מבחן בטופולוגיה - הגדרות

• **מרחב מטרי** הוא זוג (X,d) כאשר X קבוצה ו- $d: X\times X \to \mathbb{R}^+$ פונקציה שמקיימת: לכל $x,y,z \in X$
- חיוביות: $d(x,y) \geq 0$ ושוויון אמ"מ $x=y$.
- סימטריה: $d(x,y) = d(y,x)$
- אי-שוויון המשולש: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

הפונקציה d נקראת **מטריקה** על X

אם $A \subseteq X$ תת הקבוצה המטריקה **המושרית** d_A של A מ-X מוגדרת ע"י $d_A(x,y) = d(x,y)$ לכל $x,y \in A$

• יהי X קבוצה. **המטריקה הדיסקרטית** מוגדרת ע"י: $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x=y \end{cases}$ לכל $x,y \in X$

• **מרחב הילברט** הוא מרחב מטרי (H, d_H) כאשר

$$H = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \}$$

$$d_H((a_n),(b_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}$$

• 3 מטריקות שאפשר להגדיר על $\mathbb{R}^n$:
- **המטריקה האוקלידית** (הרגילה) $d_E(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
- **מטריקת המקסימום** $d_{max}(\vec{x},\vec{y}) = \max_{1\leq i\leq n} \{ |x_i - y_i| \}$
- **מטריקת הערך המוחלט** $d_{11}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

• יהיו (X,d), (Y,ρ) מרחבים מטריים. פונקציה $f: X \to Y$ היא **רציפה** אם לכל $x \in X$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים δ כך שאם $d(x,y) < \delta$ אז $\rho(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

• יהי (X,d) מרחב מטרי.
- **כדור פתוח** ברדיוס r סביב a הוא $B(a,r) = \{ x \in X : d(a,x) < r \}$
- **כדור סגור** ברדיוס r סביב a הוא $\bar{B}(a,r) = \{ x \in X : d(a,x) \leq r \}$

• יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $U \subseteq X$ קבוצה חלקית. נאמר ש-U **פתוחה** ב-X אם לכל $x \in U$ קיים r כך ש-$B(x,r) \in U$.

- יהיו X,Y מרחבים מטריים. נאמר שהם <u>הומאומורפיים</u> אם קיימת פונקציה $f: X\to Y$ הפיכה ורציפה כך שגם f^{-1} רציפה. f זאת נקראת <u>הומאומורפיזם</u> או <u>שקילות טופולוגית</u>. במקרה זה מסמנים $X \cong Y$.

- יהי (X,d) מרחב מטרי. <u>הטופולוגיה</u> $T(X)$ של X היא אוסף הקבוצות הפתוחות ב- X.

- יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי (a_n) סדרה ב- X. נאמר ש- (a_n) <u>מתכנסת</u> ל- $a\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ $d(a_n,a)<\varepsilon$.

- מרחב מטרי (X,d) נקרא <u>קומפקטי</u> אם לכל סדרה $(a_n)\subseteq X$ קיימת תת סדרה (a_{n_k}) שמתכנסת לאיבר ב- X.

- תכונה נקראת <u>שמורה טופולוגית</u> אם היא נשמרת תחת הומאומורפיזם של מרחבים. כלומר אם $f:X\to Y$ הומאומורפיזם ו- X מקיים את התכונה אז גם Y מקיים את התכונה.

- מרחב מטרי (X,d) נקרא <u>קשיר מסילתית</u> אם לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה שמחברת אותם. כלומר קיימת פונקציה רציפה $\gamma:[0,1]\to X$ כך ש- $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y$ ו- $\gamma([0,1])\subseteq X$.

- אם (X,d) מרחב מטרי ו- A קבוצה כלשהי ו- $f:A\to X$ חח"ע אז המטריקה על A שמוגדרת ע"י $\rho(a,b)=d(f(a),f(b))$ נקראת <u>המשיכה לאחור</u> של d לאורך f.

- תהי X קבוצה כלשהי. <u>טופולוגיה</u> על X היא אוסף $\tau\subseteq 2^X$ של תתי קבוצות כך ש-
  - τ סגורה תחת איחוד כלשהו
  - τ סגורה תחת חיתוך סופי
  - $\emptyset,X\in\tau$

<u>מרחב טופולוגי</u> הוא זוג (X,τ) כאשר X קבוצה ו- τ טופולוגיה על X. איברי הטופולוגיה נקראים <u>קבוצות פתוחות</u> ב- X.

- בהינתן קבוצה כלשהי X הטופולוגיה $\tau = 2^X$ נקראת <u>הטופולוגיה הדיסקרטית</u> של X. במקרה זה (X,τ) נקרא <u>מרחב טופולוגי דיסקרטי</u>.
  הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, X\}$ נקראת <u>הטופולוגיה הטריוויאלית</u>. (X,τ) נקרא <u>מרחב טופולוגי טריוויאלי</u>.
  הטופולוגיה $\tau = \{U \subseteq X : X\setminus U \text{ סופית}\} \cup \{\emptyset\}$ נקראת <u>הטופולוגיה הקו-סופית</u>.

- יהי (X,τ_X) מרחב טופולוגי ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה. הטופולוגיה של A המוגדרת ע"י $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau_X\}$ נקראת <u>הטופולוגיה המושרית</u> מ-X על A ו-(A,τ_A) נקרא <u>תת מרחב</u> של (X,τ_X).

- תהי X קבוצה כלשהי. קבוצה $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ נקראת <u>בסיס</u> אם מתקיים:
  - $X = \bigcup_{B_\alpha \in \mathcal{B}} B_\alpha$
  - אם $x \in B_1 \cap B_2$ עבור $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ אז קיימת $B_3 \in \mathcal{B}$ כך ש- $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

  הטופולוגיה המוגדרת ע"י $\tau = \{\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha : B_\alpha \in \mathcal{B} \text{ קב' אינדקסים } I\}$ נקראת <u>הטופולוגיה הנוצרת ע"י הבסיס</u> $\mathcal{B}$.

- תהי X קבוצה כלשהי. <u>תת בסיס</u> הוא אוסף כלשהו $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ כך ש- $X = \bigcup_{B_\alpha \in \mathcal{B}} B_\alpha$. הטופולוגיה של X המוגדרת ע"י קבוצת כל האיחודים של חיתוכים סופיים של איברי $\mathcal{B}$ נקראת <u>הטופולוגיה הנוצרת ע"י תת הבסיס</u> $\mathcal{B}$.

- יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. קבוצה $V \subseteq X$ נקראת <u>סגורה</u> אם $X\setminus V$ פתוחה ב-X.

- יהי X מרחב טופולוגי ותהי $V \subseteq X$ תת קבוצה כלשהי:
  - <u>הסגור</u> של V הוא הקבוצה $\bar{V} = \bigcap\{K : V \subseteq K \text{ ו-} K \text{ סגורה}\}$
  - <u>הפנים</u> של V הוא הקבוצה $\mathring{V} = \bigcup\{O : O \subseteq V \text{ ; } O \text{ פתוחה}\}$

- תהי $A \subseteq X$ קבוצה במרחב טופולוגי X. נאמר ש-a היא <u>נקודת גבול</u> (או <u>נקודת הצטברות</u>) של A אם לכל קבוצה פתוחה O כך ש- $a \in O$ מתקיים $O \cap A\setminus\{a\} \neq \emptyset$.

- תהי $x \in X$ נקודה במרחב טופולוגי X. קבוצה $V \subseteq X$ נקראת <u>סביבה</u> של x אם $x \in \mathring{V}$.

- יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. פונקציה של קבוצות $f:X\to Y$ תיקרא <u>רציפה</u> (<u>או העתקה</u>) אם לכל קבוצה פתוחה $O\subseteq Y$ מתקיים $f^{-1}(O)$ פתוחה ב-X.

- שני מרחבים טופולוגיים X,Y ייקראו <u>שקולים טופולוגית</u> (<u>הומאומורפיים</u>) אם קיימת העתקה הפיכה $f:X\to Y$ כך שגם f^{-1} העתקה.

- תהי Y קבוצה כלשהי ו- $B\subseteq Y$ תת קבוצה. הפונקציה $i:B\to Y$ המוגדרת ע"י $i(b)=b$ נקראת <u>פונקציית ההכלה</u>.

- תהי $(X,<)$ קבוצה סדורה לינארית. בסיס <u>לטופולוגיית הסדר</u> מורכב מהקבוצות הבאות ב-X:
  - לכל $x,y\in X$ אם $x<y$ אז $(x,y)\in\mathcal{B}$
  - אם x_0 איבר מינימלי של X אז $[x_0,y)\in\mathcal{B}$ לכל $y\in X$
  - אם y_0 איבר מקסימלי של X אז $(x,y_0)\in\mathcal{B}$ לכל $x\in X$
  - אם x_0 ו- y_0 איברים מינימלי ומקסימלי בהתאמה אז $[x_0,y_0]\in\mathcal{B}$

- תהי X קבוצה ותהיינה τ_1, τ_2 שתי טופולוגיות עליה. נאמר ש- τ_1 היא <u>עידון</u> של τ_2 אם $\tau_2\subseteq\tau_1$.

- תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים. נאמר ש- f <u>פתוחה</u> אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ גם $f(U)$ פתוחה ב- Y.
(נאמר ש- f <u>סגורה</u> אם לכל קבוצה סגורה $V\subseteq X$ גם $f(V)$ סגורה ב- Y.

- יהי X מרחב טופולוגי, ותהי (x_n) סדרה. נאמר ש- $x_n\to x_0$ אם לכל סביבה V של x_0 קיים N כך שלכל $N<n$ מתקיים $x_n\in V$.

- מרחב טופולוגי X נקרא קשיר אם איננו ניתן להצגה כ- $X=U_1\cup U_2$ כאשר
  - U_1,U_2 פתוחות
  - $U_1\cap U_2=\emptyset$
  - U_1,U_2 אינן ריקות

- יהי X מרחב טופולוגי. קבוצה $C\subseteq X$ נקראת <u>רכיב קשירות</u> אם:
  - C קשירה
  - C קשירה מקסימלית, כלומר לכל $C\subsetneq D$, D אינה קשירה.

- יהיו (X,τ_X), (Y,τ_Y) מרחבים טופולוגיים. <u>האיחוד הזר</u> הוא הקבוצה $X\sqcup Y=X\times\{0\}\cup Y\times\{1\}$ עם הטופולוגיה הנוצרת ע"י התת בסיס $\tau_X\cup\tau_Y$

- מרחב שבו כל היחידונים הם רכיבי הקשירות נקרא <u>בלתי קשיר לחלוטין</u>

- יהי X מרחב טופולוגי ותהיינה $x,y\in X$. נאמר ש-x ו-y <u>קשירים מסילתית</u> ונסמן $y\sim x$ אם קיימת מסילה שמתחילה ב-x ונגמרת ב-y. מחלקות השקילות של $\sim$ נקראות <u>רכיבי קשירות מסילתית</u>. קבוצת רכיבי הקשירות המסילתית של מרחב X מסומנת ע"י $\pi_0 X$. מרחב עם רכיב קשירות מסילתית יחיד נקרא <u>מרחב קשיר מסילתית</u>.

- יהי X מרחב טופולוגי. נאמר ש-X הוא <u>מרחב T_0</u> אם לכל $x,y\in X$ קיים $a\in\{x,y\}$ וקיימת קבוצה פתוחה $U_a\subseteq X$ כך ש- $a\in U_a$ אבל $\{x,y\}\setminus\{a\}\not\subseteq U_a$. כלומר קיימת קבוצה פתוחה שמכילה את אחת הנקודות אבל לא את השנייה.

- יהי X מרחב טופולוגי. נאמר ש-X הוא <u>מרחב T_1</u> אם לכל $x,y\in X$ קיימות קבוצות פתוחות U_x,U_y כך ש- $x\in U_x$, $y\in U_y$ אבל $x\notin U_y$ וגם $y\notin U_x$.

- יהי X מרחב טופולוגי. נאמר ש-X <u>מרחב האוסדורף</u> אם לכל $x,y\in X$ קיימות קבוצות פתוחות זרות U_x,U_y כך ש- $x\in U_x$ ו- $y\in U_y$.

- מרחב טופולוגי X נקרא <u>קומפקטי</u> אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי.
  X נקרא <u>קומפקטי סדרתית</u> אם לכל סדרה $(x_n)\subseteq X$ יש תת סדרה מתכנסת.
  X נקרא <u>קומפקטי נקודת גבול</u> אם לכל תת קבוצה אינסופית $S\subseteq X$ יש נקודת גבול.

- יהי X מרחב טופולוגי כלשהו. נגדיר מרחב טופולוגי חדש X^+ ע"י $X^+=X\,\dot\cup\,\{\infty\}$ עם הטופולוגיה הנוצרת ע"י הבסיס $\mathcal{B}=\tau_X\cup\{(X\setminus K)\cup\{\infty\} : K\subseteq X \text{ קומפקטית}\}$

- יהי X מרחב האוסדורף. מרחב האוסדורף Y נקרא <u>קומפקטיפיקציה חד-נקודתית</u> של X אם:
  - Y קומפקטי
  - $X\subseteq Y$ תת מרחב.
  - $Y\setminus X$ הוא בן נקודה אחת בלבד.

- מרחב האוסדורף X נקרא <u>קומפקטי מקומית</u> אם לכל נקודה $x\in X$ קיים תת-מרחב קומפקטי K כך ש- $x\in K$ ו- K מכיל סביבה פתוחה של x.

- יהיו X,T מרחבים טופולוגיים. $map(X,T)$ הוא אוסף הפונקציות הרציפות מ-X ל-T.

- יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של מרחבים טופולוגיים. <u>מרחב המכפלה</u> $X=\prod X_\alpha$ מוגדר ע"י
  $X=\{f: I\to \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha \ : \ f(\alpha)\in X_\alpha$ לכל $\alpha\in I\}$
  עם הטופולוגיה שנוצרת ע"י התת בסיס $\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) :$ פתוחה $U_\alpha\subseteq X_\alpha \ \ \alpha\in I\}$
  כאשר π_α היא פונקציית ההטלה על הקואורדינטה ה-α.

- יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. העתקה $p: X\to Y$ נקראת <u>העתקת מנה</u> אם:
  - p על
  - $U\subseteq Y$ פתוחה אמ"מ $p^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

- יהי מרחב טופולוגי X עם יחס שקילות $\sim$ של איברי X. <u>מרחב המנה</u> $X/\sim$ הוא מרחב טופולוגי שאיבריו הם מחלקות השקילות של $\sim$ וקבוצה $O\subseteq X/\sim$ היא פתוחה אמ"מ $p^{-1}(O)$ פתוחה ב-X כאשר $p: X\to X/\sim$ העתקה על.

- יהי X מרחב טופולוגי ו- $A\subseteq X$, המרחב X/A הוא מרחב המנה $X/\sim$ כאשר $x\sim y$ אמ"מ $x,y\in A$.

- מרחב (X,τ) נקרא <u>נורמלי</u> אם הוא מרחב T_1 ולכל זוג קבוצות A,V כך ש- $A\subseteq V$, A סגורה ו- V פתוחה קיימת קבוצה פתוחה U כך ש- $A\subseteq U\subseteq \bar{U}\subseteq V$.

- יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. X נקרא מרחב רגולרי אם לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq X$ ולכל $x\in V$ קיימת קבוצה פתוחה U כך ש- $x\in U\subseteq\bar{U}\subseteq V$.

- יהי X מרחב טופולוגי. נאמר ש- X מטריזבילי אם קיים מרחב מטרי Y כך ש- $Y\cong X$ כאשר Y מרחב טופולוגי עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה.

- הומוטופיה בין העתקות $f,g: X\to Y$ היא העתקה $H: X\times I\to Y$ כך ש- $H(x,0)=f(x)$; $H(x,1)=g(x)$. ונאמר ש- f,g הומוטופיות.

- נגדיר יחס שקילות על ההעתקות ב- $map(X,Y)$. $f\sim g$ אמ"מ קיימת הומוטופיה ביניהן. (נסמן את קבוצת מחלקות השקילות ב- $[X,Y]$)

- יהי X מרחב טופולוגי. נאמר ש- X הוא פשוט קשר אם
  - X קשיר מסילתית
  - כל העתקה $f: S^1\to X$ היא הומוטופית למסילה הקבועה.

- נסתכל על אוסף ההעתקות $\{\gamma: I\to X\}$ עבור מרחב טופולוגי X. נגדיר יחס הומוטופיה בין מסילות: $\beta\sim\alpha$ אם קיימת העתקה $F: I\times I\to X$ כך ש- $\alpha(0)=\beta(0)$; $\alpha(1)=\beta(1)$
  $F(0,t)=\alpha(0)$; $F(0,1)=\alpha(1)$

- יהי X מרחב טופולוגי ותהיינה $\varphi,\psi: I\to X$ שתי מסילות כך ש- $\varphi(1)=\psi(0)$. אזי השרשור של φ ו- ψ היא המסילה $\varphi*\psi$ המוגדרת ע"י
$$(\varphi*\psi)(t)=\begin{cases}\varphi(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ \psi(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

- יהי X מרחב טופולוגי ותהיינה $x_0,x_1\in X$; φ - מסילה מ- x_0 ל- x_1. (נסמן ב- $[\varphi]$ את מחלקת ההומוטופיה של φ. בהינתן φ ; ψ כך ש $\varphi(1)=\psi(0)$ נסמן $[\varphi]*[\psi]=[\varphi*\psi]$.

- יהי X מרחב טופולוגי ותהי φ מסילה ב- X. המסילה ההפוכה φ^{-1} מוגדרת ע"י $\varphi^{-1}(t)=\varphi(1-t)$. נסמן $[\varphi^{-1}]=[\varphi]^{-1}$.

- יהי X מרחב טופולוגי ו- $x \in X$. נסמן ב- e_x את המסילה $e_x : I \to X$ כך ש- $e_x(t) = x$ לכל $t \in I$.

- יהי X מרחב טופולוגי ותהי $x_0 \in X$. $\pi_1(X, x_0)$ היא קבוצת מחלקות השקילות של המסילות שמתחילות ונגמרות ב- x_0.

- הפונקציה $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ מוגדרת ע"י $\exp(x) = e^{2\pi i x}$

- העתקה $f : E \to B$ המקיימת שלכל $e \in E$ קיימת סביבה $U_e \subseteq E$ כך ש- $f|_{U_e}$ שקילות טופולוגית נקראת הומאומורפיזם מקומי.

- לכל מסילה $\alpha : I \to S^1$ כך ש- $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$ נגדיר את הדרגה של α ע"י $\deg \alpha = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$ כאשר $\tilde{\alpha}$ ההרמה היחידה של α.

- יהי $A \subseteq X$ תת מרחב (נאמר ש- A רטרקט של X) אם קיימת העתקה $r : X \to A$ כך ש- $r \circ i = Id_A$ כאשר $i : A \to X$ פונקציית ההכלה.

- מרחב טופולוגי X נקרא כוויץ אם $Id : X \to X$ הומוטופית להעתקה קבועה.