

בחינה במבנים אלגבריים 1 (80445)

משך המבחן: 3 שעות.

מועד א' תשס"ח – 22.2.08

פרופ' אלכס לובוצקי

השימוש בחומר עזר כלשהו אסור בהחלט.

נא לכתוב בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא לכתוב בשוליים.

חלק א' – ענו על שאלה אחת מבין השתיים הבאות (30 נק'): :

(1) תהא G חבורה סופית בגודל $n = p^d \cdot m$ כאשר p ראשוני ו- m מספר טבעי שלא מתחלק ב- p , ותהיינה H ו- K תתי-חבורות של G שגודלן p^d . הוכיחו ש- H ו- K צמודות זו לזו.

(2) יהיו R חוג אויסקלידי ו- a ו- b איברים בו. הגדירו $\gcd(a, b)$ והוכיחו שהוא קיים ויחיד עד כדי כפל באיבר הפיך של החוג R .

חלק ב' – ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות (20 נק' כל אחת): :

(3) הוכיחו שחבורה מסדר $2 \cdot 3^3 \cdot 7^3$ היא פתירה.

(4) תהי G חבורה כך שלכל x ב- G מתקיים $x^2 = e$. הוכיחו ש- G אבליה.

(5) הוכיחו שהאידיאל המינימלי ב- $R = \mathbb{Q}[X]$ המכיל את הפולינומים X^7 ו- $X^3 + 1$ הוא כל החוג R .

חלק ג' – ענו בתשובה סופית והסבר קצר בלבד על ארבע מבין חמש השאלות הבאות (8 נק' כל אחת): :

(6) כמה חבורות אבליה יש מסדר 37^4 ?

(7) האם חוג R עם יחידה ללא איזומורפיזם דו-צדדיים לא טריוויאליים (כלומר פרט ל- $\{0\}$) ולכל החוג R הוא בהכרח חוג עם חילוק?

(8) יהיו G ו- H שתי חבורות סופיות בעלות אותם גורמי הרכב. האם G ו- H איזומורפיות?

(9) ידוע שבחבורה אבליה כל תת-חבורה היא נורמלית. האם גם ההיפך נכון (כלומר האם העובדה ש- G חבורה כך שכל תת-חבורה H של G היא נורמלית ב- G גוררת ש- G בהכרח אבליה)?

(10) מהי הכפולה המשותפת המינימלית של $X^3 + 1$ ו- $X^2 + 2$ ב- $\mathbb{F}_3[X]$?

בהצלחה!