I

האוניברסיטה

מס׳ מחברת 2

מס׳ מזהה

0	6	6	1	6	4	5	5	-	4

לפני הבחינה אנא מלא את הפרטים בכתב ברור ובדייקנות

שם הקורס מבנים אלגבריים I

מס׳ הקורס 80445

שם המורה פרופ׳ שחר מוזס

תאריך בחינה 12/2/07

הוראות לתלמיד

1. הכן את התעודה המזהה לביקורת.
2. עליך למסור את המחברת בשלמותה לפני עזיבת האולם. עזיבת האולם ללא מסירת מחברת דינה ציון 0.
3. כתוב את התשובות בעט בכתב יד ברור ונקי על עמוד אחד של כל דף. אין לכתוב בשוליים.
4. כתוב טיוטה רק על צד אחד של הדף - וסמן "טיוטה". מחק את הטיוטה בצורה ברורה לפני מסירת המחברת. אין לתלוש דפים מהמחברת.

בהצלחה

לשימוש המורה

הציון (0-100) 99

המחברת נבדקה בתאריך ______

חתימת המורה ______

שאלות מספר:

1, 4, 5, 6

1	25
4	25
5	24
6	25

④ יהי G חבורה סופית ויהי $p \mid |G|$, ראשוני. אזי, ישנו איבר מסדר p ב-G.
(כלומר $e \neq a \in G$, כך ש- ~~a~~ $a^p = e$, ולכל $t<p$, $a^t \neq e$)

<u>הוכחה:</u>

נגדיר קבוצה: $\Omega = \{(x_0,\dots,x_{p-1}) : \prod_{j=0}^{p-1} x_j = e\}$, כאשר e איבר היחידה ב-G.

מובן כי $\Omega \neq \emptyset$, כי הרי $(e,\dots,e) \in \Omega$, כי $e \cdots e = e^p \underset{\uparrow}{=} e \cdot e^{p-1} \underset{\uparrow}{=} e^{p-1} \underset{\uparrow}{=} \ldots = e$.

e ניטרלי לכפל

המשך באינדוקציה.

נאפיין את כל האיברים ב-Ω.

נשים לב כי ניתן לבחור את p-1 האיברים הראשונים ב-p-יה, בחירה כללית ~~[illegible]~~ ותהיה הבחירה מגדירה את האיבר האחרון, כלומר, לכל בחירה של איברים מ-G, $y_0,\dots,y_{p-2}$, ישנו איבר מתאים ב-Ω, והוא $(y_0 \cdots y_{p-2})^{-1}$.

לכן Ω היא אוסף כל הנ-יות מאיברי G, באורך p-1, לכן ניתן להסיק כי $|\Omega| = n^{p-1}$.

נגדיר יחס שקילות על איברי Ω: $x=(x_0,\dots,x_{p-1})$ שקול ל- $y=(y_0,\dots,y_{p-1})$, אם x מתקבל מ-y ע"י סיבוב, כלומר, ~~[illegible]~~ ישנו $0 \le r < p$, כך שלכל $0 \le j \le p-1$, $x_j = y_{j+r \pmod p}$. נראה בהמשך כי זה אכן יחס שקילות.

נציין טענה (ונוכיח בהמשך): עבור p ראשוני, p-יה נתונה $x=(x_0,x_1,\dots,x_{p-1})$, אם איברי ה-p-יה לא כולם שווים זה לזה אזי <u>כל</u> ההזזות הציקליות
$(x_1,x_2,\dots,x_{p-2},x_{p-1},x_0), \dots, (x_{p-1},x_1,x_2,\dots,x_{p-2})$
שונות זו מזו.

נשים לב כי $p \mid n^{p-1}$, שכן $p \mid n$, לכן $p \mid |\Omega|$.

נתבונן בפירוק Ω למחלקות שקילות. מהטענה נובע כי גודל כל מחלקת שקילות הוא 1 או p. ~~[illegible]~~ כיוון שסכום גדלי מחלקות השקילות (שהוא גם הגודל של הקבוצה Ω) חייב להתחלק ב-p, וישנה מחלקת שקילות בגודל 1, היא $\{(e,\dots,e)\}$. ~~[illegible]~~

נקבל כי ישנן לפחות עוד p-1 מחלקות שקילות בגודל 1, כלומר ישנו $e \neq a \in G$ כך ש- $a^p = e$.

~~[illegible]~~

נראה כי הסדר של a הוא p, ואז (בהנחה שנוכיח את העזר), סיימנו.

נניח בשלילה כי ישנו $k<p$ כך ש $a^k=e$, ו-k מינימלי כזה.

$k\neq0$, כי $a^0=e$ ובחרנו את a כך ש $a\neq e$.

נחלק את p ב-k עם שארית, ונקבל: $p=qk+r$. כאשר $r<k<p$. כעת:

$$e\underset{\substack{\uparrow\\ \text{מהגדרת } a}}{=}a^p=a^{qk+r}=a^{qk}\cdot a^r=(a^k)^q\cdot a^r=e\cdot a^r$$

לכן ישנו $r<k$ כך ש: $e=a^r$, בסתירה למינימליות k.

טענה: לכל p ראשוני, וחבורה G בגודל p, כל איבר $e\neq z\in G$ יוצר את G, כלומר, $G=\langle z\rangle$.

הוכחה: נבחר $e\neq z\in G$ ונתבונן ב $\langle z\rangle=\{z^n : n\in\mathbb{N}\}$. ראינו כבר כי $\langle z\rangle$ תת-חבורה. ממשפט לגרנז', $|\langle z\rangle| \,\big|\, |G|$. כיוון ש $|G|=p$, נקבל כי של $|\langle z\rangle|$. מראשוניות p, $|\langle z\rangle|=1$ או $p=|\langle z\rangle|$, ויש לפחות 2 איברים ב $\langle z\rangle$, כי $z,e\in\langle z\rangle$, לכן $p=|\langle z\rangle|$. כיוון ש $\langle z\rangle\subseteq G$ והקבוצות שוות גודל, נסיק כי $G=\langle z\rangle$, כלומר, z יוצר את G, כנדרש.

טענה: אם p ראשוני $x=(x_0,\dots,x_{p-1})$, אזי או שכל ההזזות שוות זו לזו, או שכל הזזה שונה מהאחרת.

הוכחה: נניח כי $x=(x_0,\dots,x_{p-1})$, $y=(x_r,\dots,x_{p-1},x_0,\dots,x_{r-1})$, ו-$x=y$, כלומר, ($0\neq r$, כי אם $r=0$, ברור $x=y$.)

לכל j, $x_{(j+r)\bmod p}=x_j$. בפרט, נקבל כי $x_0=x_r=x_{2r}=\dots=x_{(p-1)r}$, [illegible]

(באינדקסים) הוא $\mathbb{Z}_p$, כלומר, מודולו p. מהטענה הקודמת, כל איבר יוצר את $\mathbb{Z}_p$, בפרט r הנ"ל כי הנחנו ש $0\neq r$ לכן לכל $t\in\mathbb{Z}_p$, ישנו מספר $k\in\mathbb{Z}_p$, כך ש $t=r\cdot k$, לכן $x_0=x_1=\dots=x_{p-1}$, לכן כל איברי הסדרה שווים זה לזה, כנדרש.

טענה: היחס שהוגדר: $y\sim x$ אמ"מ איברי y מתקבלים מהזזה של איברי x הוא יחס שקילות.

רפלקסיביות: ע"י הזזה באפס $x=(x_0,\dots,x_{p-1})=(x_0,\dots,x_{p-1})=x$ $\Leftarrow$ $x\sim x$.

סימטריה: נניח כי y מתקבל מ-x ע"י הזזה ב-r. אזי x מתקבל מ-y ע"י הזזה ב-$p-r$.

טרנזיטיביות: נניח כי y מתקבל מ-x ע"י הזזה ב-r, z מתקבל מ-y ע"י הזזה ב-s.

אזי, z מתקבל מ-x ע"י הזזה ~~[illegible]~~ ב $(r+s)$.

5) הראו כי תחום שלמות סופי הוא שדה.

הוכחה: כיוון שתחום שלמות הוא קומוטטיבי (בכפל), וללא מחלקי אפס, די למצוא איבר יחידה (ניטרלי לכפל), והופכי לכל איבר שונה מאפס, ונקבל כי הקבוצה מקיימת את האקסיומות של שדה.

~~יהא $a\in R$~~ נניח כי R תחום שלמות סופי.

נראה תחילה קיום איבר יחידה.

יהא $0\neq a\in R$. נגדיר העתקה $\varphi: R\to aR$, ע"י $\varphi(x)=ax$

φ זו חח"ע, כי אם $ax=ay$, אזי $ax-ay=0$, מדיסטריבוטיביות ב-R, $a(x-y)=0$, כיוון שאין ב-R מחלקי אפס (R תחום שלמות), נקבל כי $a=0$ או $x-y=0$. מבחירתנו, $a\neq0$, לכן $x-y=0$. לכן $y=x$, כלומר $\varphi(x)=\varphi(y) \Rightarrow x=y \Rightarrow \varphi$ חח"ע.

φ הנ"ל היא על, כי אם $z\in aR$ אזי z הוא מהצורה ax, עבור $x\in R$ כלשהו.

$\varphi(x)=ax=z \Rightarrow \varphi$ על.

כיוון ש-$a\in R$ ו-φ חח"ע ועל, ישנו $u\in R$ כך ש-$a=au$. נראה כי u היא איבר ניטרלי לכפל.

נשים לב ש-$R=aR$, כי $aR\subseteq R$ (R סגור לכפל משמאל), ואלה קבוצות סופיות עם התאמה חח"ע ועל ביניהן.

צריך להפוך את הסדר

נניח כי $x\in R$. אזי, כיוון ש-$R=aR$, ישנו $b\in R$ כך ש-$x=ab$.

כעת:

$$x\cdot u=(ab)u=a(bu)=a(ub)=(au)b=ab=x$$

אסוציאטיביות הכפל ב-R

מתחום שלמות לכן הכפל קומוטטיבי

אסוציא' הכפל

$au=a$ מבחירת u

הגדרת x

לכן u איבר יחידה.

24/25

יהי $0\neq b\in R$. נראה קיום איבר $c\in R$ כך ש-$bc=u$ (u איבר יחידה שמצאנו).

נתבונן בהעתקה $\varphi: R\to bR$. מהנ"ל, $R=bR$ (a שבחרנו היה איבר שרירותי).

נשים לב כי $u\in R$. לכן, $u\in bR$, כלומר, ישנו $c\in R$ כך ש-$u=bc$

לכן b הפיך. לכן נקבל כי R הינו שדה, כנדרש.

$A, B \trianglelefteq G$

$\forall a\in A,\ b\in B \quad , ab = ba$

נניח $aba^{-1}\in B$, כי B נורמלית, לכן יש $b'\in B$

$ab = b'a \Leftarrow aba^{-1} = b'$ e p

[illegible] $bab^{-1}\in A$, כי A נורמלית, לכן יש $a'\in A$

$\left\{\begin{matrix} ba = a'b \\ ab = b'a \end{matrix}\right\} \Leftarrow bab^{-1} = a'$ e p

$ba = a'b \Rightarrow b = a'ba^{-1}$

$ab = b'a$

~~$ba = b$~~

~~$\Rightarrow ab = a(a'ba^{-1})b = aa'ba^{-1}b$~~

~~$b' = a$~~

$hg_0 = g \Rightarrow h = gg_0^{-1}$

$$|O(x)| = \frac{|G|}{|Stab_G x|}$$

~~$\varphi: O(x)$~~

$\varphi\left(G/_{Stab_G(x)}\right) \longrightarrow O(x)$

$\varphi(gH) = gx.$

$g_1x = g_2x \overset{?}{\Leftrightarrow} g_1H = g_2H \Rightarrow g_1 \in g_2H = g_2^{-1}g_1 g_2^{-1} \in H \Rightarrow$ ~~$(g_1g_2^{-1})x = x$~~

$(g_2^{-1}g_1)(x) = x \Rightarrow g_1x = g_2x$

1) א- הראו כי לחבורה מסדר $\underbrace{p^n}_{p \text{ ראשוני}}$ יש מרכז לא טריוויאלי.

הוכחה: נתבונן בפעולת G על G, ע"י הצמדה, כלומר, הפעולה של איבר $g\in G$ על $x\in G$ היא $x \to gxg^{-1}$.

ניתן לפרק את G לאיחוד זר של מסלולים, כיוון שלכל $x,y\in G$, $O(x)\cap O(y)\neq\emptyset \Rightarrow O(x)=O(y)$. (נראה זאת בהמשך). ~~[illegible]~~ |G| ו t, מקיים $t|p^n$, כלומר $t=p^r$ או $t=1$ הנמקה

~~[illegible]~~

מיד נראה שגם כי גודל כל מסלול מחלק את גודל החבורה, לכן נקבל כי גודל כל מסלול הוא 1 או חזקה של p (כלומר p^r). כיוון שיש מסלול בגודל 1 - $\{e\}$ (כי לכל $g\in G$, $g\cdot e\cdot g^{-1}=e$), נקבל שישנם לפחות עוד p-1 מסלולים בגודל 1, כלומר ישנם עוד p-1 איברים המקיימים $gxg^{-1}=x$, כלומר $xg=gx$ (לכל g).

25

זה בדיוק אומר שכל איבר כזה נמצא, במרכז של G, כי

$$Z(G)=\{x\in G: \forall g\in G,\ gx=xg\}$$

לכן ישנם עוד איברים בZ(G) שאינם e, לכן Z(G) לא טריוויאלי.

נוכיח את שתי הטענות: (עבור חבורה G הפועלת על קבוצה X)

* אם $O(x)\cap O(y)\neq\emptyset$, אזי $O(x)=O(y)$.

הוכחה: נניח כי $z\in O(x)\cap O(y)$, ~~[illegible]~~

היות ו$z\in O(x)$, אזי יש g_0 כך ש$z=g_0x$ (כאן סימון לכך שg הפועל על x).

~~[illegible]~~

$$O(z)=\{gz: g\in G\} \underset{\uparrow}{=} \{(hg_0)z: h\in G\} \underset{\uparrow}{=} \{h(g_0z): h\in G\} = \{h(x): h\in G\}$$

כי לכל g ניתן לכתוב: $h=gg_0^{-1}$ באופן יחיד.

מהגדרת הפעולה

$$=\{hx: h\in G\} = O(x).$$

באופן דומה, נקבל כי $O(z)=O(y)$, לכן $O(x)=O(y)$.

$|Z(G)|=p$. $G/Z(G)$ - מכורה בגודל p . $Z(G)=\{1,z,\dots,z^{p-1}\}$

$G/Z(G)=\{x\cdot Z(G): x\in G\}$

$=\{Z(G), x_1\cdot Z(G),\dots, x_{p-1}\cdot Z(G)\}$

$=\{Z(G),\{x_1,x_1z,\dots,x_1z^{p-1}\},\dots,\{x_{p-1},\dots,x_pz^{p-1}\}\}$.

$xy\neq yx$: מהנחת השלילה, קיימים $x,y\in G/Z(G)$ כך ש e

$\Rightarrow y^{-1}xy\neq x \Rightarrow x^{-1}y^{-1}xy\neq e$

$\varphi: Z(G)\times G/Z(G)\to G$

$G/Z(G)$ ציקלית $\Rightarrow$ נגדיר: $\varphi(y, xZ(G))=yx$

$|G|=(Z(G), G/Z(G))$

$\varphi(a^i,x^jZ)=\varphi(a^k,x^lH)=a^kx^l$

a^ix^j

$\Leftarrow$

$x^{j-l}=a^{k-i}$ אז $x^{j-l}\in Z$ אז $j=l$! $i=k$.

$\varphi((a^{i_1}x^{j_1}z)\cdot(a^{i_2},x^{j_2}z))=(a^{i_1}\cdot x^{j_1})a^{i_2}\cdot x^{j_2}=a^{i_1+i_2}\cdot x^{j_1+j_2}$

* גודל של מסלול מחלק את גודל החבורה.

הוכחה: יהי $x \in X$. נראה כי $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : gx = x\}$ תת-חבורה

של G: $\mathrm{Stab}_G(x) \neq \emptyset$, כי $ex \overset{def}{=} x$.

אם $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_G(x)$ אזי: $(g_1 g_2)x \underset{\uparrow}{=} g_1(g_2 x) \underset{\uparrow}{=} g_1 x = \underset{\uparrow}{x}$

הגדרת הפעולה. g_2 איבר במייצב של x. g_1 איבר במייצב של x

לכן סגירות לכפל.

ולכן אם $g \in \mathrm{Stab}_G(x)$, אזי $x = gx$

נפעיל על שני אגפי השוויון את g^{-1}, ונקבל: $g^{-1}x = g^{-1}(gx) \underset{\uparrow}{=} (g^{-1}g)x = ex = x$

הגדרת הפעולה.

לכן סגירות להופכי, לכן המייצב של x ב-G הוא תת-חבורה.

ונסמן: $H = \mathrm{Stab}_G(x)$

נגדיר העתקה בין מחלקות של $\mathrm{Stab}_G(x)$ ובין המסלול של x, $\varphi : G/\mathrm{Stab}_G(x) \to O(x)$, ע"י $\varphi(gH) = gx$.

φ מוגדרת היטב, כי אם $g_1 H = g_2 H$, בפרט $g_1 \in g_2 H$ (כי $e \in H$ כי H תת-חבורה)

ולכן $g_2^{-1} g_1 \in H$, כלומר $g_2^{-1} g_1$ איבר במייצב.

$\Rightarrow g_2^{-1} g_1 x = x \Rightarrow g_1 x = g_2 x$

לכן φ היטב מוגדרת היא.

φ חח"ע, כי אם $g_1 x = g_2 x$, g_2

אזי $g_2^{-1} g_1$ איבר במייצב (המשפט נכון), לכן $g_1 H = g_2 H$.

φ על, כי אם $z \in O(x)$, אזי $z = gx$ ומתקיים: $\varphi(gH) = gx = z$

לכן ישנה העתקה חח"ע ועל בין G/H ובין $O(x)$. כיוון ש-G סופית,

$|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$, לכן גודל המסלול מחלק את גודל החבורה. ולכן סיימנו את

טענת העזר והוכחנו כי ל-G יש מרכז לא טריוויאלי

$A \cap B = \{e\}$ ~~$A \triangleleft B$~~, B $B, A \triangleleft G$,

$\underbrace{a \cdots a}_{t} \underbrace{b \cdots}_{s} \underbrace{b a \cdots a}_{t_1} \underbrace{b \cdots b}_{s_1}$

$aba^{-1} \in B$

$aba^{-1} = b_1$
$bab^{-1} = a_1$

נבחר $x \in G \setminus Z(G)$.

ונניח כי

$ab \neq ba \Rightarrow b \neq aba^{-1} \Rightarrow \exists b_1 \neq b$ s.t $b_1 = \overset{\cup}{aba^{-1}}(b^{-1}b)$

$\hat{B}$ $= a(ba^{-1}b^{-1})b$ $\hat{A}$

$g_2 g_1 = h_2 q_2 h_1 q_1 = h_2 h_1 \overset{q_2 q_1}{q_2 q_1} = h_2 h_1 q_2 q_4$

~~$h_1 h_2 q_1 q_2 = h_1 q_1$~~

$= a\hat{a}b \Rightarrow b_1 = a\hat{a}b$

$h_2 q_2$ $h_1 h_2 q_1 q_2 = h_1 q_1 h_2 q_2 = g_1 h_1$

$\rightarrow b_1 b^{-1} = a\hat{a} = ,$
$b_1 b^{-1} a\hat{a} \in A \cap B$

~~$ab = ab(a^{-1}a) = aba^{-1}a = b_1 a$~~

$(ak)ak = a^2 k^2$

$aba^{-1} = b_1 \in B$
$bab^{-1} = a_1 \in A$ $\Rightarrow$ ~~$aba^{-1}b_1^{-1} = e$~~ $\Rightarrow ab = b_1 a$ ~~$(a^{-1}k)$~~

$B \ni b_1 = aba^{-1} = aba^{-1}(b^{-1}b) = a(ba^{-1}b^{-1})b = a\hat{a}b$

$\Rightarrow b_1 b^{-1} = a\hat{a} \Rightarrow a\hat{a} = e \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} = e \Rightarrow aba^{-1}b \Rightarrow ab = ba$.

$G/Z(G)$ ~~n_q~~ ~~n_q~~ $n_q(G) \equiv 1 \mod q \Rightarrow 1, 10, 19, 28, 37, 46$

$n_q(G) \mid |G| \Rightarrow n_q(G) = 1$

לכן $\Rightarrow n_q(G)$ אז חבורה יחידה מסדר q

$G/Z(G)$

~~(h, q_1)~~

$(h, q) = (h_1, q_1)(h, q)(h_1^{-1}, q_1^{-1})$. $gqg^{-1} \overset{?}{\in} Q$

$G/Z(G)$. $\tilde{h}$ $= hq$ $\hat{h} q^{-1} h^{-1}$ $Z(G)$ נוצרת ע"י a

אזי $x \in G$

יהי $x = a^{t} b^{s}$, כאשר $b \notin Z(G)$. לכל $x \cdot y = a^{t} b^{s} \cdot a^{t_1} b^{s_1} = a^{t+t_1} \cdot b^{s+s_1} =$

לכל $x \in G$, ניתן לכתוב ~~$a^{-i}x$~~ $=$ $x = a^{i} \cdot t$, כאשר $t \in Z(G)$.

$y = a^{k} \cdot l$ $l \in Z(G)$

$xy = a^{i} t \cdot a^{k} l = a^{k} t \cdot a^{i} l = t a^{k} l a^{i} =$

נתבונן כיוצר $G \setminus Z(G)$, יש g כאלה, הם מהצורה:

ד- הראו כי חבורה מסדר p^2 היא אבלית.

<u>הוכחה:</u> נניח כי $|G|=p^2$. לכל חבורה G, $Z(G)$ חבורה אבלית ובפרט נורמלית, כי לכל $g\in G$, $A=gAg^{-1}$ (אם A אבלית)

לא בכלל מספיק!

לכן מוגדרת $G/Z(G)$ כתת-חבורה של G

מסעיף ~~א׳~~ ב׳, $Z(G)\neq\{e\}$, כי G בגודל חזקת ראשוני.

אם G אינה כולה - סימני. $Z(G)$ בשלילה ~~[illegible]~~ תת-חבורה ממש של G.

ממשפט לגרנז׳, $|Z(G)|\,\big|\,|G|$. היות ו $|G|=p^2$ מתקיים כי $|Z(G)|=1,p,p^2$.

מהנחת השלילה, $G\neq Z(G)$, ולכן $|Z(G)|\neq p^2$, ולכן $|Z(G)|=p$.

~~[illegible]~~

לכן נסיק כי $G/Z(G)$ תת חבורה מסדר p. היות וזו ת״ח מסדר ראשוני, היא נוצרת ע״י $x\cdot Z(G)$, כלומר: $G/Z(G)=\{x^i\cdot Z(G):0\leq i\leq p-1\}$, עבור $x\notin Z(G)$.

~~[illegible]~~ היות ו $Z(G)$ ציקלית, מסדר ראשוני, היא נוצרת ע״י איבר y.

יהי $g\in G$. נראה כי $g=x^iy^j$. נתבונן בהומו׳ המנה, $\varphi:G\to G/Z(G)$.

לא מנומק (מה זה)

$\varphi(g)=x^iZ(G)$ לכן הגדרנו את x^i המתאים עבור g. חד-ערכי לכתוב מתוך g כש $g=x^iy^j$, נכפול את g משמאל ב x^{-i}, ונקבל $\varphi(x^{-i}g)=x^{-i}Z(G)\cdot x^iZ(G)=Z(G)$

וזה יתן איבר ב $Z(G)$. (כלומר, $x^{-i}g\in Z(G)$), לכן הגדרנו y^j לכל g, וקיים $g=x^iy^j$.

כיוון ש $\varphi(x^{-i}g)=Z(G)$

כעת, $g_1\cdot g_2=x^{i_1}y^{j_1}\cdot x^{i_2}y^{j_2}\overset{=}{\uparrow}x^{i_1+i_2}\cdot y^{j_1+j_2}=x^{i_2}\cdot x^{i_1}\cdot y^{j_2}\cdot y^{j_1}$

כי y במרכז של G

$x^{i_2}y^{j_2}\cdot x^{i_1}\cdot y^{j_1}=g_2\cdot g_1$

לכן כל שני איברים ב G מקיימים חילופיות ביניהם, לכן $G=Z(G)$, סתירה.

האוניברסיטה

מס' מחברת 2

מס' מזהה

0	6	6	1	6	4	5	8	-	9

לפני הבחינה אנא מלא את הפרטים בכתב ברור ובדייקנות

שם הקורס מבנים אלגבריים

מס' הקורס 80445

שם המורה פרופ' שחר מוזס

תאריך בחינה 12/2/07

הוראות לתלמיד

1. הכן את התעודה המזהה לביקורת.
2. עליך למסור את המחברת בשלמותה לפני עזיבת האולם. עזיבת האולם ללא מסירת מחברת דינה ציון 0.
3. כתוב את התשובות בעט בכתב יד ברור ונקי על עמוד אחד של כל דף. אין לכתוב בשוליים.
4. כתוב טיוטה רק על צד אחד של הדף - וסמן "טיוטה". מחק את הטיוטה בצורה ברורה לפני מסירת המחברת. אין לתלוש דפים מהמחברת.

בהצלחה

לשימוש המורה

הציון (0-100)

המחברת נבדקה בתאריך

חתימת המורה

6)

א'- תהי G חבורה, ותהיינה $A,B \lhd G$, המקיימות $A \cap B = \{e\}$.
הוכח כי לכל $a \in A$, $b \in B$, מתקיים: $ab = ba$.

<u>הוכחה:</u> נניח כי a ו- b כנ"ל.

$B \lhd G$, לכן לכל $g \in G$, ולכל $\tilde{b} \in B$, $g\tilde{b}g^{-1} \in B$. בפרט עבור $g = a$, $\tilde{b} = b$, נקבל כי $aba^{-1} \in B$. לכן ישנו $b_1 \in B$, כך ש $b_1 = aba^{-1}$.

$$b_1 = aba^{-1} \underset{\uparrow\, e\ \text{נייטרלי}}{=} aba^{-1}e \underset{\uparrow\, e=b^{-1}b}{=} aba^{-1}\cdot(b^{-1}\cdot b) \underset{\uparrow\, \text{אסוצ' הכפל}}{=} (aba^{-1}b^{-1})b$$

$$\overset{\text{אסוצ' הכפל}}{=} a(ba^{-1}b^{-1})b$$

היות ו- $A \lhd G$, לכל $g \in G$, ולכל $\tilde{a} \in A$, $g\tilde{a}g^{-1} \in A$. בפרט עבור $g = b$, $\tilde{a} = a^{-1}$, נקבל כי $ba^{-1}b^{-1} = a_1$, עבור $a_1 \in A$. לכן:

$$b_1 = a(ba^{-1}b^{-1})b = a\cdot\tilde{a}\,b.$$

לכן $b_1 \cdot b^{-1} = a\cdot\tilde{a}$. בצד ימין נקבל איבר מ A ובצד ימין גם איבר ב B,
לכן זהו איבר בחיתוך - $A \cap B$. לכן $a\tilde{a} = e$, ולכן:

$$e = a\hat{a} = aba^{-1}b^{-1} \underset{\text{כפלנו מימין ב}b}{\Rightarrow} b = aba^{-1} \underset{\text{כפלנו מימין ב}a}{\Rightarrow} ba = ab$$

כנדרש.

ב. הוכח כי חבורה מסדר 45 היא אבלית.

<u>הוכחה:</u> נניח כי $|G| = 45$. $3^2 \mid 45$; $5 \mid 45$.

אי-כך יש ל G תת חבורות דרגה 9 ודרגה 5. (ממשפט הראשון של סילו).

נסמן H, Q, כך ש $|H| = 9$, $|Q| = 5$.

נשים לב ש H חבורה נורמלית, כי ממשפט שני של סילו, $n_9(G) \equiv 1 \bmod 9$
(כאשר $n_p(G)$ הוא מספר החבורות סילו של G מסדר p^α, כך ש $p^\alpha \mid |G|$, $p^{\alpha+1} \nmid |G|$)
אי-כך האפשרויות היחידות שיכולות להיות ל $n_p(G)$ הן: $1, 10, 19, 28, 37$.
כמו-כן, ממסקנה ממשפטי סילו (הראשון והשני), ראינו כי $n_p \mid |G|$
על-כן נקבל כי $n_9(G) = 1$. ממשפט קודם (אם ל G חבורה p-סילו יחידה H, אזי H נורמלית ב G), נקבל כי H נורמלית (המשפט נובע מתוך משפט שני של סילו). כמו-כן, כיוון ש H מסדר ריבוע ראשוני, נסיק כי H אבלית. נראה כי $G = HQ$, ולכן נסיק כי H אבלית.

תחילה, $H\cap Q=\{e\}$ שכן, אם $z\in H\cap Q$, אזי $o(z)\,\big|\,|H|$ וגם $o(z)\,\big|\,|Q|$

לכן הסדר של z מחלק את 9 ואת 5, לכן $o(z)=1$, כלומר, $z=e$.

ראינו טענה כי לכל זוג תתי-חבורות $A,B\trianglelefteq G$, מתקיים:

$$|AB|=\frac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}.$$

לכן נסיק כי $|HQ|=|H|\cdot|Q|$ (כי $H\cap Q=\{e\}$), ולכן $|HQ|=45$.

כיוון ש $HQ\subseteq G$ (G סגורה לכפל, לכן $hq\in G$ לכל $h\in H, q\in Q$, לכן $HQ\subseteq G$)

ובגלל קבוצות שוות גודל, נקבל כי $G=HQ$, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~כמו-כן, H ציקלית, כי $|H|$ ראשוני [illegible]~~

~~[illegible]~~ Q אבלית. נקבל כי $H\trianglelefteq G$.

~~ולכן, אם~~

~~לכן כל איבר ב G הוא מהצורה [illegible]~~

לכן G איבר ב G היא מהצורה $g=hq$

[illegible]

G איזומורפית ל $H\times Q$, כי $\varphi:G\to H\times Q$, $\varphi(hq)=(h,q)$

העתקה חח"ע ועל $(h_1,q_1)=(h_2,q_2) \underset{\text{חח"ע}}{\Leftarrow\Rightarrow} h_1=h_2,\ q_1,q_2$, $\underset{\text{על,}}{\varphi(h,q)=(h,q)}$ /

φ הומו' $\Rightarrow (h_1,q_1)(h_2,q_2)=(h_1h_2,q_1q_2)=\varphi((h_1,q_1)(h_2q_2))$.

די להראות כי $(H,1)$ (איזומורפי ל H ב G) נורמלית ב $H\times Q$, ואכן

$$\underset{(H,1)}{\underset{\in}{(h_1hh_1^{-1},1)}}=(h_1hh_1^{-1},q_1q_1^{-1})=(h_1,q_1)\cdot(h,1)\cdot(h_1^{-1},q_1^{-1})$$

לכן $H\trianglelefteq G$. [illegible]

כיוון ש $H\cap Q=\{e\}$ ו $H,Q\trianglelefteq G$, נסיק כי לכל $h\in H$, $q\in Q$, $hq=qh$,

אכן נראה ש G אבלית, כי אם $g_1,g_2\in G$, אזי $g_1=h_1q_1$, $g_2=h_2q_2$. ולכן:

g_1

~~g_2h_1 - $g_1g_2=h_1q_1h_2q_2=$ [illegible] $=$ [illegible]~~ $q_1h_1\ q_2h_2$

~~$|G|=p^2$~~

~~$|Z(G)|=p$, $\left|G/Z(G)\right|=p$~~

~~$\{x^i\cdot Z(G)\}$~~

~~נר' זה כי כל איבר ניתן להצגה כ a^ix^j יחידים~~

~~יהי $g\in G$, אם $g\in Z(G)$ סיימנו. אחרת, נתבונן ב $gZ(G)$~~

~~אזי, $g\notin Z(G)$, $x^iZ(G)=gZ(G)$ עבור ~~[illegible]~~ $(0<i)$~~

~~לכן, נסתכל על ה $x^{-i}g$~~

~~$\varphi(x^{-i}g)=x^{-i}Z(G)\cdot g^{i}Z(G)=Z(G)$~~

$$g_1 g_2 = h_1 q_1 h_2 q_2 = h_1 h_2 q_1 q_2 = h_2 h_1 q_2 q_1$$

$$= h_2 q_2 h_1 q_1 = g_2 g_1 \Rightarrow$$ G إبلية