תשס"ז/א

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים 2 (80446)

מועד א' תשס"ז – 25.7.07

שם המורה : פרופ' אהוד דה-שליט 	**משך הבחינה: 2.5 שעות**

נא לכתוב בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.

חלק א': (30 נקודות)
ענו על אחת משתי השאלות הבאות.

1) א) הגדר: "הנקודה $P=(x,y)$ ניתנת לבניה בעזרת סרגל ומחוגה מתוך קבוצת נקודות S במישור".

ב) הוכח: תהי S קבוצת נקודות במישור ויהיה K השדה הנוצר ע"י הקואורדינטות שלהן. אם $P=(x,y)$ ניתנת לבניה בעזרת סרגל ומחוגה מתוך S, אזי הדרגה $[K(x,y):K]$ הינה חזקת 2.

2) יהי L שדה ותהיה G חבורה סופית של אוטומורפיזמים של L.

א) הגדר מהו שדה השבת $F(G)$ של G.

ב) הוכח: $[L:F(G)]\le|G|$.

חלק ב': (40 נקודות)
ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות.

1) תהי G חבורה סופית. הוכח שקיימים שדה K והרחבת גלואה סופית L/K עבורם $Gal(L/K)\cong G$.

2) תהי L הרחבת גלואה סופית של K, $G=Gal(L/K)$, $\alpha\in L$ ו- $H=Gal(L/K(\alpha))$. יהיו $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ נציגים של המחלקות G/H. הוכח שהפולינום המינימלי של α מעל K הינו $f(x)=(X-\sigma_1(\alpha))\dots(X-\sigma_r(\alpha))$.

3) מצא את חבורת גלואה של שדה הפיצול של X^3+2X-2:

א) מעל $\mathbb{Q}$

ב) מעל F_3.

80.446
[illegible] 16/5

חלק ג': **(30 נקודות)**

ענו נכון/לא נכון על כל השאלות. אין צורך לנמק.

1) אם $[L:K]=\infty$ אזי L הרחבה טרנסצנדנטית של K.

2) כל אידיאל מקסימלי ב $\mathbb{C}[X]$ הינו גרעין של הומומורפיזם $f\to f(a)$ עבור $a\in\mathbb{C}$ מתאים.

3) אם להרחבת גלואה סופית L/K אין שדות ביניים (פרט ל- K ול- L) אז $[L:K]$ מספר ראשוני.

4) השורשים של כל פולינום אי-פריק ממעלה $5\leq$ מעל $\mathbb{Q}$ אינם ניתנים לביטוי באמצעות רדיקלים.

5) חבורת האוטומורפיזמים של $\mathbb{R}(t)$ הינה אינסופית ולא קומוטטיבית.

6) אם I אידיאל מקסימלי בחוג קומוטטיבי R כלשהו, אזי I גם אידיאל ראשוני.

בהצלחה!

ק/ 50 ח

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים 2 (80446)
מועד ב' תשס"ז – 21.8.07

שם המורה : פרופ' אהוד דה-שליט **משך הבחינה: 2.5 שעות**

נא לכתוב בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.

חלק א': **(30 נקודות)**
ענו על אחת משתי השאלות הבאות.

1) א) הגדירו: "שדה פיצול של $f(X)$".

ב) יהיה K שדה ויהיה L שדה הפיצול של X^n-a $(a\in K)$.
הוכיחו ש- $Gal(L/K)$ חבורה פתירה.

2) תהי L/K הרחבה סופית של שדות.
א) הגדירו: מהי $Gal(L/K)$.
ב) הוכיחו: $|Gal(L/K)|\le[L:K]$.

חלק ב': **(40 נקודות)**
ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות.

1) יהי $L=\mathbb{R}(t)$ שדה הפונקציות הרציונליות במשתנה t מעל הממשיים ויהיה $\sigma\in Aut(L)$ אוטומורפיזם המקבע את $\mathbb{R}$ והמקיים $\sigma(t)=\frac{1}{1-t}$. יהיה K שדה השבת של σ. הוכיחו $[L:K]=3$

2) הוכיחו שמכפלת כל האיברים השונים מאפס בשדה סופי הינה 1-.

3) הוכיחו ש- $L=\mathbb{Q}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)$ הינה הרחבת גלואה של $\mathbb{Q}$. מצאו את $[L:\mathbb{Q}]$ ותארו את המבנה של $Gal(L/\mathbb{Q})$.

80.446
תשס"ב/ב'

חלק ג': **(30 נקודות)**

ענו נכון/לא נכון על כל השאלות הבאות. אין צורך לנמק.

1) תחום שלמות סופי הינו שדה.

2) פולינום ממשי אי-פריק הינו ממעלה 1 או 2.

3) אם M_1, M_2 שני שדות-ביניים של הרחבת גלואה L/K ו- $M_1 \cong M_2$, אזי $M_1 = M_2$.

4) יהיו K, F תתי-שדות של $\mathbb{C}$. אם $K/\mathbb{Q}$ גלואה, גם $K \cdot F/F$ גלואה.

5) לשדה $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ בדיוק שני תתי-שדות שהם הרחבות ריבועיות של $\mathbb{Q}$.

6) אפשר לבנות מצולע משוכלל בין 13 צלעות בעזרת סרגל ומחוגה.

בהצלחה !

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

מבחן במבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד ב' תשס"ו

המורה: פרופ' צליל סלע — הזמן: 2.5 שעות

למבחן שני חלקים. סך כל הנקודות בחלק הראשון 27 נק', בחלק השני 75 נק'. הציון המקסימלי במבחן הוא 100.

חלק I

ענו על כל שלוש השאלות. לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או שקרית, ונמקו בקצרה. ערכה של כל שאלה 9 נקודות.

1. לכל שדה בעל מציין $0<p$, קיימת הרחבה סופית לא ספרבילית.
2. יהי F שדה, $char(F)\neq 2$. אם $\alpha\beta$ ו $\alpha+\beta$ אלגבריים מעל F, אזי α ו- β אלגבריים מעל F.
3. יהיו $\alpha\neq\beta$ איברים אלגבריים מעל שדה F בעלי דרגות: $d=[F(\alpha):F]$, $e=[F(\beta):F]$. אזי המונומים $\alpha^i\beta^j$, $i=0,\dots,d-1$ ו $j=0,\dots,e-1$; מהווים בסיס לשדה $F(\alpha,\beta)$ מעל F.

חלק II

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות 4-7. בשאלות 4 ו-5 אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה. ערכה של כל שאלה 25 נקודות.

4. הוכיחו כי החבורה הכפולית של שדה סופי היא ציקלית, והראו כי חבורת גלואה $(GF(p^n):GF(p))$ היא ציקלית ונוצרת על-ידי אוטומורפיזם פרובניוס: $x\mapsto x^p$.
5. תהיינה $K\hookrightarrow K(\alpha)$ ו- $K\hookrightarrow K(\beta)$ הרחבות פשוטות, כך של α ול β אותו פולינום מינימלי. הוכיחו כי שתי ההרחבות איזומורפיות.
6. יהי $f(x)$ פולינום אי-פריק ממעלה 6 מעל שדה F. תהי $F\hookrightarrow K$ הרחבה ריבועית של F, $[K:F]=2$. הוכיחו כי $f(x)$ אי-פריק מעל K או ש $f(x)$ מתפרק למכפלה של שני פולינומים אי-פריקים ממעלה 3 מעל K.
7. יהי K שדה הפיצול של הפולינום $p(x)=x^4-3$ מעל Q.
   א. הראו כי $[K:Q]=8$ וכי $K=Q(i,\alpha)$ כאשר α הוא שורש של הפולינום $p(x)$.
   ב. הראו כי $Gal(K:Q)$ היא החבורה הדיהדרית D_8.

בהצלחה!!!

80.446
תשס"ה / א

מספר תלמיד:

מספר מחברת:

26.6.2005

בחינה בקורס "מבנים אלגבריים 2" (80446)
מועד א' תשס"ה

המורה: פרופ' דוד קשדן

משך הבחינה: שעתיים

ענו על כל השאלות הבאות. משקל כל שאלה 10 נקודות.

לכל שאלה יש מספר היגדים אפשריים, אך רק אחד מהם נכון. הקיפו בעיגול, על גבי טופס זה, את מספר הסעיף המתייחס להיגד הנכון.

בהצלחה!

1. תהי L/K הרחבה אלגברית, יהי $K \subseteq F \subseteq L$ שדה ביניים ויהי $\alpha \in L$. יהיו $f_F \in F[t]$ הפולינום המינימלי של α מעל F, $f_K \in K[t]$ הפולינום המינימלי של α מעל K. אזי:

   א. $\deg f_F \le \deg f_K$ וגם $f_F \mid f_K$.

   ב. $\deg f_F \le \deg f_K$ אך לא בהכרח $f_F \mid f_K$.

   ג. אם $\alpha \notin F$ אזי $\deg f_F = \deg f_K$.

   ד. $\deg f_K \le \deg f_F$ וגם $f_K \mid f_F$.

2. תהי L/K הרחבת שדות כך שקיים $\alpha \in L$ טרסצנדנטי מעל K. יהי $\beta \in K(\alpha)$ ו- $\beta \notin K$. אזי:

   א. $K(\beta)/K$ אלגברית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ אלגברית.

   ב. $K(\beta)/K$ אלגברית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ טרנסצנדנטית.

   ג. $K(\beta)/K$ טרנסצנדנטית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ אלגברית.

   ד. $K(\beta)/K$ טרנסצנדנטית ו- $K(\alpha)/K(\beta)$ טרנסצנדנטית.

3. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ שני שורשים שונים של הפולינום $t^3 - 3t - 1$. אזי $[\mathbb{Q}(\alpha+\beta):\mathbb{Q}]$ שווה ל:

   א. 2

   ב. 3

   ג. 6

   ד. 9

4. יהי K שדה ממציין ראשוני p, תהי L/K הרחבה אלגברית סופית ויהי $\alpha \in L$ אך $\alpha \notin K$. אזי בסדרה $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^n}, \ldots$:

   א. לפחות אחד האיברים נמצא ב- K.

←

80. 446
1/ק / ס"ה קיץ

ב. אף אחד מהאיברים אינו נמצא ב- K.

ג. לפחות אחד האיברים אי-ספרבילי לחלוטין מעל K.

ד. לפחות אחד האיברים ספרבילי מעל K.

5. תהי M/K הרחבה סופית של שדות ויהיו $K \subseteq E, L \subseteq M$ שדות ביניים.

טענה 1: אם L/K נורמלית אזי LE/E נורמלית.

טענה 2: אם L/K גלואה אזי $[LE:E]$ מחלק את $[L:K]$.

א. טענה 1 נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ב. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ג. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 נכונה.

ד. טענה 1 נכונה, טענה 2 נכונה.

6. יהיו $K = \mathbf{Q}(\sqrt{6+\sqrt{11}})$ ו- L הסגור הנורמלי של K מעל $\mathbf{Q}$. אזי:

א. $K/\mathbf{Q}$ נורמלית ו- $Gal(K/\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

ב. $K/\mathbf{Q}$ נורמלית ו- $Gal(K/\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

ג. $K/\mathbf{Q}$ אינה נורמלית ו- $Gal(L/\mathbf{Q}) \cong D_4$ (חבורת הסימטריות של הריבוע).

ד. $K/\mathbf{Q}$ אינה נורמלית ו- $Gal(L/\mathbf{Q}) \cong A_4$.

7. יהי $x \in \mathbf{F}_{49}$ איבר כלשהו. אזי:

א. $x^6 \in \mathbf{F}_7$.

ב. $x^7 \in \mathbf{F}_7$.

ג. $x^8 \in \mathbf{F}_7$.

ד. $x^{49} \in \mathbf{F}_7$.

8. תהי L/K הרחבת שדות ותהי $B: L \times L \to L$ הפונקציה המוגדרת ע"י $B(x,y) = xy + x^2y^2$. נאמר ש- B <u>תבנית בי-ליניארית</u> אם שני התנאים הבאים מתקיימים:

- B בי-ליניארית כשרואים את L כמרחב וקטורי מעל K.
- $B(x,y) \in K$ לכל $x, y \in L$.

א. אם $K = \mathbf{Q}$ ו- $L = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/3})$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.

ב. אם $K = \mathbf{F}_2$ ו- $L = \mathbf{F}_4$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.

ג. אם $K = \mathbf{F}_2$ ו- $L = \mathbf{F}_8$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.

ד. אם $L = K = \mathbf{F}_3$, אזי B היא תבנית בי-ליניארית.

9. יהי L שדה הפיצול של הפולינום $t^6 - 2$ מעל $\mathbf{Q}$. אזי:

א. קיימים בדיוק שני שדות ביניים $Q \subseteq F \subseteq L$ עם $[F:Q]=2$.

ב. קיימים בדיוק שלושה שדות ביניים $Q \subseteq F \subseteq L$ עם $[F:Q]=3$.

ג. קיימים בדיוק ארבעה שדות ביניים $Q \subseteq F \subseteq L$ עם $[F:Q]=4$.

ד. קיימים בדיוק שישה שדות ביניים $Q \subseteq F \subseteq L$ עם $[F:Q]=6$.

10. יהי $f \in Q[t]$ פולינום ממעלה 4 ויהי L_f שדה הפיצול שלו מעל Q. נסמן ב- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in L$ את שורשי f ב- L_f (נניח שכולם שונים זה מזה) וב- Y_f את קבוצת הזוגות (לא-סדורים) של שורשים:
$Y_f = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}\}$.

תהי $G_f = Gal(L_f/Q)$.

טענה 1: אם $f(t)=t^4-7$, אזי G_f פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה Y_f.

טענה 2: אם $f(t)=t^4-2t+2$, אזי G_f פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה Y_f.

א. טענה 1 נכונה וגם טענה 2 נכונה.

ב. טענה 1 נכונה אך טענה 2 אינה נכונה.

ג. טענה 1 אינה נכונה אך טענה 2 נכונה.

ד. טענה 1 אינה נכונה וגם טענה 2 אינה נכונה.

80446
ת/ע/ב/ו

מספר תלמיד:

מספר מחברת:

7.9.2005

בחינה בקורס "מבנים אלגבריים 2" (80446)

מועד ב' תשס"ה

המורה: פרופ' דוד קשדן

משך הבחינה: שעתיים

ענו על כל השאלות הבאות. משקל כל שאלה 10 נקודות.

לכל שאלה יש מספר היגדים אפשריים. הקיפו בעיגול, על גבי טופס זה, את מספר הסעיף המתייחס להיגד **הנכון ביותר**.

בהצלחה!

1. יהיו $K, L \subseteq M$ שדות. נניח ש- $M = KL$, נסמן $F = K \cap L$ ונניח כי $[M:F] < \infty$. אזי:
   א. $[M:F] \le [K:F][L:F]$
   ב. $[M:F] \le [M:K][M:L]$
   ג. תשובות א' ו- ב' אינן נכונות.
   ד. תשובות א' ו- ב' שתיהן נכונות.

2. תהי L/K הרחבת שדות. נניח שקיימים $\alpha \in L$ טרנסצנדנטי מעל K ו- $\beta \in L$ אלגברי מעל K כך ש- $\beta \notin K$. אזי:
   א. ההרחבה $K(\alpha,\beta)/K$ תמיד פשוטה.
   ב. ההרחבה $K(\alpha,\beta)/K$ תמיד אינה פשוטה.
   ג. על סמך הנתונים בשאלה לא ניתן לקבוע אם $K(\alpha,\beta)/K$ פשוטה או לא.

3. יהיו $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbf{C}$ ארבעה שורשים שונים של הפולינום $t^5 - 4t + 2$.
   אזי הדרגה $[\mathbf{Q}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2):\mathbf{Q}]$ שווה ל:
   א. 4
   ב. 5
   ג. 20
   ד. 120

4. יהי K שדה, $f \in K[t]$ פולינום אי-פריק, ו- $g \in K[t]$ פולינום כלשהו. יהי L שדה פיצול של g מעל K.
   א. אם ל- f אין שורש ב- L, אזי f אי-פריק גם כפולינום ב- $L[t]$.

-E5-

80.446
תורת גלואה

ב. אם ל- f יש שורש ב- L, אזי f מחלק את g.

ג. אם ל- f יש שורש ב- L, אזי $\deg f = \deg g$.

ד. אם ל- f יש שורש ב- L, אזי f מתפצל ב- L.

5. יהי K שדה ממציין ראשוני p ותהי L/K הרחבת שדות סופית נורמלית.

טענה 1: קיים שדה ביניים $K \subseteq F \subseteq L$ כך ש- L/F ספרבילית ו- F/K אי-ספרבילית לחלוטין.

טענה 2: קיים שדה ביניים $K \subseteq E \subseteq L$ כך ש- L/E אי-ספרבילית לחלוטין ו- E/K ספרבילית.

א. טענה 1 נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ב. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ג. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 נכונה.

ד. טענה 1 נכונה, טענה 2 נכונה.

6. נאמר, שמספר שלם n הוא <u>בעל התכונה X</u> אם קיימים שלמים a,b כך ש- $n = a^2 + ab + b^2$.

א. אם n,m בעלי התכונה X, גם nm בעל התכונה X.

ב. המספר 30 הוא בעל התכונה X.

ג. תשובות א' ו- ב' שתיהן נכונות.

ד. תשובות א' ו- ב' אינן נכונות.

7. נאמר, שמספר מרוכב $z = x + iy$ ניתן לבנייה בסרגל ובמחוגה אם האורכים x, y ניתנים לבנייה בסרגל ובמחוגה. יהי $\zeta = e^{2\pi i/13}$.

טענה 1: $\zeta + \zeta^3 + \zeta^9$ ניתן לבנייה בסרגל ובמחוגה.

טענה 2: $\zeta + \zeta^5 + \zeta^8 + \zeta^{12}$ ניתן לבנייה בסרגל ובמחוגה.

א. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ב. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 נכונה.

ג. טענה 1 נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ד. טענה 1 נכונה, טענה 2 נכונה.

8. מספר האיברים בשדה הפיצול של הפולינום $t^9 - 2t^3 + t$ מעל $\mathbf{F}_3$ הוא:

א. 9

ב. 27

ג. 3^6

ד. 3^9

9. יהי $f(t) = t^4 - 5t + 7$ ויהיו $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$ שורשי f ב- $\mathbf{C}$.

טענה 1: $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)/\mathbf{Q}$ הרחבת גלואה ו- $Gal(\mathbf{Q}(\alpha, \beta)/\mathbf{Q}) \cong A_4$.

טענה 2: $\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \gamma)/\mathbf{Q}(\alpha)$ הרחבת גלואה ו- $Gal(\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \gamma)/\mathbf{Q}(\alpha)) \cong S_3$.

א. טענה 1 נכונה וגם טענה 2 נכונה.

ב. טענה 1 נכונה אך טענה 2 אינה נכונה.

ג. טענה 1 אינה נכונה אך טענה 2 נכונה.

ד. טענה 1 אינה נכונה וגם טענה 2 אינה נכונה.

10. יהי $L=\mathbf{Q}(t)$ (שדה הפונקציות הרציונליות מעל $\mathbf{Q}$) ויהי $\sigma : L \to L$ האוטומורפיזם המוגדר ע"י $(\sigma(f))(t)=f\left(\frac{-1}{1+t}\right)$ (לדוגמה: σ מעביר את הפונקציה t^2 ל- $\left(\frac{-1}{1+t}\right)^2$).

יהי $K=\{f \in L : \sigma(f)=f\}$.

א. ההרחבה L/K אלגברית, סופית וגלואה.

ב. ההרחבה L/K אלגברית, סופית, אך אינה גלואה.

ג. ההרחבה L/K אלגברית, אך $[L:K]=\infty$.

ד. ההרחבה L/K טרנסצנדנטית ו- $K \neq \mathbf{Q}$.

ה. $K=\mathbf{Q}$, כלומר אין פונקציות רציונליות לא קבועות שהן אינבריאנטיות תחת σ.

80 446
תשס"ד/א/1

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים (2) (80446)
מועד א' תשס"ד

שם המורה: פרופ' אבינועם מן

משך הבחינה: שעתיים

ענו על שלוש מהשאלות הבאות. הוכיחו את טענותיכם.

1. כיצד פותרים, ע"י הוצאת שורשים, משוואה ממעלה רביעית? מעל איזה שדות שיטה זו תקפה?

2. איזו מהקביעות הבאות הנכונה:
   א. הרחבה סופית של הרחבה סופית היא סופית.
   ב. הרחבה אלגברית של הרחבה אלגברית היא אלגברית.
   ג. הרחבה נורמלית של הרחבה נורמלית היא נורמלית.

3. יהי F שדה כלשהו. הוכיחו, כי קיים שדה משוכלל $F \subseteq K$, כך ש- K/F הרחבה אי פרידה טהורה, וכי K נקבע באופן יחיד, עד לידי איזומורפיזם מעל F.

4. יהי F שדה הפיצול של X^5-3 מעל שדה הרציונליים. הראו כי חבורת גלואה $G(F/\mathbb{Q})$ היא חבורה לא קומוטטיבית מסדר 20.

5. הראו כי לכל שני בסיסי טרנסצדנטיות של הרחבה K/F אותו מספר איברים.

בהצלחה!

80, 446
תשס"ד/ב'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים (2) (80446)
מועד ב' תשס"ד

שם המורה: פרופ' אבינועם מן **משך הבחינה: שעתיים**

ענו על שלוש מהשאלות הבאות. הוכיחו את טענותיכם.

1. איזה מצולעים משוכללים אפשר לבנות באמצעות סרגל ומחוגה?

2. נתונה הרחבה K/F. הראו כי כל איברי K הפרידים מעל F מהווים שדה.

3. הגדירו הרחבה נורמלית, ותנו שני תנאים השקולים לנורמליות של הרחבה K/F.

4. חשבו את חבורת גלואה של הפולינום X^3-4 מעל השדה $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-3}\right)$.

5. הראו כי כל פונקציה רציונלית סימטרית ב- n משתנים היא פונקציה רציונלית של הפונקציות הסימטריות היסודיות באותם משתנים.

בהצלחה!

80,446
תשס"ג/א/1

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד א' תשס"ג

שם המורה: פרופ' א. מן   **משך הבחינה: 2 שעות**

ענו על שלוש מהשאלות הבאות:

1. יהי F שדה בעל מציין p. נסמן ב- $K=F(X,Y)$ את שדה הפונקציות הרציונליות בשני משתנים מעל F, ו- $L=F(X^p,Y^p)$. הראו כי $|K:L|=p^2$ וכי K/L אינה הרחבה פשוטה.

2. הוכיחו כי כל שני שדות סופיים מאותו סדר איזומורפיים.

3. תנו דוגמא לשדות $F\subseteq K\subseteq L$, כך ש- K/F ו- L/K הן הרחבות גלואה סופיות, ו- L/F אינה הרחבת גלואה.

4. תהי K/F הרחבת גלואה עם חבורת גלואה מסדר ראשוני p. הראו כי $K=F(x)$, כאשר $x^p\in F$.

5. א. הראו כי שדה המרוכבים $\mathbb{C}$ מכיל תת-שדה F סגור אלגברית, שאינו איזומורפי לאף תת-שדה אחר של $\mathbb{C}$.

   ב. כמה שדות בעלי אותן תכונות כ- F יש ב- $\mathbb{C}$?

בהצלחה !

80.446
תשס"ג/ב'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים (2) (80446)
מועד ב' תשס"ג

שם המורה: פרופ' א. מן **משך הבחינה: 2 שעות**

ענו על שלוש מהשאלות הבאות:

1. יהי $F \subseteq K \subseteq L$ שדות, כך שההרחבות K/F ב- L/K אלגבריות. הראו כי ההרחבה L/F אלגברית.

2. תהי K/F הרחבה אלגברית, כאשר $chF = p > 0$, ו- $x \in K$. הראו כי x פריד מעל F אם ורק אם $F(x) = F(x^p)$.

3. תהי K/F הרחבה סופית. הראו, כי התנאים הבאים שקולים זה לזה:

   א. כל איזומורפיזם של K/F לסגור אלגברי של K הוא אוטומורפיזם של K/F.

   ב. אם $f(X)$ פולינום אי פריק מעל F, שיש לו שורש מעל K, אז $f(X)$ מתפרק מעל K למכפלת גורמים ממעלה ראשונה.

4. הראו כי חבורת גלואה של הפולינום $X^3 - 2$ מעל $\mathbb{Q}$ איזומורפית לחבורת התמורות S_3 מסדר 6.

5. יהי K שדה כל המספרים האלגבריים, כך ש- $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. יהיו L ו- M תת-שדות של $\mathbb{C}$. הוכיחו:

   א. אם L איזומורפי ל- K, אז $L = K$.

   ב. אם M שונה מ- K, ו- M סגור אלגברית, אז $\mathbb{C}$ מכיל תת-שדות איזומורפיים ל- M השונים מ- M.

בהצלחה!

80.446

תשס"ב / א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

<u>בחינה במבנים אלגבריים (2) (80446)</u>

מועד א' תשס"ב

שאלון מס' 1

המורה : ד"ר י. ורשבסקי

הזמן: 2 שעות

I. ענה על <u>אחת</u> משתי השאלות (30 נק')

1. א. הגדר: L/K הרחבת שדות נורמלית.

ב. תהי L/K הרחבת שדות סופית. הוכח כי L/K נורמלית אם"ם לכל שדה $M \supset L$ ולכל הומומורפיזם $\varphi \in Hom_K(L,M)$ מתקיים $\varphi(L)=L$.

2. א. תהי L/K הרחבת גלואה ציקלית, יהי σ יוצר של $Gal\left(L/K\right)$ ויהי $a \in L^x$.

הוכח כי $N_{L/K}(a)=1$ אם"ם קיים $b \in L^x$ כך ש $a=\dfrac{b}{\sigma(b)}$.

ב. תהי L/K הרחבת גלואה ציקלית מסדר n. נניח כי מציין של K הוא אפס ש- X^n-1 מתפצל ב - K.

הוכח כי קיים $\alpha \in L$ כך ש $L=K(\alpha)$ ו- $\alpha^n \in K$.

II. (20 נק')

יהי $f=x^9-1$, ויהי K שדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$.

תאר את $[K:\mathbb{Q}]$ את חבורת גלואה $Gal\left(K/\mathbb{Q}\right)$ ואת כל שדות הביניים $K \supseteq M \supseteq \mathbb{Q}$.

III. ענה אל <u>אחת</u> משתי השאלות הבאות (20 נק')

1. תן דוגמא להרחבת שדות סופית לא פשוטה (נמק את תשובתך).
2. הוכח כי הרחבת השדות הסופיים $\mathbf{F}_{q^n}/\mathbf{F}_q$ היא נורמלית וספרבילית. תאר את חבורת גלואה $Gal(\mathbf{F}_{q^n}/\mathbf{F}_q)$ במפורש.

המשך מעבר לדף ←

80. 446
תשס"ב / ז'

IV. ענה נכון/לא נכון בלבד. אין צורך לנמק (3 נק' × 10)

1. הפולינום X^4+1 הוא אי-פריק מעל $\mathbb{R}$.
2. כל הרחבה שדות אלגברית היא סופית.
3. כל ההרחבות של שדה סופי הן אלגבריות.
4. אם $f\in K\left[X\right]$ פולינום אי-פריק מדרגה n, אזי דרגת שדה הפיצול של f מעל K היא לכל היותר $n!$.
5. הפולינום $X^6-9X^4+5X^2+8$ ניתן לפתרון ע"י רדיקלים מעל $\mathbb{Q}$.
6. כל הרחבה מדרגה 2 היא נורמלית.
7. אין הרחבת גלואה ציקלית של $\mathbb{Q}$ מדרגה 14.
8. אוסף המספרים x כך ש $(0,x)$ ניתן לבניה מ $\left\{(0,0),(0,1)\right\}$ ע"י סרגל ומחוגה הוא שדה.
9. קיים פולינום מדרגה 7, אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$, עם בדיוק 4 שורשים ממשיים.
10. אם L/K ספרבלית סופית אזי $\left|Aut\left(L/K\right)\right|=\left[L:K\right]$.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד ב' תשס"ב **שאלון מס' 1**

המורה : ד"ר י. ורשבסקי

הזמן: 2 שעות

I. ענה על <u>אחת</u> משתי השאלות (30 נק')

1. א. הגדר: שדה הפיצול של פולינום.

ב. הוכח כי הרחבת שדות L/K היא נורמלית וסופית אם"ם L הוא שדה הפיצול של פולינום מסויים f מעל K.

2. יהי L שדה ותהי G חבורה סופית של אוטומורפיזמים של L.

יהי $K=L^G$ שדה השבת. הוכח כי L/K הרחבת גלואה ו $G=Gal\left(L/K\right)$.

II. (20 נק')

יהי $f=\left(x^3-7\right)\left(x^2+3\right)$, ויהי K שדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$.

תאר את K, את חבורת גלואה $Gal\left(K/\mathbb{Q}\right)$ ואת כל שדות הביניים $K\supseteq M\supseteq\mathbb{Q}$.

III. ענה על <u>אחת</u> משתי השאלות הבאות (20 נק')

1. תהי L/K הרחבת שדות ויהי $\varphi\in Hom_K(L,L)$.

א. הוכח כי φ איזומורפיזם אם L/K סופית.

ב. הוכח כי φ איזומורפיזם אם $L=\mathbb{R}$.

ג. הוכח כי φ לא חייב להיות איזומורפיזם אם $L=K(t)$ (שדה של הפונקציות הרציונליות).

המשך מעבר לדף ←

80. 446
תלס"ב/ב'

2. תהי L/K הרחבת גלואה ציקלית של שדות ממציין אפס.

יהי σ יוצר של L/K ויהי $a \in L$. הוכח כי $Tr_{L/K}(a) = 0$ אם"ם קיים $b \in L$ כך

ש $a = b - \sigma(b)$.

IV. ענה נכון/לא נכון בלבד. אין צורך לנמק (3 נק' × 10)

1. כל הרחבה מדרגה p מעל $\mathbf{F}_p(t)$ היא אי-ספרבילית.

2. אי-אפשר לפתור אף פולינום אי-פריק מדרגה 5 בעזרת רדיקלים.

3. כל הרחבות סופיות של שדה סופי הן נורמליות.

4. הרחבה נורמלית של הרחבה נורמלית לא בהכרח נורמלית.

5. לשדה $\mathbb{R}$ יש הרחבות אלגבריות מכל דרגה.

6. כל הרחבת שדות נורמלית סופית היא פשוטה.

7. לא קיים פולינום אי-פריק מדרגה 4 שחבורת גלואה שלו היא $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

8. לא קיימת הרחבה אי-ספרבילית של $\mathbf{F}_p$.

9. אם L/K נורמלית וסופית אזי $L^{Aut(L/K)} = K$.

10. העתקת הנורמה היא תמיד על.

בהצלחה!

/ F. C ~~~

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבנים אלגבריים 2 (80446)

מועד א' תשס"א

המורה: פרופ' א. דה שליט

הזמן: שעתיים

I. ענה על אחת משתי השאלות הבאות (30 נק').

1. א. תהי $F \subset L$ הרחבה של שדות. הגדר את הדרגה $[L:F]$ ותן דוגמא בה היא סופית, ודוגמה בה היא אינסופית.

ב. הוכח שאם $F \subset K \subset L$ שדות $[L:F]=[L:K][K:F]$.

2. הוכח את משפט האבר הפרימיטיבי: אם $F \subset L$ הרחבה ספרבילית סופית, קיים $\alpha \in L$ כך ש- $L=F(\alpha)$.

II. ענה על שתיים משלוש השאלות הבאות (20 נק' x 2)

1. הוכח ש- $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ הרחבת גלואה של שדה המספרים הרציונליים Q. חשב את חבורת גלואה של ההרחבה, ואת כל תת-השדות. תן יוצר לכל תת-שדה. צטט את המשפטים עליהם אתה מסתמך.

2. יהיה $L=F(t_1,\dots,t_n)$ שדה הפונקציות הרציונליות ב- n משתנים בלתי תלויים מעל שדה F. יהיו $s_1,\dots,s_n \in L$ הפולינומים הסימטריים היסודיים, המוגדרים על ידי $(X-t_1)(X-t_2)\dots(X-t_n)=X^n-s_1X^{n-1}+\dots+(-1)^n s_n$ ויהיה $K=F(s_1,\dots,s_n)$. הוכח ש L/K הרחבת גלואה, ומצא את $Gal(L/K)$. צטט את המשפטים עליהם אתה מסתמך.

3. א. הוכח שאם הנקודה (x,y) במישור נתנת לבניה בעזרת סרגל ומחוגה מתוך הנקודות $\{(1,0),(0,0)\}$ ואם $z=x+iy$, אזי $[Q(z):Q]$ הינה חזקה של 2.

ב. הוכח שאי אפשר לבנות בעזרת סרגל ומחוגה מצולע משוכלל בן 7 צלעות. צטט את המשפטים עליהם אתה מסתמך.

תשס"ט / א'

III. ענה <u>נכון</u> / <u>לא נכון</u> בלבד. אין צורך לנמק! (3 נק' x 10)

1. אין שדה בן 6 אברים
2. יש לשדה הממשיים הרחבות סופיות מדרגה גדולה כרצוננו.
3. אם K/F ו- L/K הרחבות גלואה, גם L/F הרחבת גלואה.
4. כל שדה ממציין $p > 0$ הינו סופי.
5. לשדה הפונקציות הרציונליות $\mathbb{C}(t)$ יש אינסוף אוטומורפיזמים.
6. הפולינום $X^4 + 2X^2 + 1$ אי פריק מעל שדה המספרים הרציונליים Q.
7. אם f פולינום ממעלה 3, אי פריק מעל F, ואם $[K:F]=2$, f נשאר אי פריק מעל K.
8. אם ניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה מתוך קבוצה S את (x_1, y_2) ו- (x_2, y_2) אזי ניתן לבנות גם את $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}, \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})$.
9. להרחבה אי ספרבילית מדרגה סופית ייתכנו אינסוף אוטומורפיזמים.
10. הרחבה $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ הינה סופית מעל F אם ורק אם כל α_i הינו אלגברי מעל F.

בהצלחה

תשס"א / ב'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

<u>מבנים אלגבריים 2 (80446)</u>

מועד ב' תשס"א

המורה: פרופ' א. דה שליט

הזמן: שעתיים

I. ענה על <u>אחת</u> משתי השאלות הבאות (30 נק').

1. תהיה L/F הרחבה סופית של שדות, ויהיה Ω שדה המכיל את F. הוכח שמספר השכונים של L ב- Ω שהם הזהות על F, חסום על ידי $[L:F]$.
2. תהיה G חבורה סופית של אוטומורפיזמים של שדה L, ויהיה $F=L^G$ שדה השבת. הוכח ש: $[L:F]\le|G|$.

II. ענה על <u>שתיים</u> משלוש השאלות הבאות (20 נק' x 2)

1. מהו שדה הפצול L של $f(X)=X^4-2X^2-4$ מעל שדה המספרים הרציונליים $\mathbf{Q}$? רשום יוצרים ל- L וחשב את $[L:\mathbf{Q}]$.
2. הוכח שאם $f\in F[X]$ פולינום אי-פריק ממעלה n ו- L שדה הפצול שלו מעל F, אזי $[L:F]\mid(n!)$, $n\mid[L:F]$.

   איזה משתי הטענות נשארת נכונה גם אם משמיטים את ההנחה ש- f אי-פריק?
3. יהיה $\zeta=e^{2\pi i/7}$. מהם כל תת-השדות של $\mathbf{Q}(\zeta)$?

III. ענה נכון/לא נכון בלבד. אין צורך לנמק! (3 נק' X 10)

1. לכל שדה F, כל שכון של F בעצמו הנו אוטומורפיזם.
2. אם $char.\,F=p$, $\sigma(X)=X^p$ הנו אוטומורפיזם של F.
3. אם K,L הן הרחבות סופיות של $\mathbf{Q}$ בתוך $\mathbf{C}$ ו- $K\cap L=\mathbf{Q}$ אזי $[KL:\mathbf{Q}]=[K:\mathbf{Q}][L:\mathbf{Q}]$.
4. אם $K/\mathbf{Q}$ ו- $L/\mathbf{Q}$ הרחבות גלואה, גם $KL/\mathbf{Q}$ גלואה.
5. כל פולינום אי-פריק מעל שדה ממציין 0 הנו ספרבילי.
6. אם L/F הרחבת גלואה, כל תת-שדה של L המכיל את F הנו הרחבת גלואה של F.
7. שדה הפצול של X^3-2 מעל $\mathbf{Q}$ הנו מדרגה 3.
8. תת-שדה של $\mathbf{R}$ אינו יכול להיות איזומורפי לתת-שדה של $\mathbf{C}$ שאינו מוכל ב- $\mathbf{R}$.
9. יש ל- $\mathbf{Q}$ הרחבות אלגבריות מדרגה גדולה כרצוננו.
10. כל האיברים השונים מ- 0 בשדה סופי הנם שרשי יחידה.

ב ה צ ל ח ה !

80. 446
תש"ס /א'

מבנים אלגבריים (2) - מועד א' תש"ס
(80446)

המורה: פרופ' צליל סלע

הזמן: שעתיים

למבחן שני חלקים. סך כל הנקודות שניתן לצבור בחלק הראשון הוא 42, ובחלק השני 60. ציון הבחינה המקסימלי הוא 100.

חלק ראשון:

בחלק זה יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות. ערך כל שאלה 14 נקודות.

הוכיחו או הפריכו (תשובה לא מנומקת לא תזכה בנקודות):

1. יהי α איבר ריבועי מעל Q, כלומר $[Q(\alpha):Q]=2$. אזי α איבר ציקלוטימי מעל Q.
2. יהי ω שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 77 מעל Q. אזי $G(Q(\omega):Q)$ היא חבורה ציקלית.
3. יהי $K\subset\mathbb{C}$ שדה, כך ש: $Q\hookrightarrow K$ היא הרחבה אלגברית נורמלית. אזי ההצמדה ב $\mathbb{C}$ מהווה Q – אוטומורפיזם של K.
4. יהי p ראשוני, ויהי $a\in Q$ איבר שאיננו חזקת p של מספר רציונלי (כלומר, לכל $b\in Q$ $a\neq b^p$). יהי K שדה הפיצול של הפולינום x^p-a מעל Q.

   אזי:

   $o(G(K:Q))=p(p-1)$.

חלק שני:

בחלק זה יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ערכה של כל שאלה 30 נקודות.

1. יהי F שדה סופי בעל $q=p^m$ איברים. ויהי E שדה הרחבה של F שעבורו $[E:F]=n$.
   הוכיחו כי G (E:F) חבורה ציקלית מסדר n.
2. יהי L שדה הפיצול של הפולינום x^4-2x^2-1 מעל Q. חשבו את חבורת גלואה G (L:Q).
3. יהי F=R, ויהי $f(x)\in F[x]$ פולינום ממעלה 3 בעל דיסקרימיננט d. הראו כי ל f(x) שורש מרובה, 3 שורשים ממשיים שונים, או שורש ממשי אחד ושני שורשים לא ממשיים, אם d=0, o<d, או d<0, בהתאמה.

בהצלחה!

תש"ס/ב'

מבנים אלגבריים (2) - מועד ב' תש"ס
(80446)

המורה: פרופ' צליל סלע

הזמן: שעתיים

למבחן שני חלקים. סך כל הנקודות שניתן לצבור בחלק הראשון הוא 42, ובחלק השני 60. ציון הבחינה המקסימלי הוא 100.

חלק ראשון:

בחלק זה יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות. ערך כל שאלה 14 נקודות.

הוכיחו או הפריכו (תשובה לא מנומקת לא תזכה בנקודות):

1. יהי ω שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 11 מעל Q. אזי $\sqrt{11}\in Q(\omega)$.
2. יהי $f(x)\in Q[x]$ פולינום אי-פריק ממעלה 3 ויהי K שדה הפיצול של f(x) מעל Q. אם ל f(x) שורש ממשי יחיד, אזי $[K:Q]=6$.
3. יהי L שדה הפיצול של הפולינום x^4+1 מעל Q. אזי $[L:Q]=4$.
4. יהי F שדה, $\mathrm{char}(F)=0$. תהיינה $F\hookrightarrow L$ ו $F\hookrightarrow K$ הרחבות סופיות של F, ונניח כי $F\subset L\subset K$. אם $F\hookrightarrow L$ ו $L\hookrightarrow K$ הן הרחבות גלואה (נורמליות וספרביליות), אזי $F\hookrightarrow K$ היא הרחבת גלואה.

חלק שני:

בחלק זה יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ערכה של כל שאלה 30 נקודות.

1. יהי L שדה, ותהי G חבורה סופית של אוטומורפיזמים של L. הוכיחו כי ההרחבה $Fix(G)\hookrightarrow L$ היא הרחבה נורמלית וספרבילית.
2. יהי $f(x)=x^4-3$, ויהי L שדה הפיצול של f(x) מעל Q. הראו כי L נוצר על-ידי $i=\sqrt{-1}$ ושורש ממשי של f(x), וחשבו את G(L:Q).
3. יהי ω שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 11 מעל Q, ויהי $\beta=\omega+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^9$ הראו כי $[Q(\beta):Q]=2$ ומצאו את הפולינום המינימלי של β מעל Q.

בהצלחה!

80.446
תשנ"ט א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

<u>*מבחן במבנים אלגבריים ב' (80446)*</u>

מועד א' תשנ"ט

המורה: פרופ' א. מן   הזמן: שעתיים

ענה על שלוש מהשאלות הבאות.

1. הראה, כי יש זוויות שאי אפשר לחלקן לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה בלבד.

2. הוכח, כי אם $F \subseteq K \subseteq L$ הם שדות כך ש- K/F ו- L/K הרחבות פרידות, גם L/F הרחבה פרידה.

3. יהי n מספר מספר טבעי, ו- F שדה מסדר ראשוני, הראה כי קיים פולינום אי פריק ממעלה n מעל F.

4. יהי z מספר מרוכב המקיים $z^6 = 1$, $z \neq \pm 1$, $z \neq -1$
חשב את $|Q(z):Q|$.

5. תהי K/F הרחבת גלואה ממימד ראשוני p. נניח ש- F מכיל p איברים המקיימים $x^p = 1$. הראה, כי $K = F(a)$, כאשר $a^p \in F$.

ב ה צ ל ח ה!!

80.446
תשנ"ט ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן במבנים אלגבריים ב' (80446)

מועד ב' תשנ"ט

המורה: פרופ' א. מן

הזמן: שעתיים

ענה על שלוש מהשאלות הבאות.

1. הוכח, כי הרחבה אלגברית של הרחבה אלגברית היא אלגברית.

2. יהי שדות $F \subseteq K \subseteq L \subseteq \overline{F}$ כך ש K/F הרחבה אלגברית, $|L:K| = n$ ו- $\overline{F}$ היא סגור אלגברי של F. הוכח, כי כל איזומורפיזם של K/F לתוך $\overline{F}/F$ ניתן להרחבה ל- L/F, וזאת לכל היותר ב n אופנים.

3. הרחבה אלגברית K/F נקראת אי פרידה טהורה, אם אין איברים ב- K מחוץ ל- F שהם פרידים מעל F. הוכח כי אם K/F אי פרידה טהורה, ו- $x \in K$, אז $x^{p^n} \in F$ ל- n מתאים, כאשר $p = chF$.

4. תן דוגמה להרחבה נורמלית של הרחבה נורמלית, שאינה נורמלית בעצמה.

5. יהי F שדה ממציין 0, $a \in F$ ויהי K שדה פיצול של הפולינום $X^n - a$ מעל F. הראה כי חבורת גלואה של K/F פתירה.

בהצלחה!!

80.446
תשנ"ח א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד א' תשנ"ח
המורה: פרופ' צ. סלע

הזמן: שעתיים

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות. כל השאלות שוות בערכן.

1. יהי w שורש יחידה מסדר 11 מעל Q.

א. יהי $\alpha = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9$.
הוכיחו כי $[Q(\alpha):Q] = 2$ ומיצאו את הפולינום המינימלי של α.

ב. מיצאו איבר $\beta \in Q(\omega)$ כך ש- $[Q(\beta):Q] = 5$. חשבו את הפולינום המינימלי של β

2. יהי K שדה, M הרחבה סופית של K ו- L הרחבה סופית של M.

א. אם $L \hookleftarrow K$ הרחבה נורמלית ספרבילית, האם $L \hookleftarrow M$ נורמלית ספרבילית?

ב. אם $L \hookleftarrow K$ נורמלית ספרבילית, האם $M \hookleftarrow K$ נורמלית ספרבילית?

ג. אם $M \hookleftarrow K$ ו $L \hookleftarrow M$ נורמליות וספרביליות האם $L \hookleftarrow K$ נורמלית וספריבילית?

ד. תהי G חבורה סופית. האם ניתן למצוא שדה K והרחבה נורמלית ספרבילית L של K
כך ש: $G(L:K) \cong G$.

3. יהיו $L \hookleftarrow K$ שדות בעלי מציין $o < p$, ויהי $f(x) = x^p - x - a$ פולינום אי-פריק עבור $a \in K$. הוכיחו כי:

א. אם $\alpha \in L$ מקיים $f(\alpha) = 0$ אזי $f(\alpha + 1) = 0$

ב. חבורת גלואה של הפולינום $f(x)$ מעל K היא ציקלית מסדר p.

4. א. יהי $L = Q(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$. חשבו את דרגת ההרחבה $[L:Q]$ הוכיחו כי ההרחבה נורמלית וספרבילית, וחשבו את חבורת גלואה $G(L:Q)$.

ב. יהי K שדה ויהי $L = K(\alpha)$ הרחבה רבועית של K $([L:K] = 2)$ כך ש: $\alpha^2 \in K$
מהם כל האיברים $\beta \in L$ כך ש: $\beta^2 \in K$?

בהצלחה !!

80,446
תשנ"ח ב'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד ב' תשנ"ח
המורה: פרופ' צ. סלע

הזמן: שעתיים

ענו על שלוש מארבע השאלות הבאות. כל השאלות שוות בערכן.

1. חשבו את חבורת גלואה של הפולינומים הבאים מעל Q:
   א. x^4+x^2+1
   ב. x^4+x+1

2. יהיו $K\subset M\subset L$ שדות.
   א. הוכיחו כי $tr\deg_K L = tr\deg_K M + tr\deg_M L$.
   ב. יהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in L$ איברים בלתי תלויים טרנסצנדנטית מעל K. הוכיחו כי איבר $\beta\in L$ הוא טרנסצנדנטי מעל השדה $K(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ אם ורק אם האיברים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$ בלתי תלויים טרנסצנדנטית מעל השדה K.

3. יהי p ראשוני, ויהי $a\in Q$ מספר שאיננו חזקת p של מספר רציונלי. יהי L שדה הפיצול של הפולינום $f(x)=x^p-a$ מעל Q. הוכיחו כי:
   א. $L=Q(\alpha,\omega)$ כאשר α הוא שורש מסדר p של a, ו- ω הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר p.
   ב. $[Q(\alpha,\omega):Q]=p(p-1)$
   ג. $G(Q(\alpha,\omega):Q)$ נוצרת ע"י האיברים η_i $i=0,\ldots,p-1$ ו- σ_j $j=1,\ldots,p-1$

   כאשר: $\eta_i(\alpha)=\alpha\omega^i$; $\eta_i(\omega)=\omega$

   $\sigma_j(\alpha)=\alpha$; $\sigma_j(\omega)=\omega^j$

4. א. יהיו $K\hookrightarrow M\hookrightarrow L$ הרחבות סופיות ונניח כי $K\hookrightarrow L$ הרחבה נורמלית ספרבילית. הוכיחו כי $K\hookrightarrow M$ נורמלית וספרבילית אם ורק אם $G(L:M)$ נורמלית ב: $G(L:K)$.
   ב. הוכיחו כי אם הפולינום $f(x)\in Q[x]$ ניתן לפתרון בעזרת שורשים, אזי חבורת גלואה של $f(x)$ פתירה (ניתן להניח את כל למות העזר הדרושות להוכחה).

בהצלחה

80,446
תשנ"ז/א'

80446
אהוד דה שליט

<u>מבנים אלגבריים (2)</u>

מועד א' תשנ"ז
הזמן : 2 שעות

I ענה על <u>אחת</u> מתוך שתי השאלות הבאות (30 נק') :

1) יהיה L שדה ותהיה G חבורה סופית של אוטומורפיזמים של L. יהיה $K = L^G$ שדה השבת של G. הוכח : $[L : K] \le |G|$.

2) תהיה L/K הרחבה סופית של שדות.
(א) הגדר : L/K ספרבילית.
(ב) הוכח שאם L/K ספרבילית אזי $L = K(\alpha)$ עבור איבר מתאים α.

II ענה על <u>שתיים</u> מתוך שלוש (50 נק') :

1) יהיה $f(x) = x^4-3$.
(א) אם L הנו שדה הפצול של $f(x)$ מעל $\mathbf{Q}$, תאר את $Gal(L/\mathbf{Q})$.
(ב) אם K הנו שדה הפצול של $f(x)$ מעל $\mathbf{F}_5$, תאר את $Gal(K/\mathbf{F}_5)$ (הערה : $\mathbf{F}_5 = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$).

2) יהיו K, M שני תתי-שדות של L, $L = MK$. נסמן $F = M \cap K$ ונניח L הרחבה סופית של F.
(א) הוכח שאם K/F גלואה, גם L/M גלואה ומתקיים $Gal(L/M) \cong Gal(K/F)$.
(ב) תן דוגמא המראה שבלי להניח ש K/F גלואה, אין זה בהכרח נכון ש $[L : M] = [K : F]$.

3) יהיה $L = \mathbf{C}(t)$ שדה הפונקציות הרציונליות במשתנה t (מעל המרוכבים), ותהיה σ ההעתקה המוגדרת ע"י

$$(\sigma f)(t) = f(1/(1-t))$$

לכל פונקציה רציונלית f.
(א) הוכח ש σ אוטומורפיזם מסדר 3 של L.
(ב) יהיה K שדה השבת של σ. מצא את הפולינום המינימלי של t מעל K.

2/...

80.446
תשנ"ג א'

III ענה על *ארבע* מתוך חמש (20 נק'). נכון או לא נכון (נמק בקצרה) ?

1) אם $F \subseteq K \subseteq L$ שדות, אזי $[K : F]$ מחלקת את $[L : F]$.

2) אם $F \subseteq K \subseteq L$, K/F הרחבה סופית, ו $\alpha \in L$ טרנסצנדנטלי מעל F, אזי α טרנסצנדטלי גם מעל K.

3) אם α ו β מספרים מרוכבים הפותרים משואות ממעלה ≥ 3 מעל **Q**, גם $\alpha+\beta$ פותר משואה כזו ממעלה ≥ 3.

4) אם f, g פולינומים מעל F ללא גורם משותף ב $F[X]$, אזי אין להם גורם משותף ב $K[X]$ לכל שדה הרחבה K של F.

5) שדה לא יכול להכיל תת-שדה (שונה ממנו) איזומורפי לו.

בהצלחה !!!

80.446
תשנ"ז ב'

80446	מבנים אלגבריים (2)	מועד ב' תשנ"ז
אהוד דה שליט		הזמן : 2 שעות

I ענה על אחת מתוך שתי השאלות הבאות (30 נק') :

1) אם L/K הרחבה סופית פתירה בעזרת רדיקלים, ו M/K סגור גלואה שלה, אזי $Gal(M/K)$ חבורה פתירה. סקור את השלבים העקריים בהוכחה.

2) תהיה L/K הרחבה סופית של שדות. הוכח ש $[L:K] = |Aut(L/K)|$ אם ורק אם L/K הרחבה נורמלית וספרבילית.

II ענה על שתיים מתוך שלוש (50 נק') :

1) (א) יהיה $K = \mathbf{Q}(\sqrt{(1+\sqrt{3})})$ ויהיה L סגור גלואה שלו. תאר את $Gal(L/\mathbf{Q})$.
(ב) אותה השאלה כאשר $K = \mathbf{Q}(\sqrt{(7+4\sqrt{3})})$.

2) יהיו K, M שני תתי-שדות של L, $L = MK$. נסמן $F = M \cap K$ ונניח L הרחבה סופית של F.
(א) הוכח שאם M ו- K גלואה מעל F, גם L/F גלואה, ומתקיים $Gal(L/F) \cong Gal(M/F) \times Gal(K/F)$.
(ב) האם נכון שאם L/M ו- L/K גלואה גם L/F גלואה ומתקיים $Gal(L/F) \cong Gal(L/K) \times Gal(L/M)$?

3) גזירה של שדה K הנה העתקה $D : K \to K$ המקיימת $D(a+b)=D(a)+D(b)$ וגם $D(ab) = a.D(b)+D(a).b$. הוכח שאם L/K הרחבה ספרבילית סופית, כל גזירה של K נתנת להרחבה אחת ויחידה לגזירה של L.

III ענה על ארבע מתוך חמש (20 נק'). נכון או לא נכון (נמק בקצרה) ?

1) אם $L \supseteq K \supseteq F$ שדות, אזי L/F הרחבה אלגברית אם ורק אם L/K וכן K/F אלגבריות.

2) אם $L \supseteq K \supseteq F$, L/F הרחבה אלגברית ו $\alpha \in L$, אזי הפולינום המינימלי של α ביחס ל K מחלק את הפולינום המינימלי של α ביחס ל F.

2/...

80.446
תשנ"ג ב

3) לכל מספר טבעי n יש שדה בן n אברים.

4) שדה הפצול של פולינום אי-פריק ממעלה n מעל K הנו מדרגה n מעל K.

5) אם K הרחבה סופית של F ולכל פולינום מ F[X] יש שרש ב-K אזי K סגור אלגברית.

בהצלחה !!!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מועד א' תשנ"ד

המורה: ד"ר ענר שלו

הזמן: שעתיים

מבנים אלגבריים 2 (80446)

ענו על 3 מ - 4 השאלות הבאות מותר להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה בתנאי שיצוטטו במדויק.

1. הוכיחו את המשפט היסודי של האלגברה תוך שימוש בתורת גלואה.

2. א. תהי E/F הרחבה אלגברית של שדות (לאו דווקא ממימד סופי). הראו שכל הומומורפיזם $\varphi: E \to E$ הפועל בזהות על אברי F הוא אוטומורפיזם.

ב. הראו שהטענה בסעיף א' אינה נכונה ללא ההנחה ש E/F אלגברית (רמז: בנו דוגמא נגדית במציין $O<P$).

3. יהי E שדה הפיצול של X^5-2 מעל Q.

א. חשבו את $[E:Q]$.

ב. מצאו איברים $\alpha,\beta \in E \setminus Q$ כך ש - α ניתן לבניה במחוגה וסרגל, אך β לא ניתן לבניה במחוגה וסרגל. נמקו.

4. א. הראו שהשדות החלקיים של F_{256} מהווים שרשרת (לכל שני שדות חלקיים K,L מתקיים $K \subseteq L$ או $L \subseteq K$).

ב. האם התכונה הנ"ל מתקיימת עבור F_{729}?

בהצלחה!

משל דף בי

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מועד ב' תשנ"ד

המורה: ד"ר ענר שלו

הזמן: שעתיים

מבנים אלגבריים 2 (80446)

ענו על 3 מ- 4 השאלות הבאות. מותר להסתמך על טענות שהוכחו בכיתה בתנאי שיצוטטו במדויק.

1. נסחו והוכיחו את משפט "הילברט 90".

2. תהי E/F הרחבת גלואה עם חבורות גלואה G יהיו K_1,K_2 שדות ביניים שהחבורות החלקיות המתאימות להן הן H_1,H_2.

   א. הראו כי החבורה החלקית המתאימה ל- $K_1 \cap K_2$ היא $\langle H_1,H_2 \rangle$ (החבורה הנוצרת ע"י H_1,H_2).

   ב. הראו כי החבורה החלקית המתאימה ל- $K_1 \vee K_2$ (השדה הנוצר ע"י K_1,K_2) היא $H_1 \cap H_2$.

3. הראו שהפולינום $X^5 - 4X^2 + 2$ מעל Q אינו פתיר באמצעות שורשים (רמז: הראו שחבורת גלואה המתאימה היא S_5).

4. יהי K, L שדות סופיים כך ש- $|K| = |L|$. הראו כי $K \cong L$.

בהצלחה!

80.446
תשנ"ג א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד א' תשנ"ג
המורה: ד"ר א. דה-שליט
הזמן: שלוש שעות

ענה על 4 שאלות מתוך 6, מהן אחת לפחות מכל פרק.
צטט את המשפטים עליהם אתה מסתמך.

פרק I

1. א. תהא G חבורה סופית, $|G| = p^a m$, $(p,m)=1$
הוכח: יש ל- G תת-חבורה מסדר p^a .

ב. הוכח שכל חבורה מסדר 45 הנה אבלית.
כמה חבורות כאלו יש (עד כדי איזומורפיזם)?

2. נגדיר תבנית בילינארית על $\mathbb{R}^3$: $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx'+yy'-zz'$

ותהא $G = \{ T \in GL_3(\mathbb{R}) \mid \langle Tv, Tv\rangle = \langle v,v\rangle : v,v$ לכל $\}$

א. תאר את המסלול Ω של $(0,0,1)$ תחת פעולת G ,

ב. יהא H המייצב של הנקודה $(0,0,1)$. תאר הפרוק של Ω למסלולים תחת פעולת H .

פרק II

3. א. הגדר: חוג (קומוטטיבי) נואטריאני.

ב. הוכח: אם R חוג קומוטטיבי נואטריאני, ו- M מודול נוצר סופית מעל R, אזי כל תת-מודול של M גם כן נוצר סופית.

ג. תן דוגמא למודול נוצר סופית מעל חוג לא נואטריני, עם תת מודול שאינו נוצר סופית.

2/...

80.446
תשנ"ג ד.

4. תהיה A מטריצה של מספרים שלמים מסדר $n \times n$. תהיה R תת החבורה של $\mathbb{Z}^n$ הנוצרת על ידי שורות A , ותהיה S תת-החבורה הנוצרת על ידי עמודות A .
הוכח:
$$\mathbb{Z}^n/R \cong \mathbb{Z}^n/S$$

(רמז: השתמש במשפט על מחלקים אלמנטריים).

פרק III

5. יהיה F שדה ויהיה $\overline{F}$ סגור אלגברי שלו.
א. הוכח שאם L שדה הרחבה של F ממימד סופי יש לכל היותר $[L:F]$ שכונים שונים של L ב- $\overline{F}$ (שהם הזהות על F).

ב. הוכח שאין ל- $\mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים) אוטומורפיזמים לא טריואלים (האוטומורפיזם הטריויאלי הנו הזהות)

6. יהיה $F=\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$

א. הוכח ש- F הרחבת גלואה של $\mathbb{Q}$ ומצא את $Gal(F/\mathbb{Q})$

ב. מהם כל שדות הביניים $\mathbb{Q} \subset K \subset F$

ג. מצא מספר $\alpha \in F$ כך ש- $F=\mathbb{Q}(\alpha)$

ב ה צ ל ח ה !!

80.446
תשנ"ג/ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד ב' תשנ"ג
המורה: ד"ר א. דה שליט

הזמן: שלוש שעות

ענה על 4 שאלות מתוך 6, מהן לפחות אחת בכל פרק.
צטט את המשפטים עליהם אתה מסתמך.

פרק I

1. תהיה G חבורה מסדר pq, p,q ראשוניים שונים.
(א) אם $p<q$ הוכח שיש ל G חבורת q-סילו יחידה.
(ב) אם גם $q \not\equiv 1 \mod p$, הוכח ש G ציקלית.

2. תהינה G ו H החבורות הבאות, נתונות בעזרת יוצרים ויחסים:

$$G = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1,\ yxy = x^7 \rangle$$

$$H = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1,\ yxy = x^3 \rangle$$

הוכח ש G ו H אינן איזומורפיות.

פרק II

3. (א) תהיה M תת חבורה של $\mathbb{Z}^r$. הוכח: יש ל M בסיס שהוא חלק מבסיס של $\mathbb{Z}^r$ אם ורק אם $\mathbb{Z}^r/M$ חבורה חסרת-פתול.

(ב) האם לחבורה הנוצרת ע"י $(1,3,-1)$ ו $(1,-6,2)$ יש בסיס שהוא חלק מבסיס של $\mathbb{Z}^3$?

2/...

80.446
תשנ"ג/ב

4. הוכח: אם R חוג נואטריני, גם $R[x]$ (חוג הפולינומים מעל R) נואטריני.

פרק III

5. יהיה $\bar{F}$ סגור אלגברי של שדה F, ותהינה K, L שתי הרחבות של F המוכלות ב $\bar{F}$.

(א) הגדר מהו הקומפוזיטום KL.

(ב) הוכח: אם K/F ו L/F גלואה, גם KL/F גלואה, ו $Gal(KL/F)$ איזומורפית לתת חבורה של $Gal(L/F) \times Gal(K/F)$.

(ג) ללא ההנחה שב (ב), האם נכון שאם ראשוני p איננו מחלק את $[K:F]$ ואת $[L:F]$, הוא גם לא יחלק את $[KL:F]$?

6. (א) הוכח ש $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{7}})$ אינה הרחבה נורמלית של $\mathbb{Q}$.

(ב) הוכח ש $\mathbb{Q}(\sqrt{4+\sqrt{7}})$ הינה הרחבה נורמלית של $\mathbb{Q}$ ומצא את חבורת גלואה שלה מעל $\mathbb{Q}$.

ב ה צ ל ח ה !

80.446
נשנ"ב /א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד א' תשנ"ב

המורה: פרופ' א. מן

הזמן: 2 ש'

ענה על שלוש מחמש השאלות הבאות.

1. נסח והוכח את קריטריון איזנשטיין .

2. הגדר שדה פיצול של פולינום. הוכח כי לכל פולינום יש שדה פיצול, וכי הוא יחיד עד לידי איזומורפיזם מעל שדה הבסיס.

3. הוכח כי הרחבה סופית פרידה היא פשוטה.

4. תן דוגמה להרחבה נורמלית של הרציונליים עם חבורת גלואה איזומורפית לחבורה הסימטרית S_3 .

5. יהי F שדה כלשהו, ויהי $K = F(X_1, \dots, X_n)$ שדה הפונקציות הרציונליות ב- n משתנים מעליו. החבורה הסימטרית S_n פועלת על K ע"י הפעלת התמורה המתאימה על המשתנים. נסמן

$$\Delta = \prod_{i<j} (X_i - X_j)$$

א. הוכח,כי אם ל- F מציין 0, אז שדה השבת של A_n נוצר מעל F ע"י הפונקציות הסימטריות היסודיות ו- Δ.

ב. האם הטענה ב א' נכונה כאשר ל-F מציין סופי?

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבנים אלגבריים (2) (80446)

מועד ב' תשנ"ב

המורה: פרופ' א. מן   הזמן: 2 ש'

ענה על שלוש מחמש השאלות הבאות.

1. הגדר איבר פריד מעל שדה. אם K/F היא הרחבה של שדות, הוכח כי כל איברי K הפרידים מעל F מהווים תת-שדה.

2. אם q הוא חזקה של מספר ראשוני, הוכח כי קיים שדה סופי בן q איברים, וכי כל שני שדות כאלה איזומורפיים.

3. יהי F שדה, $K=F(X)$ שדה הפונקציות הרציונליות מעליו, ו- L השדה המתקבל מ- K ע"י סיפוח שורש של המשוואה $X^n-T=0$. הוכח כי L איזומורפי ל- K.

4. הוכח כי הפולינום הציקלוטומי אי פריק מעל הרציונליים.

5. $f(X)$ הוא פולינום ממעלה 6 מעל הרציונליים, שיש לו לפחות שורש כפול אחד. הראה כי המשוואה $f(X)=0$ ניתנת לפתרון ע"י הוצאת שורשים.

ב ה צ ל ח ה

80.583
תשנ"ו / א'

אהוד דה שליט
מועד א' תשנ"א

בחינה בתורת השדות (80583)

זמן: 2 ש'

I. ענה "נכון" או "לא נכון" ונמק בקצרה. ענה על 4 מתוך 6 (כל שאלה 10 נק').

(א) אם $f \in F[X]$ פולינום אי-פריק, ו-F שדה ממציין 0, f ספרבי?

(ב) הקומפוזיטום של $\mathbb{F}_{p^2}$ ו-$\mathbb{F}_{p^3}$ מכיל את $\mathbb{F}_{p^5}$.

(ג) אם $\theta \in \mathbb{C}$ טרנסצנדנטי מעל $\mathbb{Q}$, θ טרנסצנדנטי גם מעל כל הרחבה סופית של $\mathbb{Q}$.

(ד) קיימת הרחבת גלואה $L/\mathbb{Q}$ עם $Gal(L/\mathbb{Q}) \cong S_3$, המכילה הרחבת גלואה ציקלית מסדר 3 של $\mathbb{Q}$.

(ה) אם K/F ו-L/K הרחבות גלואה סופיות פתירות, גם L/F הרחבה פתירה (לאו בהכרח גלואה).

(ו) אם דרגת הפולינום המינימלי של α מעל F היא n, ושל β היא m, דרגת הפולינום המינימלי של $\alpha+\beta$ מחלקת את mn.

II. ענה על 3 מתוך 5 (כל שאלה 20 נקודות).

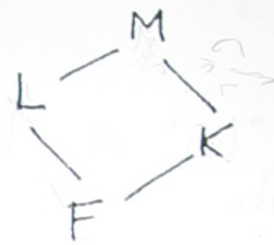
1) אם L/F הרחבה אלגברית, ו-t משתנה, הוכח שגם $L(t)/F(t)$ הרחבה אלגברית. (הערה: אף כי אין זה נחוץ, אם נוח לכם להניח ש-L/F ספרבילית, הניחו זאת.)

2) אם L/F הרחבה של שדות, $x,y \in L$ ו-x^3+y^3, x^2+y^2 שניהם אלגבריים מעל F, גם x,y אלגבריים מעל F. הוכח.

2/...

80.583
תשנ"ו / א

3) תהיה



דיאגרמה של שדות, בה כל ההרחבות הן מדרגה סופית. נניח ש- L/F הרחבת גלואה, ו- $M=LK$.
הראה ש- $[M:K] \mid [L:F]$.
מתי חל שוויון $[L:F]=[M:K]$? הראה שבמקרה זה, $Gal(M/K) \cong Gal(L/F)$. תן דוגמא שבה L/F אינה גלואה, ו- $M=LK$ ו- $[M:K] \nmid [L:F]$.

4) יהיה L שדה הפיצול של x^4-2 מעל $\mathbb{Q}$, ויהיה $F=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. מצא את חבורת גלואה של L/F, את כל שדות הביניים, והחבורות החלקיות המתאימות להם.

5) תהיה L/F הרחבת גלואה סופית עם $Gal(L/F)=G$, ויהיה $\alpha \in L$ כך ש- $\{\sigma\alpha \mid \sigma \in G\}$ בסיס של L/F (α קיים לפי משפט הבסיס הנורמלי). הוכח שלכל שדה ביניים $F \subset K \subset L$, $\alpha_K = Tr_{L/K}(\alpha)$ איבר פרימיטיבי של K מעל F: $K=F(\alpha_K)$, ואם K/F גלואה, α_K נותן בסיס נורמלי של K/F.

בהצלחה!

80.583
תשנ"א/ב

בחינה בתורת השדות (80583)

אהוד דה שליט
מועד ב' תשנ"א

הזמן: 2 שע'

I. ענה "נכון" או "לא נכון", ונמק בקצרה. ענה על 4 מתוך 6 (כל שאלה 10 נק').

(א) כל איבר ב $\mathbb{F}_{19}$ הנו חזקה חמישית של איבר מתוך השדה.

(ב) לכל שדה ממציין $p\neq 0$ יש הרחבות אי-ספרביליות.

(ג) פולינום אי-פריק מעל $\mathbb{R}$ הנו ממעלה 1 או 2.

(ד) אם $F\subset K\subset L$ הרחבות סופיות, L/F ו K/F גלואה, אזי L/F אבלית $\iff$ L/K ו K/F אבליות.

(ה) אם L/F הרחבת גלואה סופית, ו $f\in F[X]$ פולינום אי-פריק שמתפצל ב L, $Gal(L/F)$ פועלת טרנזיטיבית על שרשי f.

(ו) אם σ אוטומורפיזם של שדה L, ו F שדה-השבת של σ, אזי $[L:F]<\infty$.

II. ענה על 3 מתוך 5 (כל שאלה 20 נק').

1) יהיה F שדה אינסופי, ותהיה L/F הרחבה ספרבילית סופית. הוכח שקיים $\alpha\in L$ כך ש $L=F(\alpha)$.

2) יהיו $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\theta=e^{\frac{2\pi i}{15}}$. הוכח ש $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}(\zeta)$; הראה ש $\mathbb{Q}(\theta)=\mathbb{Q}(\omega,\zeta)$ ומצא את $Gal(\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q})$.

2/...

80.583

תשנ"ו/5

(מועד ב)

3) תהיה L/F הרחבת גלואה סופית, ויהיה $f \in F[X]$ פולינום אי-פריק (מעל F) ממעלה ראשונית p. הוכח שאם L אינו שדה פיצול עבור f, f נשאר אי-פריק מעל L. תן דוגמא המראה שהטענה אינה נכונה, ללא ההנחה ש L/F גלואה.

4) יהיו $a, b \in \mathbb{Q}$ ותהיה L הרחבת גלואה של $\mathbb{Q}$ המכילה את $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$. הוכח ש L מכילה גם את $\sqrt{a}$ וגם את $\sqrt[3]{b}$. (רמז: אם $M = L(\sqrt{a})$, הראה שיש אוטומורפיזם σ של M עבורו $\sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ אבל $\sigma(\sqrt[3]{b}) \neq \sqrt[3]{b}$).

5) לכל n, בנה הרחבת גלואה של שדות L/F, עם $Gal(L/F) \cong S_n$

80-583
תשנ"א/ג

אהוד דה שליט (80583) <u>תורת השדות</u>
מועד ג תשנ"א

I. ענה "נכון" או "לא נכון" ונמק <u>בקצרה</u>. ענה על 4 מתוך 6 (כל שאלה 10 נק'):

(א) ישנו בדיוק שדה אחד F המקיים $F \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{7}})$, $[F:\mathbb{Q}]=2$.

(ב) לכל שדה F ישנה הרחבה אלגברית L, $F \subsetneq L$.

(ג) אם K שדה, $[K:\mathbb{Q}]=4$, אזי קיים שדה $K \subseteq L$ כך ש- $L/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה, ו- $[L:K] \mid 6$.

(ד) יהיה p ראשוני, $n \geq 2$ ו- α יוצר של החבורה הכפלית של $\mathbb{F}_{p^n}$. אזי הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{F}_p$ הוא $X^{p^n-1}-1$.

(ה) אם $[L:\mathbb{Q}]=16$, L גלואה מעל $\mathbb{Q}$ ו- $\alpha \in L$, אזי α ניתן להצגה באמצעות רדיקלים מתוך המספרים הרציונליים.

(ו) יהיה $\overline{\mathbb{Q}}$ הסגור האלגברי של $\mathbb{Q}$, $f \in \mathbb{Q}[X]$ פולינום אי-פריק, α, β שני שורשים של f. אזי קיים אוטומורפיזם σ של $\overline{\mathbb{Q}}$ כך ש- $\sigma(\alpha)=\beta$.

II. ענה על 3 מתוך 5 (כל שאלה 20 נק').

1) תהי G חבורה <u>סופית</u> של אוטומורפיזמים של שדה L

2/...

80.583
תשנ"ו/ג

ויהיה $L^G = F$ שדה השבת של G. הוכח ש $[L:F]=|G|$.

2) יהיו $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $F_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. יהיה L הקומפוזיטום של F_1, F_2, F_3. מהי חבורת גלואה $Gal(L/\mathbb{Q})$? מהם כל שדות הביניים (מצא להם יוצרים)?

3) תהיה G חבורה סופית. ~~[illegible]~~ הראה כיצד לבנות הרחבה של שדות L/F שהיא גלואה, עם חבורת גלואה איזומורפית ל G.

4) יהיה F שדה המכיל n שרשי יחידה שונים מסדר n, ותהיה L/F הרחבת גלואה, עם $Gal(L/F)$ ציקלית מסדר n. הוכח שקיים $\beta \in L$ כך ש $\beta^n \in F$ ו $L = F(\beta)$.

5) יהיה F שדה ותהיה $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ הרחבה נוצרת סופית. הוכח שקיימים אינדקסים $i_1, \dots, i_r$ כך ש $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ בלתי תלויים אלגברית מעל F, ו-$L/F(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r})$ הרחבה אלגברית סופית.

80.583
תש"ן - א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בתורת השדות (בשדות) תש"ן 1990
(80583)

מועד א' תש"ן
המורה: פרופ' גייפמן

הזמן: שעתיים

ענה על ארבע שאלות. לא תבדקנה יותר מארבע תשובות.
אם ענית על יותר, ציין את ארבע השאלות שבחרת, אחרת תבדקנה ארבע
הראשונות בסדר המספרי. מקסימום הנקודות שניתן לצבור הוא 100.
(שים לב שאם תבחר רק שאלה אחת מבין 6-4 תוכל לצבור מקסימום של
90 נקודות).

סימונים:

$\mathbb{Q}$ = שדה הרציונלים

$F(a_1, a_2 \ldots)$ = השדה המתקבל ע"י סיפוח $a_1, a_2, \ldots$ ל F.

K/F גלואה, נורמלי, ... "פירושו $K \supseteq F$ ו K הרחבת גלואה, הרחבה נורמלית וכו' של F.

$Gal(K/F)$ חבורת גלואה של K מעל F.

1. (20 נקודות) מהי הצורה הכללית של איבר ב $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$? נמק.

הוכח: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

האם $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (כשדות) נמק.

2. (20 נקודות)

א. הוכח בקצרה את נוסחת המכפלה $[F_3 : F_1] = [F_3 : F_2] \cdot [F_2 : F_1]$

ב. יהיו i, β מספרים מרוכבים המקיימים $\beta^3 = 2$ $i^2 = -1$.
האם $i \in \mathbb{Q}(\beta)$? נמק.

3. (20 נקודות) הוכח או הפרך:

א. כל שדה סופי אינו סגור אלגברית.

ב. לשדה בן 16 איברים יש תת שדה בן 8 איברים.

80.583
תשנ"ן - א'

4. (30 נקודות)
(א) יהי K/F נורמלי $\alpha,\beta \in K$, β פריד (ספרבילי) מעל F.

הוכח: $\beta \in F(\alpha)$ $\Longleftrightarrow$ כל אוטומורפיזם של K מעל F המזיז את β מניז את α.

(ב) יהי F שדה בעל מציין $2 \neq$. $K = F(\alpha,\beta)$ כאשר $\alpha^2 = a \in F$, $\beta^2 = b \in F$. $\alpha \notin F(\beta)$. $\beta \notin F$.
כמה איברים ב $Gal(K/F)$? כיצד הם פועלים על α ועל β? הוכח:
$K = F(\alpha+\beta)$.

5. (30 נקודות) תהי U_n החבורה הכפלית של היחידות ב $\mathbb{Z}_n$. מצא כמה איברים יש ב U_{12} ואת הסדר של כל איבר.
יהי F שדה הפיצול של $x^{12}-1$ מעל $\mathbb{Q}$.
ידוע שהפולינום הציקלוטומי מסדר 12 אי פריק מעל $\mathbb{Q}$. מצא את $Gal(F/\mathbb{Q})$ וחשב כמה שדות בינהם יש בין $\mathbb{Q}$ ל F (השונים מ $\mathbb{Q}$ ו F).

6. (30 נקודות) תהי $F(\alpha)$ הרחבה פשוטה של F המתקבלת ע"י סיפוח α,
יהי $\beta \in F(\alpha) \setminus F$ $\beta = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ $g(\alpha) \neq 0$.
כאשר $f(x), g(x) \in F[x]$.

הוכח (א) α אלגברי מעל $F(\beta)$.

(ב) אם $n = max(deg(f), deg(g))$ אזי
$|Gal(F(\alpha)/F(\beta))| \leq n$.

(ג) אם $n = |Gal(F(\alpha)/F(\beta))|$ אזי $F(\alpha)/F(\beta)$ הינה הרחבת גלואה.

ב ה צ ל ח ה !!

80.583
תש"ן - ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בתורת השדות (שדות) (80583)

מועד ב' תש"ן

המורה: פרופ' ח. גייפמן

הזמן: שעת"ן

ענה על ארבע שאלות. לא תבדקנה יותר מארבע תשובות.
אם ענית על יותר ציין את ארבע השאלות שבחרת, אחרת תבדקנה ארבע
הראשונות בסדר המספרי. מקסימום הנקודות שניתן לצבור הוא 100. (שים לב
שאם תבחר רק שאלה אחת מבין 4-6 תוכל לצבור מקסימום של 90 נקודות).

סימונים $\mathbb{Q}$ = שדה הרציונלים

$F(a_1,\dots,a_n)$ = השדה המתקבל מ F ע"י ~~ספוח~~ ספוח $a_1,a_2,\dots$

"K/F גלואה, נורמלי..." פירושו $K\supseteq F$ ו K הרחבת
גלואה, הרחבה נורמלית וכו'... של F.

$Gal(K/F)$ = חבורת גלואה של K מעל F.

1. (20 נקודות) הוכח: $\mathbb{Q}(2^{1/2}) = \mathbb{Q}(2^{1/4}) \cap \mathbb{Q}(i\cdot 2^{1/4})$

כאשר $2^{1/2}, 2^{1/4}$ הם הערכיים הממשיים חיוביים של השרש.
רמז: עבור הכוון הקשה יותר הסתמך על $i\cdot 2^{1/4} \notin \mathbb{Q}(2^{1/4})$
(יש לנמק) ומצא מהן האפשרויות עבור מימדי השדות השונים מעל $\mathbb{Q}$

2. (20 נקודות) יהיו $F\subseteq K_1,K_2\subseteq L$ $[K_i:F]=n_i<\infty$
יהי $\hat{K}$ השדה הנוצר ע"י K_1,K_2 (תת השדה המינימלי של L המכיל
את K_1,K_2 זהו $K_1(K_2)$ או $K_2(K_1)$)
הוכח: $[\hat{K}:F]\le n_1\cdot n_2$
רמז: הראה שקיימים $a_1,\dots,a_m$ כך ש $K_2=F(a_1,\dots,a_m)$
והסתמך על נוסחת המכפלה של המימדים.

3. (20 נקודות) הוכח או הפרך:
לכל שדה סופי F ולכל $0<k$ יש ב $F[x]$ פולינום אי פריק
ממעלה k.

2/...

80.583
תש"ן - ב'

4. (30 נקודות) ידוע כי x^4+1 אי פריק מעל $\mathbb{Q}$
שרשיו הם: $\alpha, -\alpha, \alpha i, -\alpha i$ (אין צורך להוכיח).
(למשל $\alpha = \sqrt{2}^{-1}(1+i)$ כאשר $i^2=-1$ ו $\alpha^2 = i$) יהי F שדה הפיצול של x^4+1 מעל $\mathbb{Q}$.
חשב את $Gal(F/\mathbb{Q})$ (תוכל להציגה כחבורת תמורות של השרשים),
מצא כמה שדות בינים יש בין $\mathbb{Q}$ ל F (לא כולל $\mathbb{Q}$ ו F) ואת
יחסי ההכלה ביניהם.

5. (30 נקודות) ידוע כי $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
(אין צורך להוכיח). יהי $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
כמה שדות ביני ם, K יש בין $\mathbb{Q}$ ל F כך ש $[K:\mathbb{Q}] = 4$?
רמז: מצא כיצד אברי $Gal(F/\mathbb{Q})$ פועלים על השרשים, מצא את $Gal(F/\mathbb{Q})$ והשתמש במשפט היסודי של תורת גלואה.

6. (30 נקודות) יהי $L = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ כאשר $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
טרנסצנדנטיים בלתי תלויים מעל F (כלומר L =שדה הפונקציות
הרציונליות במשתנים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ מעל F) יהי:

$$a_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad a_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad a_2 = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

ויהי $K = F(a_0, a_1, a_2)$.

מהי $[L:K]$? מהו $Gal(L/K)$?

יהי

$$L_1 = K(\alpha_1+\alpha_2), \quad L_2 = K(\alpha_1-\alpha_2), \quad L_3 = K(\alpha_1\cdot\alpha_2)$$

בהנחה שהמציין $\neq 2$ מצא את $[L_i:K]$, $i=1,2,3$. אילו מבין

השוויונות הבאים נכונים:

$$L_1 = L_2, \quad L_2 = L, \quad L_1 = L_3 \quad ?$$

בהצלחה!

80.502
תשמ"ב | א
c.1

האוניברסיטה העברית בירושלים
המכון למתמטיקה

בחינה בתורת השדות ותורת גלואה (80502)

מועד א' תשמ"ב
המורה: ד"ר א. ריפס

משך הבחינה: 2 ש'

ענה על שאלה 1 ועל שתיים מבין השאלות 2-5.

1. האם הטענות הבאות נכונות או לא? נמק את תשובותיך בקצרה (בין שתי מילים לשלוש שורות).

א. כל הרחבה אלגברית פשוטה היא פרידה (ספרבילית).
ב. שדה פיצול של פולינום אי-פריק הוא הרחבת גלואה.
ג. כל הרחבת גלואה היא פשוטה.
ד. אם $f(x)$ פולינום אי-פריק ממעלה 5 מעל שדה הרציונליים, אי-אפשר לפתרו ע"י רדיקלים.

ה. כל הרחבה אלגברית של שדה המספרים הממשיים היא הרחבת גלואה.
ו. השדות $Q(\sqrt[3]{1})$ ו- $Q(\sqrt[6]{1})$ שווים, כאשר Q הוא שדה הרציונלים ו- $\sqrt[n]{1}$ הוא שורש n-י פרימיטיבי של 1.

2. חשב את מימד $Q(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$ מעל Q.

3. א. הגדר: שדה פיצול של פולינום מעל שדה F.
ב. נסח והוכח את המשפט על יחידות שדה הפיצול.

4. א. מצא את כל האוטומורפיזמים של $Q(\sqrt[5]{5})$ מעל Q.
ב. כמה תת-שדות שונים זה מזה איזומורפיים ל- $Q(\sqrt[5]{5})$ מוכלים בשדה המרוכבים?

5. א. הגדר: שורש n-י פרימיטיבי של 1.
ב. יהי $\sqrt[n]{1}$ שורש n-י פרמיטיבי של 1, הוכח כי $Q(\sqrt[n]{1})/Q$ היא הרחבת גלואה, וכי חבורת גלואה שלה קומוטטיבית.

בהצלחה!

80.502
תשמ"ב ג
c.1

האוניברסיטה העברית בירושלים
המכון למתימטיקה

בחינה בתורת השדות ותורת גלואה (80502)
מועד ב' התשמ"ב
מורה: א. ריפס
משך הבחינה: 2 ש'

ענה על שאלה 1 ועל 2 שאלות מתוך שאלות 2-5:

1) האם הטענות הבאות נכונות או לא (נמק):

א. כל שדה אין-סופי הוא בעל מציין 0.

ב. לכל n ולכל שדה k קיים פולינום אי-פריק $f(X)\in k[X]$ ממעלה n.

ג. קיים שדה F כך שחבורת קליין (דהיינו, חבורת תמורות $\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\right\}$) איזומורפית לחבורה חלקית של החבורה הכפלית של F.

ד. כל הרחבה $L\supset F$ כך ש $[L:F]=2$ היא הרחבת גלואה.

ה. שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ הוא סגור אלגברי של שדה המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$.

ו. אם $K\supset F$ הרחבה נורמלית ו $L\supset K$ הרחבה נורמלית אזי גם $L\supset F$ הרחבה נורמלית.

2) הוכח כי לא קיים שדה סופי בעל 10 איברים.

3) חשב את $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]$.

4) הוכח כי עד כדי איזומורפיזם יש רק שדה אחד F_p עם p^n איברים.

5) נסמן ב ζ_n שורש פרימיטיבי מ 1 ממעלה n.

א. הוכח כי $\mathbb{Q}(\zeta_n)\supset\mathbb{Q}$ היא הרחבת גלואה.

ב. הראה כי $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\cong Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ החבורה הכפלית של שאריות מודולו n.

בהצלחה!

(ג)

בחינה ב"תורת השדות" - מועד ב׳

משך הבחינה: 3 שעות

התלמידים רשאים להשתמש בספרים וברשימות.

ענה על כל השאלות הבאות:

אם הנך מצטט תוצאות מרשימות או מספרים נסח את המשפטים בפרוטרוט ואל תסתפק בציטוט מספר המשפט או התרגיל.

1) הגדר את המושגים הבאים ותן דוגמא לא טריויאלית.

סדר אותם במדת האפשר בסדר הכלה כגון: { הרחבה סופית } ⊇ { הרחבה אלגברית }

א. הרחבה אלגברית

ב. הרחבה אי ספרבילית טהורה

ג. הרחבה צקלוטומית

ד. הרחבה נורמלית סופית.

2) ענה על שתיים מהשאלות הבאות.

א. תאר בפרוטרוט בניה של שדה שלם המכיל את שדה המספרים הרציונלים. הוכח רק קיום אבר הפוך.

ב. הוכח קיום הרחבה טרנסצנדנטית של שדה סופי שדרגת הטרנסצנדנטיות שלו הוא $\aleph_0$

ג. הוכח כי לכל מספר ראשוני p ולכל n טופי קיים שדה יחיד (עד לידי איסומורפיסם) המכיל p^n אברים.

3) אמת או הכחש (בעזרת דוגמאות או הוכחות) 3 מתוך הטענות הבאות:

א. כל הרחבה פשוטה היא הרחבה אלגברית

ב. כל שדה אשר קיימת לו הרחבה סופית הוא איננו סגור אלגברית.

ג. קיים שדה אשר קיימת לו הרחבה אלגברית סופית שאיננה פשוטה

ד. לכל מספר טבעי n, קיימת הרחבה סופית F של שדה המספרים הרציונלים, שמספר סכוניה בשדה המספרים האלגבריים הוא בדיוק n.

2/...

80.502
ק)ט.ד

4. הוכח אחד המשפטים הבאים (במדת האפשר ממושגי היסוד).

א. כל הרחבה ספרבילית ממעלה n של שדהנתון מוכלת בהרחבת גלואה מסדר $\geq n!$.

ב. כל שדה סגור אלגברית בעל קרקטריסטיקה אפס, שעצמתו כעצמת המספרים המרוכבים איסומורפי לשדה המספרים המרוכבים.

(נוסף למשפטים שהובאו בהרצאה תוכל להשתמש בעובדות הבאות מן האנליסה ותורת הקבוצות:

א. שדה המספרים המרוכבים הוא שדה סגור אלגברית.

ב. העצמה של הרחבה טרנסצנדנטית של שדה אין סופי k שוה למכסימום שבין עצמת השדה k ועצמת דרגת הטרנסצנדנטיות.

ג. עצמת הרחבה אלגברית של שדה אין סופי k שוה לעצמת השדה k)

5) הוכח אחת הטענות הבאות:

א. יהי K השדה הנוצר על ידי צרוף כל שרשי היחידה מסדר 15 לשדה המספרים הרציונלים Q אזי קיימים 8 שדות ביניים בין K Q (כולל שניהם).

ב. תהי $k(t)$ הרחבה טרנסצנדנטית טהורה בעלת דרגת הטרנסצנדנטיות 1.

1) הוכח כי לכל n טבעי, $k(t)$ מכיל שדה F כך $k(t)/F$ הרחבה ספרבילית ממעלה n. (לדוגמא הסתכל בשדה (k/t^n) אם הקרקטריסטיקה היא אפס)

2) קיים שדה חלקי F כך $k(x)/F$ הרחבת גלואה מסדר 6

(רמז: ההתאמות $\sigma : t\to\frac{1}{t}$ $\tau: t\to 1-t$ יוצרות חבורה סופית).

6) ענה על שתיים מתוך השאלות הבאות:

א. נמק בדרך אלגברית מדוע נתן לבנות משולש בעזרת שלשת התיכונים.

ב. הוכח שאפשר למצא את נקודות החתוך של ישר ופרבולה בעזרת סרגל ומחוגה, אך אי אפשר לבנות את נקודת החתוך של מעגל ופרבולה בעזרת סרגל ומחוגה. (את המקרה האחרון אמת על ידי דוגמא).

ג. הוכח כי את המשואות הבאות (מעל המספרים הרציונלים) אי אפשר לפתור בעזרת רדיקלים: $x^5 - 5x \pm 1 = 0$

(נתן להוכיח אי פריקות בעזרת שמוש בטרנספורמציה $y+1 = x$)

בהצלחה

80.502
תשל"ד
ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
מכון למתימטיקה

<u>בחינה ב"תורת השדות"</u>   <u>מועד ב'</u>

משך הבחינה 2 שעות, התלמידים רשאים להשתמש ברשימות ובספרים   בהצלחה,

<u>ענה על כל השאלות</u>

א. הגדר את המושגים הבאים ותן דוגמא לכל אחד מהם בהתאם להוראות:
1. הרחבה צקלוטומית – דוגמא להרחבה צקלוטומית מסדר 12
2. שדה סגור ממשית – דוגמא לשדה סגור ממשית כלשהו
3. הרחבה צקלית – דוגמא להרחבה צקלית מסדר – ≥ 3.

ב. אמת או הכחש (בעזרת דוגמא או הוכחה) שתיים מתוך הטענות הבאות:
1. קיימת הרחבה אלגברית F של שדה k האיסומורפית מעל k לשדה חלקי אמיתי של F.
2. לשדה הפונקציות הרציונליות $k(x_1, \dots, x_n)$ יש שדה חלקי F כך $k(x_1, \dots, x_n)/F$ הוא הרחבת גלואה מסדר $\frac{n!}{2}$
3. א) קיימת הרחבה איספרבילית לשדה סופי. ב) כל הרחבה אלגברית של שדה אין סופי הוא ספרבילית.

ג. ענה על אחת השאלות הבאות:
1. תהיינה $k \subset F \subset L$ שדות הרחבה של שדה נתון k. הוכח כי

$$\mathrm{tr\,deg}(L/k) = \mathrm{tr\,deg}(L/F) + \mathrm{tr\,deg}(F/k)$$

וחשב את דרגת הטרנסצנדנטיות של שדה המנות של החוג $k(x, y, z]/P$ כאשר P הוא האידיאל הראשוני הנוצר על ידי הפולינום $p = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

(ואין צורך להוכיח ש P ראשוני)

2. תהי G חבורה סופית שהיא חבורת <u>כל</u> האוטומורפיזמים של שדה L מעל שדה חלקי k הוכח כי $[F : k] \geq |G|$ ותן דוגמא לחבורה G ושדה F שעבורם קיים אי השויון.

ד. ענה על שתיים מן השאלות הבאות וצטט בכל תשובה את המשפטים שהנך משתמש בהם:-
1. הוכח בדרך אלגברית כי נתן לשרטט מגן דוד בעזרת סרגל ומחוגה.
2. הוכח כי נתן לפתור את המשואה $x^4 + 2x^3 + 3x + 4 = 0$ בעזרת רדיקלים (ואל תסמוך על המשפט שהמשואה <u>הכללית</u> מסדר ≥ 4 נתן לפתר בעזרת רדיקלים)
3. תהי L/k הרחבת גלואה סופית שחבורתה G הוכח כי לכל $a \in L$ הפולינום $f(x) = \prod (x - \sigma(a))$; כאשר σ עובר על כל אברי G הוא חזקה של הפולינום המינימלי של a מעל k.