

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים 1 (80445)

משך המבחן: 3 שעות.

מועד ב' תשס"ח – 28.4.08
פרופ' אלכס לובוצקי

השימוש בחומר עזר כלשהו אסור בהחלט.
נא לכתוב בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא לכתוב בשוליים.

חלק א' – ענו על שאלה אחת מבין השתיים הבאות (30 נק'): :

(1) הוכח שאידאל ראשוני בחוג אויקלידי הוא מקסימלי (מותר להשתמש בתכונות של איברים בחוג אויקלידי ובכך שחוג אויקלידי הוא ראשי, אולם יש להקפיד לנמק כל שלב).

(2) יהיו p ראשוני ו- n טבעי. יש להוכיח שחבורה מסדר p^n היא פתירה (מותר להסתמך על תוצאות כלליות של חבורות, אולם יש להוכיח כל תכונה של חבורות p שבה משתמשים).

חלק ב' – ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות (20 נק' כל אחת): :

(3) הוכיחו שחבורה מסדר $1001=7 \cdot 11 \cdot 13$ היא ציקלית. ✓

(4) תהי $G=S_n=Sym(n)$, ויהי ρ האיבר $(1,2,\dots,n-2)$ ב- G . הוכיחו שהמרכז $C_G(\rho)$ של ρ ב- G הוא התת-חבורה של G הנוצרת ע"י ρ ו- $(n-1, n)$. ✓

(5) יהא F_p השדה מסדר p (p ראשוני) ותהא $G=GL_2(F_p)$ חבורת המטריצות 2×2 מעל F_p עם דטרמיננטה $\neq 0$. יהא g איבר מסדר p ב- G . הוכיחו ש- g צמוד לאיבר מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ לאיזה איבר a ב- F_p . ✓

חלק ג' – ענו בתשובה סופית והסבר קצר בלבד על ארבע מבין חמש השאלות הבאות (8 נק' כל אחת): :

(6) מה יש יותר: חבורות אבליות מסדר 5^7 עד כדי איזומורפיזם, או חבורות אבליות מסדר 7^5 עד כדי איזומורפיזם? ✓

(7) הוכח שאם N ו- H שתי תתי-חבורות נורמליות מינימליות של חבורה G כך ש- $N \neq H$ אז לכל איבר a ב- N ואיבר b ב- H מתקיים $ab=ba$. ✓

(8) מצא יוצר לאידאל הנוצר ע"י X^2+4 ו- $X^4+3X^3+2X^2+X+1$ בחוג $F_5[X]$. ✓

(9) מהו ההופכי של האיבר $5+3i-7j+2k$ באלגברת הקוטרניונים H ? ✓

(10) יהא D חוג עם חילוק כך שלכל איבר $x \neq 0$ ב- D מתקיים $x^2=1$. הוכיחו ש- D שדה. (שאלת בונוס: הוכיחו בנוסף ש- D הוא F_2 או F_3). ✓

בהצלחה!