<u>הגדרה:</u> נאמר שמרחב טופולוגי K מקיים את משפט נק' השבת של
בראואר אם לכל $g: K\to K$ רציפה קיימת נק' שבת.

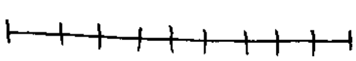
<u>משפט:</u> אם C,K מרחבים טופולוגיים וקיימת $f: C\to K$
כך ש- f ו- f^{-1} רציפות אז K מקיים את משפט נק' השבת
אמ"מ C מקיים את משפט נק' השבת.

<u>הוכחה:</u> מהסימטריה מספיק להוכיח רק כיוון אחד. נניח ש- K
מקיים את משפט נק' השבת ותהי $g: C\to C$ רציפה. נתבונן
בפונקציה $h=f\circ g\circ f^{-1}: K\to K$. h רציפה כהרכבה של רציפות
ולכן קיימת לה נק' שבת $x\in K$. כלומר

$$x=h(x)=(f\circ g\circ f^{-1})(x)=f(g(f^{-1}(x)))$$

אבל f הפיכה ולכן $f^{-1}(x)=g(f^{-1}(x))$ והרי $y=f^{-1}(x)\in C$
אז מצאנו נק' שבת של g ב- C. ☺

<u>מסקנה:</u> אם $K\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה קומפקטית ולא ריקה מספיק להוכיח
את משפט נק' השבת לקטע $[0,1]$ כי K בהכרח קטע סגור
$[a,b]$ וכל קטע כזה שקול טופולוגית ל- $[0,1]$.

<u>הוכחת משפט בראואר ל- $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$:</u> תהי $f:[0,1]\to[0,1]$
רציפה. אם נראה שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x^n\in[0,1]$ כך ש-
$|f(x^n)-x^n|<\frac{1}{n}$ נקבל את הדרוש. שכן, ל- (x^n) יש תת
סדרה מתכנסת $x^{n_k}\to x\in[0,1]$ ומהרציפות של f ושל $|\cdot|$ ינבע
ש- $0\leftarrow\frac{1}{n_k}>|f(x^{n_k})-x^{n_k}|\longrightarrow|f(x)-x|$ $\Leftarrow$ $f(x)=x$ וזהו.
נניח כעת את קיום הסדרה. f רציפה במ"ש (כי f רציפה על קטע
סגור) ולכן מהגדרה לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $0<\delta_n\le\frac{1}{2n}$ כך שאם $x,y\in[0,1]$
ו- $|x-y|\le\delta_n$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2n}$. אם יש לפונקציה נק'
שבת אין מה להוכיח. לכן נניח בשלילה שאין לה נק' שבת. אז
בהכרח $f(0)>0$ ו- $f(1)<1$. נתבונן בחלוקה של הקטע
לקטעים באורך לכל היותר δ_n. נאמר ש- 6 
נק' חלוקה $f(x^n)\neq x^n$ בהכרח $f(x^n)<x^n$ או $f(x^n)>y^n$.

ומאחר ש- $f(0)>0$; $f(1)<1$ בהכרח קיימות זוג נק' סמוכות $x_n \le y_n$ כך ש- $f(x_n)>x_n$; $f(y^n)<y^n$.
מאחר שהן סמוכות $|x^n-y^n|\le\delta_n$ ולכן מהרציפות במ"ש $|f(x^n)-f(y^n)|<\frac{1}{2n}$. לכן

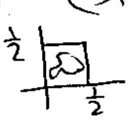
$$x^n<f(x^n)<f(y^n)+\frac{1}{2n}<y^n+\frac{1}{2n}<x^n+\frac{1}{n}$$

$\Leftarrow$ $x^n<f(x^n)<x^n+\frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ $|f(x^n)-x^n|<\frac{1}{n}$ וזה מה שרצינו. ☺

<u>טענה</u>: תהי $C\subseteq K$ כאשר K מקיים את משפט נק' השבת של בראואר. אם קיימת $f:K\to C$ רציפה כך שלכל $x\in C$ $f(x)=x$ אזי גם C מקיימת את משפט נק' השבת של בראואר.

שאלת הרטרקט

<u>הוכחה</u>: תהי $g:C\to C$ רציפה. נתבונן בפונקציה $h=g\circ f:K\to C$. $C\subseteq K$ ולמעשה $h:K\to K$. h רציפה כהרכבה של רציפות ; K מקיים את משפט נק' השבת $\Leftarrow$ קיימת $x\in K$ כך ש- $h(x)=x$. כלומר $g(f(x))=x$. אבל הרי התמונה של h היא ב-C. $\Leftarrow$ $x\in C$ $\Leftarrow$ $f(x)=x$ $\Leftarrow$ $g(x)=x$
ומצאנו נק' שבת ב-C. ☺

<u>מסקנה</u>: כדי להוכיח את משפט נק' השבת לקבוצה קמורה וקומפקטית ב-$\mathbb{R}^2$ מספיק להוכיח אותו לסימפלקס Δ^3.
ע"י הזזות וניפוחים (אלה העתקות הפיכות, רציפות וההופכיות שלהן רציפות) ניתן להעתיק את הקבוצה המקורית לתוך הריבוע  ולכן ניתן לשכן אותה כעת באופן רציף והפיך לתוך תת קבוצה של Δ^3 ע"י $(x_1,x_2)\mapsto(x_1,x_2,1-x_1-x_2)$.
אז יש לנו מצב כזה  . אבל ההעתקה מהסימפלקס לקבוצה שמתאימה לכל נקודה בסימפלקס את הנקודה הכי קרובה אליה ב-K היא רציפה וזהה לזהות על K. לכן לפי הטענה מספיק להוכיח לסימפלקס.

<u>הלמה של ספרנר ב-$\mathbb{R}$</u>: יהי l ישר המחולק לקטעים קטנים יותר - $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. נניח ש-x_0 מסומנת ב-0 ו-x_n מסומנת ב-1 וכל נקודות הביניים מסומנות ב-0 או ב-1. אזי קיים מספר אי-זוגי של קטעים שהקצוות שלהם מסומנים ב-0 וב-1. ברור שקיים לפחות קטע אחד כזה כי לא יכול להיות שכל הקטעים הם 0 או כל הקטעים הם 1 כי נתון ש-x_0 מסומן ב-0 ו-x_n מסומן ב-1.

כעת, נראה שבהינתן סימון כזה כלשהו אם אנחנו מגדילים את מספר הקטעים הנ"ל ב-1 (ע"י שינוי צביעה של קודקוד כלשהו) אז אנחנו מגדילים אותו ב-2 (ואז בגלל שהתחלנו עם קטע אחד שזה אי-זוגי ואנחנו יכולים להגדיל רק ב-2 נובע שתמיד יש מספר אי-זוגי של כאלה). אכן, נניח שאנחנו רוצים לשנות את הסימון של קודקוד כלשהו. זה כמובן משפיע על שני קטעים בדיוק- מימינו ומשמאלו:  אם השכנים צבועים באותו צבע אז האמצעי צריך להיות צבוע באותו צבע כדי שנוכל להגדיל את מספר הקטעים. ואז אז כשנשנה אותו מיד נקבל עוד שני קטעים חדשים. ואם הם צבועים בצבעים שונים אז שינוי הסימון של האמצע לא יוסיף קטעים חדשים. ☺

<u>הלמה של ספרנר ב-$\mathbb{R}^2$</u>: נניח שיש משולש גדול שקודקודיו מסומנים ב- 1,2,3 (כל קודקוד מסומן אחרת). את המשולש הגדול נחלק למשולשים קטנים רק שחיתוך כל שני משולשים קטנים הוא צלע קטנה. זה יוצר קודקודים פנימיים וקודקודים שנמצאים על צלעות המשולש הגדול. את הקודקודים החיצוניים נצבע כאחד הצבעים של הצלע שהם נמצאים עליה ואת הקודקודים הפנימיים נמספר באופן שרירותי ע"י 1,2,3. אזי קיים מספר אי-זוגי של משולשים הקטנים שמסומנים ב- 1,2,3.

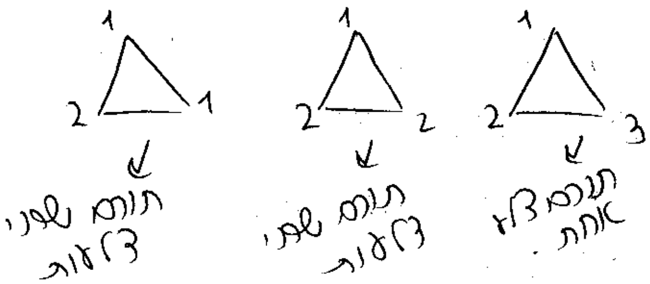
<u>הוכחה</u>: נסמן ב- $\mathcal{L}$ את אוסף המשולשים הקטנים וב- $\mathcal{E}$ את את אוסף הצלעות שמסומנות ב- 1,2.

נתבונן בקבוצה

$A=\{(F,E):$ F צלע של E ו- $E\in\mathcal{E}\}$

בקבוצה יש מספר אי זוגי של איברים: נתבונן על הצלעות שבקבוצה. אם צלע צבועה ב- 1,2 אז או שהיא שייכת למשולש פנימי או שהיא נמצאת בשפת המשולש הגדול.
אם היא שייכת למשולש פנימי אז היא חיתוך של שני משולשים ולכן תורמת שני איברים לקבוצה. אם היא שייכת לצלע החיצונית אז לפי הטענה הקודמת היא מוספה מספר אי-זוגי של משולשים. לכן סה"כ $|A|$ אי-זוגי.

מאידך, ניתן לספור כמה צלעות תורם כל משולש. משולש נמצא ב- A אם יש לו צלע שצבועה ב- 1,2.
יש 3 אפשרויות:



מאחר שסך התרומות צריך להיות אי-זוגי נובע שהתרומות ממשולשים 1,2,3 הן אי-זוגיות ולכן יש מספר אי-זוגי של משולשים רצויה. !!

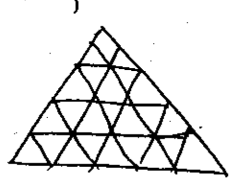
<u>הוכחת משפט נק' השבת ל- Δ^3</u>: נניח בשלילה שאין נק' שבת. אזי לכל נקודה $x\in\Delta^3$ מתקיים לפחות אחד מהבאים:

$$(1)\quad f_1(x_1,x_2,x_3)<x_1$$

$$(2)\quad f_2(x_1,x_2,x_3)<x_2$$

$$(3)\quad f_3(x_1,x_2,x_3)<x_3$$

יהי $n\in\mathbb{N}$. f רציפה במ"ש על Δ^3 ולכן קיים $0<\delta_n\le\frac{1}{3n}$ כך שאם $\|x-y\|_\infty\le\delta_n$ אז $\|f(x)-f(y)\|_\infty<\frac{1}{n}$. נחלק את Δ^3 למשולשים קטנים שהמרחקים בין הקודקודים שלהם הם לכל היותר δ_n כך:



בגלל שאין נק' שבת בהכרח
$f_1(1,0,0)<1$
$f_2(0,1,0)<1$
$f_3(0,0,1)<1$

אז את $(1,0,0)$ נסמן ב-(1), את $(0,1,0)$ נסמן ב-(2) ואת $(0,0,1)$ נסמן ב-(3). נשים לב שאם נק' נמצאת על הצלע בין $(1,0,0)$ ל-$(0,1,0)$ אז בהכרח $f(x_1,x_2,0)<x_1$ או $f(x_1,x_2,0)<x_2$ ולכן היא תהיה צבועה ב-(1) או ב-(2). באופן דומה הקודקודים של הצלעות החיצוניות מסומנים בסימון של אחד הקודקודים של הצלע הגדולה. את שאר הקודקודים הפנימיים נסמן ב- $1,2,3$ לפי התנאי הראשון שמתקיים עבורם (סתם שיהיה מוגדר היטב).
לפי הלמה של ספרנר קיים משולש שצבוע בכל שלושת הצבעים נסמן את הקודקודים שלו ב- $\{(x_1^i,x_2^i,x_3^i)\}_{i=1}^3$ רק שמתקיים $f_i(x_1^i,x_2^i,x_3^i)<x^i$ ל- $1\le i\le 3$. כעת,

$$f_1(x_1^1,x_2^1,x_3^1)=1-f_2(x_1^1,x_2^1,x_3^1)-f_3(x_1^1,x_2^1,x_3^1)>$$
$$>1-f_2(x_1^2,x_2^2,x_3^2)-\frac{1}{3n}-f_3(x_1^3,x_2^3,x_3^3)-\frac{1}{3n}>$$
$$>1-x_2^2-\frac{1}{3n}-x_3^3-\frac{1}{3n}\ge$$
$$\ge 1-x_2^1-\frac{1}{3n}-x_3^1-\frac{1}{3n}-\frac{2}{3n}=x_1^1-\frac{4}{3n}$$

באופן דומה אפשר להראות לכל $1\le i\le 3$

$$|f_i(x_1^1,x_2^1,x_3^1)-x_i^1|<\frac{4}{3n}$$

ועכשיו בדיוק כמו במקרה של $\mathbb{R}$, נק' ההצטברות של (x_1^1,x_2^1,x_3^1) תיתן לנו נק' שבת של הפונקציה. ☺

<u>הגדרה</u>: <u>קומפלקס סימפליציאלי אבסטרקטי</u> הוא אוסף סופי $\mathcal{K}$ של קבוצות סופיות לא ריקות רק שאם $F\in\mathcal{K}$; $\emptyset\neq E\subseteq F$ אז $E\in\mathcal{K}$. כל איבר $F\in\mathcal{K}$ נקרא <u>סימפלקס</u>. <u>המימד</u> של סימפלקס $F\in\mathcal{K}$ הוא $d(F)=|F|-1$ והמימד של הקומפלקס $\mathcal{K}$ הוא $d(\mathcal{K})=\max_{F\in\mathcal{K}} d(F)$.

הגדרה: <u>החלוקה הבריצנטרית</u> של $\mathcal{K}$ הינה אוסף כל השרשראות ב-$\mathcal{K}$ לפי יחס ההכלה. נסמן את החלוקה ב- $S(\mathcal{K})$

טענה: יהי $\mathcal{K}$ קומפלקס סימפליציאלי מופשט. אזי גם $S(\mathcal{K})$ אוסף סימפליציאלי מופשט.

הוכחה: לא ברור כי אם $F \in S(\mathcal{K})$ אז $F \subseteq \mathcal{K}$ סדורה ממש לפי יחס ההכלה. ברור שאם $E \subseteq F$ אז גם E סדורה ממש לפי הכלה ולכן $E \in S(\mathcal{K})$. ☺

טענה: יהי $\mathcal{K}$ קומפלקס סימפליציאלי מופשט. אזי

$$d(S(\mathcal{K})) = d(\mathcal{K})$$

הוכחה: נניח ש- $d(\mathcal{K}) = d(F) = |F|-1$ עבור $F \in \mathcal{K}$ כלשהו. נסמן $|F|-1=d$. אז $|F|=d+1$. (נסמן $F=\{f_0,\dots,f_d\}$. נתבונן בשרשרת

$$E=\{\{f_0\},\{f_0,f_1\},\dots,\{f_0,\dots,f_d\}\}$$

זו כמובן אכן שרשרת והיא מכילה איברים מ- $\mathcal{K}$ כי כל אחד מהם מוכל ב- F. לכן $E \in S(\mathcal{K})$. אבל $|E|=d+1 \Leftarrow d(E)=d \Leftarrow d(S(\mathcal{K})) \geq d(\mathcal{K})$.

מאידך, נניח ש- $d = d(S(\mathcal{K})) = d(E) = |E|-1$ כאשר $E \in S(\mathcal{K})$. אז $|E|=d+1$ ונסמן $E=\{e_0 \subsetneq \dots \subsetneq e_d\}$ כאשר $e_0,\dots,e_d \in \mathcal{K}$. $e_0 \neq \emptyset$ ולכן $|e_0| \geq 1$. אבל כל איבר בשרשרת מוסיף לפחות איבר אחד לקודמו. $\Leftarrow |e_d| \geq d+1$. ומאחר ש- $e_d \in \mathcal{K}$ נקבל ש $d(\mathcal{K}) \geq |e_d|-1 = d(S(\mathcal{K}))$ וסיימנו. ☺

הגדרה: <u>קבוצת הקודקודים</u> של קומפלקס $\mathcal{K}$ הינה

$$V(\mathcal{K}) = \bigcup_{E \in \mathcal{K}} E$$

הגדרה: $N=\{0,\dots,n\}$. נגדיר $\mathcal{K}_1 = 2^N \setminus \{\emptyset\}$

$$\mathcal{K}_{i+1} = S(\mathcal{K}_i) \quad \forall i \geq 1$$

הגדרה: תהי $\delta=\delta_0 : N \to \mathbb{R}^{\ell}$ נגדיר לכל $i \geq 1$

$$\delta_i : \mathcal{K}_i \to \mathbb{R}^{\ell}$$

$$\delta_i(E) = \frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\delta_i(e)$$

ואזי: לכל $\emptyset \neq E \subsetneq F \in \mathcal{K}_i$ $\quad \|\delta_i(E)-\delta_i(F)\| \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1}\cdot C$

כאשר $C = \max_{x,y\in N}\|\delta(x)-\delta(y)\|$

הוכחה: באינדוקציה על i. עבור $i=0$ זה ברור. נניח ל-i ונוכיח ל-$i+1$.

$$\|\delta_{i+1}(E)-\delta_{i+1}(F)\| = \left\|\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{1}{|F|}\sum_{f\in F}\delta_i(f)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{|E|}\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{1}{|F|}\left(\sum_{e\in E}\delta_i(e) + \sum_{f\in F\setminus E}\delta_i(f)\right)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{|F|}{|E||F|}\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{|E|}{|F||E|}\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{|E|}{|F||E|}\sum_{f\in F\setminus E}\delta_i(f)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{|F|-|E|}{|F||E|}\sum_{e\in E}\delta_i(e) - \frac{|E|}{|F||E|}\sum_{f\in F\setminus E}\delta_i(f)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{|F||E|}\left((|F|-|E|)\sum_{e\in E}\delta_i(e) - |E|\cdot\sum_{f\in F\setminus E}\delta_i(f)\right)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{|F||E|}\left(\sum_{\substack{e\in E\\ f\in F\setminus E}}\delta_i(e) - \sum_{\substack{e\in E\\ f\in F\setminus E}}\delta_i(f)\right)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{|F||E|}\sum_{\substack{e\in E\\ f\in F\setminus E}}\left(\delta_i(e)-\delta_i(f)\right)\right\| \leq$$

$$\overset{\Delta\text{אי}}{\leq} \frac{1}{|F||E|}\sum_{\substack{e\in E\\ f\in F\setminus E}}\|\delta_i(e)-\delta_i(f)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|F||E|}\sum_{\substack{e\in E\\ f\in F\setminus E}}\max_{e',f'}\|\delta_i(e')-\delta_i(f')\| =$$

$$= \frac{1}{|F|\cancel{|E|}}\cdot\cancel{|E|}\cdot(|F|-|E|)\cdot\max_{\substack{e\in E\\ f\in F\setminus E}}\|\delta_i(e)-\delta_i(f)\| \leq$$

$$\underset{|F|,|E|\leq n+1}{\leq} \frac{n}{n+1}\cdot\max_{\substack{e\in E\\ f\in F\setminus E}}\|\delta_i(e)-\delta_i(f)\| = (*)$$

אזי $e\in E\subseteq F$; $f\in F$ לכן e ו-f ניתנים להשוואה ב-$\mathcal{K}_i$

ולכן עפ"י הנחת האינדוקציה

$$(*) \leq \frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1}\cdot C = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{i}\cdot C$$

הגדרה: נניח ש- $N=\{0,\dots,n\}$ ו- $\emptyset \neq M \subseteq N$.
נגדיר $\mathcal{K}_1(M)=\{F\in\mathcal{K}_1 : F\subseteq M\}$
$$\mathcal{K}_{i+1}(M)=S(\mathcal{K}_i(M))$$

טענה: יהי E סימפלקס מממד $n-1$ ב- $\mathcal{K}_i$. אם קיימת הקבוצה $M\subsetneq N$ כך ש- $E\in\mathcal{K}_i(M)$ אזי קיים $F\in\mathcal{K}_i$ יחיד כך ש- $E\subsetneq F$. אחרת, אם לכל $M\subsetneq N$, $E\notin\mathcal{K}_i(M)$ אז קיימים בדיוק שני סימפלקסים $F_1,F_2\in\mathcal{K}_i$ כך ש- $E\subsetneq F_1$, $E\subsetneq F_2$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על i. עבור $i=1$ זה ברור.
נניח עבור i ונוכיח ל- $i+1$. נתון ש- $d(E)=n-1$.
$\Leftarrow$ $|E|=n$ ו- $E\in\mathcal{K}_{i+1}$. נסמן $E=\{e_0\subsetneq\dots\subsetneq e_{n-1}\}$
כאשר $e_0,\dots,e_{n-1}\in\mathcal{K}_i$. $e_0\neq\emptyset$ $\Leftarrow$ $|e_0|\ge 1$.
$e_0\subsetneq e_1$ $\Leftarrow$ $|e_1|>|e_0|\ge 1$ $\Leftarrow$ $|e_1|\ge 2$ וכך הלאה
$|e_{n-1}|\ge n$.

אם קיים $M\subsetneq N$ כך ש- $E\in\mathcal{K}_{i+1}(M)$ אז $e_{n-1}\in\mathcal{K}_i(M)$
ולכן $|e_{n-1}|\le d(\mathcal{K}_i(M))+1\le n-1+1=n$ $\Leftarrow$ $|e_{n-1}|=n$ ולכן
לכל $0\le j\le n-1$ $|e_j|=j+1$.
מהנחת האינדוקציה קיים $f\in\mathcal{K}_i$ יחיד כך ש- $e_{n-1}\subsetneq f$
$\Leftarrow$ $F=\{e_0,e_1,\dots,e_{n-1},f\}$ מכיל את E והוא יחיד
כי בגלל שגדלי $e_0,\dots,e_{n-1}$ נבדלים ב-1 זה מזה אין אפשרות
לדחוף ביניהן קבוצות אי אפשר להכניס לפני e_0 כי
$|e_0|=1$ לכן נותרנו רק עם האפשרות להרחיב אחרי e_{n-1}
ולכזה יש רק אחד.

אם אין $M\subsetneq N$ כך ש- $E\in\mathcal{K}_{i+1}(M)$ אז גם אין $M\subsetneq N$
כך ש- $e_{n-1}\in\mathcal{K}_i(M)$. כעת יש שתי אפשרויות:
אם $|e_{n-1}|=n$ אז F סימפלקס $E\subsetneq F$ הוא בהכרח מהצורה
$F=\{e_0,\dots,e_{n-1},f\}$ כאשר $e_{n-1}\subsetneq f\in\mathcal{K}_i$ ועפ"י הנחת האינדוקציה
יש בדיוק שני f_1,f_2 שמתאימים.

אם $|e_{n-1}|=n+1$ אז או $|e_0|=2$ או שקיים $0\le m<n-1$
כך ש- $|e_{m+1}\setminus e_m|=2$. אם $|e_0|=2$ נסמן $e_0=\{a,b\}$
ואז כל סימפלקס $E\subsetneq F$ הוא מהצורה $F=\{e_{-1},e_0,\dots,e_{n-1}\}$
כאשר $e_{-1}=\{a\}$ או $e_{-1}=\{b\}$. ובדומה לקודם אין עוד
אפשרויות ואם $|e_m\setminus e_{m-1}|=2$ המקום היחיד שאפשר להכניס
מו קבוצה הוא בין e_m ל- e_{m+1} ואם זה יש בדיוק שתי
אפשרויות.

טענה: תהי $d: V(\mathcal{K}_i)\to N$ כך שלכל $e\in V(\mathcal{K}_i(M))$
$d(e)\in M$. אזי

$$|\{E\in\mathcal{K}_i : d(E)=M\}|\equiv 1 \pmod 2$$

הוכחה: באינדוקציה על n. כאשר $n=0$ זה טריוויאלי. נניח נכונות
ל- $n-1$ ונוכיח ל- n. הנחת האינדוקציה מבטיחה שלכל $M\subsetneq N$
כך ש- $|M|=n$

$$|\{E\in\mathcal{K}_i(M) : d(E)=M\}|\equiv 1 \pmod 2$$

תהי $\emptyset\neq M\subsetneq N$ עם $|M|=n$. תהי $\mathcal{X}$ קבוצת הזוגות

$$\mathcal{X}=\{(E,F) : \emptyset\neq E\subsetneq F,\ d(E)=M\}$$

נגדיר כמה קבוצות חלקיות:

$$\mathcal{X}_1=\{(E,F)\in\mathcal{X} : E\in\mathcal{K}_i(M)\}$$
$$\mathcal{X}_2=\{(E,F)\in\mathcal{X} : E\notin\mathcal{K}_i(M)\}$$

מכיוון ש- $\mathcal{X}=\mathcal{X}_1\cup\mathcal{X}_2$ איחוד זר. $\Leftarrow$ $|\mathcal{X}|=|\mathcal{X}_1|+|\mathcal{X}_2|$
אם $(E,F)\in\mathcal{X}_2$ אז לכל $M'\subsetneq N$, $E\notin\mathcal{K}_i(M')$, שכן
אם $M'=M$ אז כך ההנחה ואם $M'\neq M$ אז קיים $m\in M\setminus M'$
(כי $|M|=n$) ולפי הנחת האינדוקציה לכל $E\in\mathcal{K}_i(M')$
$m\notin d(E)$ ולכן לכל E כך ש- $d(E)=M$, $E\notin\mathcal{K}_i(M')$.
$\Leftarrow$ לכל $(E,F)\in\mathcal{X}_2$ קיים F' יחיד ששונה מ- F כך ש-
$(E,F')\in\mathcal{X}_2$. (הטענה הקודמת) $\Leftarrow$ $|\mathcal{X}_2|\equiv 0 \pmod 2$.
לפי הנחת האינדוקציה $|\mathcal{X}_1|\equiv 1 \pmod 2$ ולכן
$|\mathcal{X}|\equiv 1 \pmod 2$.

נגדיר $\mathcal{X}_3 = \{(E,F)\in \mathcal{X} : d(F) = M\}$

$\mathcal{X}_4 = \{(E,F)\in \mathcal{X} : d(F) = N\}$

שוב $\mathcal{X} = \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{X}_4$ איחוד זר ; $|\mathcal{X}| = |\mathcal{X}_3| + |\mathcal{X}_4|$

אבל $|\mathcal{X}_3| \equiv 0 \pmod 2$ לכן $|\mathcal{X}_4| \equiv 1 \pmod 2$ וזה בדיוק מה שרצינו.

<u>הוכחת משפט בראור</u> - Δ^{n+1} : (תזכורת: $C = \Delta^{n+1}$) נוכיח שלכל פונקציה רציפה $f : C \to C$, $f = (f_0, \dots, f_n)$ יש נק' שבת.

f רציפה על הקבוצה הקומפקטית C לכן רציפה במ"ש. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $0 < \theta < \varepsilon$ כך שלכל $x, y \in C$ אם $\|x-y\| < \theta$ אז $\|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon$ לכל $0 \le i \le n$.

נניח בשלילה שאין ל-f נקודת שבת. אזי לכל $x \in C$ קיים $0 \le i \le n$ כך ש- $f_i(x) < x_i$ (אחרת $f_i(x) \ge x_i$ לכל i אז $\sum f_i(x) \ge \sum x_i = 1$. אבל $f(x) \ne x$ לכן קיים i שעבורו $f_i(x) > x_i$ ואז $\sum f_i(x) > 1$ בסתירה)

נסמן:

$$N = \{0, \dots, n\}$$

$$\mathcal{K}_1 = 2^N \setminus \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{K}_{i+1} = S(\mathcal{K}_i)$$

$$\delta_0 : N \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad i \mapsto e_i$$

$$\delta_i : \mathcal{K}_i \to C, \quad E \mapsto \frac{1}{|E|} \sum_{e \in E} \delta_{i-1}(e)$$

ראינו ש- $\max_{\emptyset \ne E \subsetneq F \in \mathcal{K}_j} \|\delta_j(E) - \delta_j(F)\| \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^j \cdot C \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

יהי j מספיק גדול כך שלכל $\emptyset \ne e \subsetneq f \in \mathcal{K}_j$ מתקיים $\|\delta_j(e) - \delta_j(f)\| < \theta$. נגדיר צביעה $\gamma : \mathcal{K}_j \to \{0, \dots, n\}$ באופן הבא:

$\gamma(e) =$ ה-i המינימלי שעבורו $f_i(\delta_j(e)) < (\delta_j(e))_i$

אם $\emptyset \neq M \subsetneq N$; $e \in \mathcal{K}_j(M)$ אזי לכל $i \notin M$ $(\delta_j(e))_i = 0$

אבל $\gamma(e) \in M$ $\Leftarrow$ עפ"י הלמה של ספרנר קיים

$\{e_0,\dots,e_n\} = F \in \mathcal{K}_{j+1}$ כך ש- $\gamma(e_l) = l$ לכל $0 \le l \le n$

מההגדרה של γ נובע ש- $f_i(\delta_j(e_i)) < (\delta_j(e_i))_i$

אבל $1 = \sum_{k=0}^{n} f_k(\delta_j(e_i)) = \sum_{k=0}^{n} (\delta_j(e_i))_k = 1$

$\Leftarrow$ $f_i(\delta_j(e_i)) = 1 - \sum_{k \neq i} f_k(\delta_j(e_i)) \ge 1 - \sum_{k \neq i} f_k(\delta_j(e_k)) - \varepsilon \cdot n >$

$|f_k(\delta_j(e_k)) - f_k(\delta_j(e_i))| < \varepsilon$ כי e_i, e_k ניתנים להשוואה

$\| f_k(\delta_j(e_k)) - f_k(\delta_j(e_i)) | < \varepsilon \Leftarrow \|\delta_j(e_i) - \delta_j(e_k)\| < \theta$ $\Leftarrow$

$\overset{\text{הגדרת } \gamma}{>} 1 - \sum_{k \neq i} (\delta_j(e_k))_k - \varepsilon n >$

$> 1 - \sum_{k \neq i} (\delta_j(e_i))_k - \theta n - \varepsilon n > \delta_j(e_i)_i - 2\varepsilon n$

$\theta < \varepsilon$

$(\delta_j(e_i))_i > f_i(\delta_j(e_i)) > \delta_j(e_i)_i - 2\varepsilon n$ $\Leftarrow$

$|f_i(\delta_j(e_0)) - f_i(\delta_j(e_i))| < \varepsilon \Leftarrow \|\delta_j(e_0) - \delta_j(e_i)\| < \theta$;

ובפרט לכל קואורדינטה $|(\delta_j(e_0))_i - (\delta_j(e_i))_i| < \theta < \varepsilon$

$\Leftarrow$ $f_i(\delta_j(e_0)) < f_i(\delta_j(e_i)) + \varepsilon < (\delta_j(e_i))_i + \varepsilon <$

$< (\delta_j(e_0))_i + 2\varepsilon$

$f_i(\delta_j(e_0)) > f_i(\delta_j(e_i)) - \varepsilon > (\delta_j(e_i))_i - 2\varepsilon n - \varepsilon >$

$> (\delta_j(e_0))_i - 2\varepsilon n - \varepsilon - \varepsilon = (\delta_j(e_0))_i - 2\varepsilon(n+1)$

$\Leftarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ מצאנו נקודה x^ε כך שלכל $0 \le i \le n$

$(x^\varepsilon)^i - 2\varepsilon(n+1) < f_i(x^\varepsilon) < (x^\varepsilon)^i + 2\varepsilon$

כלומר לכל $m \in \mathbb{N}$ קיימת $x^m \in C$ כך ש- $\|f(x^m) - x^m\| < \frac{1}{m}$

C קומפקטית אכן קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x^{m_k} \longrightarrow x \in C$

f רציפה ופונקצית הנורמה רציפה לכן

$f(x) = x \Leftarrow \|f(x) - x\| = \lim \|f(x^{m_k}) - x^{m_k}\| = 0$

11 בסתירה להנחה שאין ל-f נק' שבת.

<u>הוכחת משפט נק' השבת לקבוצות קומפקטיות קמורות כלליות:</u> הרי

אמרנו שאם $C \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה קמורה וקומפקטית ניתן לשכן

אותה ב- $K \subseteq \Delta^{n+1}$ באופן רציף והפיך. ועכשיו לפי טענת הרטרקט מספיק להראות ש- K רטרקט של Δ^{n+1}. כלומר צריך להראות שאם $K \subseteq \Delta^{n+1}$ קמורה וקומפקטית אז קיימת פונקציה רציפה $f: \Delta^{n+1} \to K$ כך שלכל $x \in K$ $f(x) = x$. הפונקציה הזאת מוגדרת ע"י

$$f(x) = \text{הנקודה הקרובה ביותר ל-}x\text{ ב-}K$$

צריך להראות שזה מוגדר היטב ורציף ואז נסיים.
מספיק להראות שאם K קבוצה קמורה וקומפקטית אז לכל $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ קיימת נקודה $y(x) \in K$ יחידה כך שלכל $y \in K$

$$\|x - y(x)\| \le \|x - y\|$$

הפונקציה $y \longmapsto \|x-y\|^2$ היא פולינום ב-y ולכן רציפה על הקבוצה הקומפקטית K. לכן היא מקבלת שם מינימום בנקודה $y(x)$ ולכל $y \in K$ מתקיים $\|x-y(x)\|^2 \le \|x-y\|^2$ $\Rightarrow \|x-y(x)\| \le \|x-y\|$. נראה יחידות. יהיו $y, z \in K$ שתי נקודות כך ש- $0 < \|x-y\| = \|x-z\| \le \|x-w\|$ לכל $w \in K$. אזי

$$\left\| x - \frac{y+z}{2} \right\| = \left\| \frac{x-y}{2} + \frac{x-z}{2} \right\|$$

אם $y \neq z$; $\|x-y\| = \|x-z\|$ אז אין $\lambda \neq 0$ כך ש- $x-y = \lambda(x-z)$ ולכן

$$\left\| \frac{x-y}{2} + \frac{x-z}{2} \right\| \lneq \left\| \frac{x-y}{2} \right\| + \left\| \frac{x-z}{2} \right\| = \|x-y\|$$

וזו סתירה לבחירת y כבעלת מרחק מינימלי מ-x.
נותר להראות ש- $x \longmapsto y(x)$ רציפה. אכן, נניח ש- $x^n \to x$ צריך להראות ש- $y(x^n) \to y(x)$. מספיק להראות שלכל $x, z \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\|y(x) - y(z)\| \le \|x-z\|$. ואכן, נניח בשלילה שיש x, z כך ש- $\|y(x) - y(z)\| > \|x-z\|$ (*). נבחר סדרות $(x^m), (z^m)$ כך ש- $\|x - x_m\| \to y(x)$; $\|z - z^m\| \to y(z)$ - ו
אז החל משלב מסוים מתקיים

$$\|x - z\| < \big| \|x - x^m\| - \|z - z^m\| \big|$$

7

לכל m או ש- $\|x-x^m\| \le \|z-z^m\|$ או ש-

$$\|x-x^m\| \ge \|z-z^m\|$$

נניח למשל שהמקרה הראשון מתקיים לאינסוף m-ים. אז ע"י

בחירה מחדש של הסדרות לכל m נקבל

$$\|x-z\| < \|z-z^m\| - \|x-x^m\|$$

$$\|x-z\| + \|x-x^m\| < \|z-z^m\|$$

מאי שוויון המשולש נקבל $\|z-x^m\| < \|z-z^m\|$ ולכן

$\|x^m-z\| \to g(z)$ וגם אם נחזור ל- (*) נקבל שהחל

ממקום מסוים $\|x-z\| \le \big|\|x-x^m\| - \|z-x^m\|\big| \le \|z-x\|$

וזו סתירה לאי שוויון המשולש.