<u>הגדרה</u>: <u>משחק שני שחקנים תחרותי לחלוטין</u> מורכב מ-

① קבוצת אסטרטגיות I של שחקן 1

② קבוצת אסטרטגיות J של שחקן 2

③ פונקצית תשלום $g: I\times J \to \mathbb{R}$ המתארת את התשלום של שחקן 2 לשחקן 1 כתלות באסטרטגיות שנבחרו.

<u>הגדרה</u>: נניח שיש פרסים עם יחס העדפה $A_1,\dots,A_n$. אם קיימים $U(A_1),\dots,U(A_n)\in\mathbb{R}$ כך שהשוואה בין הגרלות $\{p_i\},\{q_i\}$ נעשית באמצעות השוואת התוחלות $\mathbb{E}_p U(A_i), \mathbb{E}_q U(A_i)$ אז המספרים האלה נקראים <u>תועלות פון-נוימן מורגנשטרן</u>.

<u>משפט</u>: תהיינה X,Y קבוצות ותהי $f: X\times Y \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. אזי

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

<u>הוכחה</u>: יהיו $x\in X$, $y\in Y$. בוודאי מתקיים

$$f(x,y) \le \sup_{x\in X} f(x,y)$$

שני האגפים הם פונקציה של y ולכן ניתן לקחת $\inf$ משני האגפים ולקבל

$$\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$

אבל עכשיו אגף ימין הוא פשוט מספר ואגף שמאל הוא פונקציה של x $\Leftarrow$

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} f(x,y)$$ ☺

<u>משפט</u>: תהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי קיים $x^*\in X$ כך ש- $f(x)\le f(x^*)$ לכל $x\in X$. כלומר f מקבלת מקסימום על X.

<u>הוכחה</u>: ראשית, נוכיח ש- f חסומה על X. אחרת, לכל $m\in\mathbb{N}$ קיימת $x^m\in X$ כך ש- $f(x^m) > m$. אבל $(x^m)\subseteq X$!
X - קומפקטית $\Leftarrow$ קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x^{m_l} \to x\in X$.
f רציפה ולכן $\lim_{l\to\infty} f(x^{m_l}) = f(x)$. בפרט, הגבול קיים.
אבל $f(x^{m_l}) > m_l$ לכל l והרי $m_l \to \infty$. זו סתירה.
$\Leftarrow$ f חסומה $\Leftarrow$ קיים $y=\sup f(X)$. נראה שקיים

$x^*\in X$ כך ש- $f(x^*)=y$. מהגדרת y, קיימת סדרה
$(y^m)\subseteq f(X)$ כך ש- $y^m\xrightarrow[m\to\infty]{} y$ אבל $y^m\in f(X)$ אם
אז קיים $x^m\in X$ כך ש- $f(x^m)=y^m$. וסדרה $(x^m)\subseteq X$
יש תת סדרה מתכנסת $x^{m_\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{} x^*\in X$. וכעת, שוב מהרציפות של
f נובע ש- $f(x^{m_\ell})\xrightarrow[\ell\to\infty]{} f(x^*)$, אבל מצד שני $f(x^{m_\ell})=y^{m_\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{} y$
מיחידות הגבול נובע ש- $f(x^*)=y$ וסיימנו.

<u>טענה</u>: תהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה ותהי $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית. אזי
$X+Y$ סגורה.

<u>הוכחה</u>: תהי $(z^m)\subseteq X+Y$ סדרה מתכנסת $z^m\xrightarrow[m\to\infty]{} z$.
צריך להראות ש- $z\in X+Y$.
$z^m\in X+Y$ ולכן קיימות סדרות $(x^m)\subseteq X$, $(y^m)\subseteq Y$
כך ש- $z^m=x^m+y^m$. אבל X קומפקטית ולכן יש לה
תת סדרה מתכנסת $x^{m_\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{} x\in X$. אזי $y^{m_\ell}=z^{m_\ell}-x^{m_\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{} z-x$
(אריתמטיקה של סדרות מתכנסות). אבל Y סגורה ולכן
$y=z-x\in Y$. $\Leftarrow$ $z^{m_\ell}=x^{m_\ell}+y^{m_\ell}\xrightarrow[\ell\to\infty]{} x+y$ ולכן גם
$z=x+y$, כלומר $z\in X+Y$ כנדרש.

<u>משפט ההפרדה I</u>: תהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ לא ריקה, סגורה וקמורה כך
ש- $0\notin K$. אזי קיים פונקציונל לינארי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ וקיים
$0<c$ כך שלכל $x\in K$ מתקיים $f(x)\geq c$
(או לחילופין, קיים $v\in\mathbb{R}^n$ כך שלכל $x\in K$ $\langle v,x\rangle\geq c$).
<u>הוכחה</u>: עבור R מספיק גדול הקבוצה $C=\{x\in K:\langle x,x\rangle\leq R\}$
אינה ריקה (למשל אפשר לקחת $R=\langle y,y\rangle$ עבור $y\in K$ כלשהו,
שהרי K לא ריקה). הקבוצה C סגורה (כחיתוך של כדור
סגור עם קבוצה סגורה K) וחסומה (כתת קבוצה של כדור
חסום). $\Leftarrow$ C קומפקטית. הפונקציה $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ רציפה ולכן
מקבלת מינימום על C. נסמן ב- y^* את נק' המינימום. כלומר,
לכל $y\in C$ מתקיים $g(y^*)\leq g(y)\leq R$. אבל אם $y\in K\setminus C$
אז לפי הגדרת C מתקיים $g(y)>R$ ולכן

y^* היא נק' מינימום של g ב- K. נגדיר $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
ע"י $f(x) = \langle x, y^* \rangle$ וניקח $C = \langle y^*, y^* \rangle$. כמובן, $0 < C$
כי $y^* \in K$ ולכן $y^* \neq 0$. (נראה ש- f ו- C אלה מקיימים את הדרוש.

יהי $x \in K$. K קמורה ולכן לכל $0 \le t \le 1$ מתקיים

$$tx + (1-t)y^* \in K$$

$$\Leftarrow \quad \langle y^*, y^* \rangle = g(y^*) \le g(tx + (1-t)y^*) =$$

$$= \langle tx + (1-t)y^*, tx + (1-t)y^* \rangle =$$

$$= t^2 \langle x, x \rangle + 2t(1-t)\langle x, y^* \rangle + (1-t)^2 \langle y^*, y^* \rangle$$

נגדיר $h(t) = t^2 \langle x, x \rangle + 2t(1-t)\langle x, y^* \rangle + ((1-t)^2 - 1)\langle y^*, y^* \rangle$

מתקיים $h(t) \ge 0$ לכל $0 \le t \le 1$ וכן $h(0) = 0$

$$\Leftarrow \quad 0 \le h'(0) = 2\langle x, y^* \rangle - 2\langle y^*, y^* \rangle$$

$\Leftarrow$ $f(x) = \langle x, y^* \rangle \ge \langle y^*, y^* \rangle = C$ וזה בדיוק מה שרצינו. ☺

<u>משפט ההפרדה II</u>: תהיינה $K, C \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצות סגורות, קמורות, זרות ולא ריקות. אם C קומפקטית אז קיימים פונקציונל לינארי $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ו- $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל $y \in K$ ולכל $x \in C$

$$f(x) < c < f(y)$$

<u>הוכחה</u>: הקבוצה $-C$ בוודאי קומפקטית ולכן $K - C$ סגורה (כסכום של סגורה וקומפקטית). כמו כן, $K - C$ קמורה (כסכום של קמורות) וכמובן לא ריקה. אבל $0 \notin K - C$ כי $K \cap C = \emptyset$.
$\Leftarrow$ ניתן להשתמש במשפט ההפרדה 1. קיים פונקציונל לינארי $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ וקיים $0 < d \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in K - C$ מתקיים $f(x) \ge d$. כלומר לכל $y \in K$ ולכל $x \in C$ מתקיים $f(y) - f(x) = f(y - x) \ge d$.
C קומפקטית ו- f רציפה. $\Leftarrow$ קיים $x^* \in C$ כך ש- $f(x) \le f(x^*)$ לכל $x \in C$. $x^* \in C$ ולכן $f(y) - f(x^*) \ge d$. לכן

$$f(y) \ge f(x^*) + d > f(x^*) + \frac{d}{2} > f(x^*) \ge f(x)$$

נבחר $c = f(x^*) + \frac{d}{2}$ ונקבל ש- f ו- c מקיימים את הדרוש. ☺

משפט המינמקס: תהי $A\in M_{k\times n}(\mathbb{R})$. אזי קיים $v\in\mathbb{R}$, $p\in\Delta^k$ ו- $q\in\Delta^n$ כך שלכל $1\le i\le k$ ולכל $1\le j\le n$

$$\sum_{j=1}^{k} p_i a_{ij} \ge v \ge \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$$

הוכחה: נתבונן בקבוצה $K = \underbrace{\mathrm{conv}\{a_{*1},\dots,a_{*n}\}}_{\text{הקמור של העמודות של } A} + \mathbb{R}^k_+$

K קמורה כסכום של שתי קבוצות קמורות. היא סגורה כסכום של סגורה ($\mathbb{R}^k_+$) וקומפקטית (הקמור של העמודות הוא קבוצה סגורה וחסומה) ו- K כמובן לא ריקה.

יהי $u\in\mathbb{R}$ כך ש- $(u,\dots,u)\notin K$. הקבוצה $\{(u,\dots,u)\}$ היא קמורה וקומפקטית וחיתוכה עם K ריק. לכן ניתן להשתמש במשפט ההפרדה: קיים $y\in\mathbb{R}^k$ כך שלכל $x\in K$ מתקיים

$$\sum y_i u = \langle y,(u,\dots,u)\rangle < \langle x,y\rangle \quad (*)$$

אם $x\in K$ אז לפי הגדרת K, לכל $\alpha>0$ ולכל $1\le i\le k$ מתקיים $x+\alpha e_i\in K$ כאשר e_i וקטור היחידה ה-i.

$\Leftarrow$ $\sum y_i u < \langle x+\alpha e_i, y\rangle = \langle x,y\rangle + \alpha y_i$

$\Leftarrow$ $y_i > \frac{\sum y_i u - \langle x,y\rangle}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0$.

$\Leftarrow$ $y_i\ge 0$ לכל $1\le i\le k$. נשים לב שלא ייתכן להיות $y=0$ כי אז לא ייתכן להיות אי שוויון חזק ב-(*).

לכן ניתן להגדיר $p=\frac{y}{\sum y_i}$ וברור ש- $p\in\Delta^k$.

מ-(*) מתקיים לכל $x\in K$

$$u = \frac{\sum y_i u}{\sum y_i} < \frac{\langle x,y\rangle}{\sum y_i} = \langle x,p\rangle$$

אז למעשה קיבלנו את הטענה הבאה: בהינתן $u\in\mathbb{R}$ כך ש- $(u,\dots,u)\notin K$ קיים $p\in\Delta^k$ כך שלכל $x\in K$ מתקיים

$$u < \langle x,p\rangle \qquad (**)$$

נתבונן בקבוצה $U=\{u\in\mathbb{R}:(u,\dots,u)\in K\}$, U לא ריקה כי $u=\max_{i,j} a_{ij}\in U$ אבל היא גם לא מכילה את כל $\mathbb{R}$ כי $u=\min_{i,j} a_{ij}-1\notin U$. אבל אם $u\in U$ אז מהגדרת K לכל $u<u'$ מתקיים $u'\in U$. $\Leftarrow$ U קרן חסומה מלרע.

לכן קיים $v = \inf U \neq -\infty$. מהגדרת חסם תחתון, לכל
$m\in\mathbb{N}$ מתקיים $v-\frac{1}{m} \notin U$, כלומר $(v-\frac{1}{m},\dots,v-\frac{1}{m})\notin K$
⇐ לפי (**) קיים $p^m\in\Delta^k$ כך שלכל $x\in K$ $\langle p^m,x\rangle > v-\frac{1}{m}$.
Δ^k קבוצה קומפקטית ולכן קיימת ל- $(p^m)\subseteq\Delta^k$ תת סדרה
מתכנסת $p^{m_l}\xrightarrow[l\to\infty]{} p\in\Delta^k$. מכפלה פנימית היא פונקציה רציפה
ולכן לכל $x\in K$ מתקיים $\langle p,x\rangle \xleftarrow[l\to\infty]{} \langle p^{m_l},x\rangle > v-\frac{1}{m_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} v$
כלומר $v\le\langle p,x\rangle$ לכל $x\in K$. בפרט אם ניקח את x
להיות העמודות של A נקבל שלכל $1\le j\le n$ $v\le\sum_{i=1}^{k} p_i a_{ij}$
זה האי שוויון הראשון שרצינו. (עבור) מציאת q כנדרש.
נראה ראשית ש- $(v,\dots,v)\in K$. אכן, מהגדרת חסם תחתון
קיימת סדרה $(u^m)\subseteq U$ כך ש- $u^m\xrightarrow[m\to\infty]{} v$. אבל אם
$u^m\in U$ אז $(u^m,\dots,u^m)\in K$ והרי K קבוצה סגורה.
לכן $(v,\dots,v)=\lim_{m\to\infty}(u^m,\dots,u^m)\in K$. מהגדרת K, קיים
$q\in\Delta^n$ וקיים $\alpha\in\mathbb{R}^k_+$ כך ש- $(v,\dots,v)=\sum_{j=1}^{n} q_j a_{*j}+\alpha$
⇐ לכל $1\le i\le k$ מתקיים $v\ge\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$ וזה בדיוק מה שרצינו.

<u>משפט המינימקס</u> (גירסה שקולה): תהי $A\in M_{k\times n}(\mathbb{R})$. אזי קיימים
$v\in\mathbb{R}$, $p^*\in\Delta^k$; $q^*\in\Delta^n$ כך שלכל $p\in\Delta^k$ ולכל $q\in\Delta^n$

$$g(p^*,q) \equiv \sum_{i,j} p_i^* q_j a_{ij} \ge v$$
$$g(p,q^*) \equiv \sum_{i,j} p_i q_j^* a_{ij} \le v$$

<u>הוכחת שקילות:</u>

(⇐) נניח את הגירסה המקורית ויהיו p^*,q^*,v שהיא
מבטיחה. אז לכל $p\in\Delta^k$ ולכל $q\in\Delta^n$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} p_i^* q_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{k} p_i^* a_{ij} \ge \sum_{j=1}^{n} q_j v = v$$
$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j^* a_{ij} = \sum_{i=1}^{k} p_i \sum_{j=1}^{n} q_j^* a_{ij} \le \sum_{i=1}^{k} p_i v = v$$

(⇒) ניקח את p ואת q להיות וקטורי יחידה ונקבל את
הדרוש.

הגדרה: <u>משחק בצורה אסטרטגית</u> מורכב מ-

① קבוצת שחקנים סופית $N=\{1,\dots,n\}$

② לכל שחקן $i\in N$ קבוצת אסטרטגיות טהורות S^i המכילה m_i איברים.

③ לכל שחקן $i\in N$ פונקציית תשלום $g^i: \times_{j\in N} S^j \longrightarrow \mathbb{R}$.

נאמר משחק בצורה אסטרטגית הוא שלשייה

$$\Gamma = \langle N, (S^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N} \rangle$$

<u>ההרחבה המעורבת</u> של Γ היא המשחק

$$\Gamma' = \langle N, (X^i)_{i\in N}, (G^i)_{i\in N} \rangle$$

כאשר -

- X^i קבוצת ההסתברויות על S^i. נסמן $\times_{i\in N} X^i = X$
- $G^i(x^1,\dots,x^n) = \sum_{s\in\times S^i} \left(\prod_{j=1}^{n} x^j(s^j)\right)\cdot g^i(s)$

<u>סימון</u>: בהינתן $x\in\times_{i\in N} X^i$ ו- $y^i\in X^i$ נסמן ב- $x|y^i$ את הווקטור $(x^1,\dots,x^{i-1},y^i,x^{i+1},\dots,x^n) \in \times_{i\in N} X^i$

<u>טענה</u>: לכל $y^i\in X^i$ מתקיים

$$G^r(x|y^i) = \sum_{j=1}^{m_i} y^i_j \, G^r(x|e^i_j)$$

הגדרה: <u>שיווי משקל</u> במשחק $\Gamma=\langle N,(S^i)_{i\in N},(g^i)_{i\in N}\rangle$ הינו נקודה $x=(x^1,\dots,x^n)\in\times_{i\in N} X^i$ כך שלכל $1\le i\le n$ ולכל $y^i\in X^i$ מתקיים $G^i(x) \ge G^i(x|y^i)$

<u>טענה</u>: $x\in X$ ש"מ ב- Γ אמ"מ לכל $i\in N$ ולכל $1\le j\le m_i$

$$G^i(x|e^i_j) \le G^i(x)$$

כאשר e^i_j הוא וקטור היחידה ה-j ב- X^i.

<u>הוכחה</u>:

($\Leftarrow$) אם x ש"מ אז לכל y^i מתקיים $G^i(x|\;^i) \le G^i(x)$

בפרט אם ניקח $y^i=e^i_j$.

($\Rightarrow$) נניח ש- $y^i\in X^i$. אז

$$G^i(x|y^i) = \sum_{j=1}^{m_i} y^i_j\, G^i(x|e^i_j) \le \sum_{j=1}^{m_i} y^i_j\, G^i(x) = G^i(x)$$

<u>משפט נקודת השבת של ברואר</u>: תהי $C\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה, קומפקטית ולא ריקה. ותהי $f:C\to C$ רציפה. אזי ל- f יש נק' שבת. כלומר, קיימת $x\in C$ כך ש- $x=f(x)$.

<u>משפט נאש</u>: בכל משחק בצורה אסטרטגית (עם מספר סופי של שחקנים ואסטרטגיות) קיים שיווי משקל.

<u>הוכחה</u>: נתבונן בקבוצה $X=\times_{i\in N}X^i\subseteq\mathbb{R}^{\sum m_i}$. לכל $1\le i\le n$, X^i קבוצה קומפקטית, קמורה, ולא ריקה. $\Leftarrow$ X קומפקטית, קמורה ולא ריקה כמכפלה של כאלה.

נגדיר פונקציה $f:X\to\mathbb{R}^{\sum m_i}$ באופן הבא:

ראשית, לכל $1\le i\le n$ ולכל $1\le j\le m_i$ נגדיר פונק' $h^i_j:X\to\mathbb{R}$ ע"י $h^i_j(x)=\max(0,G^i(x|e^i_j)-G^i(x))$.

כעת, לכל $1\le i\le n$ ולכל $1\le j\le m_i$ נגדיר $f^i_j:X\to\mathbb{R}$ ע"י

$$f^i_j(x)=\frac{x^i_j+h^i_j(x)}{1+\sum_{k=1}^{n}h^i_k(x)}$$

לבסוף לכל $1\le i\le n$ נגדיר $f^i=(f^i_1,\dots,f^i_{m_i})$ ו- $f=(f^1,\dots,f^n)$.

נטען ש- f רציפה. מספיק להראות שכל הקואורדינטות f^i_j שלה רציפות. ואכן, $G^i(x)$, $G^i(x|e^i_j)$ רציפות כי הן פולינומים ב- X. $\Leftarrow$ ההפרש $G^i(x|e^i_j)-G^i(x)$ פונק' רציפה. $\Leftarrow$ $h^i_j(x)$ רציפה כמקסימום של שתי פונק' רציפות. לפי ההגדרה של $h^i_j(x)$ מתקיים $h^i_j(x)\ge 0$ לכל $x\in X$ ולכן $\sum_{k=1}^{n}h^i_k(x)\ge 0$ $\Leftarrow$ $1+\sum_{k=1}^{n}h^i_k(x)>0$. x^i_j רציפה ולכן ברור ש- $x^i_j+h^i_j(x)$ ו- $1+\sum_{k=1}^{n}h^i_k(x)$ רציפות ולבסוף גם f^i_j רציפה. $\Leftarrow$ f רציפה.

נשים ♡ שמאחר ש- $x^i_j,h^i_j\ge 0$ נובע שגם $f^i_j\ge 0$. יתר על כן, לכל $1\le i\le n$ מתקיים

$$\sum_{j=1}^{m_i}f^i_j(x)=\frac{\sum x^i_j+\sum h^i_j(x)}{1+\sum h^i_k(x)}=\frac{1+\sum h^i_j(x)}{1+\sum h^i_k(x)}=1$$

$\Leftarrow$ לכל $1\le i\le n$ f^i היא העתקה לתוך X^i ולכן f היא העתקה לתוך X. כלומר קיבלנו פונק'

רציפה $f:X\to X$ כאשר X קמורה, קומפקטית ולא ריקה. לכן אנחנו עומדים בתנאים של משפט נק' השבת ונובע שקיימת $x\in X$ כך ש- $f(x)=x$. נראה ש- x זו מהווה נק' שיווי משקל. נניח שלא. אזי קיים $1\le i\le n$ וקיים $1\le j^*\le m_i$ כך ש- $G^i(x|e^i_{j^*})>G^i(x)$, כלומר

$$G^i(x|e^i_{j^*})-G^i(x)>0 \Rightarrow h^i_{j^*}(x)>0 \Rightarrow \Sigma h^i_k(x)>0.$$

אבל x נק' שבת $\Rightarrow$ $f^i_j(x)=x^i_j$. כלומר

$$x^i_j=\frac{x^i_j+h^i_j(x)}{1+\Sigma h^i_k(x)}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^i_j}+x^i_j\Sigma h^i_k(x)=\cancel{x^i_j}+h^i_j(x)$$

מאחר ש- $\Sigma h^i_k(x)>0$ נובע ש- $x^i_j>0$ אמ"מ $h^i_j(x)>0$ ובמקרה כזה מתקיים גם $G^i(x|e^i_j)>G^i(x)$. כעת

$$G^i(x)=\sum_{j=1}^{m_i}x^i_jG^i(x|e^i_j)=\sum_{j:x^i_j>0}x^i_jG^i(x|e^i_j)>$$

$$>\sum_{j:x^i_j>0}x^i_jG^i(x)=\sum_{j=1}^{m_i}x^i_jG^i(x)=G^i(x)$$

זו סתירה. לכן x ש"מ וסיימנו. (11)

<u>הגדרה</u>: <u>משחק שיתופי</u> מוגדר ע"י זוג סדור (N,V) כאשר $N=\{1,\dots,n\}$ קבוצת שחקנים ; $V:2^N\to\mathbb{R}$ כאשר $V(\emptyset)=0$. תת קבוצה $S\subseteq N$ נקראת <u>קואליציה</u> ; - $V(N)$ נקרא <u>השווי</u> של S.

<u>הגדרה</u>: יהי (N,V) משחק שיתופי. זוג שחקנים $i,j\in N$ יקראו <u>חילופיים</u> אם לכל $S\subseteq N\setminus\{i,j\}$ מתקיים

$$V(S\cup\{i\})=V(S\cup\{j\})$$

שחקן $i\in N$ נקרא <u>שחקן אפס</u> אם לכל $S\subseteq N$ מתקיים

$$V(S\cup\{i\})=V(S)$$

<u>הגדרה</u>: תהי N קבוצת שחקנים ונסמן ב- G^N את קבוצת הפונקציות $V:2^N\to\mathbb{R}$ כך ש- $V(\emptyset)=0$, כלומר G^N קבוצת פונק' השווי שניתן להגדיר על N. תהי $\varphi:G^N\to\mathbb{R}^n$.

נאמר ש- φ יעילה אם לכל $v \in G^N$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i v = v(N)$$

נאמר ש-φ מקיימת את אקסיומת השחקנים הסימטריים אם לכל $v \in G^N$ ולכל זוג שחקנים חילופיים i,j ב-v מתקיים

$$\varphi_i v = \varphi_j v$$

נאמר ש-φ מקיימת את אקסיומת שחקן האפס אם לכל $v \in G^N$ ולכל שחקן אפס i ב-v מתקיים

$$\varphi_i v = 0$$

נאמר ש-φ אדיטיבית אם לכל $v,w \in G^N$ מתקיים

$$\varphi(v+w) = \varphi v + \varphi w$$

הגדרה: יהי (N,v) משחק שיתופי. ערך שפלי של המשחק מוגדר ע"י

$$\varphi_i v = \frac{1}{n!} \sum_R \varphi_i^R v$$

כאשר φ_i^R מוגדרת לכל יחס סדר R של השחקנים ע"י

$$\varphi_{i_j}^R v = v(i_1,\dots,i_j) - v(i_1,\dots,i_{j-1})$$

כאשר $i_1 R i_2 R \dots R i_n$.

טענה: ערך שפלי הוא יעיל, מקיים את אקס' השחקנים הסימטריים, מקיים את אקס' שחקן האפס ואדיטיבי.

הוכחה: ראשית, (ראה שלכל R, φ_i^R יעילה, מקיימת את אקס' שחקן האפס ואדיטיבית. אכן, יהי R יחס סדר של השחקנים. אזי:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i_j}^R v = \sum_{j=1}^{n} \left[v(i_1,\dots,i_j) - v(i_1,\dots,i_{j-1}) \right] =$$

(טור שחו $= -v(\emptyset) + v(i_1,\dots,{}_n) = v(N) - 0 = v(N)$

אם i_j שחקן אפס במשחק אז

$$\varphi_{i_j}^R v = v(i_1,\dots,i_j) - v(i_1,\dots,i_{j-1}) =$$

$$= v(i_1,\dots,i_{j-1}) - v(i_1,\dots,i_{j-1}) = 0$$

ואם v,w שני משחקים אז

$$\varphi_{i_j}^R (v+w) = (v+w)(i_1,\dots,i_j) - (v+w)(v_{i},\dots,v_{j-1}) =$$

$$= v(i_1,\dots,i_j) + w(i_1,\dots,i_j) - v(i_1,\dots,i_{j-1}) - w(i_1,\dots,i_{j-1}) =$$

$$= \big(v(i_1,\dots,i_j) - v(i_1,\dots,i_{j-1})\big) + \big(w(i_1,\dots,i_j) - w(i_1,\dots,i_{j-1})\big) =$$

$$= \varphi_{i_j}^R v + \varphi_{i_j}^R w$$

ומכאן ברור שערך שפלי מקיים שלוש תכונות אלה, שכן:

$$\sum_{i=1}^n \psi_i v = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R v = \frac{1}{n!}\sum_R \sum_{i=1}^n \varphi_i^R v = \frac{1}{n!}\sum_R v(N) = \frac{n!}{n!} v(N) = v(N)$$

אם i שחקן אפס אז

$$\psi_i v = \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R v = \frac{1}{n!}\sum_R 0 = 0$$

ואם v,w משחקים אז

$$\psi_i(v+w) = \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R(v+w) = \frac{1}{n!}\sum_R(\varphi_i^R v + \varphi_i^R w) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R v + \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R w = \psi_i v + \psi_i w$$

נותר להוכיח שערך שפלי מקיים את אקסיומת השחקנים הסימטריים. יהיו i,j שחקנים חילופיים במשחק v.

לכל R נמצא סדר R^* שבו רק השחקנים i,j החליפו מקומות והשאר נשארו באותו סדר.

נשים לב שלכל $k,l \in N\setminus\{i,j\}$ אז lRk אמ"מ lR^*k

ואילו kRj אמ"מ kR^*i ! kRi אמ"מ kR^*j.

ההתאמה $R \mapsto R^*$ היא כמובן הפיכה ולכן כאשר R עובר על כל הסדרים גם R^* עובר על כל הסדרים. לכן

$$\psi_i v = \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R v = \frac{1}{n!}\sum_{R^*} \varphi_i^{R^*} v$$

נגדיר $P_k^R = \{l : lRk\}$. אז למעשה

$$\varphi_i^R v = v(P_i^R \cup \{i\}) - v(P_i^R)$$

נראה שכיון i,j חילופיים אז $v(P_i^R) = v(P_j^{R^*})$.

אם iRj אז $P_i^R = P_j^{R^*}$ ובפרט השווי שלהן זהה.

ואם jRi אז גם $P_i^R = P_j^{R^*}$ ולכן $v(P_i^R) = v(P_j^{R^*})$

באופן דומה $v(P_i^R \cup \{i\}) = v(P_j^{R^*} \cup \{j\})$ לכן

$$\psi_i v = \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R v = \frac{1}{n!}\sum_R \big(v(P_i^R \cup \{i\}) - v(P_i^R)\big) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_R \big(v(P_j^{R^*} \cup \{j\}) - v(P_j^{R^*})\big) = \frac{1}{n!}\sum_{R^*} \varphi_j^{R^*} v = \psi_j v$$

⑥

<u>טענה:</u> תהי N קבוצת שחקנים. אזי
$$G^N = \{v : 2^N \to \mathbb{R} \;:\; v(\emptyset)=0\}$$
מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ממימד 2^n-1

<u>הוכחה:</u> אם $v,w \in G^N$ ו- $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ אז
$$(\alpha v+\beta w)(\emptyset) = \alpha v(\emptyset)+\beta v(\emptyset) = \alpha\cdot 0+\beta\cdot 0 = 0$$
$\Leftarrow$ $\alpha v+\beta w \in G^N$. ברור ששאר האקסיומות מתקיימות (כאשר $v\equiv 0$ הוא וקטור האפס). ולכן G^N מרחב וקטורי.

נראה שהאוסף $\{w_S\}_{\emptyset\neq S\subseteq N} \subseteq G^N$ כאשר
$$w_S(T) = \begin{cases} 1 & S=T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
בסיס ונקבל ש- $\dim G^N = 2^n-1$ שהרי יש 2^n-1 קבוצות לא ריקות ב- N. ראשית, ברור שלכל $\emptyset\neq S\subseteq N$ $w_S \in G^N$ כי $w_S(\emptyset)=0$ שהרי $S\neq\emptyset$.

נראה שהפונקציות בת"ל. נניח שיש צירוף לינארי $\sum_{\emptyset\neq S}\alpha_S w_S = 0$ אזי לכל $\emptyset\neq T\subseteq N$ מתקיים $\sum_{\emptyset\neq S}\alpha_S w_S(T) = 0$,
$$0 = \sum_{\emptyset\neq S}\alpha_S w_S(T) = \alpha_T w_T(T) + \sum_{\substack{\emptyset\neq S\\ S\neq T}}\alpha_S w_S(T) =$$
$$= \alpha_T\cdot 1 + 0$$
$\Leftarrow$ $\alpha_T=0$ לכל $T\neq\emptyset$ ולכן הפונקציות בת"ל.

ברור גם שהן פורשות כי אם $v\in G^N$ אז
$$v = \sum_{\emptyset\neq S\subseteq N} v(S)\, w_S$$
אכן, אם $\emptyset\neq T\subseteq N$ אז
$$\sum_{\substack{\emptyset\neq S\\ S\neq T}} v(S) w_S(T) + v(T) w_S(T) =$$
$$= 0 + v(T)\cdot 1 = v(T)$$
וכמובן ש- $\sum_{\emptyset\neq S\subseteq N} v(S) w_S(\emptyset) = 0$ סיימנו. ☺

<u>טענה:</u> האוסף $\{u_S\}_{\emptyset\neq S\subseteq N}$ כאשר
$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & S\subseteq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
הוא בסיס של G^N.

הוכחה: ראשית ברור שלכל $\emptyset \neq S \subseteq N$ $U_s \in G^N$ שהרי $U_s(\emptyset) = 0$ (לא יכול להיות ש- $S \subseteq \emptyset$)
מאחר שיש 2^n-1 פונק' מהצורה הנ"ל מספיק להראות שהן בת"ל. אכן, נניח ש- $\sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} \alpha_s U_s = 0$. נניח בשלילה שקיים $S \neq \emptyset$ כך ש- $\alpha_s \neq 0$. אז הקבוצה $\Pi = \{S \subseteq N : \alpha_s \neq 0\}$ אינה ריקה. תהי T קבוצה מינימלית ביחס להכלה ב- Π.
אז:

$$0 = \sum \alpha_s U_s(T) = \sum_{S \in \Pi} \alpha_s U_s(T) + \sum_{S \notin \Pi} \overset{0}{\alpha_s} U_s(T) =$$
$$= \sum_{S \in \Pi} \alpha_s U_s(T) = \sum_{T \neq S \in \Pi} \alpha_s \cdot 0 + \qquad = \alpha_T$$

כי T מינימלית ביחס להכלה
בקבוצה Π

וזו סתירה. לכן האוסף בת"ל ומהווה בסיס ל- G^N. ☺

<u>משפט שפלי</u>: קיימת פונק' יחידה $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$ המקיימת יעילות, אקס' השחקנים הסימטריים, אקס' שחקן האפס ואדיטיביות.
<u>הוכחה</u>: את הקיום כבר הראינו קודם. נוכיח יחידות.
נניח ש- φ, ψ שתי פונקציות כנ"ל. צריך להראות שלכל $\in N$ ולכל משחק V מתקיים
$$\varphi_i V = \psi_i V$$
נטען שמספיק להוכיח את השוויון עבור פונק' V מהצורה $W = \alpha_s U_s$ כאשר $\emptyset \neq S \subseteq N$ ו- U_s פונקציות הבסיס שהוגדרה למעלה. אם נוכיח זאת אז מהאדטיביות נקבל
$$\varphi_i V = \varphi_i \sum \alpha_s U_s = \psi_i \sum \alpha_s U_s = \psi_i V$$

אם כן, יהי $\alpha_s \in \mathbb{R}$ ונתבונן ב- $W = \alpha_s U_s$. מתקיים
$$W(T) = \begin{cases} \alpha_s & S \subseteq T \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
נשים לב שלכל $i, j \in S$ הם שחקנים תחליפיים ואילו אם $i \notin S$ הוא שחקן אפס. לכן לפי ההנחות על φ ועל ψ מתקיים
$$\forall i \notin S \qquad \varphi_i W = 0 = \psi_i W$$
$$\forall i, j \in S \qquad \varphi_i W = \varphi_j W \ , \quad \psi_i W = \psi_j W$$

יהי $i_0 \in S$. אז מהיעילות נקבל שלכל $i \in S$ מתקיים

$$\alpha_S = W(N) = |S|\cdot \varphi_{i_0} W = |S|\varphi_i W$$

ולכן $\varphi_i W = \frac{\alpha_S}{|S|}$. באותו אופן $\psi_i W = \frac{\alpha_S}{|S|}$

לכן אם $i \in S$ $\varphi_i W = \frac{\alpha_S}{|S|} = \psi_i W$

ואם $i \notin S$ אז $\varphi_i W = 0 = \psi_i W$

$\Leftarrow$ $\varphi_i W = \psi_i W$ לכל $i \in N$ וזה בדיוק מה שרצינו. ☺

<u>הגדרה</u>: נאמר ש- $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^n$ מקיימת את אקסיומת התרומות השוליות אם לכל $V, W \in G^N$ אם לכל $S \subseteq N$ מתקיים $W(S\cup\{i\}) - W(S) = V(S\cup\{i\}) - V(S)$ אז $\varphi_i V = \varphi_i W$

<u>טענה</u>: יהי (N,V) משחק שיתופי. אזי ערך שפלי מקיים

$$\varphi_i V = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \binom{n-1}{|S|}^{-1}\cdot \frac{1}{n}\left(V(S\cup\{i\}) - V(S)\right)$$

<u>הוכחה</u>: ערך שפלי הוגדר ע"י $\varphi_i V = \frac{1}{n!}\sum_R \varphi_i^R V$ כאשר $\varphi_i^R V = V(P_i^R \cup\{i\}) - V(P_i^R)$. לכן

$$\varphi_i V = \frac{1}{n!}\sum_R \left(V(P_i^R\cup\{i\}) - V(P_i^R)\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \left(V(S\cup\{i\}) - V(S)\right)\left|\{R : P_i^R = S\}\right| =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \left(V(S\cup\{i\}) - V(S)\right)|S|!\,(n-|S|-1)!$$

כי ייבחר R רק ש- $P_i^R = S$ $|S|$ איברים שאותם ניתן לסדר בכל סדר. אחריהם יופיע i ואז גם השאר ניתן לסדר בכל סדר. ☺

נחשב: $\frac{1}{n!}|S|!\,(n-|S|-1)! =$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{n-1}{|S|}^{-1}$$

וזה בדיוק מה שרצינו.

<u>הגדרה</u>: <u>משחק רוב משוקלל</u> מוגדר ע"י $\{1,\dots,n\} = N$, מכסה $0 < q$ ומשקולות $w_1,\dots,w_n$ עם פונקציית שווי

$$V(S) = \begin{cases} 1 & \sum_{i\in S} w_i \ge q \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מסמנים את המשחק ע"י $V = [q; w_1,\dots,w_n]$