) < f(y^n)+\frac{1}{2n} < y^n + \frac{1}{2n} \le x^n + \frac{1}{n}$$

כלומר $x^n<f(x^n)<x^n+\frac{1}{n} \Rightarrow |f(x^n)-x^n|<\frac{1}{n}$

תהי x^* נקודת הצטברות של $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. כלומר קיימת תת סדרה $n_1<n_2<\dots$ כך ש- $x^{n_k} \to x^*$ ואז

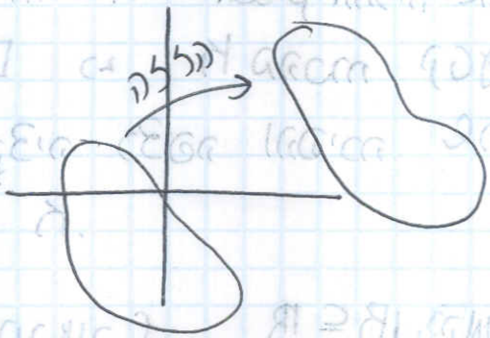
$$f(x^*) \longleftarrow f(x^{n_k}) = \underbrace{f(x^{n_k})-x^{n_k}}_{} + x^{n_k} \longrightarrow 0+x^*$$

מרציפות f

$\Rightarrow f(x^*)=x^*$ ומצאנו נקודת שבת! ☺

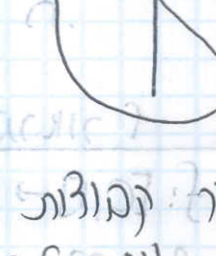
הוכחת משפט נקודת השבת לקבוצות ב- $\mathbb{R}^2$.

ע"י האיזומורפיזם



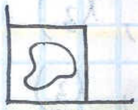
מספיק להוכיח את המשפט עבור קבוצות ברביע החיובי.

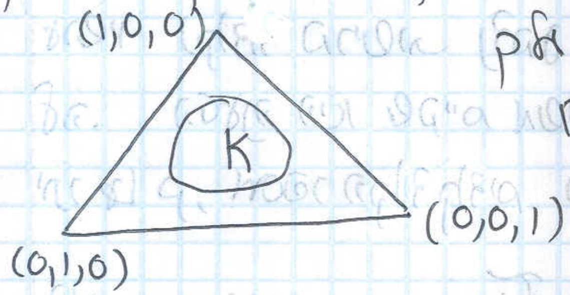
ע"י הזזה וכיווץ (איזומורפיזם) - ניתן להזיז את הקבוצה כך שתהיה מוכלת בריבוע



טענה 2: תהי $C\subseteq K$ כאשר K מרחב טופולוגי המקיים
את משפט נקודת השבת של בראור. אם קיימת $f:K\to C$
רציפה כך שלכל $x\in C$, $f(x)=x$ אזי גם C מקיימת
את משפט נקודת השבת.

הוכחה: תהי $g:C\to C$ רציפה. נתבונן בפונ' $h=g\circ f$.
זוהי פונקציה רציפה מ- K ל- $C\subseteq K$ ולכן יש לה נקודת שבת
$x^*\in K$, כלומר $(g\circ f)(x^*)=x^*$. אבל $f(x^*)\in C$
ולכן $x^*=g(f(x^*))\in C \Rightarrow f(x^*)=x^* \Rightarrow x^*=g(x^*)$
ולכן C מקיימת את משפט נקודת השבת. ☺

עוד רפלקציה: את הקבוצה  אפשר להעביר
ל- $\mathbb{R}^3$ ע"י ההעתקה $(x_1,x_2)\longmapsto(x_1,x_2,1-x_1-x_2)$. מאחר
ש- $0\le x_1\le\frac{1}{2}$; $0\le x_2\le\frac{1}{2}$ ההעתקה היא לתוך הסימפלקס

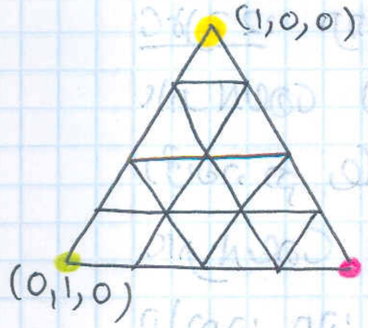


ההעתקה הזו היא איזומורפיזם ולכן
מספיק להוכיח את המשפט ב- $\mathbb{R}^2$
עבור קבוצות כאלה שמוכלות ב
בסימפלקס.

לפי טענה 2, אם יש העתקה רציפה f מהסימפלקס ל- K
ששומרת על K אז מספיק להוכיח את המשפט עבור הסימפלקס.
העתקה כזו אכן קיימת והיא מתאימה לכל x בסימפלקס את
הנקודה הקרובה ביותר אליו ב- K.
ולכן מספיק להוכיח לסימפלקס!!

הוכחת משפט בראור לסימפלקס:

כל נקודה בסימפלקס היא מהצורה (x_1,x_2,x_3) כאשר
$0\le x_1,x_2,x_3\le 1$ ו- $x_1+x_2+x_3=1$. אם f פונק' רציפה
על הסימפלקס אזי $f(x_1,x_2,x_3)=(f_1(x_1,x_2,x_3),f_2(x_1,x_2,x_3),f_3(x_1,x_2,x_3))$
והיא בתוך הסימפלקס. כלומר $0\le f_i\le 1$; $f_1+f_2+f_3=1$.
עכשיו נצבע את הסימפלקס. ונניח בשלילה שאין נק' שבת.



לכל נקודה $(0, x_2, x_3) \in \Delta$

או $f_2(0, x_2, x_3) < x_2$

או $f_3(0, x_2, x_3) < x_3$

(אם היה שוויון בשניהם אז היינו מקבלים נק' שבת).

וכן $(x_1, 0, x_3) \in \Delta$ או $f_1(x_1, 0, x_3) < x_1$

או $f_3(x_1, 0, x_3) < x_3$

לכל $(x_1, x_2, x_3) \in \Delta$

או $f_1(x_1, x_2, x_3) < x_1$

או $f_2(x_1, x_2, x_3) < x_2$

או $f_3(x_1, x_2, x_3) < x_3$

כאן קיים לפחות אחד התנאים אבל לא יכול להיות שכל השלושה.

עכשיו נקודה ברישות נצבע אותה בצבע הראשון שמתאים לה. הטענה היא שקיים משולש שקודקודיו צבועים בכל הצבעים. יתר על כן, מספר המשולשים האלה הוא אי-זוגי.

<u>הוכחה:</u> נסמן, $\mathcal{F}$ = אוסף המשולשים בציור

$\mathcal{E}$ = הצלעות בציור

$\mathcal{E}_1$ = הצלעות שקודקודיהן מצבעים ●, ● כלומר קודקוד אחד ● וקודקוד אחד ●

נתבונן כעת באוסף הזוגות

$A = \{(F,E) : E$ צלע של F ; $E \in \mathcal{E}_1\}$

מהו גודל הקבוצה? בהכרח אי-זוגי כי אם E צלע פנימית אז היא שייכת לשני משולשים ואילו צלעות חיצוניות כאלה יש מספר אי-זוגי.

כעת נתבונן באוסף הזוגות

$B = \{(F,E) :$ $E \in \mathcal{E}_1$ צלע של F וצבעי F מכילים ● ו-● $\}$.

האוסף הזה כמובן זהה לאוסף הקודם ולכן גודלו אי-זוגי.

כעת ננסה להבין איזו משולשים נמצאים באוסף B.
יש שם משולשים מאחת הצורות

אלה תורמים שתי צלעות

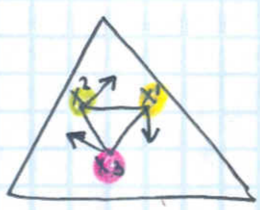
אלה תורמים שתי צלעות

אלה תורמים צלע אחת.

לכן מספר הצלעות שמגיעים מסוג ① או ② הוא זוגי.
סה"כ יש מספר אי-זוגי של צלעות. לכן יש רק מספר אי-זוגי של משולשים שצלעותיהן צבועות בכל שלושת הצבעים.

f רציפה על קבוצה קומפקטית אזי רציפה במ"ש. לכן גם כל f_i עבור $i=1,2,3$ היא רציפה במ"ש. אזי לכל n טבעי קיים $0 \le \delta_n$ (ובה"כ $\delta_n < \frac{1}{3n}$) כך שאם $\|x-y\|_\infty \le \delta_n$ אז $|f_i(x)-f_i(y)| < \delta_n$.

אם מהמשולשים שלנו מצאנו 3 נקודות $\{(x_1^i, x_2^i, x_3^i)\}_{i=1}^3$ כך ש- $f_i(x_1^i, x_2^i, x_3^i) < x_i^i$ ל- $1 \le i \le 3$.



$$f_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = 1 - f_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1) - f_3(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$$
$$> 1 - f_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2) - \frac{1}{3n} - f_3(x_1^2, x_2^2, x_3^2) - \frac{1}{3n}$$
$$> 1 - x_2^2 - \frac{1}{3n} - x_3^3 - \frac{1}{3n} \ge$$
$$\ge 1 - x_2^1 - \frac{1}{3n} - x_3^1 - \frac{1}{3n} - \frac{2}{3n} =$$
$$= x_1^1 - \frac{4}{3n}$$

את אותו חישוב אפשר היה לעשות לכל הקואורדינטות ולקבל $|f_i(x_1^1, x_2^1, x_3^1) - x_i^1| < \frac{4}{3n}$

10/12/09
תורת המשחקים

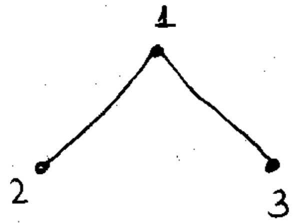
היום נתחיל בהוכחת משפט ברואר באופן קומבינטורי.

<u>הגדרה</u>: <u>קומפלקס סימפליציאלי מופשט</u> הינו אוסף $\mathcal{K}$ סופי של קבוצות סופיות לא ריקות כך שאם $F \in \mathcal{K}$ ו- $\emptyset \neq E \subseteq F$ אז $E \in \mathcal{K}$.

<u>דוגמה</u>: • $\mathcal{K}=\{\{0\}\}$ (או שנכתוב את זה $\mathcal{K}=\{0\}$ (כלומר נזהה מספר בודד עם הקבוצה שמכילה אותו).
• N קבוצה לא ריקה ו- $\mathcal{K}=2^N\setminus\{\emptyset\}$.

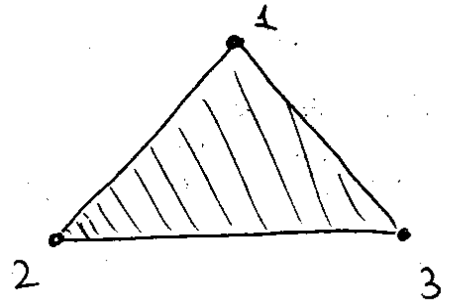
<u>הגדרה</u>: איבר $F\in\mathcal{K}$ נקרא <u>סימפלקס</u>. <u>המימד</u> של סימפלקס $F\in\mathcal{K}$ מוגדר ע"י $d(F)=|F|-1$. המימד של הקומפלקס $\mathcal{K}$ מוגדר ע"י $d(\mathcal{K})=\max_{F\in\mathcal{K}} d(F)$

<u>דוגמה</u>: $\mathcal{K}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1\},\{2\},\{3\}\} \Rightarrow d(\mathcal{K})=1$
אפשר להציג את הקומפלקס הזה באופן גרפי כך:



הצלעות מלכדות שני איברים בקבוצה אחת.

<u>דוגמה</u>: $\mathcal{K}=\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$



המשולש כולו מייצג את $\{1,2,3\}$

אם היינו מתחילים מארבעה איברים הקומפלקס היה מיוצג ע"י פירמידה.

<u>הגדרה</u>: <u>התמונה הגיאומטרית</u> של $\mathcal{K}$ הינה אוסף G של השרשראות ב- $\mathcal{K}$ (לפי יחס ההכלה). כלומר, זהו אוסף

אוסף כל הקבוצות החלקיות של K הסדורות ממש בסדר ההכלה. נסמן את החבורה ב- $S(K)$.

<u>דוגמה:</u> $K=\{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$

$$S(K)=\{\{\{1,2,3\}\},\{\{1,2\}\},\{\{1,3\}\},\{\{2,3\}\},\{\{1\}\},\{\{2\}\},\{\{3\}\},$$
$$\{\{1,2,3\},\{1,2\}\},\{\{1,2,3\},\{1,3\}\},\{\{1,2,3\},\{2,3\}\},$$
$$\ldots,\{\{1\},\{1,2\}\},\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\},\ldots\}$$

<u>טענה:</u> $S(K)$ הינו קומפלקס סימפליציאלי אופשט.
$$d(S(K))=d(K)$$

<u>הוכחה:</u> ברור ש- $S(K)$ הינו קומפלקס סימפליציאלי אופשט כי כל קבוצה חלקית לא ריקה של קבוצה סדורה ממש אם הוא סדורה ממש.

ראשית, נניח ש- $d=d(K)$. אזי ע"פ הגדרת $d(K)$ קיים $F\in K$ כך ש- $|F|=d+1$. בה"כ $F=\{f_0,\ldots,f_d\}$ כאשר עבור $i\neq j$ מתקיים $f_i\neq f_j$.

נגדיר $E=\{\{f_0\},\{f_0,f_1\},\{f_0,f_1,f_2\},\ldots,\{f_0,\ldots,f_d\}\}$

זו קבוצה סדורה ממש והיא מכילה איברים מ- K כי $F\in K$ והקבוצות בה הן תת קבוצות של F. $|E|=d+1$

$\Leftarrow$ $d(S(K))\geq d(E)=d$ אז $d(K)\leq d(S(K))$

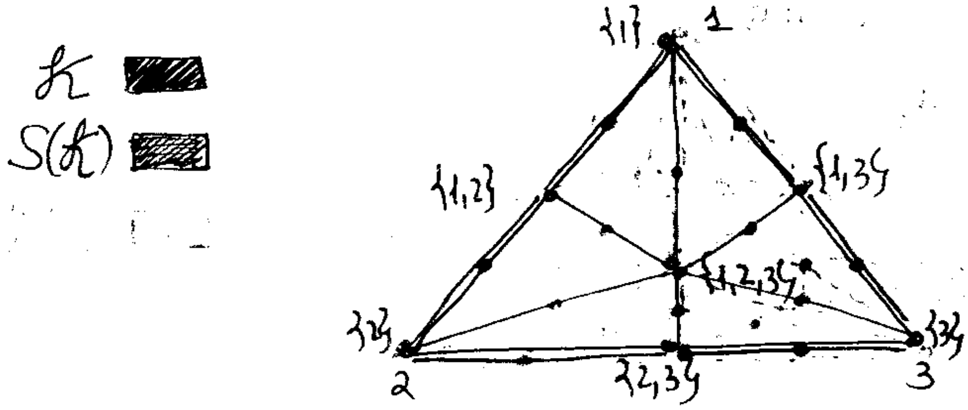
נניח כי $d=d(S(K))$. אזי קיים איבר $E\in S(K)$ כך ש- $|E|=d+1$. נסמן $E=\{e_0,\ldots,e_d\}$ כאשר $e_i\in K$ ובה"כ $\emptyset\neq e_0\subsetneq e_1\subsetneq\ldots\subsetneq e_d$ $\Leftarrow$ $|e_d|\geq d+1$. אבל $e_d\in K$ ולכן $d(K)\geq d$

$\Leftarrow$ $d(K)\geq d(S(K))$.

$\Leftarrow$ $d(K)=d(S(K))$.

דוגמה: נייצג גרפית את החלוקה הבריצנטרית של

$$\mathcal{K} = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$$



הגדרה: קבוצת הקודקודים של קומפלקס $\mathcal{K}$ הינה

$$V(\mathcal{K}) = \bigcup_{E\in\mathcal{K}} E$$

הגדרה:

$$\mathcal{K}_1 = 2^N \setminus \{\emptyset\}, \quad N = \{0,\dots,n\}$$

$$\mathcal{K}_{t+1} = S(\mathcal{K}_t)$$

מהינתן פונק' $\delta : V(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^l$ נגדיר $\hat{\delta} : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^l$ ע"י

$$\hat{\delta}(E) = \frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\delta(e)$$

תהי $\delta : N \to \mathbb{R}^l$. נגדיר $\delta_i : \mathcal{K}_i \to \mathbb{R}^l$ ע"י

$$\delta_1(E) = \hat{\delta}(E)$$

$$\delta_{i+1}(E) = \hat{\delta_i}(E) = \frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\delta_i(e)$$

טענה: לכל $\emptyset \neq E \subsetneq F \in \mathcal{K}_{i+1}$

$$\|\delta_{i+1}(E)-\delta_{i+1}(F)\| = \Big\| \frac{1}{|E|}\underset{\hat{\mathcal{K}}_i}{\sum_{e\in E}}\delta_i(e) - \frac{1}{|F|}\sum_{f\in F}\delta_i(f)\Big\| =$$

$$= \Big\| \frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{1}{|F|}\Big(\sum_{e\in E}\delta_i(e) + \sum_{f\in F\setminus E}\delta_i(f)\Big)\Big\| =$$

$$= \Big\| \frac{1}{|E||F|}|F|\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{1}{|E||F|}|E|\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{1}{|E||F|}|E|\sum_{f\in F\setminus E}\delta_i(f)\Big\|$$

$$= \Big\| \frac{|F|-|E|}{|E||F|}\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{|E|}{|E||F|}\sum_{f\in F\setminus E}\delta_i(f)\Big\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{|E||F|} \left(\sum_{\substack{e\in F \\ f\in F\setminus E}} \delta_i(e) - \sum_{\substack{e\in E \\ f\in F\setminus E}} \delta_i(f) \right) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{|E||F|} \sum_{\substack{e\in F \\ f\in F\setminus E}} \left(\delta_i(e) - \delta_i(f) \right) \right\| \le$$

א"ש ה-Δ $$\le \frac{1}{|E||F|} \sum_{\substack{e\in E \\ f\in F\setminus E}} \|\delta_i(e) - \delta_i(f)\| \le$$

$$\le \frac{1}{|E||F|} \sum_{\substack{e\in E \\ f\in F\setminus E}} \max_{\substack{e'\in E \\ f'\in F\setminus E}} \|\delta_i(e') - \delta_i(f')\| =$$

$$= \frac{\cancel{|E|}(|F|-|E|)}{\cancel{|E|}|F|} \max_{\substack{e\in E \\ f\in F\setminus E}} \|\delta_i(e) - \delta_i(f)\|$$

$$\le \frac{n}{n+1} \cdot \max_{\substack{e\in E \\ f\in F\setminus E}} \|\delta_i(e) - \delta_i(f)\| = (*)$$

כאשר $e\in E\subseteq F$; $f\in F$ אזי e ו-f נתונים להשוואה
ב-K_i אזי עפ"י הנחת האינדוקציה ($\|\delta_{i+1}(\ )-\delta_{i+1}(F)\|\le c\cdot(\frac{n}{n+1})^i$ -ש)

$$(*) \le \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1} \cdot C = \left(\frac{n}{n+1}\right)^i C \longrightarrow 0$$

כאשר $C = \max_{x,y\in N} \|\delta(x) - \delta(y)\|$.

(19) 17/12/09

תורת המשחקים

<u>תזכורת:</u>

$\mathcal{K}$ - קומפלקס סימפליציאלי מופשט (קומפלקס גאומטרי ב-$\mathbb{R}^\ell$)
קבוצה של תת קבוצות לא ריקות של קבוצה N כך שאם
$E\in\mathcal{K}$; $\emptyset\neq F\subseteq E$ אז $F\in\mathcal{K}$.

עבור קומפלקס $\mathcal{K}$ הגדרנו את החלוקה הבריצנטרית

$$S(\mathcal{K}) = \{E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_k : E_i\in\mathcal{K}\}$$

קבוצת השרשראות (במובן הכלה) ב-$\mathcal{K}$.

איבר $F\in\mathcal{K}$ (קרוי סימפלקס, הממד של סימפלקס הוא

$$d(F) = |F|-1$$

הממד של הקומפלקס מוגדר ע"י $d(\mathcal{K}) = \max_{F\in\mathcal{K}} d(F)$

קבוצת הקודקודים של הקומפלקס $\mathcal{K}$ הינה

$$V(\mathcal{K}) = \bigcup_{E\in\mathcal{K}} E$$

נניח ש- $N=\{1,\dots,n\}$; $\mathcal{K}_1 = 2^N\setminus\{\emptyset\}$

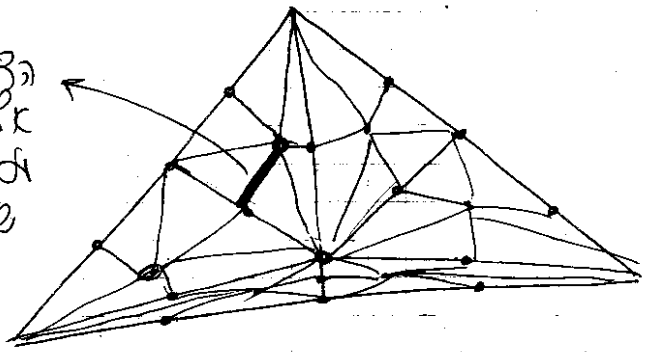
נגדיר באינדוקציה $\mathcal{K}_{k+1} = S(\mathcal{K}_k)$

בהינתן $\emptyset\neq M\subseteq N$ נגדיר גם באינדוקציה

$$\mathcal{K}_1(M) = \{F\in\mathcal{K}_1 : F\subseteq M\}$$
$$\mathcal{K}_{k+1}(M) = S(\mathcal{K}_k(M))$$

<u>טענה:</u> יהי E סימפלקס מממד $n-1$ ב- $\mathcal{K}_i$. אם קיימת קבוצה $M\subsetneq N$ כך ש- $E\in\mathcal{K}_i(M)$ אז קיים $F\in\mathcal{K}_i$ יחיד כך ש- $E\subsetneq F$. אחרת, אם לכל $M\subsetneq N$, $E\notin\mathcal{K}_i(M)$ אז קיימים בדיוק שני סימפלקסים $F_1,F_2\in\mathcal{K}_i$ כך ש- $E\subsetneq F_1$ ו- $E\subsetneq F_2$ (כמובן $F_1\neq F_2$).

המחשה:



הצלע הזו היא לא על אף אחת מהפאות ולכן היא ב else של המשפט - היא שייכת בדיוק לשני המשולשים הקטנים לידה.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על i.

עבור $i=1$ זה ברור.

נניח עבור i ונוכיח עבור $i+1$. $d(E) = n-1$

$\Leftarrow$ $|E| = n$ ו- $E \in \mathcal{K}_{i+1}$. (נניח)

$E = \{e_0, \dots, e_{n-1}\}$

כאשר e_k סימפלקסים ב- $\mathcal{K}_i$ ובה"כ

$\emptyset \neq e_0 \subsetneq e_1 \subsetneq \dots \subsetneq e_{n-1}$. $|e_0| \geq 1$ ו- $e_1 \supsetneq e_0$

$\Leftarrow$ $|e_1| \geq 2$ וכן הלאה $|e_{n-1}| \geq n$.

אם קיים $M \subsetneq N$ כך ש- $e_{n-1} \in \mathcal{K}_i(M)$ אזי

$|e_{n-1}| \leq n$ (כי $|N| = n-1$ ו- $M \subsetneq N$)

$\Leftarrow$ יחד עם האי שוויון הקודם $|e_{n-1}| = n$ ולכן גם

$0 \leq m < n$ $|e_m| = m+1$.

מהנחת האינדוקציה קיים $f \in \mathcal{K}_i$ יחיד כך ש- $e_{n-1} \subsetneq f$.

$\Leftarrow$ $F = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, f\}$ מכיל את E ו- F

הוא יחיד (בין e_m ל- e_{m+1} אי אפשר לדחוף

קבוצה כי הן נבדלות באיבר אחד. לפני e_0 אי אפשר

לדחוף קבוצה כי היא תהיה ריקה. לכן נותרנו רק עם האפשרות

לדחוף קבוצה, אחרי e_{n-1} אבל לפי הנחת האינדוקציה יש

רק אחת כזאת).

אם אין $M \subsetneq N$ כך ש- $e_{n-1} \in \mathcal{K}_i(M)$ אזי אם

$|e_{n-1}| = n$ אזי σ סימפלקס $E \subsetneq F$ הוא מהצורה

$F = \{e_0, \dots, e_{n-1}, f\}$ כאשר $e_{n-1} \subsetneq f \in \mathcal{K}_i$.

אבל עפ"י הנחת האינדוקציה יש בדיוק שני f כאלה f_1, f_2.

20 אם $|e_{n-1}| = n+1$ אז או $|e_0| = 2$ או

קיים $0 \le m < n-1$ כך ש- $|e_{m+1} \setminus e_m| = 2$,

אם $|e_0| = 2$ נסמן $e_0 = \{a,b\}$. אז ה

סימפלקס $E \subsetneq F$ הוא מהצורה $F = \{e_{-1}, e_0, \dots, e_{n-1}\}$

כאשר: $e_0 \supsetneq e_{-1} \neq \emptyset$, ו-$e_{-1}$ כזה יש בדיוק שתי

אפשרויות: $e_{-1} = \{a\}$ או $e_{-1} = \{b\}$.

אם $|e_{m+1} \setminus e_m| = 2$ המקום היחיד שאפשר להכניס

בו קבוצה הוא בין e_m ל- e_{m+1}. ה סימפלקס

$E \subsetneq F$ הוא בהכרח מהצורה $F = \{e_0, \dots, e_m, \bar{e}_m, e_{m+1}, \dots, e_{n-1}\}$

אם $e_{m+1} \setminus e_m = \{a,b\}$ אז יש בדיוק שתי אפשרויות

ל- $\bar{e}_m$ כדלהלן: $\bar{e}_m = e_m \cup \{a\}$ או $\bar{e}_m = e_m \cup \{b\}$.

11

<u>למה</u>: תהי $d: V(\mathcal{K}_i) \to N$ כך שלכל $e \in V(\mathcal{K}_i(M))$

$d(e) \in M$. אז

$$|\{E \in \mathcal{K}_i : d(E) = N\}| \equiv 1 \pmod 2$$

(כלומר מספר הסימפלקסים שצבועים בכל הצבעים הוא אי-זוגי)

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על n. כאשר $n=0$ זה טריוויאלי.

נניח נכונות עבור $n-1$ ונוכיח עבור n. הנחת האינדוקציה מבטיחה

שלכל $M \subsetneq N$ כך ש- $|M| = n$

$$|\{E \in \mathcal{K}_i(M) : d(E) = M\}| \equiv 1 \pmod 2$$

תהי $\emptyset \neq M \subsetneq N$ עם $|M| = n$. תהי $\mathcal{X}$ הקבוצה

הבאה $\mathcal{X} = \{(E,F) : \emptyset \neq E \subsetneq F, d(E) = M\}$

נגדיר כמה קבוצות חלקיות:

$$\mathcal{X}_1 = \{(E,F) : \emptyset \neq E \subsetneq F, d(E) = M, E \in \mathcal{K}_i(M)\}$$

$$\mathcal{X}_2 = \{(E,F) : \emptyset \neq E \subsetneq F, d(E) = M, E \notin \mathcal{K}_i(M)\}$$

כמובן $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ איחוד זר, כלומר $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 = \emptyset$

$\Leftarrow$ $|\mathcal{X}| = |\mathcal{X}_1| + |\mathcal{X}_2|$.

נבחין כי $(E,F) \in \mathcal{X}_2$ $\Leftarrow$ לכל $M' \subsetneq N$ $E \notin \mathcal{K}_i(M')$:

והי $M' \subsetneq N$. אם $M'=M$ אז עפ"י הנחה $E \notin \mathcal{K}_i(M')$.
אם $M' \neq M$ אז קיים $m \in M \setminus M'$. מאחר שעפ"י הנחת
הצביעה לכל $E \in \mathcal{K}_i(M')$, $m \notin d(E)$ אזי לכל E
כך ש- $d(E)=M$ $E \notin \mathcal{K}_i(M')$.
אבל, לכל $(E,F)\in \mathcal{F}_2$ קיים F' יחיד ששונה מ-F כך ש-
$(E,F') \in \mathcal{F}_2$ (הטענה הקודמת) ולכן $|\mathcal{F}_2| \equiv 0 \pmod 2$.
עפ"י הנחת האינדוקציה $|\mathcal{F}_1| \equiv 1 \pmod 2$ ולכן
$|\mathcal{F}| \equiv 1 \pmod 2$.

נגדיר $\mathcal{F}_3 = \{(E,F) : \emptyset \neq E \subsetneq F, d(E)=M, d(F)=M\}$
$\mathcal{F}_4 = \{(E,F) : \emptyset \neq E \subsetneq F, d(E)=M, d(F)=N\}$
$\Leftarrow$ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_3 \dot\cup \mathcal{F}_4$ איחוד זר $\Leftarrow$ $|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_4|$
אבל $|\mathcal{F}_3| \equiv 0 \pmod 2$ ולכן $|\mathcal{F}_4| \equiv 1 \pmod 2$
וזה הרי בדיוק מה שרצינו. כי
$$|\mathcal{F}_4| = |\{F \in \mathcal{K}_i : d(F) = N\}|$$

(21) 24.12.09
תורת המשחקים.

<u>הוכחת משפט בראואר</u>:

תהי $C=\{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$. נניח שלא
פונקציה רציפה $(f_0,\dots,f_n)=f: C\to C$ יש נק' שבת.
f רציפה על הקבוצה הקומפקטית C ולכן רציפה שם במידה
שווה. יהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $0<\theta<\varepsilon$ כך שלכל $x,y\in C$
המקיימים $\|x-y\|<\theta$ מתקיים $|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$ לכל
$0\le i\le n$.

נניח בשלילה שאין ל-f נקודת שבת. אזי לכל $x\in C$ קיים $0\le i\le n$
כך ש- $f_i(x)<x_i$ (אחרת $f_i(x)\ge x_i$ לכל i ואז
$\sum f_i(x)\ge\sum x_i=1$ אבל $f(x)\neq x$ ולכן $\sum f_i(x)>1$ וזה
מסתירה לכך ש- $f(x)\in C$).

נסמן $N=\{0,\dots,n\}$

$\mathcal{K}_1 = 2^N\setminus\{\emptyset\}$

$\mathcal{K}_{i+1}=S(\mathcal{K}_i)$

$d_0: N\to\mathbb{R}^{n+1}$

$d_0(i)=e^i$ - וקטור היחידה ה-i

$d_i:\mathcal{K}_i\to C$

$$d_1(E)=\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E} d_0(E)$$

$$d_{j+1}(E)=\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E} d_j(E)$$

ראינו ש- $\max_{\emptyset\neq E\subsetneq F\in\mathcal{K}_j}\|d_j(E)-d_j(F)\|\xrightarrow[j\to\infty]{}0$

יהי j מספיק גדול כך שלכל $\emptyset\neq e\subsetneq f\in\mathcal{K}_j$
$\|d_j(e)-d_j(f)\|<\theta$

נגדיר צביעה $\gamma:\mathcal{K}_j\to\{0,\dots,n\}$ באופן הבא:
עבור $e\in\mathcal{K}_j$:

$$\gamma(e) = \begin{cases} i & \text{אם } f_i(\delta_j(e)) < (\delta_j(e))_i \\ & \text{ולכל } i' < i \\ & f_{i'}(\delta_j(e)) \ge (\delta_j(e))_{i'} \end{cases}$$

אם $\emptyset \ne M \subsetneq N$ ו- $e \in \mathcal{K}_j(M)$ אזי לכל $i \notin M$
$(\delta_j(e))_i = 0$ ולכן $\gamma(e) \in M$. $\Leftarrow$ עפ״י למת
ההתאמה קיים $F \in \mathcal{K}_{j+1}$: $\{e_0, \dots, e_n\}$ כך
ש- $\gamma(e_l) = l$ לכל $0 \le l \le n$. ($\{e_0, \dots, e_n\}$
שרשרת, כלומר לכל $0 \le l < l' \le n$ או $e_l \subsetneq e_{l'}$
או $e_{l'} \subsetneq e_l$).

$\Leftarrow$ מההגדרה של γ, $f_i(\delta_j(e_i)) < (\delta_j(e_i))_i$

אבל $1 = \sum_{k=0}^{n} f_k(\delta_j(e_i)) = \sum_{k=0}^{n} (\delta_j(e_i))_k = 1$

$\Leftarrow$ $f_i(\delta_j(e_i)) = 1 - \sum_{k \ne i} f_k(\delta_j(e_i)) \ge$

$$\ge 1 - \sum_{k \ne i} f_k(\delta_j(e_k)) - \varepsilon n >$$

$|f_k(\delta_j(e_k)) - f_k(\delta_j(e_i))| < \varepsilon$
כי e_i ו- e_k ניתנים להשוואה
אזי $\|\delta_j(e_i) - \delta_j(e_k)\| < \theta$
אזי $|f_k(\delta_j(e_k)) - f_k(\delta_j(e_i))| < \varepsilon$

$$> 1 - \sum_{k \ne i} (\delta_j(e_k))_k - \varepsilon n >$$

הגדרת γ

$$> 1 - \sum_{k \ne i} (\delta_j(e_i))_k - \theta n - \varepsilon n >$$

$$> \delta_j(e_i)_i - 2\varepsilon n$$

$\theta < \varepsilon$

אז $(\delta_j(e_i))_i > f_i(\delta_j(e_i)) > \delta_j(e_i)_i - 2\varepsilon n$

ולכן $\|\delta_j(e_0) - \delta_j(e_i)\| < \theta$

- $|f_i(\delta_j(e_0)) - f_i(\delta_j(e_i))| < \varepsilon$
- בפרט לכל קואורדינטה $|(\delta_j(e_0))_i - (\delta_j(e_i))_i| < \theta < \varepsilon$

$\Leftarrow$

$$f_i(\delta_j(e_0)) < f_i(\delta_j(e_i)) + \varepsilon < (\delta_j(e_i))_i + \varepsilon < (\delta_j(e_0))_i + 2\varepsilon$$
$$f_i(\delta_j(e_0)) > f_i(\delta_j(e_i)) - \varepsilon > (\delta_j(e_i))_i - 2\varepsilon n - \varepsilon >$$
$$> (\delta_j(e_0))_i - 2\varepsilon n - \varepsilon - \varepsilon = (\delta_j(e_0))_i - 2\varepsilon(n+1)$$

לסיכום, לכל $\varepsilon>0$ מצאנו נקודה $x^\varepsilon \in C$ כך שלכל $0 \le i \le n$
$(x^\varepsilon)_i - 2\varepsilon(n+1) < f_i(x^\varepsilon) < (x^\varepsilon)_i + 2\varepsilon$
כלומר לכל $m>1$ קיימת נקודה $x^m \in C$ כך ש- $\|f(x^m) - x^m\| < \frac{1}{m}$. C קומפקטית ולכן קיימת תת סדרה $x^{m_\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} x \in C$. f רציפה ופונקצית הנורמה רציפה.
$\Leftarrow$ $\|f(x) - x\| = \lim_{\ell \to \infty} \|f(x^{m_\ell}) - x^{m_\ell}\| = 0$, כלומר $f(x) = x$
בסתירה להנחה של-f אין נקודת שבת. :)

- <u>הרחבת משפט בראואר לקבוצות קומפקטיות קמורות כלליות</u>

C מקיימת תכ׳ נקודת השבת אם לכל פונקציה רציפה $f: C \to C$ קיימת נקודת שבת x.
D הינה נסוג (retract) של C אם $D \subseteq C$ וקיימת פונקציה רציפה $f: C \to D$ שהיא הזהות על D.

<u>טענה 1</u>: אם C מקיימת תכ׳ נקודת השבת ו- D נסוג של C אזי D מקיימת תכ׳ נק׳ השבת (תרגיל)

<u>טענה</u>: תהי $C \subseteq \mathbb{R}^k$ קב׳ קמורה קומפ׳. אזי לכל $x \in \mathbb{R}^k$ קיימת נקודה יחידה $y(x) \in C$ כך ש-
$\|x - y(x)\|_2 \le \|x - y\|_2$
לכל $y \in C$. הפונקציה $x \mapsto y(x)$ רציפה.

<u>הוכחה</u>: הפונקציה $y \mapsto \|x - y\|_2^2$ הינה פולינום ב-y ולכן רציפה על הקבוצה הקומפקטית C. $\Leftarrow$ מקבלת שם

מינימום בנקודה $y(x)$ ולכן לכל $y\in G$

$$\|x-y(x)\|_2^2 \le \|x-y\|_2^2$$

$\Leftarrow$ $\|x-y(x)\|_2 \le \|x-y\|_2$ לכל $y\in G$.

נראה יחידות. יהיו y ו- z שתי נקודות כך ש-

$$0<\|x-y\| = \|x-z\| \le \|x-w\|$$

אז $\|x-\frac{y+z}{2}\| = \|\frac{x-y}{2}+\frac{x-z}{2}\|$

אם $y\neq z$ ו- $\|x-y\|=\|x-z\|$ אז אין $\lambda\neq 0$ כך ש- $x-y=\lambda(x-z)$ $\Leftarrow$

$$\left\|\frac{x-y}{2}+\frac{x-z}{2}\right\| \lneq \left\|\frac{x-y}{2}\right\|+\left\|\frac{x-z}{2}\right\| = \|x-y\|$$

וזו סתירה למינימליות y.

נראה ש- $x\mapsto y(x)$ רציפה. נניח ש- $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
צריך להראות ש- $y(x^n)\xrightarrow[n\to\infty]{} y(x)$ וזה נשאר לנו כתרגיל.

11

(23) 31/12/09
תורת המשחקים

שיווי משקל במשחקים רב שלביים

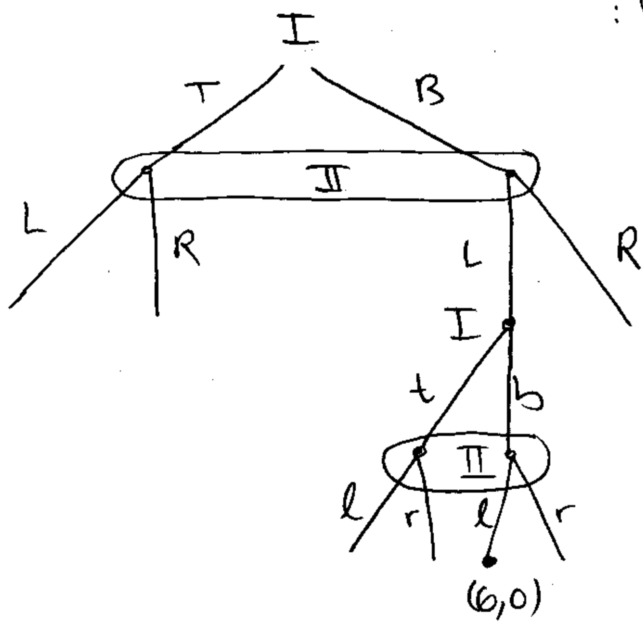
את ההדגמות נעשה עם משחקים חד / דו-שלביים.

דוגמא:

I	L	R
T	2,2	0,3
B	3,0	1,1

II	l	r
t	2,2	0,3
b	3,0	1,1

ביום א' משחקים את משחק I. בסוף היום פותחים מעטפות ומגלים את הבחירות ואז ביום ב' משחקים את משחק II.
התשלום הוא סכום התשלומים בשני הימים.
כמה אסט' יש כאן לשחקן הראשון? נעבור לצורה רחבה:
נצייר חלק מהעץ:



כך אפשר להמשיך ולגלות ששחקן I יש 2^5 אסט' טהורות.
כך גם לשחקן II. אפשר לפתור את זה כמו שלמדנו עד כה אבל מדובר במטריצה די גדולה. ואם יש יותר שלבים אז המטריצה דבר ממש גדולה. זה פשוט קשה חישובית.
האם אנחנו יכולים לעשות משהו חכם יותר?

דוגמה:

	L	R	N
T	2,2	0,3	-8,-8
B	3,0	1,1	-7,-7
M	-8,-8	-7,-7	-9,-9

משחק חד-שלבי:
שיווי המשקל מסומנים.
(קל לבדוק)

	l	r	n
t	2,2	0,3	-8,-8
b	3,0	1,1	-7,-7
m	-8,-8	-7,-7	-9,-9

כעת נוסיף עוד שלב

האסט' $(B,b),(R,r)$ היא ש"מ והתשלום בו הוא $(2,2)$.
אין שום דרך לאף שחקן להחליף אסט' ולקבל תשלום גבוה יותר.
אבל יש פה עוד ש"מ: עבור שחקן 1:
- ביום א' T
- ביום ב' אם 2 שיחק L אז b, אחרת m

באופן דומה עבור שחקן 2:
- ביום א' L
- ביום ב' אם 1 שיחק T אז r, אחרת n.

ויש עוד ש"מ נוספים.

בדוגמה הקודמת עם דילמת האסיר דווקא יש ש"מ יחיד. ולמעשה זה נכון לכל מספר סופי של חזרות של המשחק.
באינדוקציה על k- התקופות האחרונות של המשחק הרב-שלבי: ב- k התקופות האחרונות הם בטוח משחקים (B,R) ומקבלים $(1,1)$. ראשית $k=1$ זה ברור כי זה ש"מ יחיד במשחק. נניח עבור k ונוכיח ל- $k+1$. נניח שבתקופה ה- $k+1$ לפני הסוף לא משחקים (B,R). אז אחד השחקנים לא שיחק את האסט' הנ"ל. נניח למשל ששחקן 1 שיחק T ולא B. אז אפשר להראות שהוא יכול לשפר את התשלום הכולל שלו. וכך גם לשחקן 2.

(24)

דוגמה:

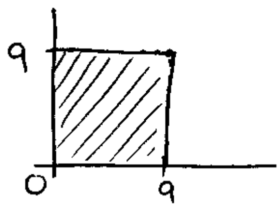
א'

	L	R
T	2,2	0,3
B	3,0	1,1

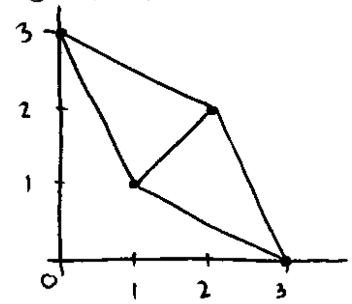
ב'

	l	r
t	0,0	9,0
b	0,9	9,9

במשחק ב' (באסט' מעורבות) אפשר לקבל כל תשלום בריבוע



ואילו במשחק א' התשלומים האפשריים הם



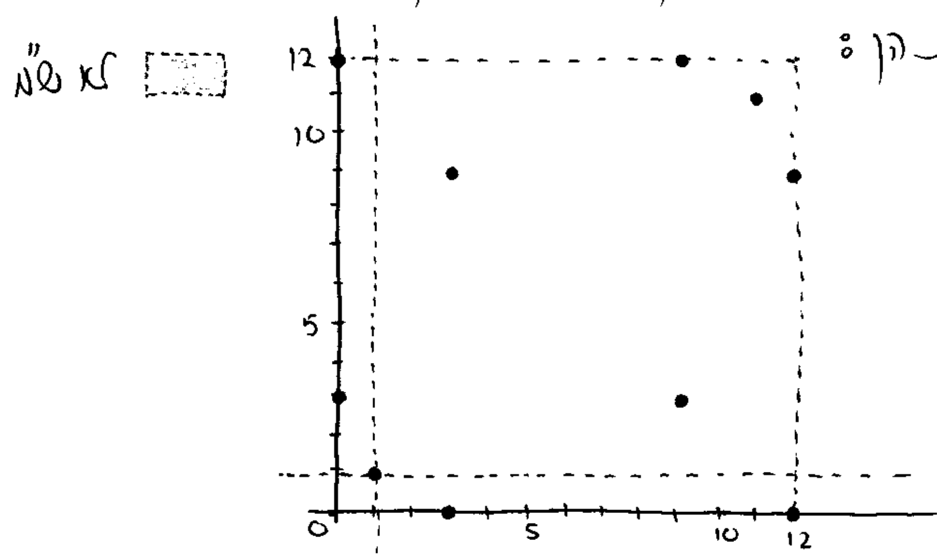
- המסגרת מתקבלת כאשר אחד משחק טהור והשני מעורב.
- האלכסון מתקבל כששני השחקנים משחקים $(x,1-x)$.

תרגיל: למצוא את שאר התשלומים האפשריים. כלומר צריך למצוא את התמונה של ההעתקה $f((x,1-x),(y,1-y)) = (u_1(x,y), u_2(x,y))$

בכל מקרה, זו תת קבוצה של המלבן (לא ניתן להתקבל תשלום מחוץ למלבן).

ומהם התשלומים האפשריים ממשחק בשני המשחקים?

נניח, חלק מהנקודות הן:



$(1,1)$ הוא תשלום של ש"מ $((B,t),(R,l))$.

אבל $(0,3)$ ו-$(3,0)$ הם לא ש"מ. כי כל אחד מהשחקנים ירצה להבטיח לעצמו לפחות 1. כך גם כל ש"מ אחר שבתשלום שלו יש פחות מ-1.

25 7/11/10
תורת המשחקים

משחקים שיתופיים

איך מודלים אינטראקציות בין שחקנים? מה אם השחקנים רוצים לשתף פעולה?

נניח שיש שתי חברות $N=\{1,2\}$. כל אחת בנפרד יכולה להשיג $V(1), V(2)$ ובנפרד הן יכולות להרוויח $V(1,2)$.
איך הן יתחלקו בסוף ביניהן את הרווחים?

<u>הגדרה</u>: <u>משחק שיתופי</u> מוגדר ע"י זוג סדור (N,V) כאשר $N=\{1,\dots,n\}$ קבוצת שחקנים ו- $V: 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ כאשר $V(\emptyset)=0$. עבור $S\subseteq N$, $V(S)$ הוא <u>השווי</u> של S. ו- S נקראת <u>קואליציה</u>.

נניח שנתונה N. נחפש פונק' φ המתאימה לכל משחק (N,V) וקטור תשלום $\varphi V \in \mathbb{R}^n$ כאשר לכל $i\in N$ $\varphi_i V \in \mathbb{R}$.

נאמר ש- φ <u>יעילה</u> אם $\sum_{i\in N} \varphi_i V = V(N)$

φ נקראת <u>"סימטרית"</u> אם לכל משחק V ולכל $i,j\in N$ כך שלכל $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$ $V(S\cup\{i\}) = V(S\cup\{j\})$ מתקיים $\varphi_i V = \varphi_j u$.

(השחקנים i,j יקראו <u>חילופיים</u> במשחק V אם לכל $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$, $V(S\cup\{i\})=V(S\cup\{j\})$. ואז φ מקיימת את אקסיומת השחקנים החילופיים אם לכל V ולכל i,j חילופיים ב- V $\varphi_i V=\varphi_j V$)

שחקן $i\in N$ יקרא <u>שחקן 0</u> ב- V אם לכל $S\subseteq N$ מתקיים $V(S) = V(S\cup\{i\})$.

φ מקיימת <u>אקסיומת שחקן אפס</u> אם לכל משחק שיתופי V ולכל שחקן $i\in N$ שהינו שחקן אפס ב- V, $\varphi_i V = 0$.

דוגמה: פונק' שהיא יעילה, סימטרית ומקיימת את אקס' שחקן אפס:

$$\varphi_i V = \begin{cases} 0 & \text{שחקן 0 ב-}V \ i \\ \dfrac{V(N)}{\#(\text{שחקנים שאינם 0})} & \text{אחרת} \end{cases}$$

נאמר ש-φ אדטיבית אם לכל שלושה משחקים V,U,W כך ש- $V=U+W$ מתקיים $\varphi_i V = \varphi_i U + \varphi_i W$.

דוגמה: φ שמקיימת סימטריות, אקס' שחקן אפס ואדטיביות: $\varphi_i V = 0$ לכל i. φ לא יעילה!

דוגמה: נניח ש- $N=\{1,\dots,n\}$. נגדיר

$$\varphi_1 V = V(1)$$
$$\varphi_2 V = V(1,2) - V(1)$$
$$\forall i>1 \quad \varphi_i V = V(1,\dots,i) - V(1,\dots,i-1)$$

φ לא מקיימת אקס' שחקן אפס כי אם i לא תרם כלום אז $V(1,\dots,i-1) = V(1,\dots,i)$.

היא יעילה כי הסכום הוא טור טלסקופי (שתיו)

קל לראות שגם מתקיימת אדטיביות: אם $V=U+W$ אז

$$\varphi_i V = V(1,\dots,i) - V(1,\dots,i-1) =$$
$$= U(1,\dots,i) + W(1,\dots,i)$$
$$- (W(1,\dots,i) + W(1,\dots,i-1)) = \varphi_i U + \varphi_i W$$

לכל יחס סדר R על השחקנים כך ש- $i_1 R i_2 R \dots R i_n$

נגדיר φ^R ע"י

$$\varphi^R_{i_j} V = V(i_1,\dots,i_j) - V(i_1,\dots,i_{j-1}) \quad \forall\, 1\le j\le n$$

תכונות φ^R:

• יעילות:

$$\sum_{i\in N}\varphi_i^R v = \sum_{j=1}^{n}\varphi_{i_j}^R v = v(N)$$

$\downarrow$

באינדוקציה על l:

$$\sum_{j=1}^{l}\varphi_{i_j}^R v = v(i_1,\dots,i_l)$$

• אקס' שחקן אפס:

יהי i שחקן אפס. אזי i שחקן ולכן קיים $n\geq j\geq 1$ רק ש- $i=i_j$. ולכן

$$\varphi_i^R v = \varphi_{i_j}^R v = v(i_1,\dots,i_j) - v(i_1,\dots,i_{j-1}) = 0$$

• אדטיביות: נניח $v=u+w$ ויהי $i\in N$. קיים j רק ש- $i=i_j$. אזי

$$\begin{aligned}\varphi_i^R v &= v(i_1,\dots,i_j) - v(i_1,\dots,i_{j-1}) = \\ &= u(i_1,\dots,i_j) + w(i_1,\dots,i_j) - \\ &\quad - (u(i_1,\dots,i_{j-1}) + w(i_1,\dots,i_{j-1})) = \\ &= \varphi_{i_j}^R u + \varphi_{i_j}^R w = \varphi_i^R u + \varphi_i^R w\end{aligned}$$

נשים לב שאם ψ,φ אדטיביות אזי גם $\psi+\varphi$ אדטיבית גם $\frac{1}{2}\psi$ אדטיבית. באופן כללי, כל קומבינציה לינארית של אדטיביות היא אדטיבית. רק גם לגבי קיום אקס' שחקן אפס. ואילו אם הדירות הוא קאור אך הוא גם משאר יעילות. למעשה, מספיק קצת פחות: אם $\varphi^1,\dots,\varphi^k$ יעילות ; $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ רק ש- $\sum\alpha_i=1$ אז $\sum\alpha_i\varphi^i$ יעילה:

$$(\sum\alpha_l\varphi^l)_i v = \sum\alpha_l\varphi_i^l v$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\sum_{l=1}^{k}\alpha_l\varphi^l)_i v = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}\alpha_l\varphi_i^l v = \sum_{l=1}^{k}\alpha_l\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^l v = \sum_{l=1}^{k}\alpha_l v(N) = v(N)$$

<u>ערך שפלי</u> של המשחק (N,v) מוגדר ע"י

$$\psi_i v = \frac{1}{n!}\sum_R\varphi_i^R v \qquad \forall i\in N$$

<u>טענה</u>: ערך שפלי יעיל, מקיים אקס' השחקנים החילופיים,
אקס' שחקן אפס ואדטיבי.

<u>הוכחה</u>: כצירוף קמור של העתקות יעילות, ψ יעילה.
כצירוף ליניארי של העתקות המקיימות אקס' שחקן האפס,
ψ מקיימת אקס' שחקן אפס. כנ"ל לגבי אדטיביות.
צריך רק להראות שמתקיימת אקס' השחקנים החילופיים.
יהיו i,j שחקנים חילופיים במשחק V.
לכל R נתאים R^* - הסדר שבו i ו-j החליפו מקומות.
עבור $l,k \in N \setminus \{i,j\}$ מתקיים

$$kRi \Leftrightarrow kR^*j \text{ ו- } lR^*k \Leftrightarrow lRk$$
$$kRj \Leftrightarrow kR^*i$$

כיוון ש R עובר על כל הסדרים גם R^* עובר על כל הסדרים

לכן $\frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R V = \frac{1}{n!}\sum_{R^*} \varphi_i^{R^*} V$

נגדיר $P_k^R = \{l : lRk\}$. אזי

$$\varphi_i^R V = V(P_i^R \cup \{i\}) - V(P_i^R)$$

נראה שאם i,j חילופים ב-V ו- $R \mapsto R^*$ כפי שהגדרנו
אזי: $V(P_i^R) = V(P_j^{R^*})$ כי: אם iRj אזי זה
פשוט אותה קבוצה. אבל אם jRi אז גם מתקבלת
אותה קואליציה. באופן דומה $V(P_i^R \cup \{i\}) = V(P_j^* \cup \{j\})$

לכן
$$\frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R V = \frac{1}{n!}\sum_R V(P_i^R \cup \{i\}) - V(P_i^R) =$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_R V(P_j^* \cup \{j\}) - V(P_j^*) =$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_R V(P_j \cup \{j\}) - V(P_j) = \psi_j V$$

11

<u>דוגמה</u>: $N=\{1,2,3\}$ $V(1,2,3)=36$

$V(1)=1$ $V(1,2)=7$
$V(2)=2$ $V(1,3)=9$
$V(3)=3$ $V(2,3)=12$

R	1	2	3
1 2 3	1	7-1=6	36-7=29
1 3 2	1	27	8
2 1 3	5	2	29
2 3 1	24	2	10
3 1 2	6	27	3
3 2 1	24	9	3

$(\Sigma = 36)$

$$\psi V = \left(\frac{61}{6}, \frac{73}{6}, \frac{\ }{6}\right) \Leftarrow$$

דוגמה:

$$N = \{1, \dots, 100\}$$

$$V(S) = \begin{cases} |S| & 1 \notin S \\ 2|S| & 1 \in S \end{cases}$$

ט השחקנים $2, \dots, 100$ חילופיים לכן מספיק לחשב את $\psi_1 V$. זה יוצא בערך 50.

לשאר השחקנים אנחנו יודעים שהם מקבלים ערך זהה ואנחנו יודעים שסה"כ יחד עם 1 הם מקבלים 200. אז אפשר לחלק.

14.1.10

משחקים

<u>תזכורת</u>: משחק בצורה שיתופית הינו זוג (N,v) כך ש- N קבוצה סופית ; - $v: 2^N \to \mathbb{R}$ כך ש- $v(\emptyset)=0$.

N - קבוצת השחקנים

v - פונקצית המשחק

קבוצה חלקית $S \subseteq N$ נקראת קואליציה.

$v(S)$ - השווי של S.

נסמן ב- G^N את G המשחקים השיתופיים עם קבוצת שחקנים N:

$$G^N = \{v: 2^N \to \mathbb{R} \quad : \quad v(\emptyset)=0\}$$

נבחין שאם $u,v \in G^N$ אז גם $u+v \in G^N$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha v \in G^N$ $\Leftarrow$ G^N מרחב וקטורי.

<u>טענה</u>: $\dim G^N = 2^n - 1$

<u>הוכחה</u>: לכל $\emptyset \neq S \subseteq N$ נגדיר $w_S \in G^N$ ע"י

$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & T = S \\ 0 & T \neq S \end{cases}$$

נראה ש- $(w_S)_{\emptyset \neq S \subseteq N}$ בסיס ל- G^N. (נראה שהם בת"ל)

יהיו $\alpha_S \in \mathbb{R}$ כך ש- $\sum \alpha_S w_S = 0$ ויהי $\emptyset \neq T \subseteq N$

אז $\sum \alpha_S w_S = 0 \Leftarrow \sum_{\emptyset \neq S} \alpha_S w_S(T) = 0$

אבל לפי ההגדרה

$$0 = \sum_{\emptyset \neq S} \alpha_S w_S(T) = \sum_{\emptyset \neq S} \alpha_S \cdot \begin{cases} 1 & T=S \\ 0 & T \neq S \end{cases} =$$

$$= \alpha_T w_T(T) + \sum_{S \neq T} \alpha_S \underbrace{w_S(T)}_{0} = \alpha_T$$

$\Leftarrow$ $\alpha_T = 0$ לכל $\emptyset \neq T \subseteq N$ ולכן המשפחה $(w_S)_{S \neq \emptyset}$ בת"ל.

נותר להראות שהמשפחה גם פורשת את G^N. ויהי $v \in G^N$

נראה ש- $v = \sum_{S \neq \emptyset} v(S) w_S$. אכן, לכל $\emptyset \neq T \subseteq N$

מתקיים $\sum_{S \neq \emptyset} v(S) w_S(T) = v(T) w_T(T) + \sum_{S \neq T} v(S) w_S(T) =$

$$= v(T) + 0 = v(T)$$

☺

נראה עוד בסיס ל- G^n (בסיס פחות טריוויאלי)

לכל $\emptyset \neq S \subseteq N$ נגדיר $u_S \in G^n$ ע"י

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & T \supseteq S \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

יש $2^n - 1$ כאלה ולכן רק להראות שהם בסיס מספיק להראות שהם בת"ל: נניח ש- $\sum \alpha_S u_S = 0$. נניח בשלילה ש- $\emptyset \neq \{\emptyset \neq S \subseteq N : \alpha_S \neq 0\} = \Pi$. נבחר מקבוצה זו איבר T שלו עם מספר איברים מינימלי. (או לחילופין איבר מינימלי שלו ביחס להכלה, כלומר הוא לא מכיל אף איבר אחר). אזי

$$0 = \Big(\sum_{S \subseteq N} \alpha_S u_S\Big)(T) = \sum_{S \in \Pi} \alpha_S u_S(T) =$$

$$= \alpha_T u_T(T) + \sum_{\substack{S \in \Pi \\ S \neq T}} \alpha_S \underbrace{u_S(T)}_{\substack{\text{זה 1 רק אם } S \subseteq T \\ \text{אבל } T \text{ מינימלי} \\ \text{ולכן אם } S \neq T \\ \text{נובע שזה 0}}} = \alpha_T u_T(T) = \alpha_T$$

$\Rightarrow \alpha_T = 0$ לכל T וזה בסתירה לכך ש- $\Pi \neq \emptyset$.

אז גם $(u_S)_{S \neq \emptyset}$ בסיס

<u>משפט שפלי</u> (1953) קיימת פונקציה $\overset{\text{יחידה}}{\vee}$ $\varphi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ המקיימת

1. יעילות
2. מקיימת אקס' השחקנים התחליפיים
3. מקיימת אקס' שחקן האפס
4. אדטיביות

<u>הוכחה:</u> בפעם הקודמת הוכחנו קיום. נוכיח יחידות. יהיו $\varphi, \psi : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ כנ"ל. ויהי $v \in G^N$. צריך להוכיח ש- $\varphi v = \psi v$. נניח $\alpha_S \in \mathbb{R}$. נתבונן במשחק $w = \alpha_S u_S$. אזי כל שחקן $i \notin S$

הינו שחקן אפס במשחק w אכן

$\varphi_i(\alpha_S U_S) = 0 = \psi_i(\alpha_S U_S)$ לכל $i \notin S$. (***)

כל זוג שחקנים $i,j \in S$ הם שחקנים חילופיים ב-w

אכן

$$\varphi_i(\alpha_S U_S) = \varphi_j(\alpha_S U_S) \quad (*)$$

$$\psi_i(\alpha_S U_S) = \psi_j(\alpha_S U_S) \quad (**)$$

$\Leftarrow$ אם $i_0 \in S$ נובע מיעילות, מ-(*) ומ-(**) ש-

$$\alpha_S = w(N) = \sum_{i\in N}\varphi_i w \underset{(***)}{=} \sum_{i\in S}\varphi_i w \underset{(*)}{=} \varphi_{i_0} w \cdot |S|$$

$\Leftarrow$ $\varphi_{i_0}(\alpha_S U_S) = \frac{\alpha_S}{|S|}$ (מוגדר כי $S\neq\emptyset$)

בדיוק באותו אופן $\psi_{i_0}(\alpha_S U_S) = \frac{\alpha_S}{|S|}$, כלומר

$\psi_i(\alpha_S U_S) = \varphi_i(\alpha_S U_S)$ לכל $i\in S$!

$\psi_i(\alpha_S U_S) = \varphi_i(\alpha_S U_S) = 0$ לכל $i\notin S$,

כלומר יש שוויון לכל $i\in N$.

היות שהמשחקים $(U_S)_{S\neq\emptyset}$ פורשים את המרחב G^N

נובע שקיימים $\alpha_S\in\mathbb{R}$ כך ש- $v = \sum \alpha_S U_S$

אכן מהאדיטיביות נובע ש-

$$\varphi_i v = \sum_{\emptyset\neq S}\varphi_i(\alpha_S U_S) = \sum_{\emptyset\neq S}\psi_i(\alpha_S U_S) = \psi_i v$$

☺

כמה מילים על המבחן: אין בחירה.

- שאלה אחת טריוויאלית (משהו פשוט חישובי)
- שאלה של מחשבה - משהו מהתרגילים
- הוכחת משפט או שניים (לא בהכרח במלואו אבל אולי קטע ממנו)
- שאלה קצת קשה יותר

<u>הגדרה</u>: אקסיומת התרומות השוליות: w, v שני משחקים.

אם לכל $S\subseteq N$ $v(S\cup\{i\})-v(S) = w(S\cup\{i\})-w(S)$ אזי

$$\varphi_i v = \varphi_i w$$

נוסחאות נוספות לערך שפלי:

$$\varphi_i v = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \beta_S \left(v(S\cup i) - v(S)\right)$$

כאשר $\beta = \binom{n-1}{|S|}^{-1}\cdot\frac{1}{n}$

אם R סדר על השחקנים הגדרנו

$$P_i^R = \{ j : jRi\}$$

אז הגדרנו

$$\varphi_i v = \frac{1}{n!}\sum_R \left(v(P_i^R\cup\{i\}) - v(P_i^R)\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \left(v(S\cup i) - v(S)\right)\left|\{R : P_i^R = S\}\right| =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} |S|!(n-|S|-1)!\left(v(S\cup\{i\}) - v(S)\right) =$$

$$= \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \binom{n-1}{|S|}^{-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(v(S\cup\{i\}) - v(S)\right)$$

<u>הגדרה:</u> משחק רוב משוקלל מוגדר ע"י $N=\{1,\dots,n\}$, מכסה $q>0$ ומשקלות $w_1,\dots,w_n$;

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i\in S} w_i \ge q \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

המשחק יסומן ע"י $v=[q, w_1,\dots,w_n]$

<u>דוגמא:</u> נסתכל ב- $[61: 50, 30, 40]$ כאן הכח של כל מפלגה הוא $\frac{1}{3}$. האופן שלהן לא משפיע פה.

<u>דוגמא:</u> $[61; 40, \underbrace{1,\dots,1}_{\text{80 פעמים}}]$

כל שחקני ה- 1 הם חליפיים אז מספיק לחשב את ערך שפלי של שחקן ה- 40.

$$\varphi_1 v = \frac{1}{81!}\cdot\#\{R : v(P_i^R\cup i) = 1 \wedge v(P_i^R) = 0\} =$$

$$= \frac{1}{81!}\sum_{l=22}^{61} 80! = \frac{1}{81}\cdot(61-22+1) \approx \frac{1}{2}$$

<u>שאלה למחשבה</u>: בונים שדה תעופה ובו שלושה סוגי מטוסים:

סוג	כמות	עלות נחיתה
א	10	x_1
ב	20	x_2
ג	40	x_3

$x_1 < x_2 < x_3$!

יש פה שלושה שחקנים S_1, S_2, S_3 ונגדיר

$$V(S) = \max\{x_i : S \cap S_i \neq \emptyset\}$$

איך הגיוני לחלק? את ה-x_1 מחלקים בין כולם

את ה-x_2 מחלקים רק בין ב' וג'

את ה-x_3 נותנים רק ל-ג'.

וזה גם מה שיוצא בחישוב של ערך שפלי.

(31) 21/1/2010
תורת המשחקים

<u>דוגמה:</u> משחק דו-שלבי

	l	r
t	4,2	1,3
b	0,3	2,2

II

	L	R
T	①	②
B	③	④

I

כמה אסט' טהורות יש לשחקן 1 ? מצ"ב ההנחה היא שאחרי השלב הראשון ידועות הפעולות של השחקנים.
אז בתקופה I יש לו שתי פעולות ובתקופה ה-II יש לו החלטה מה לעשות לכל 4 האפשרויות של השלב הראשון.
לכן סה"כ יש לו $2\cdot 2^4=32$ אסט' טהורות.

נניח שרוצים רק ש"מ אחד במשחק הדו-שלבי. זה ממש פשוט.
ש"מ ב-I וש"מ ב-II זה ש"מ במשחק הכולל.
אבל יש ש"מ שהוא לא מהצורה הזאת.

נניח שיש לנו אסט' מעורבת במשחק (מגדר) של שחקן 1
(x, x_1, x_2, x_3, x_4)

הסיכוי של T
הסיכוי של t אם הגענו מ-1
הסיכוי של t אם הגענו מ-2
הסיכוי של t אם הגענו מ-3
הסיכוי של t אם הגענו מ-4

ובאופן דומה לשחקן 2 (y, y_1, y_2, y_3, y_4)
אם $0<x<1$, $0<y<1$ אז הסיכוי להגיע לכל אחד מה-x_i-ים ו-y_i-ים הוא חיובי ממש. ולכן האסט' שמושרית על המשחק המשחק חייבות להיות ש"מ, כלומר (x_i,y_i) חייב להיות ש"מ לכל $1\le i\le 4$.

במשחק II אין ש"מ טהור. אז נחשב ש"מ מעורב $((\alpha,1-\alpha),(\beta,1-\beta))$

$$2\alpha+3(1-\alpha)=3\alpha+2(1-\alpha) \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

$$4\beta+(1-\beta)=2(1-\beta) \Rightarrow \beta=\frac{1}{5}$$

מאחר שבמשחק II יש ש"מ יחיד $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{5}$

אז אם $0<x<1$; $0<y<1$ אז המשך המשחק

ב-II חייב להיות הש"מ הזה. כלומר לא משנה מה הם יעשו

ב-I , התשלום ב-II נשאר זהה ולא תלוי ב-I. לכן

גם ב-I הם צריכים לשחק ש"מ.

עכשיו נניח שהמשחק ב-II היה

	l	r
t	1,1	0,0
b	0,0	2,2

פה יש 3 ש"מ - 2 טהורים ו-1 מעורב

והתשלומים המתאימים הם $(1,1), (2,2), (\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

אם התשלומים ב-I הם a_{ij}, b_{ij} ; $0<x<1$, $0<y<1$

אז יש לנו $3^4=81$ אפשרויות לתוים מטריצות

	L	R
T	$a_{11}+?$ $b_{11}+?$	$a_{12}+?$ $b_{12}+?$
B	$a_{21}+?$ $b_{21}+?$	$a_{22}+?$ $b_{22}+?$

ראשית? מוסיפים תשלום של ש"מ במשחק II (לכל משבצת יש 3 אפשרויות ויש 4 משבצות. לכן יש 3^4 אפשרויות) והמשחק הזה למעשה מייצג לנו את המשחק כולו ועכשיו אנחנו צריכים למצוא ש"מ.

אם האסטר' x,y לא מעורבות ממש אז יש 8 אפשרויות:

אלה דומים
1. $x=0$, $0<y<1$
2. $x=1$, $0<y<1$
3. $0<x<1$, $y=0$
4. $0<x<1$, $y=1$

ואלה דומים
5. $x=0$, $y=0$
6. $x=0$, $y=1$
7. $x=1$, $y=0$
8. $x=1$, $y=1$

<u>דוגמה:</u> שני משחקי סכום אפס ויש סיכוי לעבור למשחק אחר אח"כ או פשוט לסיים.

v_1	5 $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$	4
	2 $(0,\frac{1}{8})$	9

ב

2 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	1 $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$	u_1
1 $(0,0)$	3 $(\frac{1}{2},0)$	

א

נניח שיש להם ערכים u_1, v_1

ניתן לחשב את הערך של הדו-שלבי (נסתכל על מטריצה

$2+\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3}v_1$	$1+\frac{1}{4}u_1+\frac{3}{4}v_1$
$1+0+0$	$3+\frac{1}{2}u_1+0$

ופה אפשר למצוא את הערך ולה של המשחק הדו שלבי.

עכשיו נניח ששחקן טבע בוחר בהסתברות $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ אחד מהמשחקים להיות המשחק הראשון. שחקן 2 לא יודע את הבחירה. אבל בסיבוב השני הוא יודע הכל - גם את המשחק שנבחר וגם את מה שקרה במשחק. בסיבוב הראשון שחקן 1 יודע את בחירת הטבע.

נחשב את ערך המשחק. בסיבוב הראשון לשחקן 2 יש שתי אסטרטגיות כי הוא לא יודע את בחירת הטבע ואילו לשחקן 1 יש ארבע אסטרטגיות

	L	R
א T, ב T	$5\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot u_1+(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3})v_1$	
T, B	$2\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{2}{3}+(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8})u_1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot v_1$	
B, T		
B, B		

וכך הלאה

ועכשיו אפשר לחשב את הערך ואת זה אנחנו יודעים לעשות.