

① 21/10/09
P. J. J.

yak@math.huji.ac.il

המחיר - ידוע מס' 3/ק

052-6231630

מען האט אים געקוקט - וואס

יפיו תבואים ב. שבת. עוד לא ברורה חובת הכהן

9

א.ש.ח.ק: יש חלוקה גדולה בין אשכנזים לזרעם

אנציה רמה גפרורים לפני כולם מאילו עמדה לפני חובה

המסרה: אבנר את הפסח והחמץ

אם יש לי זמן וכל זאת אתה איתו אנחנו נעשה

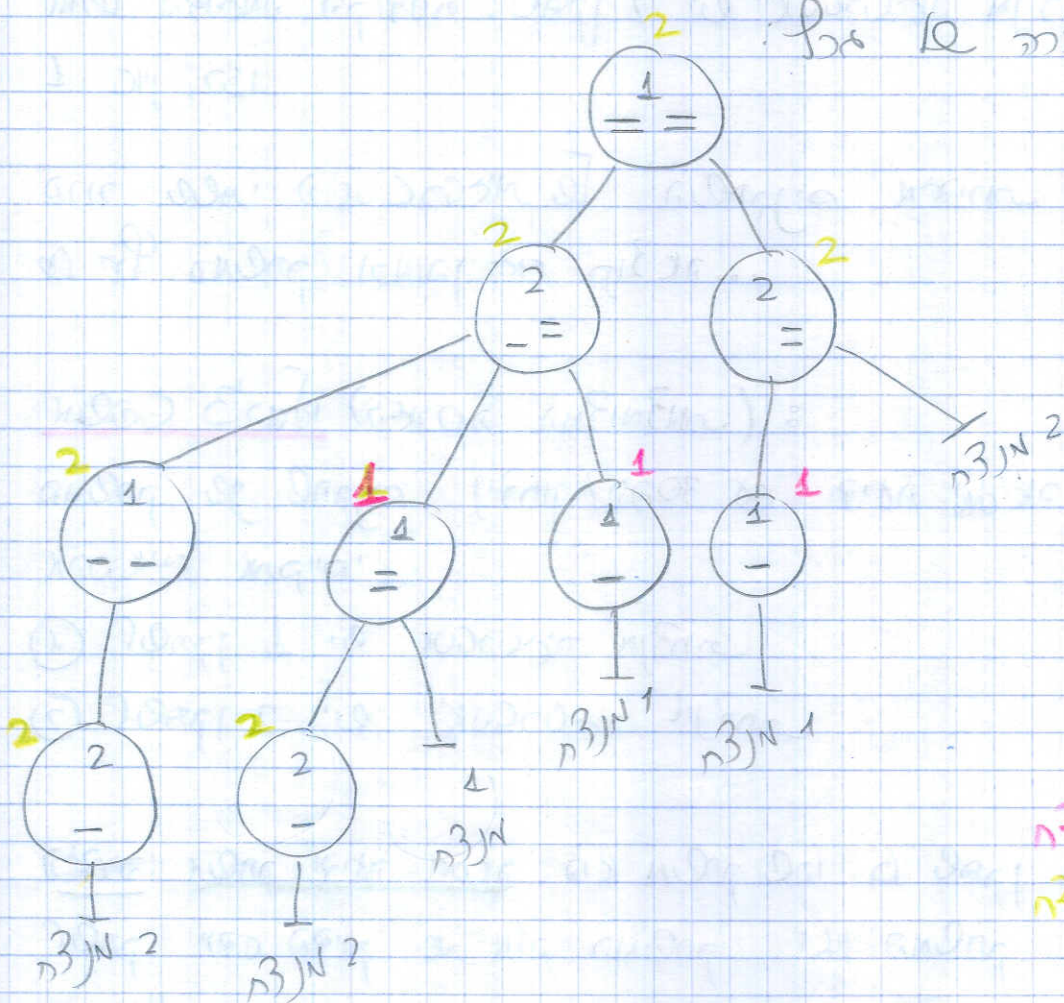
בנוכח שלחוקן השני, מנצח אם הם תור הוא מוכיח מהערכה

השנייה את אחי אשר גברתי כחן לפניך ה' לפניך

המשלוח מהצורה הראשונה.

לפיכך נראה כי יש להבחין בין שני סוגי תגובה:

for the m3a gene



מספר 1
מספר 2
מספר 3

Answer

מחיר 2/100
11/30

n_3 ж 1 
 n_3 ж 2 

הגדרה: רף המשתק הוא רף מכון הנציה את התרחישים
האפשריים במשחק.

- אם עלה מוגדרת תוצאת המשחק (זה לא רק ניצחון או הפסד,
כוח להיות זה גבוה או גשולות אחרות)

- אם קיצוץ שאינו עליה מוגדר המשחק שצריך לשחק (מקרה ההחלטה)
- קבוצת הצעות שונות מהקיצוץ וקראת הפעולות של
השחקן הקיצוץ.

הגדרה: אסטרטגיה (סתורה) של שחקן היא בחירה של צע
יחידה אם קיצוץ בו הוא משחק (פורמלי, אסטרטגיה מכילה
את כל ההחלטות של שחקן לשמור וקרא) לשחק אפילו אם
נותר לשמור לא יגיע למצב מסוים)
אסטרטגיה מנצחת היא אסטרטגיה שמובילה לניצחון עבור כל
אסטרטגיה של השחקן השני

אמש, בדומה הקדמה לשחקן 2 יש אסטרטגיה מנצחת ולשחקן
1 אין כוון

נותר שמי (האסטרטגיה של השחקנים מוגדרות מסוף יחיד
על רף המשתק וכמובן גם תוצאה...

משפט צ'רנוף (היאנסה המצוינות):

המשחק של שחקנים ניצחון / הפסד עם יחידה מסאה בצדק אחד
אזכאיים מתקיים:

- (1) לשחקן 1 יש אסטרטגיה מנצחת
- (2) לשחקן 2 יש אסטרטגיה מנצחת

הגדרה: משחק יחידה מסאה הוא משחק שבו כל שחקן נבחר לשמור (קרא)
לשחק יחידה בצדק את מצב המשחק ואין במשחק אומנם של
אקראי

(2)

צימאה - המשחקי קציים און ציעה אמא
- כש-הס יש יציעה אמא און אקראל

צימאה : המשחק מומ

יש אור חמא. הם סור שחקן סור משכנה (ב,א) שחקן
לא נחקה ו' נק סור את ס המשכנה (נ,ו) ק ל-
 $a \leq b$ ו' $b \leq n$, סור את הפנה העסן - אחרית
המסוף הוא זה שמסוף סור נק.

צננה : סור אור חמא ו' שחקן 1 יש אסמאיה אנחה

הנחה : סור הכסון שחקן 1 ו' (2,2).

כסר סר סור סחקן 2 ו' (1,1) אס שחקן 1
ו' (1,1) ו' סחקן.



(11)

צננה : סור חמא ו' שחקן 1 יש אסמאיה אנחה

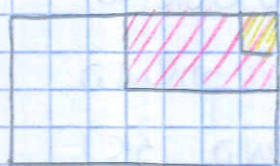
סחקן : סר כסון ו' סחקן ו' אסר ו' אסר ו' סחקן

אסר ו' סחקן יש אסמאיה אנחה. ק אסר ו' סחקן

נ' סחקן ו' שחקן 2 יש אסמאיה אנחה. נ' סחקן

1 שחקן סור הכסון (ח,ח) ו' שחקן 2 סור סחקן (ב,א)

סור אסר ו' סחקן 1 ו' סחקן



סור סחקן (ב,א) ו' סחקן ו' סחקן

ו' אסמאיה סחקן 2 ו' סחקן

סור ו' אסמאיה סחקן 1 ו' סחקן

(11)

אסמאיה סחקן

הנחה : סר סחקן ו' סחקן (ח,ח) ו' סחקן ו' סחקן

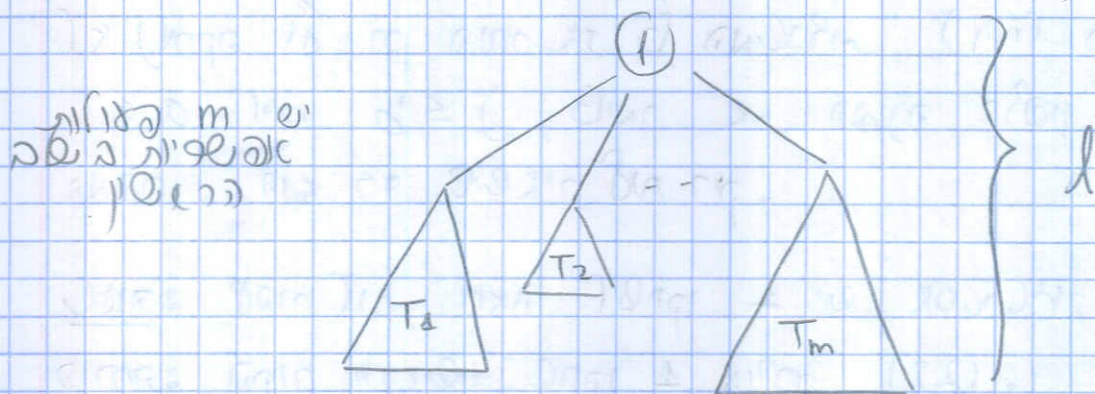
אסר ו' סחקן ו' סחקן ו' סחקן ו' סחקן

אסר ו' סחקן ו' סחקן ו' סחקן

הוכחת משפט צ'רנס:

האנציקלופדיה שמה על אמה על המשחק.
 - המיסד האנציקלופדי: יחידה S - השחקן המנצח יש לו אסטרטגיה אנצית: לא יזדווג צבר.

- צדד האנציקלופדי: בהנחה משחק שבו העל ביחידה l



אנצית האנציקלופדי לא תה על T עבור $m \leq i \leq 1$
 לאחר השחקנים יש אסטרטגיה אנצית.
 יש להי אפשרות:

• קיים תה על $T \pm$ שזמנו לשחקן 1 יש אסטרטגיה אנצית S . אך המשחק והקורב יש לשחקן 1 אסטרטגיה אנצית והיא זמנו הפעולה I בשלב השני ואם לשחקן 1 האסטרטגיה S . עבור קצקוצים $I \neq j$ לא משנה מה ישחק.

• אם לא תה על T עבור $m \leq i \leq 1$ לשחקן 2 יש אסטרטגיה אנצית S_i . אך יש לו כחוקן אסטרטגיה אנצית המשחק כולו ביחידה l (בהיפוטזה) בשלב השני ואז המשחק אסטרטגיה התה עצם.

③

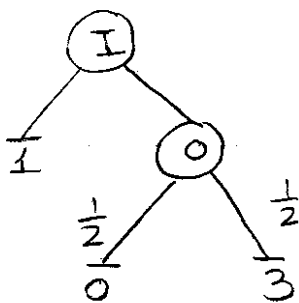
28/10/09
ת' משחקים

השקיה שזכר זיכרתי על משחקים בצורה חזרה עם אינפורמציה
מלאה (לחקן סב"ק יוצא את המצב והאפשרויות של הלחקן
השני - למשל, חו"ח, צמחה...).
שם-היום הוא לא משחק עם אינפורמציה מלאה כי לא
יודע מה תהיה הטלף הקובעת מה משהו שרצה לזכר.

צומחה: לחקן יחיד צומח סב"ק. ההחלטה:

א' אקראי שקל
א' אקראי מסבא ואם יוצא
על עקב 3 ואם יוצא
פלי אקראי 0

אפשר להציג את המשחק כך:

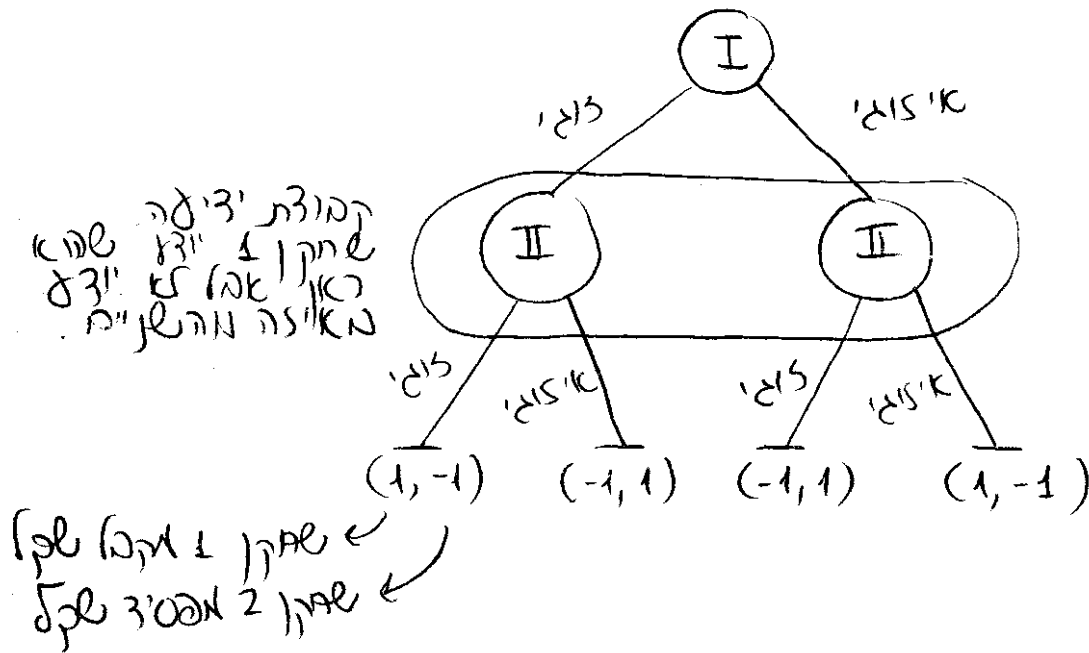


שחקן 0 והקט שחקן סבא ואין לו תשלומים במשחק.
אנחנו נניח תמיד שהשחקנים יוצאים את ההתפלגות של
שחקן הסבא.

הדפוס אפשר למדל שם-היום - יש לו שני שחקנים:
השחקן הראשון, השחקן השני, ושחקן סבא. המשחק מתחיל
ב-36 אפשרויות של לחקן סבא. השחקן הראשון
החוק ואם שוב שחקן סבא, אז שחקן 2 (וכן הלאה).

אם הם לא אנחנו לא יוצאים למצב המשחק סבא-סבא.
אנחנו לא יוצאים מהשם אינפורמציה...

דוגמה: זוג או פרט . וניה שלחקן 1 הוא זוג.



משחקים בצורה חסבה עם אינפורמציה לא מלאה

קבוצת שחקנים $N = \{1, 2, \dots, n\}$

V - קבוצת הקדקודים שאינם ערים

L - קבוצת הענפים המשחק

V_i - הקדקודים בהם שחקן i נקרא לפעול $0 \leq i \leq n$
 (במובן $V = \bigcup_{i=0}^n V_i$; $V_i \cap V_j = \emptyset$ if $i \neq j$)

עם $n \geq 1$ יציאת i_k קבוצות $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$
 שכן קבוצת יציאה של שחקן i (השחקן יוצא) (הענף) (הקבוצה)
 בין קבוצות שונות אף לא בין קבוצות בתוך קבוצה (ותורה)
 ואם $u_i = \bigcup_{j=1}^k u_{ij}$; $u_i \cap u_j = \emptyset$ (לומר כי חלוקה של u_i).

פונקציית תשלום $u : L \rightarrow \mathbb{R}^n$ היא ח-ה של תשלומים

הם ענף ראש הקואורדינטה ה- i היא התשלום לשחקן i .

הערה: ישנן מנגנונים של קבוצות יציאה. אמרתי קבוצת הפעולה אם זוג קדקודים מאותה קבוצת יציאה הוא לזה (אחת הוא היה יותר אהבנו בין המנגנונים). יש מנגנונים נוספים אבל הם לא בחומר של הקורס.

4

אסטרטגיה (מחברת) של שחקן I היא התאמת פעולה
בזכות אל קבוצת יציגה שלו.

צומאה: נתתי משחק:

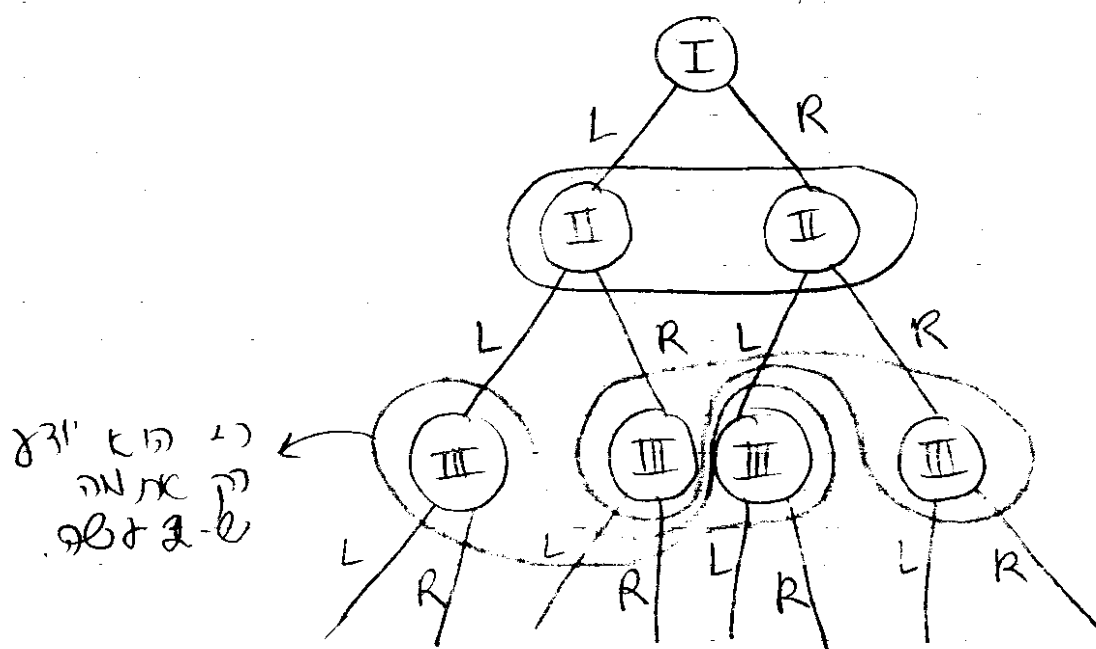
- תחילה שחקן 1 בוחר R, L

- אחר כך שחקן 2 שאינו יודע את הפעולה של 1 בוחר R, L

- אחר כך שחקן 3 שידע את הפעולה של שחקן 2 בוחר

אל יודע את הפעולה של שחקן 1 בוחר R, L

(צ"ע את המשחק המשחק בצורה הבאה)



כמה אסטרטגיות: מה שחקן 3 יודע או לא

קבוצות יציגה ובה אחת 2 פעולות אפשריות. אם יש או

4 אסטרטגיות טהורות.

אזכור: משחקים בצורה מחברת (משחקים בצורה נורמלית)

מה שאני מוכרז את עם אסטרטגיה של משחקים בצורה נורמלית.

בהנחה משחק בצורה מחברת (אצ"מ משחק) נבחר את

קבוצת הפעולות של שחקן I (הוא לא האסטרטגיה הטהורה

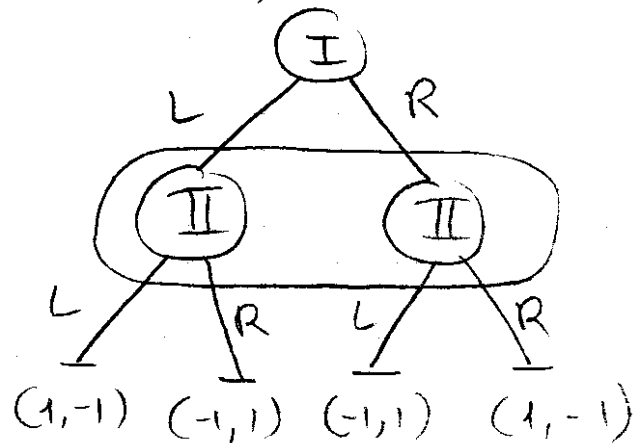
שלו. בהנחה פעולה של שחקן, בוחר אסטרטגיה של

אחד, נבחר את התשלום כתוחלת המשחק בצורה

מחברת. נבחר משחקים משחקים לפי האסטרטגיה האלו.

אנחנו מצבים על תחילת כי יהיו אלו שמונה
משחק שחקן אחד.

צורה: כל או פרט. המשחק בצורה רחבה נראה כך:

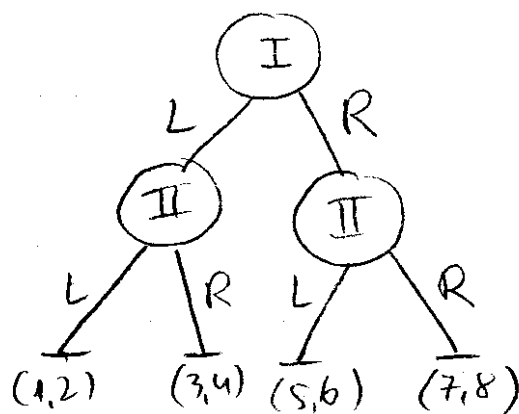


לשחקן 1 יש קבוצת ידיעה אחת ובה שתי פעולות.
לשחקן 2 יש קבוצת ידיעה אחת ובה שתי פעולות.
לכן כל אחד מהם יש שתי אסטרטגיות.
אז צריך להציג את המשחק כך:

	L	R
L	1, -1	-1, 1
R	-1, 1	1, -1

הכלל שהספאגו האלה מניחים את המשחקים
שיהיו אלו יש לאסטרטגיה אחת כי את הספאגו.

	LL	LR	RL	RR
L	1, 2	1, 2	3, 4	3, 4
R	5, 6	7, 8	5, 6	7, 8

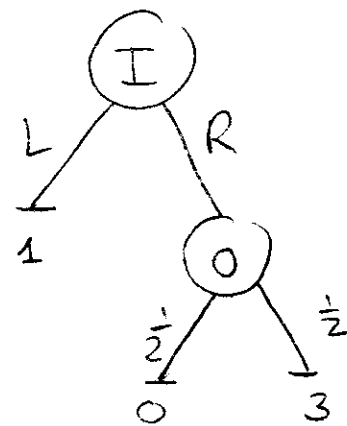


צורה:

5

החלטות במצבים של אי-ודאות:

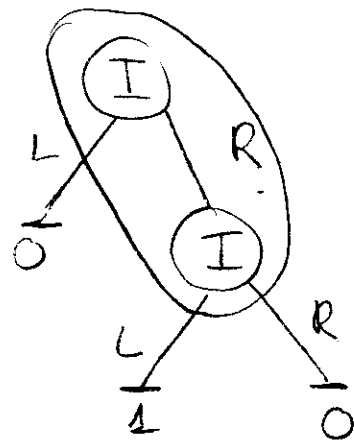
L	1
R	1.5



מהסתברות הטבעית שחקן תלוי
 יעדיף לשתף R אבל בהצעה של
 החלף יש הסתברות אחת של שחקן יעדיף
 לא לשתף את הסיכון (אם לא מצטרף בחלף ארצות
 דו-חיים)

אם אנו לא תלוי נכנס להסתברות של תוחלת אבל זה בטח לא
 מה שנגלה

בדקה הנקבעת השיבוט - הנקבע דו-חיים הבחירה
 יש שני מצבים בצדק, אבל הוא לא רק ליכוד לפני
 לא מצטרף בנקבה. ואחרי הצלחת הראשון (יש ליכוד זה הייתה
 הבחירה שלו לא תשובת יצירה
 בעצמית זה הניח פועל אבל הוא
 לא נוסך את זה...



L	0
R	0

יורט שמה אף פעם לא יורט יורט אף
 כנראה השחקן לא אפילו אמרתי יורט אפילו בט
 צוואה זה נקרא לו סיכוי 1/2 לחזור הבחירה

⑥ 4/11/09
ד"ר אלפר

סימני עם משחקים בצורה יחידה. כל היעדרה הקדמה מנתה (פסד על משחקים בצורה יחידה).

דוגמה: נתון משחק של שני משחקים. במקרה זה המשחק הוא משחק סתם אס, בוויי שחקן 1 וזוהי תשלום לשחקן 2. כל אספק אחרים זה את התשלום.

		L	R
	T	-2	3
	B	4	-5
		L	R
(2,2)	(3,-3)		
(4,-4)	(5,5)		

שחקן 1 יכול להסיר (לעצמו) (לא משנה אפילו יעלה) את המקסימום בין -2, -1, -5. כל של הפסדו במידה כ-T (נראה) -2. ומכאן B נותן של הפסדו -5):

$$\max_{T,B} (-2, -5) = \max_{T,B} \min_{L,R} (\text{תשלום})$$

אסטרטגיה היא אצורה של הסתברות בעניין - הסתברות p נמתה ד ובסתברות 1-p נמתה B. ולשחקן השני יהיה אפילו אסטרטגיה אצורה של הסתברות אחר q שקובעת את בחירתו.

מבוא למשפט min max

אם תוחלת התשלום של שחקן 1 יהיה אופטימל במשחק "א" אסטרטגיה אצורה?

(תוחלת תשלום) נניח ששחקן 1 משחק אפ' (p, 1-p)
שחקן 2 משחק אפ' (q, 1-q)
כל תוחלת התשלום של שחקן 1 במשחק היא

$$u(p, q) = \underbrace{-2 \cdot pq}_{P(-2)} + \underbrace{3p(1-q)}_{P(3)} + \underbrace{4(1-p)q}_{P(4)} - \underbrace{5(1-p)(1-q)}_{P(-5)}$$

אם כדורתי שלם אסטרטגיה אחת ויתר ית'ם אולי
את תורת המשלוח
שחקן 1 יתר אסטרטגיה

$$\max_p \min_q u(p, q) = (*)$$

אם שחקן 1 יתר אסטרטגיה P שמשמשת את
(*) הוא יתר את התשלום הזה כל תלות אסטרטגיה
שחקן 2

נתון

$$\begin{aligned} \max_p \min_q u(p, q) &= \\ &= \max_p \min_q (q \underbrace{(-2p + 4(1-p))}_{(*)} + (1-q) \underbrace{(3p - 5(1-p))}_{(**)}) \end{aligned}$$

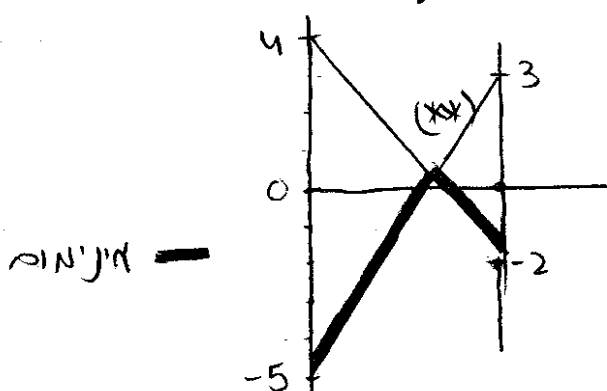
(*) - ; (**) תלויים p - ; $q(*) + (1-q)(**)$ - ;
הוא מציג משקל של (*) - ; (**) - ; חלק בדרך

$$\min_q (q(*) + (1-q)(**)) = \begin{cases} (*) & (*) \leq (**) \\ (**) & (**) \leq (*) \end{cases}$$

ולכן תלוי ב- q

$$\Rightarrow \max_p \min_q u(p, q) = \max_p \min (-2p + 4(1-p), 3p - 5(1-p))$$

(צויר את שני היבטים של)



7

התקסימום של המינימום מתקבל במקרה הנכבד

$$2p + 4(1-p) = 3p - 5(1-p)$$

$$\Rightarrow 8(1-p) = 5p$$

$$\Rightarrow 8 = 14p$$

$$\Rightarrow p = \frac{8}{14}$$

אזכור, צבם יורדל שמתחילת שחקן 2

$$-2 \cdot \frac{8}{14} + 4 \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{7}$$

המסקנה: כי הפעולה $(\frac{8}{14}, \frac{5}{14})$ שחקן 1 מבטיח אצלו
(כלי קל אצלו של שחקן 2) שיתוף התשלום שלו
כי $\frac{1}{7} \leq$

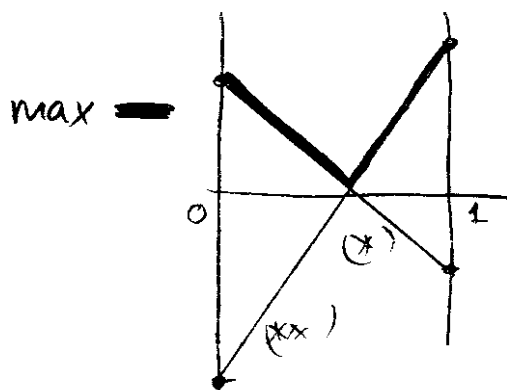
באופן דומה, נחשב את מה ששחקן 2 יכול להבטיח אצלו.
באשיר, כחל ש שחקן 2 לא יכול להבטיח אצלו תשלום
 $C < \frac{1}{7}$ (כי זה מנוגד למה שהוכחנו עמ"כ שחקן 1).
השחקן השני צול להבטיח אצלו שהוא לא ילחם יותר מ-

$$\min_q \max_p u(p, q) =$$

$$= \min_q \max_p (p(-2q + 3(1-q)) + (1-p)(4q - 5(1-q)))$$

$$= \min_q \max (\underset{(*)}{-2q + 3(1-q)}, \underset{(**)}{4q - 5(1-q)})$$

מקסימום
אצלו



ושם צבם אצלו את הק הנכבד

$$-2q + 3(1-q) = 4q - 5(1-q)$$

$$8(1-q) = 6q$$

$$8 = 14q$$

$$\Rightarrow q = \frac{8}{14}$$

ה minmax הוא $\frac{1}{7}$! הכלל הכלל $\max_p \min_q = \min_q \max_p$

משפט מיני-מקסי $\min\max$ -
 אם משחק סכום אפס $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ קיים צדק V רק שלשחקן 1
 יבואו ציפיות מקבלת ציפיות V שלשחקן 2 וזהו ציפיות
 שלם אם ה'אזר V

⑧ 5/11/09
 ז' משחקים
 (משחקים במצב א)

	α	β	$1-\alpha-\beta$
p	1	2	0
$1-p$	-1	-2	4

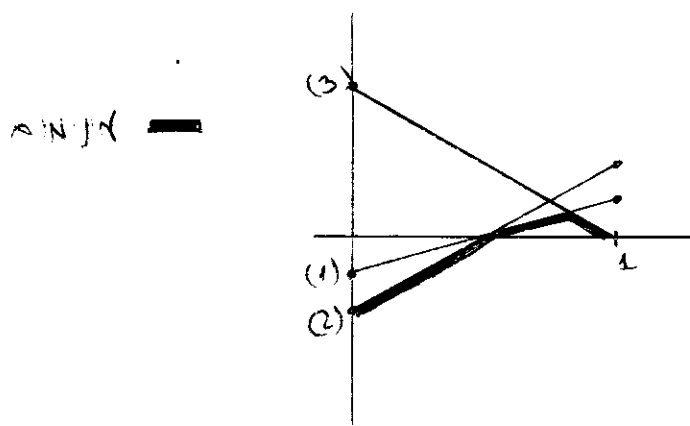
צ' משחק
 (גיוון משחק)

מהו ערך המשחק? מה משחק סכום אפס אף פעם לא
 יש למשחק כלפי עצמו. זה נראה חשוד בזהירות של איתור
 שחקן 1 יתן ארבעה

$$\max_{0 \leq p \leq 1} \min_{\substack{\alpha, \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta \leq 1}} u(p, (\alpha, \beta)) = \max_{0 \leq p \leq 1} \min(p - (1-p), 2(p - (1-p)), 4(1-p))$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 תשלום 1 תשלום 2 תשלום 3
 (המשחקים)

ואם, אפילו אנחנו לא מתכוונים לבדוק אותם



הנקודות של התנגדות
 (1) איתור סכום אפס
 (3) -

$$\begin{aligned} p - (1-p) &= 4(1-p) \\ p &= 5(1-p) \\ 6p &= 5 \\ p &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$4 \cdot (1 - \frac{5}{6}) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \leftarrow \text{ערך המשחק}$$

הפתרון $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ אפילו אף פעם לא תהיה תשלום $\frac{2}{3}$.
 אם minimax נותן גם שחקן 2 יתן ארבעה לא אף פעם
 יותר מ- $\frac{2}{3}$. אלא מה הפעולה? איתור סכום אפס?
 אפילו אנחנו אפילו לא נבדקו את זה ונראה שזה לא
 מתאים. אפילו לא נבדקו את זה ונראה שזה לא
 (נראה שזה לא אפילו נבדקו)

נסמן $\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta$ את הפעולה שמסתייגה אליהן 2 תחלות תשלום $\frac{2}{3}$.

$$(*) \quad \alpha + 2\beta + 0(1-\alpha-\beta) = \frac{2}{3}$$

$$(**) \quad -\alpha - 2\beta + 4(1-\alpha-\beta) = \frac{2}{3}$$

הוכחה: תחילה, $(\alpha, \beta) \leq \frac{2}{3}$ להיג $(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$ מסתייגה תשלום $\geq \frac{2}{3}$.

עכשיו נניח השלייה ל- $(*) < \frac{2}{3}$ אז α אינו
משחק $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ תחלות תשלום תהיה

$$\frac{5}{6}(\alpha) + \frac{1}{6}(**) \neq \frac{2}{3}$$

כי זה ממוצע של שני מספרים
שאינם קטן ממל $\frac{2}{3}$
והשני חסום $\frac{2}{3}$

גם סתירה אכן ל- $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ מסתייגה תשלום $\leq \frac{2}{3}$,
וזאת נגד תלות במה שהלחקן השני עושה.
באופן דומה, לא יוכל להיות ל- $(**) < \frac{2}{3}$.

(ii)

עכשיו א מה שניתר לנו הוא לפתור שתי משוואות בשני
נקודים ומצאנו את האסטרטגיה שחפשונו.

הצרה: את מה שעשינו כאן ניתן להרחיב באופן פשוט
למשחק 2×2 או $2 \times n$. נשאלני השחקנים
יש יותר משתי פעולות אפשריות זה כדורא פשוט...

תזכורת יצא לל' בלתי מסתייגה

מחלה פנימית

המרה: מחלה פנימית סטנדרטית (מחלה סקלרית) $\mathbb{R}^n$
היא הפעולה $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n: <, >$ המיוחסת

9)

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

תכונות המרחב הסקלרי:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \angle(x, y) \quad (1)$$

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} \quad \text{כל}$$

$$2\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum (x_i - y_i)^2 &= \sum (x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2) = \\ &= \sum x_i^2 - 2 \sum x_i y_i + \sum y_i^2 = \\ &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ 2\langle x, y \rangle &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \leftarrow \end{aligned}$$

פרמטרים

המשוואה $\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_0$ היא משוואה ליניארית בפרמטרים $x_1, \dots, x_n$ כאשר $a_0, a_1, \dots, a_n$ הם מספרים.

במרחב $\mathbb{R}^2$ - כל ישר הוא משוואה ליניארית.
במרחב $\mathbb{R}^3$ - כל מישור הוא משוואה ליניארית.

תכונות של מישורים:

(1) אם $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ו- $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ אז המרחב L המוגדר על ידי $\langle a, x \rangle = a_0$ הוא מישור.

כל $x, y \in L$ מקיים $\langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle = a_0$.

הוקדשנו a נקרא וקטור הנורמל לפרמטר a_0 ומכאן נובע:

וקטור הנורמל a ניצב למישור L .

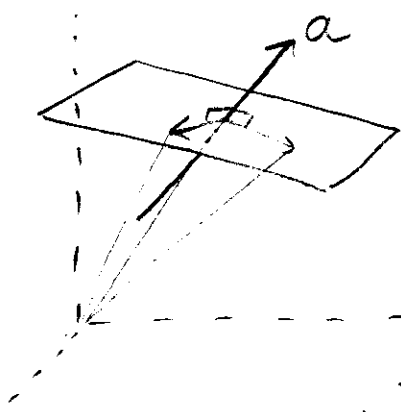
(וקטור שני במישור L הוא אנכי ל- a).

כל $x, y \in L$ מקיים $\langle x - y, a \rangle = 0$.

כל $x, y \in L$ מקיים $\langle x - y, a \rangle = 0$.

$\langle a, x \rangle = a_0$ וכל $x, y \in L$ מקיים $\langle x - y, a \rangle = 0$.

$x - y \perp a$ כל $x, y \in L$ מקיים $\langle x - y, a \rangle = 0$.

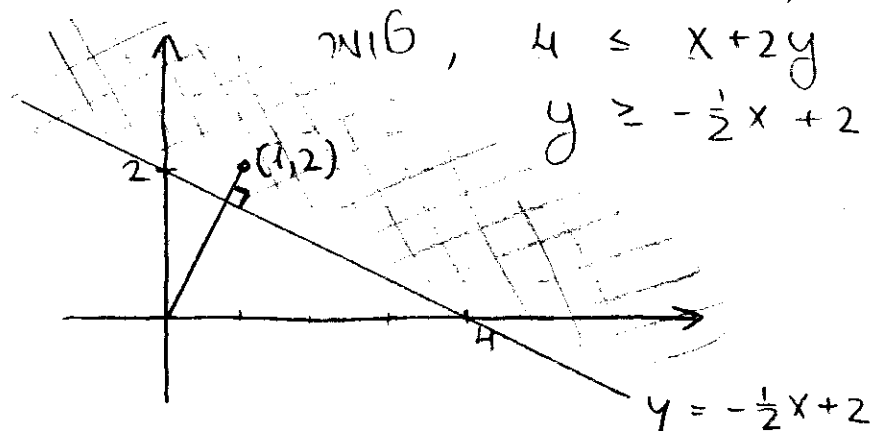


$$\langle x-y, a \rangle = \quad \text{אם } a \text{ לא כרוך ב-} \\ = \langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle = a_0 - a_0 = 0$$

אין צורך האם

האי שוויונים $\langle a, x \rangle \leq a_0$, $\langle a, x \rangle \geq a_0$ מאדווחים שני מצאי אותם שהצמוד שלהם הוא העם או שווה $\langle a, x \rangle = a_0$.

צוואה: ב- $\mathbb{R}^2$ $\langle (\frac{1}{2}), (\frac{x}{y}) \rangle \leq 4$ שקל ל-



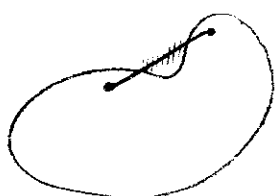
קוויות

תלכוחות: מהיותן שתי נקודות $x, y \in \mathbb{R}^n$ קבוצת הווקטור $px + (1-p)y$ $0 \leq p \leq 1$ היא בדיוק הקטע

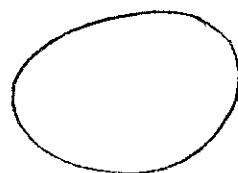
שחבר את x ו- y .
 הסבר: $px + (1-p)y = y + p(x-y)$
 y הוא המוקד יחסיים אליו חלקים מהווקטור $x-y$.

כאדרה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא קמורה אם לכל $x, y \in A$ לכל $0 \leq p \leq 1$ מתקיים $px + (1-p)y \in A$, בואו הקטע שבין x ו- y נמצא ב- A .

לא קמורה



קמורה: צוואה:



10)

$L: \langle a, x \rangle = a_0$ $a_0 \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^n$

וכי $0 \leq p \leq 1$ וכן $x, y \in L$ - ע"י

$$\begin{aligned} \langle a, px + (1-p)y \rangle &= \langle a, px \rangle + \langle a, (1-p)y \rangle = \\ &= p \langle a, x \rangle + (1-p) \langle a, y \rangle = p \cdot a_0 + (1-p) a_0 \\ &= a_0 \end{aligned}$$

$$px + (1-p)y \in L \quad \Leftarrow$$

המשפט: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצת הנקודות A היא קמורה אם ורק אם

$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

כלומר B היא קבוצת הנקודות הקמורה המכילה את A היא $\text{conv } A$ (הקליפה הקמורה של A)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ B היא קבוצת הנקודות $\text{conv } A$ $a \in \mathbb{R}^n$

$$\text{conv } A \ni \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \quad : \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad - \text{ע"י}$$

וכי $0 \leq p \leq 1$ וכן

$$p \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + (1-p) \sum_{i=1}^m \beta_i y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n (p \alpha_i) x_i + \sum_{i=1}^m ((1-p) \beta_i) y_i$$

המשפט: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצת הנקודות A היא קמורה אם ורק אם

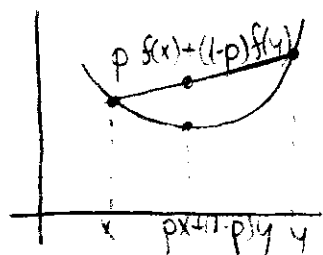
$$\sum_{i=1}^n p \alpha_i + \sum_{i=1}^m (1-p) \beta_i = p \sum_{i=1}^n \alpha_i + (1-p) \sum_{i=1}^m \beta_i =$$

$$= p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1 = 1$$

וכי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה קמורה

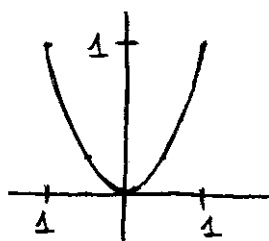
$0 \leq p \leq 1$ $x, y \in \mathbb{R}^n$ f היא פונקציה קמורה

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y)$$



המשפט: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה קמורה אם ורק אם

הוכחה:



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1) \\ x \mapsto x^2$$

$$(px + (1-p)y)^2 \leq px^2 + (1-p)y^2 \quad : \text{צ} \\ \text{אכן}$$

$$\begin{aligned} p^2 x^2 + 2p(1-p)xy + (1-p)^2 y^2 &\leq px^2 + (1-p)y^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq p(1-p)x^2 + (1-p)(1-(1-p))y^2 - 2p(1-p)xy \\ \Leftrightarrow 0 &\leq p(1-p)(x-y)^2 \end{aligned}$$

ולכן נכון!

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2) \\ x \mapsto \|x\|$$

צריך להראות ש- $\|px + (1-p)y\| \leq p\|x\| + (1-p)\|y\|$ (ישמש כאן שוויון המשולש)

$$\begin{aligned} \|px + (1-p)y\| &\leq \|px\| + \|(1-p)y\| = \\ &= p\|x\| + (1-p)\|y\| \end{aligned}$$

$\swarrow$
 $p, 1-p \geq 0$

טענה: יהי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה קמורה. יהי $c \in \mathbb{R}$. קבוצת $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ היא קמורה. הוכחה: נ"צ. מזהה צורה של קמורות ושל פונקציה קמורה. למה ש- $x, y \in A$ ויהי $0 \leq p \leq 1$. אז

$$\begin{aligned} f(px + (1-p)y) &\leq pf(x) + (1-p)f(y) \leq \\ &\leq p \cdot c + (1-p) \cdot c = c \end{aligned}$$

$$(iii) \quad px + (1-p)y \in A \quad \Leftarrow$$

מסקנה: עבור $\mathbb{R}^n$ סגור 0 הוא קבוצה קמורה.

$$\text{הוכחה: } \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\} = \text{כדור}$$

אם ראינו ש- $\|\cdot\|$ קמורה, אז מהטענה הקבוצה קמורה. (ii)

13) 11/11/09
ג' משחקים

1	0	1
0	1	1
0	0	0

שחקן 2

אחריהם זה מאידך זה המיון של שחקן 1 יתכן כי יש 3 ושל שחקן 2 כמובן יתכן כי יש 2 אבל זה לא משנה מה צורתו -

1	0	1
0	1	1

ואז יש 3 שחקן 2 לא יתכן כי יש 3 ושל שחקן 3 יש 3

1	0
0	1

שחקן 1 לא יתכן כי יש 2

וכן זה נראה כי אנחנו לא יכולים להגיע לאופטימום - $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ איננו השחקנים

הגדרה: משחק n שחקנים קבוצה נורמלית (קבוצה אסטרטגית)
הוא שליש $\Gamma = (N, (S^i)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$ כך ש-

- $N = \{1, \dots, n\}$ קבוצת השחקנים
- $S^i = \{s_1^i, \dots, s_{m_i}^i\}$ קבוצת הפעולות של שחקן i
- $u^i: S \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התועלת של שחקן i וזה utility function $S = S^1 \times \dots \times S^n$

כאן קבוצת הפעולות הנורמלית של שחקן i :
 $\Delta(S^i) = \{(p_1, \dots, p_{m_i}) : \sum_{j=1}^{m_i} p_j = 1, p_j \geq 0\}$

הגדרה: משחק סכום אפס בשני שחקנים הוא משחק שבו
 $u^1(s_1^1, s_2^2) = -u^2(s_1^1, s_2^2) \quad N = \{1, 2\}$

הערה: את u ניתן להחליף באופן כללי גם אסטרטגיה מעורבת

הגדרה: פגורה S_1^1 שולחת חול על פגורה S_2^1 אם $\exists s_1^2 \in S_2^2$ מתקיים $u^1(s_1^1, s_1^2) \geq u^1(s_2^1, s_1^2)$.

סמנה: נתון המשחק $\Gamma = (\{1,2\}, (S^1, S^2), (u^1, u^2))$ משחק סכום אפס. ונניח ש- S_1^1 שולחת חול על

הפגורה S_2^1 . נגדיר משחק חדש $\Gamma' = (\{1,2\}, (S^1 \setminus \{s_2^1\}, S^2), (u^1, u^2))$

ש אולימפיה גלומות איתוחי החזק. אזי $\Gamma - \Gamma'$ יש את אותה הליק.

הערה: זה מה שלמדיק את מה שעשנו בדומה מתחילת השיעור.

הגדרה: אסטרטגיה מעומת של שחקן שמכיל עו את זק המשחק נקרא אסטרטגיה מנוקט

המשק טענה: אסטרטגיה מנוקט של שחקן 1 במשחק Γ' היא גם אסטרטגיה מנוקט במשחק Γ .

הוכחה: נסמן v את זק המשחק Γ . קיימת אסטרטגיה מנוקט $\Delta(S^1)$ $p = (p_1, \dots, p_m)$ שמכילה תשלום $v \leq$ וקיימת אסטרטגיה מנוקט

$q = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta(S^2)$ שמכילה תשלום $v \geq$. נמצא אסטרטגיה $p' \in \Delta(S^1 \setminus \{s_2^1\})$, $q' \in \Delta(S^2)$

כך ש- p' מכילה תשלום $v \leq$ במשחק Γ' ו- q' מכילה תשלום $v \geq$ במשחק Γ' . מכך נובע ש- v הוא

זק המשחק של Γ' [אפשר להוכיח זאת בצורה ישירה ויש לה

אסטרטגיה p, q שמכילה זלמן 1 ופחית v זלמן 2 או היות v אז v הוכחה זק המשחק. אחרת מתקבל סתירה.]

אכן, ניקח $q' = q$. הלא של $p \in \Delta(S^1)$ מתקיים $u(p, q) \leq v$ אז הפרט על $p' \in \Delta(S^1 \setminus \{s_2^1\})$ מתקיים

(14)

$$q \quad \text{let } p' = (p_1 + p_2, p_3, \dots, p_{m_1}) \quad \text{then}$$

$$u(p', q) = \sum_{\substack{i=1,3,4,\dots,m_1 \\ j=1,\dots,m_2}} p'_i q_j u(s_i^1, s_j^2) \geq \sum_{i=1,\dots,m_1} p_i q_j u(s_i^1, s_j^2)$$

$$\geq \sum_{\substack{i=1,2,3,\dots,m_1 \\ j=1,\dots,m_2}} p_i q_j u(s_i^1, s_j^2) = u(p, q) \geq v$$

↓

$$p'_i = p_i$$

$p'_1 = p_1 + p_2$ is the sum of the two
 elements in the first row

Let p, q be any two elements in V that are not in Γ .
 Then p and q are not in Γ and their sum is not in Γ .
 This is a contradiction.

(15) Let p be any element in Γ and q be any element in V .

Claim: The sum of p and q is in Γ .
 Proof: Let $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ and $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.
 Then $p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$.
 Since p is in Γ , $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0$.
 Since q is in V , $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 0$.
 Therefore, $(p_1 + q_1) + (p_2 + q_2) + \dots + (p_n + q_n) = 0$.
 Hence, $p + q$ is in Γ .

0	1	2	3
1	1	3	4
2	2	1	0
3	2	1	2

1	3
2	1

Since 2 is not in Γ , the sum is not in Γ .

Since 4 is not in Γ , the sum is not in Γ .

Let p be any element in Γ .

Then $p + 3$ is not in Γ .

Since 2 is not in Γ , the sum is not in Γ .

Let p be any element in Γ .

כאן אין אסטריגיה אחר
 שיש לה אחר

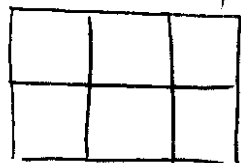
s_1	4	10	7
s_2	8	6	10
s_3	5	7	3

צדקה

אבל אפשר לשים רק $\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \geq s_3$ -
 אז אסטריגיה שנבטות "8" ציחל קמח של אסטריגיה -
 אחרת, זה אפשרי לחזק...

צדיון האצילות

את הדיון הזה יצר ראני שרצני אותה מלח 3x2



את האסטרטגיה של השחקן הראשון

היה אפל לא צלח בשיטה הרגילה.

בסוף צלח את האסטרטגיה של שחקן 2

כתבנו משוואות להתבסס על יק שתוחת התלום

שלו לא צריכה להשתנות מהאופן שבו שחקן 1 משחק.

טענה: נניח שקיימת אסטרטגיה מינמקס של שחקן 2 והיא שחקן

מהסתברות תלומת בדיוק את הפעולות מהקבוצה $A \subseteq S^2$

אז גם אסטרטגיה מינמקס של שחקן 1 תוחלת התלום שלו

בגוד S פעולה אחת ב- A הוא v וגם v ערך המלח.

פורמלית: נסמן $S^1 = \{s_1, \dots, s_k\}$ ונסמן

$S^2 \supseteq A = \{r_1, \dots, r_m\}$ נסמן $p = (p_1, \dots, p_k)$ אס

מינמקס מעורבת של שחקן 1 ונסמן ב- $q = (q_1, \dots, q_m)$ אס

מינמקס מעורבת של שחקן 2 (הכוונה היא שלא $r \in S^2 \setminus A$

אז ההסתברות שלו לבחור באסטרטגיה כלו היא 0 -! $q_i > 0$

אז את ההסתברות של אסטרטגיות A - N).

תוחלת התלום של שחקן 1 באם הוא משחק φ והשחקן

השני משחק אסטרטגיה סתומה r_j היא

$$u_j = \sum_{i=1}^k p_i u^1(s_i, r_j)$$

זה שרצנו אותו הוא $u_j = v$ אם $j \leq m$.

הוכחה: תחילה נשים לב ש- $u_j \geq v$ כי φ אסטרטגיה מינמקס,

היא לא חסרה מה שחקן 2 עושה, שחקן 1 מקבל לפחות v .

נניח בשלילה שקיים $u_j > v$. בה"כ $u_1 > v$ (אחת נשלח

את השמות). אז נסתם על תוחלת התלום של φ בגוד v :

$$u = q_1 u_1 + q_2 u_2 + \dots + q_m u_m$$

$$v \geq q_1 u_1 + \dots + q_m u_m$$

כי למקרה 2, הפעולה q נעזקת בפעולה q אחרת v . אזכור, אלה שהוכחנו קודם,

$$q_1 u_1 + \dots + q_m u_m \geq q_1 u_1 + v(q_2 + \dots + q_m) = q_1 u_1 + v(1 - q_1)$$

וכנראה נראה של v - u_1 זהו $v \neq u_1$. אז

$$q_1 u_1 + \dots + q_m u_m \geq v$$

אם לא קיים j עבורו $u_j < v$. (iii)

צורה:

	l	m	r
T	1	0	0
M	0	2	0
B	0	0	3

אזכור: T ואת B האסטרטגיות
המינימקס של השחקנים.

פתרון: תחילה נראה של אסטרטגיה מינימקס של שחקן 1

אפשרת את 3 פעולות T, M, B בהסתברות חיובית.

נשים לב: $v = 0$ כי $v > 0$ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ שחקן 1

מבטא את צמד תשלום חיובי אחד.

נניח בשלילה ש- T ושחקן 1 בהסתברות 0. אז כנראה

הפעולה הטובה ל תחילת התשלום של שחקן 1 היא

0 שלה פחות $v-v$. אז כנראה אסטרטגיה מינימקס. באותו

אופן, מראים ש- M, B ושחקן 1 בהסתברות חיובית.

לכן שחקן 2, נניח שאסטרטגיה מינימקס שלו היא $(q, 1-q, 0)$.

אם עיקרון האיזון,

$$(T) \quad v = p$$

$$(M) \quad v = 2q$$

$$(B) \quad v = 1 - p - q$$

$$\left. \begin{array}{l} p = 2q \\ p = 1 - p - q \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p = \frac{1}{5} \\ q = \frac{2}{5} \\ v = \frac{1}{5} \end{array}$$

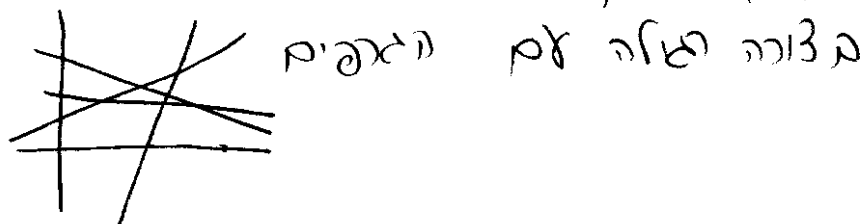
זאת האסטרטגיה האיזונית (היחידה) של שחקן 2.

16) באופן צורה מוצאים את הסטטיסטיקה האופטימלית הוויזואלית של שחקן 1.

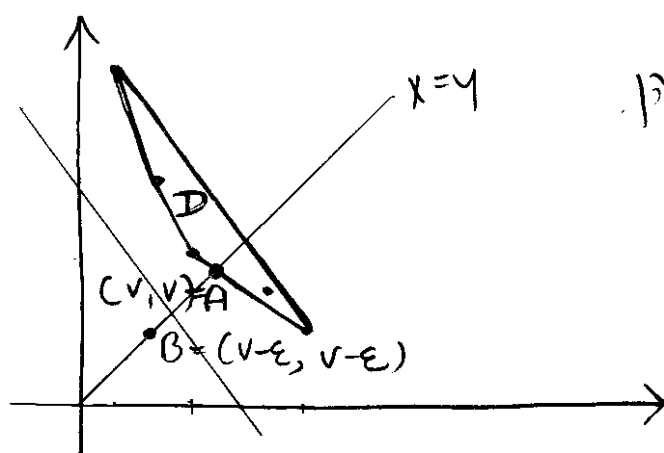
T	6	5	3	2	1
B	2	3	4	6	9

משחקים $2 \times k$

הסטטיסטיקה של שחקן 1 היא מערכה (q, p) אק אפס למצב אחר



מה עם שחקן 2? אפשר לנסות להפעיל שינוי שלטה אולם את אחי אנחנו מנסים מלפני (אם משתמשים בשליטה חלפה) נצטרך את הנקודה $(6, 2), (5, 3), (3, 4), (2, 6), (1, 9)$ במישור.



ונתמך בקמור שלפן.

ב סטטיסטיקה של שחקן 2 מצדד נקודה מתוך הקמור.

ונקודה בקמור מצדד בעולה של שחקן 2.

נבדוק את האותיות $y=x$ ונסמן ב-A את הנקודה הראשונה

האותיות שמתחת את הקמור נסמן $A=(v, v)$ ונסמן

ש- v הוא ערך המשחק. נזכיר שלשחקן 2 יהיה אופטימלית v .

$A \in D \iff \exists$ קיים צירוף קמור

$$q_1(6, 2) + q_2(5, 3) + q_3(3, 4) + q_4(2, 6) + q_5(1, 9) = (v, v)$$

אם הפעולה המצומת $(q_1, \dots, q_5)$ אופטימלית את v .

אם ערך המשחק הוא v היותר v , ליתר בטחון שערך

הוא $v - \epsilon$ עבור $\epsilon < 0$. נסתב הנקודה

א' מלפני ההפרדה קיים $B = (v - \epsilon, v - \epsilon) \in \mathbb{R}^2$ (כך תמיד) $(p, 1-p)$ ורק ϵ

$$\langle (p, 1-p), (v - \epsilon, v - \epsilon) \rangle < \inf_{d \in D} \langle (p, 1-p), d \rangle$$

נשים לב $\langle (p, 1-p), d \rangle$ הוא המכפלה

של $(p, 1-p)$ ו- d . אם נסתב $(p, 1-p)$ ונסתב d אז המכפלה של $(p, 1-p)$ ו- d היא $\min_{d \in D} \langle (p, 1-p), d \rangle$.
אם $(p, 1-p)$ נמצא בתוך D אז המכפלה של $(p, 1-p)$ ו- d היא $\min_{d \in D} \langle (p, 1-p), d \rangle$.

אם $(p, 1-p)$ נמצא מחוץ ל- D אז המכפלה של $(p, 1-p)$ ו- d היא $\min_{d \in D} \langle (p, 1-p), d \rangle$.

☺

25/11/09
ת' שלמים

נקודות שיווי משקל

התוצאה: (S^1, S^2, u^1, u^2) (best reply)
התאמת תגובה אופטימלית
האופן הבא: $br^1: S^2 \rightarrow S^1$ (הסימון $f: X \rightarrow Y$)
פירושו ל- $(f: X \rightarrow Z^Y$

$$br^1(s_2) = \{s^* \in S^1 : u^1(s^*, s_2) \geq u^1(s_1, s_2) \forall s_1 \in S^1\}$$

האופן דומה, עבור $br^2: S^1 \rightarrow S^2$

$$br^2(s_1) = \{s^* \in S^2 : u^2(s_1, s^*) \geq u^2(s_1, s_2) \forall s_2 \in S^2\}$$

* כן אנחנו מצהירים על משקל בלי, לא מוכרח סכום אפס!

	l	m	r
T	1, 2	0, 1	2, 2
M	0, 0	1, 1	2, 0
B	0, 2	0, 0	2, 1

צילמה

$$br^1: \begin{aligned} l &\rightarrow \{T\} \\ m &\rightarrow \{M\} \\ r &\rightarrow \{T, M, B\} \end{aligned}$$

$$br^2: \begin{aligned} T &\rightarrow \{l, r\} \\ M &\rightarrow \{m\} \\ B &\rightarrow \{l\} \end{aligned}$$

התוצאה: $(s_1, s_2) \in S = S^1 \times S^2$ תיקרא נקודת שיווי משקל טהורה
אם $s_1 \in br^1(s_2)$ ו- $s_2 \in br^2(s_1)$.

בדאימה שלנו (T, l) נקודת שיווי משקל טהורה.
והשלים של משקל 1 לא יצדק אם הוא משנה שורה
והתשלים של משקל 2 לא יצדק אם הוא משנה סורה.
בדאימה הזו יש עוד שתי נקודות שיווי משקל טהורות -
 (M, m) ו- (T, r) .

$$S^1 = S^2 = [0,1] \quad \text{זמן:}$$

$$u^1(x,y) = 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$u^2(x,y) = -4xy + 2x + y$$

מכאן אנו יכולים לקטוע במלך. עכשיו ראינו כי
 יש שני משחקים שונים אבל זה משחק סופי, אם
 נחלק את המרחב לארבעה חלקים לפי המרחק הזה.
 עבור משחק 1 אנחנו רוצים לחשב את

$$\arg \max_{x \in [0,1]} \min_y u^1(x,y) =$$

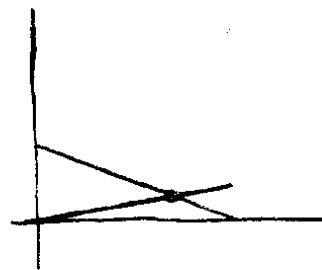
$$= \arg \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} (3xy - 2x - 2y + 2) =$$

$$= \arg \max_{x \in [0,1]} \min_{y \in [0,1]} \underbrace{y(3x-2) + 2-2x} =$$

פונקציה ליניארית ב- y .
 אם $3x-2 > 0$ המינימום ב- $y=0$ (כי $2-2x > 0$)
 אם $3x-2 < 0$ המינימום ב- $y=1$ (כי $x < \frac{2}{3}$)

$$= \arg \max_{x \in [0,1]} \min (2-2x, x) = \frac{2}{3}$$

ולכן המטת תשלום $\frac{2}{3}$



מאופן צורה עבור משחק 2:

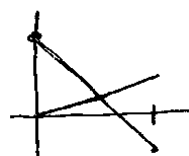
$$\arg \max_y \min_x (-4xy + 2x + y) =$$

$$= \arg \max_y \min_x x(2-4y) + y =$$

$$= \arg \max_y \min (y, 2-3y) = \frac{1}{2}$$

כאן

ולכן המטת תשלום $\frac{1}{2}$



נמצא נקודות שיו משקל סתומה במלבן.

נמצא את פונקציה היתאבה האופטימלית עבור שני המלבנים.

עבור מלבן 1, אם מלבן 2 מלבן 1 אז

$$u^1(x,y) = x(3y-2) - 2y + 2$$

אם $3y-2 > 0$ אז ה- u^1 היחיד היא $x=1$ כי היא

הוצה אלקטם את המינימום שלה. אם $-2y+2$ היא קבועה במלבן.

אם $3y-2 < 0$ אז ה- u^1 היחיד היא $x=0$

אם $3y-2 = 0$ אז $x \in [0,1]$ היא כל (המחירה)

שלו המלבן לא משפחה בשום צורה).

מאופן צורה, נחשב עבור מלבן 2. אם מלבן 1 מלבן 2, אז

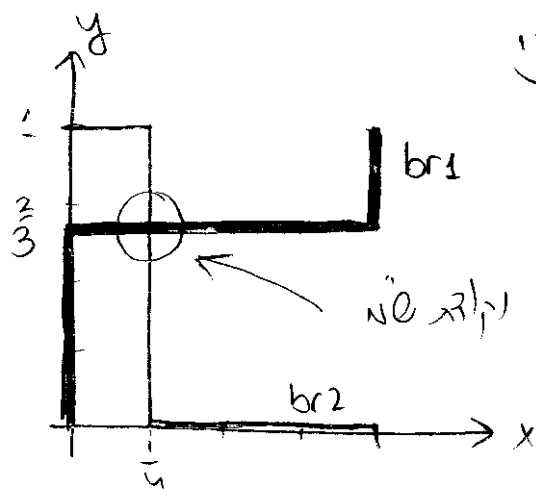
$$u^2(x,y) = y(1-4x) + 2x$$

אם $1-4x > 0$ אז ה- u^2 היחיד היא $y=1$

אם $1-4x < 0$ אז ה- u^2 היחיד היא $y=0$

אם $1-4x = 0$ אז $x = \frac{1}{4}$ היא כל.

נציג את זה שקיבלנו



סדרה

ישנה נקודת שני יחידה (היא) $y = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{4}$

התשלומים הנקודת זו הם $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{2}{3}$

המקרה זה זה וצאנו כי המקסימום אצל סדרה שטוחה שני

התשלומים הם רפחית המקסימום ויש צויאמאלה שהם

גדולים ממנו.

1, -1	0, 2
0, 1	2, 0

צומח:

נמצא את צמיח הפזורה ומעורבותה להאחר
אופסולוג ביות שלפיה אלה (זה) מעלה נק'
שיני מלפני אחרות).

אם אלה בקצות שאן פה נק' של טהורה
(מט) אלה יש שחקן שצדף עו עמור אטלוגיה).

ולא שחקן 1 מלפני $(x, 1-x)$

ושחקן 2 מלפני $(y, 1-y)$

אם תחילתה התשלום

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= xy + 2(1-x)(1-y) = \\ &= xy + 2 + 2xy - 2x - 2y = \\ &= 3xy - 2x - 2y + 2 \end{aligned}$$

$$u^2(x, y) = -4x + 2x + y$$

ואם לה נבר פתרון!

האוסטרלית היתדות שמקיימות באר הן

1 מלפני $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

2 מלפני $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

19) 2/12/09
ת' למתקנים

בהינתן משחק $(N, (S^i)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$

אט' מעורבות של משחק i היא $x^i \in \Delta(S^i)$

הוא $\Delta(S^i) = \{ (x^i_1, \dots, x^i_m) : x^i_j \geq 0, \sum x^i_j = 1 \}$

הגדרה: נקראת x^i נק' של אט' מעורבות

$y^i \in \Delta(S^i)$ כל $u^i(x^i, x^{-i}) \geq u^i(y^i, x^{-i})$

האט' של מסד המשחקים
 $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$

בשורה הקודם ראינו שיש אפשרות נק' של (אט' מעורבות במשחק בין משחקים השלם למק' יש של פערות. הבחנה גם השלם שראינו היא שאנחנו אומרים אותו באופן פשוט יותר למשחקים או יותר פערות.

דקרון האדישנות: יהי $(x^1, \dots, x^n)$ שלם (אט' נק')

ל- $x^i_k, x^i_m > 0$, אז מתקיים $u^i(S^i_k, x^{-i}) = u^i(S^i_m, x^{-i})$

הוכחה: אם יש אי שוויון אז עדיף היה לחלק את ההסתברות ל- שנותנת חשלים גבוה יותר.

דוגמה: "משלש יוצא אני"

3 משחקים בוחנים אכן או לא. המשחק שלבנו שונה מהאחרים מתקדם שקדם אליו. אם כולם הראו אותו צבע (תיקו) אז אתם לא משלם אחר.

צביע את המשחק בצורה אסטרטגית

		למור	
לכן	לכן	0,0,0	-1,2,-1
	למור	2,-1,-1	-1,-1,2
		לכן	

		למור	
לכן	לכן	-1,-1,2	2,-1,-1
	למור	-1,2,-1	0,0,0

למור (הבחנה של משחק 3)

מחצא נקאצות ש"ה סבוכות במלך
בפיקה פשוטה ארבע של נקאצות פירט - (אבן, אבן, אבן)
, (אבן, אבן, אבן) הן נקאצות ש"ה סבוכות.

מאצאן/קוצר ש'ה למהו ב' אולם נישט גענוג
ממש. דאס ווייט פאר אים גוט - יין

$$\begin{array}{lll} 1 > p > 0 & (p, 1-p) & 1 \text{ / / } \text{pre} \\ 1 > q > 0 & (q, 1-q) & 2 \text{ / / } \text{pre} \\ 1 > t > 0 & (t, 1-t) & 3 \text{ / / } \text{pre} \end{array}$$

נפשו איז זיך האבן געוואלט און זיך צו געבן. (האט אים
זיין אייגענעם אומגעזאגטעם געזאגט)

אם למקן 3 ימים, אמן תחתית התשלום לא תהיה

$$0 \cdot pq + (-1) \cdot p(1-q) + (-1)(1-p)q + 2(1-p)(1-q)$$

101 מ' הוא י' שמך לפני תולדות התלואים תהיה

$$2pq - p(1-q) - (1-p)q$$

אפי עקרון האדישית שלי הביאיים האלה שוויץ:

$$-p(1-q) - q(1-p) + 2(1-p)(1-q) = 2pq - p(1-q) - (1-p)q$$

$$\Rightarrow (1-p)(1-q) = pq$$

$$\Rightarrow \frac{p}{1-p} = \frac{1-q}{q} \quad \text{I}$$

אשקאי סימטריה גורם שם לשליליות (פזון) את עקרונות

ਫਰਮਾ 2 ਜਿਲੇ ਦੇ ਸ਼ਹਿਰਾਂ

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1-t}{t} \quad \text{II}$$

1 April 1961

$$\frac{q}{1-q} = \frac{1-t}{t} \quad \text{III}$$

דברים 3 משמאל הימין (עלמית, אהל אפרח)

אותה ז' סיון

(20)

$$x = \frac{p}{1-p}, \quad y = \frac{q}{1-q}, \quad z = \frac{t}{1-t}$$

$$x=y=z=\pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ y = \frac{1}{z} \\ z = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \Leftarrow$$

אילו הכנסו את המסלולים וסתמנו אותם
שסתמו אותנו וגם $x=y=z=1$

$$\Leftrightarrow t=q=p=\frac{1}{2}$$

אם נק' שני מסלולים של 6 השתקפות היא יחידה
והיא מתקבלת ב- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

נמצאוק' שני מסלולים של אחד השתקפות השני והשניים האחרים
אחרים. אחד.

נניח למשל שלשון 3 מסלולים (מהסתמות 1) את
המסלול מתאר 'המסלול' השתקפות וזה לא אפס
להפחית את עקרון הצביעות על מסלול 1:

$$\underbrace{-1(1-q)}_{\text{תוחלת מסלול אחד}} = \underbrace{2q - (1-q)}_{\text{תוחלת מסלול אחד}}$$

$\Leftrightarrow q=0$ וזו סתירה אכן שלשון 2 מסלולים אחד.
אם במקרה זה אין קלילות שני, שני יש סימטריה אחת
בהסתמות וסתמנו השתקפות.

אם כן, נחשוב שני מסלולים שלשון אחד
ושלשון שני מסלולים אחד. נניח למשל שלשון 1 ו-2
אם שני מסלולים אכן שלשון 3 בודא
לא אז יש להחזיר בין אכן (סוגי שני או שני).
אם אין שני. האותי אכן אם שני מסלולים
בהם שני מסלולים, למשל שלשון 1 מסלול אחד ושלשון 2 מסלול

שניר אין שלשן 3 בויזאלי אדויש (בס מקרה וואס
 אפסצ). נאכן שלשן $(t, 1-t)$, $(0,1)$, $(1,0)$ פאס
 נאך שני עכור $0 < t < 1$. ראוי שלשן 3 אין
 סיסטעם צאגט. דייק צאגט צאגט שלשן 1 שלשן 2.
 תוצאה תפליש של שלשן 1 אסמא שלשן אסן פאס $(1-t) + t -$
 ואס פאס יססה שלשן תפליש תפליש פאס $t -$
 מאכט ש- $t < 1$ לא צאגט אסמא.
 אשיקנא... סימטריה אונדו דער נאכאנאם שלשן 2.
 ספאט צאגט אינאסל נאכדור שני באשק.

21) 9/12/09
ג' ו' ל' ח' ס'

סדרון של 4 התלבים היא עכס
הפועל היא בלעל וטסיר

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline 1,1 & 4,0 \\ \hline 0,4 & 3,3 \\ \hline \end{array}$$

(1,1) - (לעלעל)
כאן יש לעלעל
ערסו (תסוק) סלסל

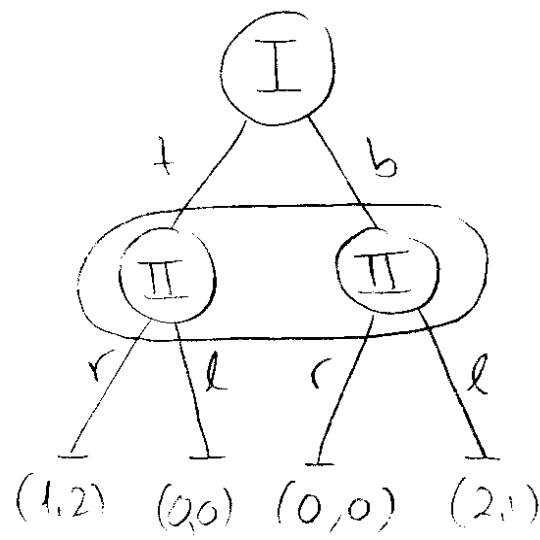
$$G' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1,1 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 3,3 \\ \hline \end{array}$$

ערסו (3,3) היא לעלעל וטסיר בו ותר ערק
נבוק לעלעל - G

ל

לעלעל בלעל בלעל

לעלעל



נבוק וקלוקל לעלעל (ערסו) בלעל בלעל

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & r & l \\ \hline t & 1,2 & 0,0 \\ \hline b & 0,0 & 2,1 \\ \hline \end{array}$$

ובמשחק הזה אנחנו יוצרים מציגים שם.
 עבור להטורות הן (t, r) ו- (b, l)
 הן זריאות שאין בהן שום צד אסל אחת סקורה
 ואחת מציגות.

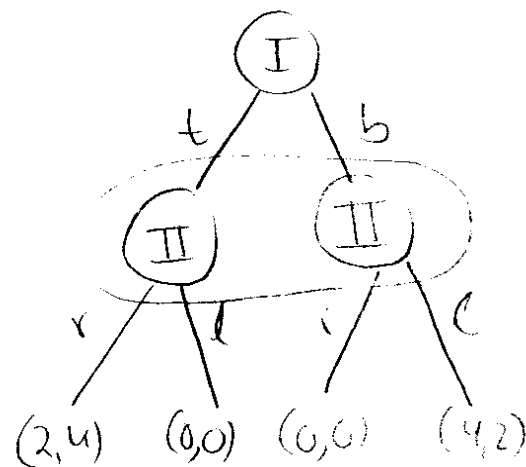
$\Leftarrow$ נותר רק לחשב את שם מציגות וזה

$$q = \frac{2}{3} \Leftarrow q = 2(1-q)$$

$$p = \frac{1}{3} \Leftarrow 2p = 1-p$$

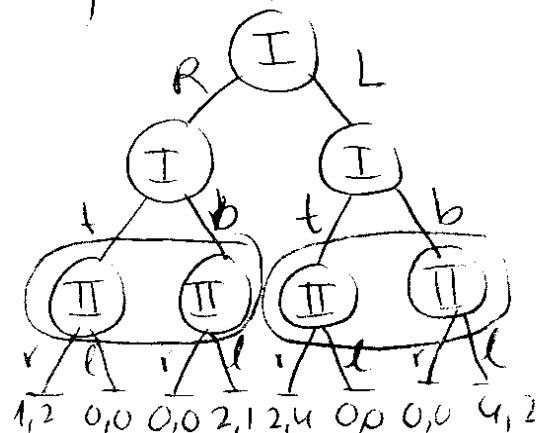
$\Leftarrow$ שם המציג היחיד היא $((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$
 (הערה) שמציג אסל שמציגת הם ושני השחקנים
 הצדדים הן, אזא שלו אכן, שם אין אסל ואין
 אסלות-אם נהיה האצטלה).

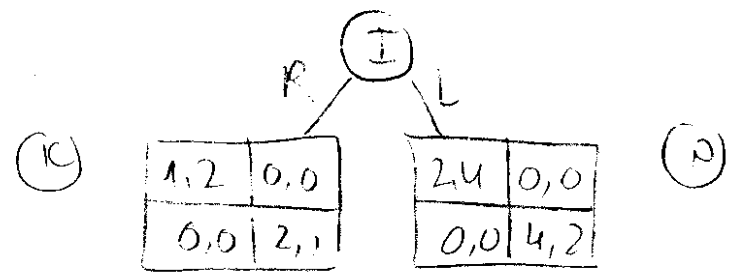
ציור



זה מאוץ ציור המשחק הקצום. וק' שם הן
 (t, r) , (b, l) , $((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$

ציור: אצל האחד את שני השחקנים





האסטרטגיות של שני השחקנים

$$\left(\begin{matrix} R \\ L \end{matrix}, \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix}, \begin{matrix} r \\ l \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} t \\ b \end{matrix}, \begin{matrix} r \\ l \end{matrix} \right) \right)$$

האסטרטגיה של II
האסטרטגיה של I
האסטרטגיה של II

אם השחקן הראשון בוחר R, אז השחקן השני בוחר t או b

$$(L, (t, r), (t, r))$$

אם השחקן הראשון בוחר L, אז השחקן השני בוחר t או r

$$(R, (b, l), ((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})))$$

אם השחקן הראשון בוחר R, אז השחקן השני בוחר t או b. אם השחקן הראשון בוחר L, אז השחקן השני בוחר t או r. (האסטרטגיה של II היא תערובת של t ו-r)

$$(1, 2) \leftarrow (t, r)$$

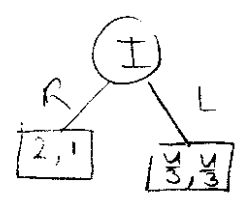
האסטרטגיה של I

$$(2, 1) \leftarrow (b, l)$$

$$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \leftarrow ((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$$

האסטרטגיה של I היא תערובת של R ו-L

אם השחקן הראשון בוחר R, אז השחקן השני בוחר t או b. אם השחקן הראשון בוחר L, אז השחקן השני בוחר t או r.



$$(L, (\frac{2}{3}, r), (t, r))$$

האסטרטגיה של II

		L		R	
		l r		l r	
T	t	0, 2	2, 0	3, -1	2, 0
	b	2, 0	0, 2	2, 2	1, 3
B	t	0, 1	4, -1	1, 1	0, 0
	b	4, -1	0, 1	0, 0	-1, -1

ציון 12

שלב 1: משחקים בוחנים $\{T, B\}$ ו- $\{L, R\}$

אחרים משחקים איש מטריונה נכתבה.
שלב 2: משחקים בוחנים $\{t, b\}$ ו- $\{l, r\}$

סעיף: אמרתי יש לך יתרון.

נמצאנו לך עם תת משחק. ונקמס נק' לך יתרון עם אחד מהם.

	L	R
T	1, 1	2, 0
B	2, 0	1, 1

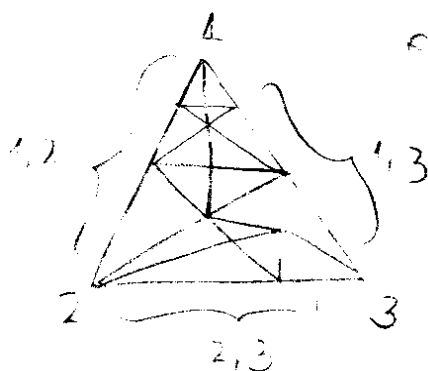
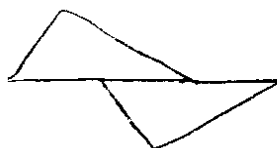
אמרתי לך יש לך יתרון. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

אז האוסף הנצא יחד עם האס' הסדורה שמיאיל שלם
החת משחקים. קו זה שבתנן שלם אכן שלם.
נדיהוניה שלום היחיד

23) 6/12/09
 ת' מלפנים

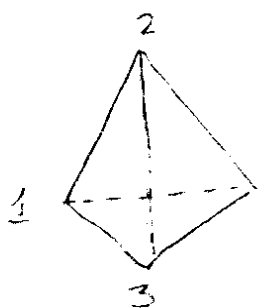
המרחב $\mathbb{R}^2$ ספיר - א

על שטח משולש יחד מחלק, אמשלים קטנים רק שחוקק
 ל של משולשים הוא צא, סימני אין אלה דלדל



על קבוצה מסוימת

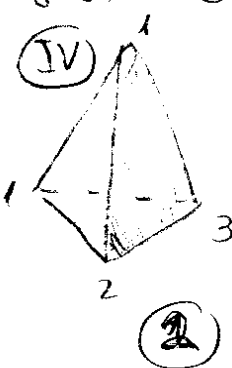
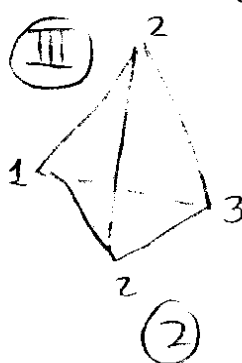
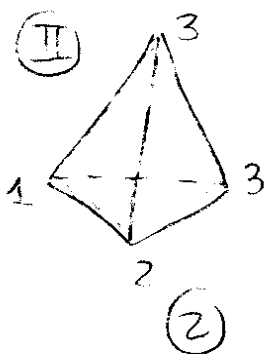
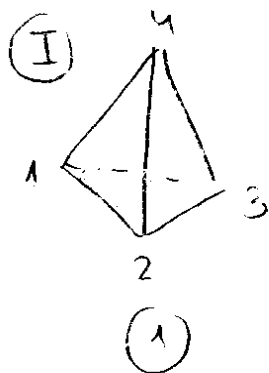
אז קים מספר אינפיניטי של משולשים שקבוצה 1,2,3
 (הפרט קים אפסית אחד דלדל)



המרחב $\mathbb{R}^3$ ספיר - א

יש פירמידה גדולה שמחלקת אפסית
 אז קים מספר אינפיניטי של טטראדרים
 שמחוברים ה - 1,2,3,4

הנחת: נספר משולשים 1,2,3 בלשון דלדל
 יש ארבע אפסיות טטראדרים שיש בהן דלדל



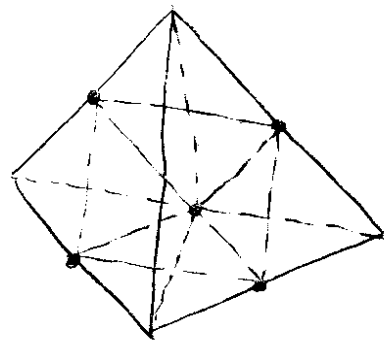
אם נספר המשולשים (1,2,3) הרי

$$2 \cdot (I) + 2 \cdot (II) + 2 \cdot (III) + 1 \cdot (IV) + \left(\begin{array}{l} \text{מספר המשולשים ש} \\ \text{השפה 1,2,3} \end{array} \right)$$

לפי סופר
 שמשולשים
 פשוטים

$\Leftarrow$ מספר המשולשים על השפה $(1,2,3) + (IV)$
 הוא מספר ציג. אם $\mathcal{H}$ הוא ספר $\mathbb{R}^2$
 יש מספר ציג של משולשים על השפה $(1,2,3)$ וזה
 (IV) בהכרח אצ"ל.

הערה: אי אפשר לחלק סטראדר כמו לחלקו
 את המשולש. אם $\mathcal{H}$ (חזה $\mathcal{H}$) פאה $\mathcal{H}$ (חזה $\mathcal{H}$)
 (קדם $\mathcal{H}$ $\mathcal{H}$ קטנים)



קטן (אז), אם זה לא
 יוצא...

ב זה שאנחנו עושים בהכרח זה חלקה סטראדר
 כן זה לא א"כ $\mathcal{H}$ זה חלק סטראדר (סטראדרים
 קטנים).

בהצבה $\mathcal{H}$ וקטור קואלקס סטראדרים אסטרוט =
 אם $E \in \mathcal{H}$ אם $F \subseteq E$ אז $F \in \mathcal{H}$.
 זהו $\mathcal{H}$ חזורים

$$S(\mathcal{H}) = \{ E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_k : E_1, \dots, E_k \in \mathcal{H} \}$$
 (שים לב אם קטנו את $\mathcal{H}$ אז $S(\mathcal{H})$ זה חזורים
 בקורסיה את $\mathcal{H}_{n+1} = S(\mathcal{H}_n)$.

זאת ב זה זה אצ"ל $\mathbb{R}^l$ $\mathcal{H}$:

$$\delta_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$\delta_{n+1}: \mathcal{H}_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$$

(אז בקורסיה את $\mathcal{H}$)

$$\delta_{n+1}(A) = \frac{\sum_{a \in A} \delta(a)}{|A|}$$
 (חזורים) (חזורים)

(24)

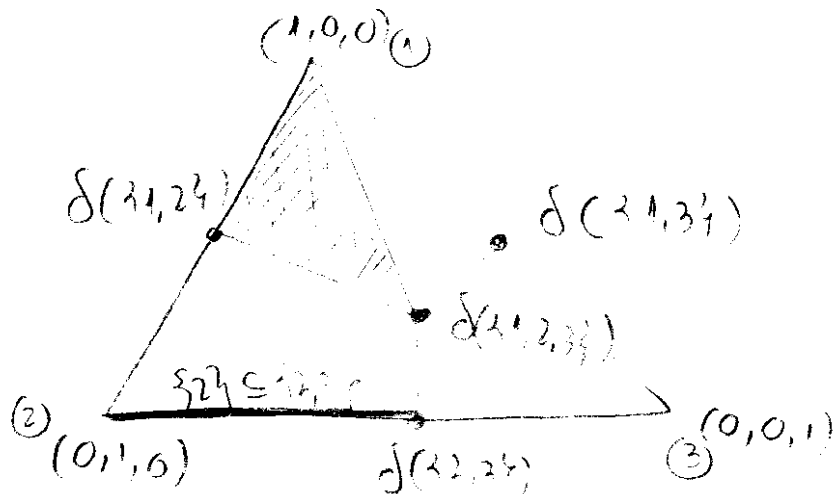
$$\mathcal{K}_2 = 2^N \setminus \{\emptyset\} \quad N = \{1, 2, 3\}$$

הקטגוריה

$$\delta_0(1) = (1, 0, 0)$$

$$\delta_0(2) = (0, 1, 0)$$

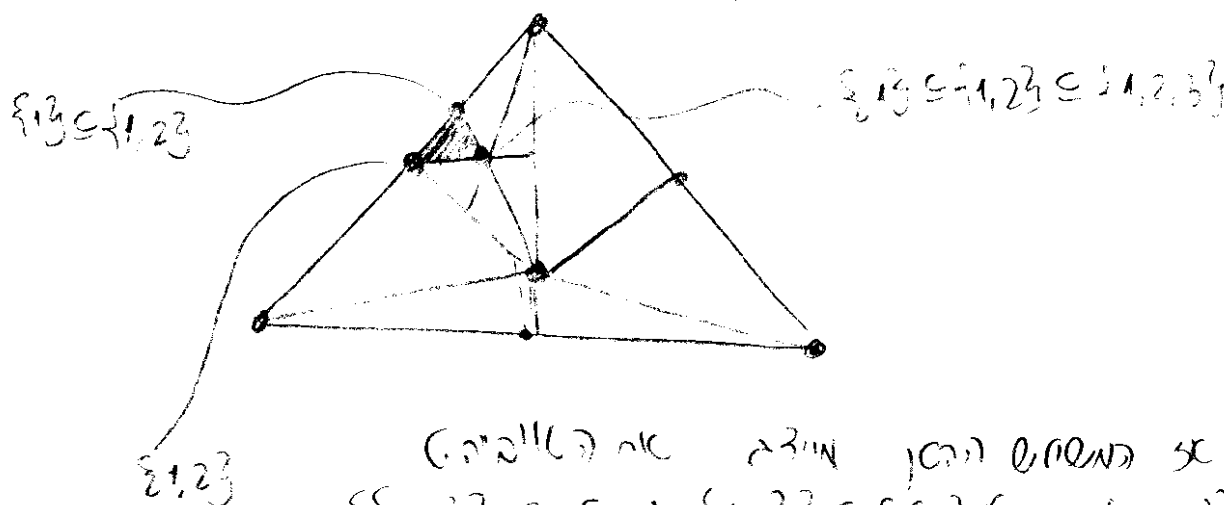
$$\delta_0(3) = (0, 0, 1)$$



כלומר: δ הוא מרחב $\mathcal{K}_2 \ni \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$

המרחב

הוא המרחב המשותף של הקטגוריות



כלומר: δ הוא מרחב $\mathcal{K}_3 \ni \{\{1,2\}\} \subseteq \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

כלומר: δ הוא מרחב $\mathcal{K}_2 \ni \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$

25) 23.12.09
ת' הלשק

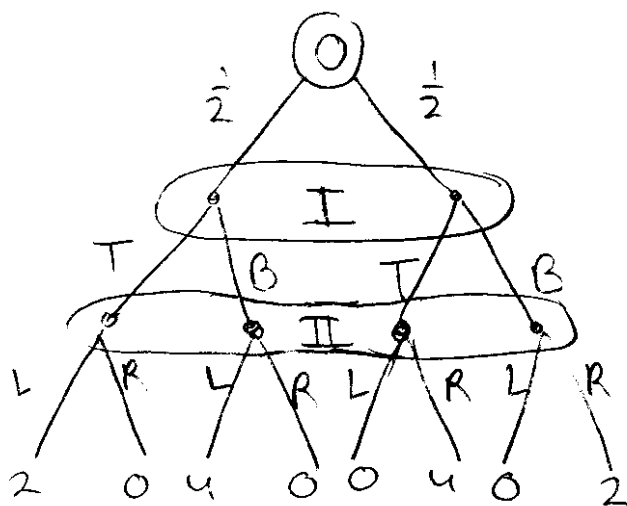
נתון: שני אנשים: א' ו-ב' (הם 0) שניהם יכולים להשקיע
השקעה: 1

(השקעה)
(0 שנים)

	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	
	L	R		L	R
T	2	0	T	0	4
B	4	0	B	0	2

נמצא: לא שיתוף של השקעה א' ו-ב' (הם 0) שניהם יכולים להשקיע
א' ו-ב'.

נציג את השקעה ב-0 (הם 0) שניהם יכולים להשקיע
א' ו-ב' (הם 0) שניהם יכולים להשקיע
השקעה ב-0 (הם 0) שניהם יכולים להשקיע



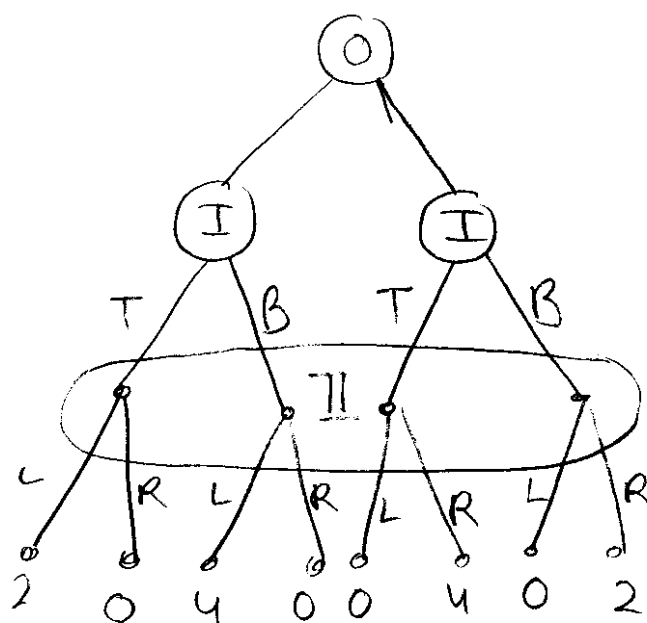
נציג את השקעה ב-0 (הם 0) שניהם יכולים להשקיע

שני אנשים
השקעה ב-0 (הם 0) שניהם יכולים להשקיע

	L	R
T	1	2
B	2	1

שני אנשים יכולים להשקיע (הם 0) שניהם יכולים להשקיע
א' ו-ב' (הם 0) שניהם יכולים להשקיע
השקעה ב-0 (הם 0) שניהם יכולים להשקיע

מה קורה אם למקן 1 יוצא מה הטבע סתם ולמקן 2 לא 2
 שם, נצטרך רצות חסכה.



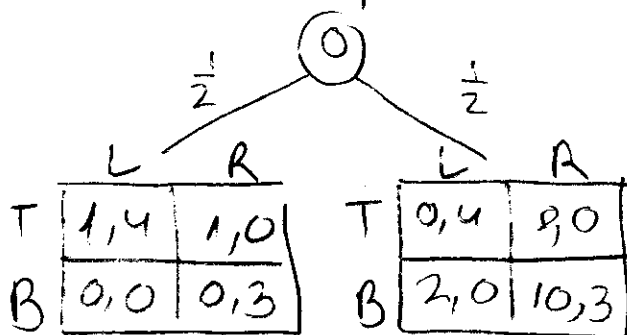
↓

	L	R
TT	1	2
TB	1	1
BT	2	2
BB	2	1

כאן התשלום סתם של 2. וזה הגיוני.
 האם למקן 1 היה יוצא נוסף (לא פעולת הטבע)
 ונא פצוץ אחרות את התשלום שלו.
 האופן שלו, אפילו יצאן אחר מלקים סתם אפס -
 כל שכמות האינפורמציה של למקן אחת גדולה יותר
 התשלום שלו יתן אחר. זה נוסף מזה שלם
 יש יותר יציבה אם למקן יוצאן את מספר האסל'
 שלו. סומך בטבעה יצאן יותר שורה (או עמודות)
 אם האסטרטגיות הקודמות עדיין שלם. היתר שיתשלם
 הוא ערך minmax הנוספת אפס' לא יתנה אחרת
 אחר.

(26)

אם המסלול הוא לא סביר אפס זה לא סביר נכון.
אם, נסתם במסלול



• מה קורה אם שני המסלולים לא ידועים מהסבב סתם?
אם מסלולים את ממוצע המסלולים

	L	R
T	$\frac{1}{2}, 4$	$4\frac{1}{2}, 0$
B	1, 0	5, 3

מסלולי אסטרטגיות פוזיטיוניות של המסלול ק' שלם יחידה (B, R)
והתשלומים הם (5, 3)

• מה קורה אם מסלול 1 יוצא מהפסבס סתם?
מסלול 1 סתם סתם - T סתם סתם סתם

תכין
- B אם תסבב סתם "מין"
כא אלה האסטרטגיות פוזיטיוניות בטאטיות. סתם מסלול פוזיטיוניות
זה סתם לא קשה למסלול 2.

אכן סתם שלם מסלול 2 סתם אסטרטגיות - $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
של מסלול 1 (כא סתם) $\frac{1}{2}$ סתם סתם מסלול T
והסבב $\frac{1}{2}$ סתם סתם מסלול B וסבב מסלול 2 סתם
סבב סתם האסטרטגיה של L סתם $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

אם מסלול של מסלול 2:

	L	R
$\frac{1}{2}$	4	0
$\frac{1}{2}$	0	3

תוחלת L - סתם 2
תוחלת R - סתם $1\frac{1}{2}$

← מסלול 2 מסלול סתם סתם אסטרטגיה L.

$\Leftarrow$ נק' של ממשל, (L, TB) נותן יחיד!
 ונת שלום מתקנה זה כול

$$\frac{(1,4) + (2,0)}{2} = (1\frac{1}{2}, 2)$$

אז כאן, מעצם זה של אחד השחקנים יש יותר
 אינפורמציה, שני השחקנים נשבעו!

אנקדוטה: אולימן שהיה ידען אסט' בתקופת
 המלחמה הקרה בין ארה"ב לברית המועצות שממשל
 ומתן לגבי נותחמלות האמניקאים היו שולחים
 נציג שלא ידע כמה עצבות אטום יש להם -
 כי הידיעה הזאת אולי הייתה שאלת מהם.
 תימוש זה בולל לא משחק סכום אפס...

24) 30.12.09
תאריך

אחד הדברים שלא אהבתי בחשבון זה היום הוא
לפעמים ההחלטה היום תלמד על המסקנה של
אחר.

אמנם, יש כמה שרירותיות בהחלטות מה אהבתי בשורה
אחרת. באותו יום זה בוודאי זהבתי כסף ואכילה
הם בהכרח אדם למחנה או לא ישתה.

אזכור אהבתי סטטיסטיקה

זה תחום שאני רוצה להבין יותר מהמסקנות.
אנחנו נקרא לעצמנו.

דוגמה 1: יש לשקלל את שני הסטטיסטיים.

$$\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline B & 1 \end{array} \quad I$$

אם המסקנה אכן היא אחת מהם אז הסטטיסטי
האופטימלי הוא B ונתונים הם 1.

דוגמה נניח שיש עוד מסקנה

$$\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline B & 3 \end{array} \quad II$$

אנחנו רוצים להתחבר את T עם A ואת B עם A
 $\frac{1}{2}$ הוא מסקנה אם A I וסתם $\frac{1}{2}$ הוא מסקנה II
אם הוא סתם B אז אמת סתם $\frac{3}{4}$ הוא
לפי I, סתם $\frac{1}{16}$ הוא לפי II ואמת
המסקנה "אחר" אנחנו מוצאים זאת רק:

$$\begin{array}{c|c} T & 0 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \hline B & 1 \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{16} \right) \end{array} \quad I$$

$$\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline B & 3 \end{array} \quad II$$

אם המלך משחק שני שלבים אז תוחלת התשלום היא:

$$T: 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

$$B: 1 + \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 = 1\frac{15}{16}$$

אז האן צריך לבחור T.

דעו ונייה שיש 2 משחקי 2 אנשים:

$$T \begin{array}{|c|} \hline 0 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ \hline 1 \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) \\ \hline \end{array} \quad I \qquad T \begin{array}{|c|} \hline 0 \left(\frac{3}{4}, 0 \right) \\ \hline 3 \left(\frac{1}{4}, 0 \right) \\ \hline \end{array} \quad II$$

אם אדם המלך משחק בשני שלבים
אם אדם בתור השני המשחק I תוחלת התשלום שלו היא 2 ואם בתור השני המשחק II אז תוחלת התשלום היא:

$$T: 0 + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$B: 3 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 3\frac{1}{4}$$

אז האן צריך לבחור B שנותן $3\frac{1}{4}$.
ודעו אפוא שהאדם הראשון לא יזלוז
ביום הראשון:

$$T: 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$$

$$B: 1 + \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3\frac{1}{4}$$

אפוא רצות מילום וראוה שאת המשחק
שונה שלבים אז נבחר או לבחור B.

באופן כללי, נסמן ב- V_n^I, V_n^{II} את הערך המקסימלי של משחק ינוו להכניסו במשחק n

לבד ונקח את הנוסחה הרקורסיבית והנכנס:

$$V_{n+1}^I = \max \left\{ \underbrace{0 + \frac{1}{2} V_n^I + \frac{1}{2} V_n^{II}}_{\text{אם המלך משחק T}}, \underbrace{1 + \frac{3}{4} V_n^I + \frac{1}{4} V_n^{II}}_{\text{אם המלך משחק B}} \right\}$$

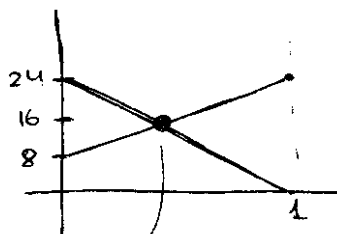
$$V_{n+1}^{II} = \frac{n}{n+1}$$

28

תנאי ההתניה הם $V_1^I = 1$, $V_1^{II} = 3$ ורק אחד האמצעים יהיה זמין במסגרת המשחק.

בדומה 2 נניח שיש לנו משחק + משחק

		L	R
P	T	0	24
1-P	B	16	8



$V_1^I = 12$ כאן ערך המשחק הוא
 $1-p = \frac{3}{4}$, $p = \frac{1}{4}$!

ערש'ו נניח שזה משחק בשני שלבים

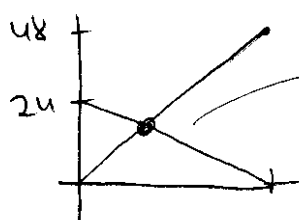
		L	R
T		0 ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$)	24 ($\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$)
B		16 (1, 0)	8 ($\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$)

I

		L	R
T		48	0
B		0	24

II

במשחק II אצל אדוארד ערך המשחק הוא



$V_1^{II} = 16$

נחזיק ונ' שזו משחק במשחק הדו-שלבי.

החיסוק עבור התור הראשון:

אם משחק TL תוחלת התשלום הוא עבור שלב 1

(ובדומה) שבהמשך סתם 0 זה גם תוחלת של 2

$$TL: 0 + \frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{4} \cdot 16 = 10$$

הוא

$$TR: 24 + \frac{1}{4} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 25$$

לדומה

$$BL: = 28$$

$$BR: (\text{משחק בדומה}) = 15$$

← נק' שלם במשחק הוא כשלם הראשון, אלמך
אס"ה המיוחס של המשחק

10	35
28	15

משלם השני משחק במס' אחד מהמשחקים אם
אס"ה המיוחס שלו.

אחלש לו נק' שלם יחידה במס' המשחק וזה כי
המשחק עדיין סתום אפס זמן יש לו עקב המשחק
ובתנאי משחקים יש אס"ה אופטימליות ויחידה,
והן לא סתומות - נקסטר תוכניות משלם אפס
אזכיר לך אחד מהתנאים המשחקים.

T	$8(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
B	$4(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$

I

$-5(0, 1)$

II

13 עמ' 8

נניח שמשחקים ארבעה אנשים. אם
מאזלשלו שלם נגד המשחק II וניתק עם -5.
אז נניח שלם שלם בהסתרה $\frac{1}{2}$ המשחק פשוט
נגדו. אם זה אפשרי

T	$8(\frac{1}{6}, \frac{2}{6})$
B	$4(\frac{4}{10}, \frac{1}{10})$

I

$-5(0, \frac{1}{2})$

II

אם השחקן לא יודע מתי אדם יתילשלו המשחק "אחר".

$$\text{המשחק II תוחלת התשלום היא } -5 + \frac{1}{2}(-5) + \frac{1}{4}(-5) + \dots + \frac{1}{2^n}(-5) = -10$$

זה מה שקורה (שהוא כבר הבהיר II - I).

8 I מרחק

אם המרחק בין D (המרחק בין A ל B) הוא 10
אז המרחק בין A ל B הוא 10

$$V^T = 8 + \frac{1}{6} \cdot V^T + \frac{2}{6} \cdot (-10)$$

כ מרחק אולי נקרא

אולי נקרא

מה שקורה
II מרחק

$$V^B = 4 + \frac{4}{10} V^B + \frac{1}{10} \cdot (-10)$$

אולי נקרא

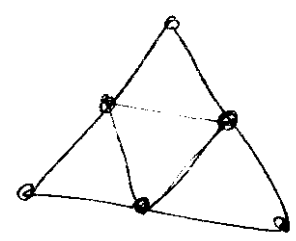
אולי נקרא המרחק בין A ל B
מה שקורה

6/1/09
 ת' מלמדים

הצגה אחרת:

- אולם 3 - כי הייתה נכונה (או לפי היותה נכונה) אם היא נכונה.

- אולם 1 - הכיוון הוא שמצויים הצדדים כי הם אינם יכולים להיות קטנים, למעלה, ימין.



המרחק המינימלי בין 6 צדדים (אם לא) הוא

- נ' עליו המין את השאלות וכן אף על גוף השאלה.

הצגה:

	C	R
C	3, 3	0, 4
R	4, 0	1, 1

B

I

II

הוא כי אין מלמדים כי קיימת ק"מ נ' עליו
 (C, C) - כי?
 $N(B) \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצת המעטות הם הקבוצות
 על המרחב B.

(אם) - $\Delta(S')$ את קבוצת המעטות הממוצעת על
 המרחב i המרחב B.
 כי המרחק 1 יורד למטה אף על גוף הוא

$$m_1 = \max_{x \in \Delta(S^1)} \min_{y \in \Delta(S^2)} u(x, y)$$

$$m_2 = \max_{y \in \Delta(S^2)} \min_{x \in \Delta(S^1)} u(x, y)$$

הוא נכון

נסמן שקיימת נש"ל שבה (c, c) משותף בשל I
 אלוהי ק"מ $(n_1, n_2) \in N(B)$ כך $-L$
 $3 + n_1 \geq 4 + m_1$
 $3 + n_2 \geq 4 + m_2$

הוכחה:

אס' המשחק הדו-שלבי האחרון: ראשית,
 צריך להבין מה עושים בשל I ואז צריך להבין
 מה עושים בשל II כדי לא אחז מתכנתים
 האופציות בשל I .

$(\Rightarrow)$ האס' של משחק I יהיה:

בשל הראשון יש c .
 בשל השני: אם (R, R) או (R, C) אז לא משנה.
 אם (C, C) אז ישחק את הפעולה
 של ש"ל שבה התשלום יהיה (n_1, n_2)
 אם (C, R) אז ישחק את הפעולה
 להחזיר את תשלומי של משחק 2
 א - m_2 (לפי אפ"ל) כמו במשחק
 סכום אפס).

האס' של משחק 2 סימטרי והדו-שלבי.
 נבדוק שם סטיה של משחק 1 או משחקי תשלום.
 אם משחק (c, c) סטיה לא תהיה את התשלום
 כל אלוהי אומר להיות משחק של
 סטיה בפעולות $(R, R), (R, C), (C, R)$ לא ישנו את התשלום על
 (כל המשחקי השני משחק C).
 אם משחק 1 בשל I סטיה R - I כחובן שלשני
 במשחקים $(R, R), (R, C), (C, R)$ לא משנה.
 במקסימום שורף עקבם הוא $4 + m_1$
 ואם לא יסטה יקבל $3 + n_1$
 ולכן אין לו שום סטיה שתלפף את מצבו.

(31)

הכרזה זכור שמהו 2 סימטריה.

($\Leftarrow$) נניח של $N(B)$ (זכור) קיים של i :
ל- $3+n_i < 4+m_i$. נתבונן ב- (n_i, m_i) סדרים
אלה בהם ערכים $i=1$.

אם נתאר סדרה שיוחזרם את מרכזו. בלשם ה-
השקן L של R והשקן R של L ילך את
המחלקים שלו. אם זה מסתדר תלוי $4+m_i$
(כך שלשקן 2 נלך ב- C) שפחותם אוב' וזר
ממה שהיו שקטם אם הוא לא סוף של $3+n_i$.
כן קיבלנו סדרה
($\Rightarrow$)

אנחנו חשים כי אישיו קל בו וק' של סדרה
סדרה הנלם של השקן השני.

נניח ששקן מלך דו-לכא
בזוהי סדרה (s_1, s_2) במלך A וסדרה
 (a_1, a_2) של $N(B)$ ק' i :
ל- $3+n_i < 4+m_i$
 $a_1 + n_1 \geq a_1 + d_1 + m_1$
 $n_2 \geq d_2 + m_2$

$$d_1 = \max_{s \in S^1} (u^1(s_1, s_2) - u^1(s_1, s_2)) \quad \text{ל-}$$

$$d_2 = \max_{s \in S^2} (u^2(s_1, s) - u^2(s_1, s_2))$$

נחש (ק') ש' של I בלשם I של I של I
מלך מלך מלך.

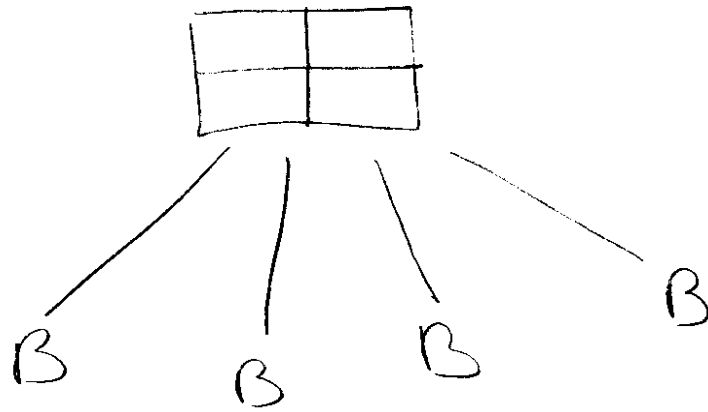
a_1, b_1	a_2, b_2
a_3, b_3	a_4, b_4

I

B

II

אבחנה: אחד של אנו מלך כזה:



נכון שכל אחד מהמלכים השניים לריב
 אלוט משוקק נק' של א' ומשק היחז-לבי
 B. זה נוסף אבק שיש הסתברות חלוקה
 ממש אהיה אל אחד מהת מלכים.
 אם הייתה ס'ה כזאית הנת מלך א'ז
 היה כזא' אצקור אלה כה הסתברות חלוקה
 נהיה אלה ואס התחלת תהיה ממש.

אז אה מהמלכים לריב אצקור שיקול מתכוון
 מארזה של שנים. הסול מתיים אזה לריב
 אפתי מלך

$a+n_{11}^2$	
$b+n_{11}^2$	

ושם לריב אצקור שיש אזה ממש.

(32) 13/1/10
תאריך

מחבר:

- סמל $\mathbb{R}$ מציג את המספרים הממשיים.
- חומר ההצגה הוא $\mathbb{R}$ ו- $\mathbb{R}$ הוא המרחב הממשי.
- V הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
- N הוא מספר טבעי.
- V הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

הצגה (N, V) של V היא הצגה של V על ידי N וקטורים. N - קבוצת הווקטורים. V - $V: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ - $V(\emptyset) = 0$.

הקבוצה V היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ והיא מכילה את כל הווקטורים $v(N)$ ו- $v(\emptyset) = 0$.

הצגה: $Sh(N, V) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (V(P_i(\pi)) - V(P_i(\pi)))$

כאשר $P_i(\pi)$ היא קבוצת הווקטורים $v(N)$ ו- π היא פרמוטציה של N .

הגדרה: $Sh(N, V)$ היא הצגה של V על ידי N .

הצגה (N, V) היא הצגה של V על ידי N וקטורים. N - קבוצת הווקטורים. V - $V: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$.

(2) $Sh(N, V)$ היא הצגה של V על ידי N וקטורים. N - קבוצת הווקטורים. V - $V: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$.

(3) $Sh(N, V)$ היא הצגה של V על ידי N וקטורים. N - קבוצת הווקטורים. V - $V: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$.

4) סימטריה קום זשני למקנים יש תחמה להם או
קואליציה התלכוד שלהם צריק אהיזף להם.

$$N = \{1, 2, 3\}$$

צומח :

$$v(\emptyset) = 0$$

$$v(\{1\}) = 1 \quad v(\{2\}) = 2 \quad v(\{3\}) = 3$$

$$v(\{1, 2\}) = 4 \quad v(\{1, 3\}) = 5 \quad v(\{2, 3\}) = 6$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 7$$

תחמה את צריק ללחץ :

Σ	3	2	1	תחמה
4	3	3	1	1 2 3
4	4	2	1	1 3 2
4	3	2	2	2 1 3
4	4	2	1	2 3 1
4	3	2	2	3 1 2
4	3	3	1	3 2 1
7	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	שכף

צומח: הפרמנים יש 24 חסרים :

2 - משלחם עצום של 9

9 - משלחם קטן של 1

כפי זה צריק הוצע חוק צריק חוק (אפחות 14)
6 החסרים שלחם משהם עצומים באותו אופן.

3) את התחמה כמשחק קואליציוני :

$$N = \underbrace{\{I, II\}}_{\text{משלחם עצום}} , \underbrace{\{1, \dots, 9\}}_{\text{משלחם קטן}}$$

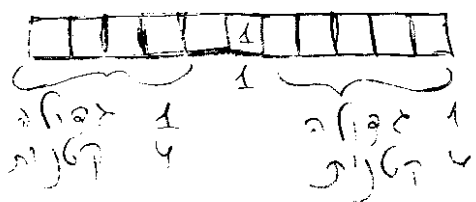
33)

האילוטיה $S \subseteq N$ היא

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{אם } S \text{ מכיל את כל ה-4 שחקנים} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

המקרה הזה דומה לזה של המשחק (במקרה
כזה השבועות של כל אחד מהשחקנים
יחידה אחת).

השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף
אם (השחקן) אחד או יותר (אם השחקן) אחד
השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף
השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף
השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף



$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2}{11} = \frac{5}{99}$$

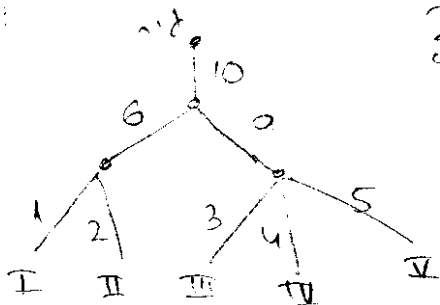
$$sh_1 = \dots = sh_9 = \frac{5}{99} \quad \leftarrow$$

$$sh_{10} = sh_{11} = \frac{1}{2} \left(1 - 9 \cdot \frac{5}{99} \right) \quad \leftarrow$$

השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף
השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף
השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף

השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף

השחקנים יכולים להצטרף או לא להצטרף



נציג את המצב המלא שיתוף:
 $N = \{I, \dots, \infty\}$

$S \subseteq N$ בל

$$V(S) = \begin{array}{l} \text{המשאב המנותק} \\ \text{ל המכשירים בק} \\ \text{הקבוצה } S \text{ יבוא להם} \\ \text{לעזר} \end{array}$$

$$V(1) = 1 + 6 + 10 \quad \text{למשל,}$$

$$V(1,2) = 1 + 2 + 6 + 10$$

(נמצא את ערך שכל -

עבור הפר I : (אפשר לעבור גם $10 - 10$)

האפשרות אלו זה יהיה קצת מוגזג.

נשים את לבנו פרטים:

(1) אם פרמטרים I כמה תוסף אפשר Δ (תשלומים)

(2) אם פרמטרים I כמה I (מציאות) יתווסף

אפשר Δ (למשל) אכן ממוצע תוסף אפשר 3

(כ) מחצי אחרת I אפשר I ומחצי II (כך Δ)

(3) עבור פרמטרים I לבק Δ הוא הראשון תוסף I (כך Δ)

10 (למשל Δ - אחרת I) וכן במחצית

יתווסף $\frac{10}{2} = 5$

$$\Rightarrow Sh_1 = 1 + 3 + 2 = 6$$

באופן צמוד

$$Sh_5 = 5 + \frac{9}{3} + \frac{10}{5} \quad 10$$

$$Sh = (6, 7, 8, 9, 10)$$

מסוף אחרת

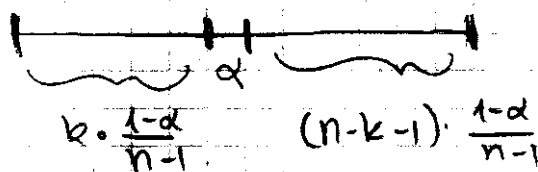
34) 2010/01/2010
 תאריך

הצגה (מספר המספרים המשותפים)

$$\left[\frac{1}{2} + \alpha; \alpha, \frac{1-\alpha}{n-1}, \dots, \frac{1-\alpha}{n-1} \right] \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$$

הכונה היא שהם
 הם שווים
 $\frac{1}{2} - \alpha$

(הם הם מספרים שונים)



ואם $k \cdot \frac{1-\alpha}{n-1} \leq \frac{1}{2}$ - אז

$k \cdot \frac{1-\alpha}{n-1} + \alpha > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k \leq \frac{n-1}{2(1-\alpha)}$

$k > \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \frac{n-1}{1-\alpha} = \frac{n-1}{1-\alpha} \cdot \frac{1-2\alpha}{2}$

$\Rightarrow (1-2\alpha) \frac{n-1}{2(1-\alpha)} < k \leq \frac{n-1}{2(1-\alpha)}$

אם $k = \frac{n-1}{2(1-\alpha)}$ אז $(1-2\alpha)C < k \leq C$ אז

$m = \left\lfloor \frac{n-1}{2(1-\alpha)} (1-2\alpha) + 1 \right\rfloor$; $\ell = \left\lfloor \frac{n-1}{2(1-\alpha)} \right\rfloor$ אז

הם המספרים של המספרים 1. הם מספרים
 $m \leq k \leq \ell$

אם המספר של המספרים 1 הוא המספרים של המספרים 1. הם מספרים
 הם מספרים, אז $\frac{\ell-m+1}{n}$

$1 - \frac{\ell-m+1}{n-1}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell-m+1}{n}$ אז

$\frac{\ell-m+1}{n} = \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2(1-\alpha)} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{2(1-\alpha)} (1-2\alpha) + 1 \right\rfloor \right)$

הגדל שמניין אתנו גודל α של הריבוע
 מהצדדים הנחתונים ו-1

$$\frac{\frac{n-1}{2(1-\alpha)} - \frac{n-1}{2(1-\alpha)}(1-2\alpha) + 1}{n} =$$

$$= \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{2(1-\alpha)} - \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)} \right) + \frac{1}{n} =$$

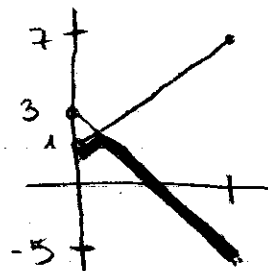
$$= \frac{n-1}{n} \left(\frac{2\alpha}{2(1-\alpha)} \right) + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

לפיכך, נמצא את ערך המלך, ו-1 את המלך
 על המלך

	l	m	r
T	7	-5	2
M	1	3	2
B	4	-1	1

המלך נמצא מ-1 נכאי למלך כ-1 אתה
 מ-1 קל. אין פה שלילי האט' למלך אתה
 ו-1 אתה $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}M$ שם תלם ל-1 ב-1
 מ-1 אתה $\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}m$ את ב-1 שם תלם
 ו-1 אתה מ-1 מ-1 אתה ו-1 מ-1

	l	m	
T	7	-5	p
M	1	3	1-p



$$7p + (1-p) = -5p + 3(1-p)$$

$$12p = 2(1-p)$$

$$6p = 1-p \Rightarrow p = \frac{1}{7}$$

$$v = \frac{16}{7} = \frac{13}{7}$$

נניח r את המלך אפס/אפס חילוק
 (ה-1, -3/7) היא 2/7

(35)

נויה שלוק 1 שלוק 2
 $(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$ מניחוק
 סכום שלוקים אחרים
 $7\alpha + \beta + 4(1-\alpha-\beta) = \frac{13}{7}$
 $-5\alpha + 3\beta - (1-\alpha-\beta) = \frac{13}{7}$

$$\Rightarrow 3\alpha - 3\beta = \frac{13}{7} - 4$$

$$-4\alpha + 4\beta = \frac{20}{7}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = -\frac{5}{7}$$

$$(t, t + \frac{5}{7}, \frac{2}{7} - 2t)$$

סכום שלוקים אחרים

אם שלוק 2 שלוק 1 בהסתברות תלויה באות

אם הניחוק של x^2 שלוק 1 לא שלוק 2

כאן אנו מניחים ש: אחת, (נויה x^1 אנו מניחים

שהסתברות $\frac{13}{7}$ או שלוק 2 בהסתברות תלויה. אם

(x^1, x^2) אינו שלוק 2 שלוק 1 יש סכום כבדים

$$- \delta \cdot (x_1^1 + \frac{x_2^1}{2}, x_2^1 + \frac{x_2^1}{2}, 0)$$

ויקח אנו מניחים שלוק 1 x^1 . תוחלת התשלום

שלוק 2 והסתברות r בוק' שלוק (x^1, x^2) הוא 2,

הסתברות אחר שלוק 2 הוא $\frac{13}{7}$.

∇ לא יוכלו להיות שלוק 2 שלוק 1 בהסתברות תלויה

כאן אנו מניחים ש: אם אנו מניחים תשלום וזאת שהאנו

מניחים תשלום שלוק 1 הוא $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, 0)$

אנו מניחים ש: אנו מניחים 2. (נויה $(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$

אנו מניחים ש: אנו מניחים 2. (נויה $(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta)$

$$7\alpha + \beta + 4(1-\alpha-\beta) = \frac{13}{7}$$

$$-5\alpha + 3\beta - (1-\alpha-\beta) = \frac{13}{7}$$

$$\Rightarrow \text{מקבלים} (t, t + \frac{5}{7}, \frac{2}{7} - 2t)$$

סתירה

עאלה:

$$A = \begin{array}{ccc|c} & l & m & r \\ \hline x & y & \frac{x+y}{2} & T \\ \hline 0 & x & y & M \\ \hline 0 & 0 & x & B \end{array}$$

אילו זכרי x, y הזכר הוא x $\frac{2}{3}$
 אפס לחקור את המקרה $x \geq 0$ ו $x < 0$
 המקרה $x < 0$ אבטח עם $-A^T$.

אז יש כמה מקרים אבדוק:

- $0 \leq x \leq y$: עזר המלך הוא x יש לבקש 1
 אם $x \leq 0$ יש לבקש 2 אם $x \geq 0$ יש לבקש 1
 אם $x \geq 0$ יש לבקש 2

- $0 \leq y < x$: זה המלך אחרי אחרון קטנים
 אם $x < 0$ יש לבקש 2 אם $x \geq 0$ יש לבקש 1
 אם $x \geq 0$ יש לבקש 2 אם $x < 0$ יש לבקש 1
 זהו המלך

- $x < 0 < y$: אולי זכר המלך הקטן. זה
 אם $x < 0$ יש לבקש 2 אם $x \geq 0$ יש לבקש 1

כיסוי ארץ המקרים שבהם $x \leq 0$ ואם $x > 0$

אם $x < 0$ עזר המלך הוא x יש לבקש 1

אם $0 \leq x \leq y$

אם $x = 0$ יש לבקש 2 אם $x > 0$ עזר המלך הוא x ו $x = 0$.