מבחן בטופולוגיה - מ המחברת מתפם

מרחב מטרי הוא זוג (X,d) כך ש- $d:X^2\to\mathbb{R}$ מקיימת

(1) $d(x,y)\geq 0$ ושוויון אמ"מ $x=y$ חיוביות

(2) $d(x,y)=d(y,x)$ סימטריה

(3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ א' שוויון המשולש

מטריקות שאפשר להגדיר על $\mathbb{R}^n$: אוקלידית (רגילה) $d_E(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

$d_{max}(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}\{|x_i-y_i|\}$

$d_{11}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

על קבוצה X (נוכל) להגדיר את המטריקה הדיסקרטית: $d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$

מרחב הילברט: $H=\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty\}\subseteq\mathbb{R}^{\infty}$

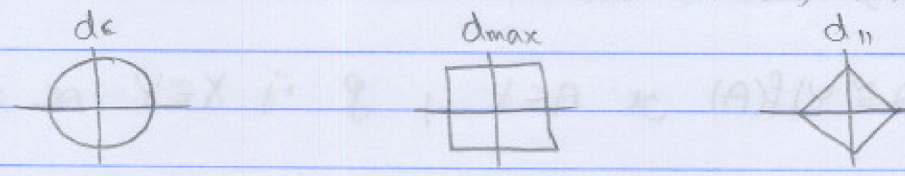
$d((a_n),(b_n))=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}$

פונקציה בין מרחבים מטריים $f:X\to Y$ היא רציפה אם לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,y)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$.

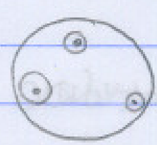
משפט: פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to X$ למרחב מטרי X כלשהו היא רציפה תחת המטריקות d_E, d_{max}, d_{11} אמ"מ היא רציפה ברגיל.

כדור פתוח במרחב מטרי: $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$

כדור היחידה הוא כדור ברדיוס 1 במרחב (נורמי) שמרכזו ב-0. תחת מטריקות שונות כדורי היחידה נראים אחרת



קבוצה U במרחב מטרי (X,d) היא פתוחה אם לכל $x\in U$ קיים ε כך ש $B(x,\varepsilon)\subseteq U$.

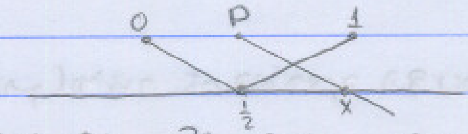


משפט: פונקציה בין מרחבים מטריים $f:X\to Y$ היא רציפה אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq Y$ גם $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X

אם X,Y מרחבים מטריים נאמר שהם הומיאומורפיים ונסמן $X\cong Y$ אם קיימת פונקציה הפיכה $f:X\to Y$ כך שגם f וגם f^{-1} רציפות.

דוגמאות: - $(0,1)\cong(0,2)$ ע"י הפונקציה $f:(0,1)\to(0,2)$, $x\mapsto 2x$

- $(0,1)\cong(-\infty,\infty)$. הוכחה ע"י בנייה גאומטרית:



כל נקודה x על הישר הממשי מגדירה ישר יחיד עם P שחותך את $\vee$ בנקודה יחידה ולהפך.

(X,d) מרחב מטרי: הטופולוגיה $T(X)$ של X היא קבוצת הקבוצות הפתוחות ב-X.

מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב שבו לכל סדרה $(x_n)\subseteq X$ קיימת תת סדרה מתכנסת לנקודה ב-X. (נאמר ש-$x_n\to x$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ $d(x_n,x)<\varepsilon$.

למשל, המרחב $[0,1]$ הוא קומפקטי ואילו $(0,1)$ אינו קומפקטי שהרי $\frac{1}{n}\to 0$ אבל $0\notin(0,1)$.

קומפקטיות היא שמורה טופולוגית - כלומר אם X קומפקטי ו-$X\cong Y$ אז Y קומפקטי. לכן $[0,1]\not\cong(0,1)$ שהרי $[0,1]$ קומפקטי ו-$(0,1)$ אינו קומפקטי.

טענה: אם $X\cong Y$ ע"י f ו-$A\subseteq X$ אז $X\setminus A\cong Y\setminus f(A)$.

מרחב מטרי הוא קשיר מסילתית אם לכל שתי נקודות $x,y\in X$ קיימת מסילה $\varphi:I\to X$ כך ש $\varphi(0)=x$; $\varphi(1)=y$.

טענה: קשירות מסילתית היא שמורה טופולוגית.

דוגמה: $S^1 \ncong I$. שהרי, נניח שהם היו שקולים ע"י f אזי גם $S^1 \setminus \{f(\frac{1}{2})\} \cong I \setminus \{\frac{1}{2}\}$. אבל $S^1 \setminus \{pt\}$ קשיר מסילתית ואילו $I \setminus \{\frac{1}{2}\}$ אינו קשיר מסילתית.

משפט האוסדורף לשקילות טופולוגית: אם $f: X \to Y$ פונקציה הפיכה ורציפה בין מרחבים מטריים קומפקטים אזי f הומאומורפיזם.

משפט: במובן אפשר לומר משהו חזק יותר על קשירות מסילתית ועל קומפקטיות.
אם $f: X \to Y$ רציפה ו-X קומפקטי אז $f(X)$ קומפקטי, ואם X קשיר מסילתית אז $f(X)$ קשירה מסילתית.

קבוצה סגורה במרחב מטרי היא קבוצה שהמשלים שלה הוא פתוח.

משפט: קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית.

תהי X קבוצה כלשהי. טופולוגיה על X היא אוסף τ של תתי קבוצות של X רק ש-
(1) τ סגורה תחת איחוד כלשהו
(2) τ סגורה תחת חיתוך סופי
(3) $\phi \in \tau$, $X \in \tau$.
מרחב טופולוגי הוא זוג (X, τ). איבר בטופולוגיה τ נקרא קבוצה פתוחה ב-X.

דוגמאות: - כל מרחב מטרי X הוא מרחב טופולוגי כאשר הטופולוגיה היא כל הקבוצות הפתוחות ב-X לפי הגדרה עם הכדורים.
- מרחב טופולוגי דיסקרטי $(X, 2^X)$
- מרחב טופולוגי טריוויאלי $(X, \{\emptyset, X\})$
- לכל קבוצה $A \subseteq X$ $(X, \{\emptyset, X, A, A^c\})$
- הטופולוגיה הקו-סופית. אם X קבוצה כלשהי (ניתן להגדיר עליה טופולוגיה) $\tau = \{U \subseteq X :$ קבוצה סופית $X \setminus U\} \cup \{\emptyset\}$

אם (X, τ) מרחב טופולוגי ו-$A \subseteq X$ תת קבוצה אז (A, τ_A) תת מרחב טופולוגי עם הטופולוגיה $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$

תהי X קבוצה כלשהי. $\mathcal{B}\subseteq 2^X$ נקראת בסיס אם מתקיים:

(1) $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$

(2) אם $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ אז לכל $x\in B_1\cap B_2$ קיימת $B\in\mathcal{B}$ כך ש- $x\in B\subseteq B_1\cap B_2$.

משפט: לכל קבוצה X עם בסיס $\mathcal{B}$ ניתן להגדיר טופולוגיה כך:

$$\tau=\left\{\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \;:\; B_\alpha\in\mathcal{B}\;;\ \text{קבוצת אינדקסים } I\right\}$$

תהי X קבוצה כלשהי. אוסף $\mathcal{B}\subseteq 2^X$ נקרא תת בסיס אם $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$

משפט: לכל קבוצה X עם תת בסיס $\mathcal{B}$ ניתן להגדיר בסיס ע"י

$$\mathcal{A}=\left\{\bigcap_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} \;:\; B_{\alpha_i}\in\mathcal{B}\ \text{-ו}\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

קבוצה $V\subseteq X$ במרחב טופולוגי X נקראת סגורה אם $X\setminus V$ פתוחה

(שימו ♡ שקבוצה יכולה להיות גם סגורה וגם פתוחה.)

תכונות יסוד של אוסף הסגורות:

(1) $\emptyset, X$ קבוצות סגורות

(2) אוסף הקבוצות הסגורות במרחב טופולוגי סגור תחת איחוד סופי

(3) אוסף הקבוצות הסגורות במרחב טופולוגי סגור תחת חיתוך.

יהי X מרחב טופולוגי ו- $V\subseteq X$.

(1) הסגור של V היא הקבוצה $\overline{V}=\bigcap_{\substack{K\supseteq V\\ \text{סגורה}}} K$

(2) הפנים של V הוא הקבוצה $\mathring{V}=\bigcup_{\substack{K\subseteq V\\ \text{פתוחה}}} K$

(3) השפה של V היא הקבוצה $\partial V=\overline{V}\setminus\mathring{V}$.

משפט: X מרחב טופולוגי ו- $A,B\subseteq X$. אזי: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

למה: X מרחב טופולוגי; $V\subseteq X$. $x\in\overline{V}$ אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ כך ש- $x\in U$ מתקיים $U\cap V\neq\emptyset$.

תהי $A\subseteq X$ קבוצה במרחב טופולוגי X. נאמר ש-a היא נקודת הצטברות (או נקודת גבול) של A אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ כך ש-$a\in U$ מתקיים $U\cap A\setminus\{a\}\neq\emptyset$.

נשים ♡ שסגור ונקודת הצטברות הם מושגים שונים. סגור של נקודה יחידה הוא אותה נקודה אבל לנקודה לו אין נקודת הצטברות. במרחב בדיד אין בכלל נקודות הצטברות אבל כל קבוצה היא סגורה. לכן לא כל סגור של קבוצה הוא כל נקודות ההצטברות שלה. אבל הסגור מכיל את כל נקודות ההצטברות.

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. פונקציה $f:X\to Y$ תיקרא רציפה אם לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq Y$ גם $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X. פונקציה רציפה בין מרחבים טופולוגיים תיקרא העתקה.
שני מרחבים X,Y הם הומיאומורפיים אם קיימת העתקה הפיכה $f:X\to Y$ כך שגם f^{-1} הפיכה. במקרה זה נסמן $X\cong Y$.

משפט: פונקציה בין מרחבים טופולוגיים $f:X\to Y$ היא רציפה אמ"מ לכל קבוצה סגורה $V\subseteq Y$ גם $f^{-1}(V)$ סגורה ב-X.

משפט: תהי $f:X\to Y$ פונקציה. אזי f רציפה אם מתקיים אחד התנאים הבאים:
(1) קיים כיסוי פתוח $X=\bigcup U_\alpha$ כך ש-$f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל α
(2) קיימות V_1,V_2 סגורות ב-X כך ש-$X=V_1\cup V_2$ ו-$f|_{V_1}, f|_{V_2}$ רציפות

משפט: תהיינה $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ העתקות. אזי $g\circ f:X\to Z$ רציפה.

מרחב טופולוגי X ייקרא קשיר אם הוא אינו ניתן להצגה כ-$X=U_1\cup U_2$ כאשר
(1) U_1,U_2 פתוחות
(2) $U_1\cap U_2=\emptyset$
(3) U_1,U_2 אינן ריקות.

למשל, הקבוצה הריקה היא קשירה אבל כל מרחב בדיד לא ריק הוא לא קשיר.

משפט: מרחב X הוא אינו קשיר אמ"מ קיימת העתקה $e: X \to \{0,1\}$ שהיא על כאשר $\{0,1\}$ מרחב דיסקרטי.

משפטי קשירות:

(1) תמונה של מרחב טופולוגי קשיר תחת העתקה היא קשירה, כלומר אם $f: X \to Y$ רציפה ו- X קשיר אז $f(X)$ קשירה.

(2) הסגור של תת קבוצה קשירה הוא קשיר.

(3) תהיינה $A_\alpha \subseteq X$ תת קבוצות קשירות כך שלכל $\alpha \neq \beta$ $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. אזי $\bigcup A_\alpha \subseteq X$ קשירה.

הוכחה:

(1) נניח בשלילה ש- $f(X)$ לא קשירה. אזי קיימת העתקה על $e: f(X) \to \{0,1\}$. נסתכל על $e \circ f: X \to \{0,1\}$. היא רציפה כהרכבה של העתקות והיא על כי גם e על וגם f על $f(X)$. וזוהי סתירה להנחה.

(2) תהי $V \subseteq X$ קשירה. נניח בשלילה ש- $\bar{V}$ לא קשירה. אזי קיימת העתקה על $e: \bar{V} \to \{0,1\}$. נראה שגם העתקה $e|_V$ היא על. לדוגמה, נראה שקיים $x \in V$ כך ש- $e(x) = 0$. ידוע שקיים $y \in \bar{V}$ כך ש- $e(y) = 0$. לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ כך ש- $y \in U$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$. נבחר $U = e^{-1}(\{0\})$. היא פתוחה כי e רציפה. לכן קיים $x \in V \cap U$ ועבורו $e(x) = 0$. באופן דומה עבור 1.

(3) נניח בשלילה ש- $\bigcup A_\alpha$ אינה קשירה. לכן קיימת העתקה על $e: \bigcup A_\alpha \to \{0,1\}$. נניח ש- $x \in A_\alpha$ כך ש- $e(x)=0$ ו- $y \in A_\beta$ כך ש- $e(y) = 0$. אם $\beta = \alpha$ אז $e|_{A_\alpha}$ רציפה ועל בסתירה לקשירות של A_α. אם $\alpha \neq \beta$ אז $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. יהי $a \in A_\alpha \cap A_\beta$. אם $e(a) = 0$ נקבל ש- A_α לא קשירה ואם $e(a) = 1$ נקבל ש- A_β לא קשירה. בכל אופן מתקבלת סתירה.

☺

יהי X מרחב טופולוגי. $C \subseteq X$ נקראת רכיב קשירות אם:

(1) C קשירה

(2) לכל $D \subseteq X$ כך ש- $C \subsetneq D$ D אינה קשירה

נשים ♡ שכל רכיב קשירות הוא סגור כי אם C קשירה אז גם $C \subseteq \bar{C}$ קשירה.

טענה: יהי X מרחב טופולוגי ותהי $x\in X$. קיים מרכיב קשירות יחיד $C_x \subseteq X$
כך ש- $x\in C_x$.

הוכחה: נגדיר $\mathcal{C} = \{C\subseteq X : x\in C$ ו- C קשירה$\}$ ברור ש- $\mathcal{C}\neq\emptyset$ משום
ש- $x\in\{x\}$; $\{x\}$ קשירה. כעת נגדיר $C_x = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ בוודאי $x\in C_x$
ו- C_x קשירה משום שלכל $C_\alpha, C_\beta\in\mathcal{C}$ מתקיים $C_\alpha\cap C_\beta\neq\emptyset$ והן קשירות.
ברור גם ש- C_x מרכיב קשירות כי אם $C_x\subsetneq D$ ו- D קשירה אז $D\in\mathcal{C}$
ולכן $D\subseteq C_x$ בסתירה. מאותה סיבה גם ברור ש- C_x יחיד.

ש

תהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים. האיחוד הזר שלהם הוא הקבוצה
$\coprod X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\{(x,\alpha) : x\in X_\alpha\} = X$ עם הטופולוגיה המקסימלית של X רק
שההכלות $\varphi_\alpha : X_\alpha\to X$ הן רציפות. כלומר $U\subseteq X$ פתוחה אמ"מ
$\varphi_\alpha^{-1}(U)$ פתוחה ב- X_α לכל $\alpha\in I$.

טענה: יהי X מרחב טופולוגי ונניח ש- $X=\bigcup U_\alpha$ כאשר $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ פתוחות וזרות בזוגות.
אזי $X\cong\coprod U_\alpha$

הוכחה: נגדיר $f: X\to\coprod U_\alpha$ באופן הבא: $f(x) = (x,\alpha_x)$ כאשר לכל x
α_x הוא האינדקס היחיד כך ש- $x\in U_\alpha$. הקיום והיחידות שלו נובעים מהנתונים.
תהי $U\subseteq\coprod U_\alpha$ פתוחה ונניח $U=\{(x,\alpha_x) : x\in V\}$. אזי $f^{-1}(U)=V$.
מתקיים ש- $V=\bigcup\varphi_\alpha^{-1}(U)$. אבל לפי ההנחה $\varphi_\alpha^{-1}(U)$ פתוחות ב- U_α
אבל U_α פתוחות ב- X ולכן $\varphi_\alpha^{-1}(U)$ פתוחות ב- X ולכן V פתוחה ב- X.
מצד שני, אם $V\subseteq X$ פתוחה אז $f(V)=\{(x,\alpha_x) : x\in V\}$. אזי לכל α
מתקיים $\varphi_\alpha^{-1}(f(V)) = \{x\in V\cap U_\alpha\}$ וזאת קבוצה פתוחה ב- U_α מפני
ש- V פתוחה ב- X $\Leftarrow$ $f(V)$ פתוחה ב- $\coprod U_\alpha$.

ש

טענה: מספר מרכיבי הקשירות של מרחב טופולוגי הוא שמורה טופולוגית.

טענה: $\mathbb{Q}\not\cong\coprod_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$

הוכחה: נראה כי היחידונים הם מרכיבי הקשירות של $\mathbb{Q}$ שהרי נניח ש- $p,q\in\mathbb{Q}$
נמצאים באותו מרכיב קשירות C. כלומר $p,q\in C\subseteq\mathbb{Q}$ ו- C קשירה. יהי r מספר
אי רציונלי כך ש- $p<r<q$ (נה"כ $p<q$). אזי $C=(C\cap(-\infty,r))\cup(C\cap(r,\infty))$
הצגנו את C כאיחוד של שתי קבוצות פתוחות וזרות, בסתירה לקשירות של C

אבל נטען ש- $\coprod_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ מרחב בדיד. ואכן, תהי $\{p\}\subseteq\coprod_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$. אזי לכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\varphi_q^{-1}(\{p\}) = \begin{cases}\emptyset & p\neq q\\ \{p\} & p=q\end{cases}$. בכל אופן זאת קבוצה פתוחה ב- $\{q\}$ ולכן $\{p\}$ פתוחה ב- $\coprod\{q\}$ $\Rightarrow$ $\coprod\{q\}$ מרחב בדיד והרי ידוע ש- $\mathbb{Q}$ אינו דיסקרטי $\Rightarrow$ הם אינם הומאומורפיים

יג

יהי X מרחב טופולוגי ותהיינה $x,y\in X$. נאמר ש-x ו-y קשורים מסילתית אם קיימת ביניהם מסילה $\varphi: I\to X$ כך ש- $\varphi(0)=x$ ו- $\varphi(1)=y$. זה יחס שקילות כמובן. מחלקות השקילות שלו נקראות רכיבי הקשירות מסילתית. קבוצת רכיבי הקשירות המסילתית של X מסומנת ע"י $\pi_0 X$. אם ב- $\pi_0 X$ יש בדיוק איבר אחד אזי נאמר ש-X קשיר מסילתית. פירוש הדבר שיש נקודה $x\in X$ כך שלכל $y\in X$ קיימת מסילה בין x ו-y. בפרט זה אומר ש- $X\neq\emptyset$. וזה דבר מראה לנו שקשירות וקשירות מסילתית הם לא מושגים שקולים שהרי $\emptyset$ קשירה אבל לא קשירה מסילתית.

משפט: יהי X מרחב טופולוגי קשיר מסילתית אזי הוא קשיר.
הוכחה: נניח בשלילה ש-X לא קשיר. אזי קיימת העתקה על $e: X\to\{0,1\}$. נניח ש- $e(x)=0$ ו- $e(y)=1$. X קשיר מסילתית ולכן קיימת מסילה $\varphi: I\to X$ כך ש- $\varphi(0)=x$ ו- $\varphi(y)=1$. נסתכל על ההרכבה $e\circ\varphi: I\to\{0,1\}$ זאת פונקציה רציפה ומתקיים $e(\varphi(0))=e(x)=0$ ו- $e(\varphi(1))=e(y)=1$ ולכן היא על. אבל I מרחב קשיר. וזאת סתירה.

יד

יהי X מרחב טופולוגי. אומרים ש-X הוא מרחב T_0 אם לכל שתי נקודות $x,y\in X$ עבור לפחות אחת מהן $a\in\{x,y\}$ קיימת קבוצה פתוחה U_a המכילה את a אבל לא את הנקודה השנייה.
נאמר ש-X מרחב T_1 אם לכל $x,y\in X$ קיימות קבוצות פתוחות U_x, U_y כך ש- $x\in U_x$ ו- $y\in U_y$ אבל $x\notin U_y$ ו- $y\notin U_x$.
X נקרא מרחב האוסדורף אם לכל שתי נקודות $x,y\in X$ קיימות שתי קבוצות פתוחות U_x, U_y כך ש- $U_x\cap U_y=\emptyset$ ו- $x\in U_x$, $y\in U_y$.

יהי X מרחב טופולוגי ותהי (x_n) סדרה ב-X. נאמר ש- $x_n \to x$ אם לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ כך ש- $x \in U$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ $x_n \in U$.
נשים לב שבניגוד למרחבים מטריים במרחב טופולוגי כללי גבול של סדרה הוא לא בהכרח יחיד. למשל, במרחב הטריוויאלי כל סדרה מתכנסת לכל הנקודות.

משפט: יהי X מרחב האוסדורף ותהי (x_n) סדרה מתכנסת. אזי הגבול של (x_n) יחיד.

משפט: יהי X מרחב כך שלכל סדרה מתכנסת בו הגבול הוא יחיד. אזי X הוא T_1.
הוכחה: נניח ש- X אינו מרחב T_1. אזי קיימות שתי נקודות x,y כך שלכל שתי קבוצות פתוחות U_x, U_y אם $x \in U_x$; $y \in U_y$ אז $y \notin U_x$ או $x \in U_y$.
נסתכל על הסדרה $(x,y,x,y,x,\dots)$ ונראה שהיא מתכנסת ל-x וגם ל-y.
תהי U_x קבוצה פתוחה כך ש- $x \in U_x$. צריך להראות שגם $y \in U_x$.
נניח ש- $y \notin U_x$. תהי U_y פתוחה כלשהי כך ש- $y \in U_y$. מאחר ש- $y \notin U_x$ בהכרח $x \in U_y$. זה נכון לכל קבוצה פתוחה U_y שמכילה את y. לכן הסדרה מתכנסת ל-y - שהרי ראינו שכל קבוצה פתוחה שמכילה את y היא מכילה גם את x. באותו אופן הסדרה מתכנסת גם ל-x וזו סתירה.

מרחב X נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח $X = \bigcup U_\alpha$ קיים תת כיסוי סופי.

משפט: יהי X מרחב האוסדורף ותהי $K \subseteq X$ קומפקטית. אזי K סגורה.
הוכחה: צריך להראות ש- $X \setminus K$ היא פתוחה. נראה שלכל $x \in X \setminus K$ קיימת סביבה פתוחה $O_x \subseteq X \setminus K$ (וכאן תנבע הטענה). תהי $x \in X \setminus K$. לכל $c \in K$ קיימות קבוצות פתוחות $x \in U_x$ ו- $c \in V_c$ כך ש- $U_x \cap V_c = \emptyset$, שהרי X מרחב האוסדורף. האוסף $\{V_c\}_{c \in K}$ מהווה כיסוי פתוח של K. אבל K קומפקטית לכן קיים לו תת כיסוי סופי. כלומר $\bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i} \supseteq K$. נגדיר $O_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ ונטען ש- $O_x \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i} = \emptyset$. אכן אם $z \in \bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i}$ אזי $z \in V_{c_i}$ עבור $1 \le i \le n$ כלשהו. אבל $U_{x_i} \cap V_{c_i} = \emptyset$ לכן לא יתכן להיות ש- $z \in O_x$. אבל $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i}$ לכן בוודאי $O_x \cap K = \emptyset$ כך שמצאנו סביבה פתוחה לכל $x \in X \setminus K$ כרצוי.

נשים לב שמההוכחה נובע גם שאם קבוצה קומפקטית K ונקודה $y \notin K$ ניתנות להפרדה

משפט: תהיינה K_1,K_2 שתי קבוצות קומפקטיות במרחב האוסדורף, כך ש- $K_1\cap K_2=\emptyset$
אזי קיימות שתי קבוצות פתוחות וזרות V_1,V_2 כך ש- $K_1\subseteq V_1$ ו- $K_2\subseteq V_2$.

משפט: יהי X מרחב קומפקטי ותהי $f:X\to Y$ רציפה. אזי $f(X)$ קומפקטית.

הוכחה: יהי $f(X)\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ כיסוי פתוח של $f(X)$. אזי $X=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(U_\alpha)$ כיסוי פתוח של X $\Leftarrow$ יש לו תת כיסוי סופי. כלומר $X=\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(U_i)$
אבל אז בוודאי $f(X)=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$ וזה תת כיסוי סופי של $f(X)$. לכן $f(X)$ קומפקטית.

מסקנה: קומפקטיות היא שמורה טופולוגית.

משפט: קבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית.

הוכחה: תהי $K\subseteq X$ קבוצה סגורה במרחב קומפקטי X. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של K. אזי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\cup\{X\setminus K\}$ כיסוי פתוח של X. אבל X קומפקטי ולכן קיים לו תת כיסוי סופי, $\{U_i\}_{i=1}^{n}\cup\{X\setminus K\}$. אזי $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ הוא תת כיסוי סופי של $K\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$. לכן K קומפקטית.

משפט: תהי $f:X\to Y$ רציפה כאשר X קומפקטי ו- Y האוסדורף. אזי f הומאומורפיזם.

הוכחה: יש להראות ש- f^{-1} רציפה. לצורך, רק מספיק להראות ש- f העתקה סגורה. ואכן, תהי $K\subseteq X$ סגורה. X קומפקטי ולכן K גם קומפקטית $\Leftarrow$ $f(K)$ קומפקטית ב- Y. Y האוסדורף $\Leftarrow$ $f(K)$ סגורה ב- Y.

מרחב טופולוגי X נקרא קומפקטי סדרתית אם לכל סדרה (x_n) ב- X יש תת סדרה מתכנסת.

X נקרא קומפקטי נקודת גבול אם לכל תת קבוצה אינסופית $S\subseteq X$ יש נקודת הצטברות.

משפט: יהי X מרחב קומפקטי ותהי העתקה $f:X\to\mathbb{R}$ אזי יש ל-f מקסימום ומינימום.

הוכחה: לפי משפט קודם $f(X)$ קבוצה קומפקטית ב-$\mathbb{R}$ לכן היא סגורה וחסומה (רק יעוד מסעיף 3) $\Leftarrow$ $\max f(X)=\sup f(X)\in f(X)$ וכן $\min f(X)=\inf f(X)\in f(X)$

יהי X מרחב טופולוגי. נגדיר מרחב טופולוגי X^+ ע"י $X^+=X\cup\{\infty\}$ והטופולוגיה שנוצרת ע"י התת בסיס $\mathcal{B}=\tau_X\cup\{X\setminus K\cup\{\infty\}: K\subseteq X$ קומפקטית$\}$

טענה: לכל מרחב האוסדורף X המרחב X^+ הוא קומפקטי.

הוכחה: יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X^+. קיים α_∞ כך ש-$\infty\in U_{\alpha_\infty}$. נראה שהקבוצה $X\setminus U_{\alpha_\infty}$ היא קומפקטית ב-X. נתון לנו התת בסיס של X^+. לכן U_{α_∞} הינו איחוד כלשהו של חיתוכים סופיים של קבוצות מהתת בסיס ומאחר ש-$\infty\in U_{\alpha_\infty}$ מדובר באיחוד של חיתוך סופי של קבוצות מהצורה $X\setminus K\cup\{\infty\}$. כלומר $U_{\alpha_\infty}=\bigcup_{\beta\in J}\bigcap_{i=1}^{n}X\setminus K_{i,\beta}\cup\{\infty\}$ כאשר $K_{i,\beta}$ קומפקטיות עבור $1\le i\le n$; $\beta\in J$.

$$X\setminus U_{\alpha_\infty}=X\setminus\Big(\bigcup_{\beta\in J}\bigcap_{i=1}^{n}X\setminus K_{i,\beta}\Big)=X\cap\Big(\bigcup_{\beta\in J}\bigcap_{i=1}^{n}X\setminus K_{i,\beta}\Big)^c=$$
$$=X\cap\Big(\bigcap_{\beta\in J}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}X\setminus K_{i,\beta}\Big)^c\Big)=X\cap\Big(\bigcap_{\beta\in J}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\big(X\cap K_{i,\beta}^c\big)^c\Big)\Big)=$$
$$=X\cap\Big(\bigcap_{\beta\in J}\bigcup_{i=1}^{n}K_{i,\beta}\Big)=\bigcap_{\beta\in J}\bigcup_{i=1}^{n}K_{i,\beta}$$

אזי איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות היא קבוצה קומפקטית וחיתוך כלשהו של קבוצות קומפקטיות הוא קומפקטי $\Leftarrow$ $X\setminus U_{\alpha_\infty}$ היא קבוצה קומפקטית ב-X. הכיסוי הנתון $\{U_\alpha\}$ מכסה את כל X^+ ולכן בפרט מכסה את $X\setminus U_{\alpha_\infty}$. אבל זאת קבוצה קומפקטית ולכן יש לה תת כיסוי סופי $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ ולכן $\{U_i\}_{i=1}^{n}\cup\{U_{\alpha_\infty}\}$ תת כיסוי סופי של X^+.

יהי X מרחב האוסדורף. מרחב האוסדורף Y נקרא קומפקטיפיקציה חד-נקודתית של X אם:
(1) Y קומפקטי
(2) $X\subseteq Y$ הוא תת מרחב
(3) $Y\setminus X$ מכיל בדיוק נקודה אחת.

נשים לב שלא תמיד אם X מרחב האוסדורף אזי X^+ הוא קומפקטיפיקציה חד נקודתית שלו. אמנם X^+ קומפקטי. אבל $i:X\to X^+$ לא בהכרח שיכון; X^+ לא בהכרח מרחב האוסדורף.

מרחב האוסדורף X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל נקודה $x\in X$ קיים תת מרחב קומפקטי K כך ש-$x\in K$ ו-K מכיל סביבה פתוחה ב-X של x.

משפט: יהי X מרחב טופולוגי. אזי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית אמ"מ קיימת קומפקטיפיקציה חד נקודתית Y. וכן אם קיימות שתי קומפקטיפיקציות חד נקודתיות Y ו-Y' אז $Y'\cong Y$ ע"י f כך ש-$f|_X = id_X$.

הוכחה: בשלושה שלבים.

(I) ראשית נראה את היחידות. יהיו Y,Y' קומפקטיפיקציות חד נקודתיות. נניח $p\in Y\setminus X$ ו-$q\in Y'\setminus X$. נגדיר $h:Y\to Y'$ ע"י $h(x)=\begin{cases}x & x\neq p\\ q & x=p\end{cases}$

תהי U קבוצה פתוחה ב-Y. נראה ש-$h(U)$ פתוחה ב-Y'. אם $p\notin U$ אז $h(U)=U$. U פתוחה ב-Y וכן $U\subseteq X$ ולכן U פתוחה ב-X. במרחב האוסדורף כל יחידון הוא סגור ולכן X פתוחה ב-Y'. ולכן U פתוחה ב-Y'. אם $p\in U$ אז $C=Y\setminus U$ סגורה ב-Y. אבל Y קומפקטי ולכן C קומפקטית. אבל $C\subseteq X$ לכן היא תת מרחב קומפקטי של X. אבל X תת מרחב של Y' אז C תת מרחב קומפקטי של Y'. Y' מרחב האוסדורף ולכן C סגורה ב-Y'. לכן $h(U)=Y'\setminus C$ פתוחה ב-Y'. באותו אופן גם h^{-1} העתקה פתוחה $\Leftarrow$ h הומאומורפיזם.

(II) כעת נראה קיום Y כדרוש. ניקח $Y=X^+$. כבר ראינו ש-X^+ קומפקטי. נראה שהוא האוסדורף. יהיו $x,y\in Y$. אם $x,y\in X$ הן בוודאי ניתנות להפרדה ע"י קבוצות זרות ופתוחות. אם $x\in X$ ואילו $y=\infty$ ניקח קבוצה קומפקטית $K\subseteq X$ שמכילה סביבה פתוחה U של x. אז $U\cap Y\setminus K=\emptyset$ והן סביבות פתוחות וזרות של x ו-y ב-Y.

(III) נראה את הכיוון ההפוך. נניח ש-Y קומפקטיפיקציה חד נקודתית של X. כלומר Y מרחב האוסדורף קומפקטי, $X\subseteq Y$ תת מרחב ו-$Y\setminus X$ מכיל נקודה אחת. X הוא מרחב האוסדורף משום שהוא תת מרחב של מרחב האוסדורף. אם $x,y\in X$ קיימות סביבות U_x,U_y פתוחות ב-Y כך ש-$x\in U_x$, $y\in U_y$ ו-$U_x\cap U_y=\emptyset$ אזי $U_x\cap X$ ו-$U_y\cap X$ סביבות זרות ופתוחות של x ו-y בהתאמה ב-X.
נראה ש-X קומפקטי מקומית. תהי $x\in X$. ניקח קבוצות זרות ופתוחות $U,V\subseteq Y$ כך ש-$x\in U$ ו-V מכיל את הנקודה שב-$Y\setminus X$. אזי $C=Y\setminus V$ סגורה ב-Y. אבל Y קומפקטי ולכן C תת מרחב קומפקטי של Y. אבל $Y\subseteq X$ ולכן להיותה תת מרחב קומפקטי של X והוא מכיל את הסביבה U של x.

משפט: יהי X מרחב האוסדורף. אזי X קומפקטי מקומית אמ"מ לכל $x\in X$ ולכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ כך ש-$x\in U$ קיימת סביבה פתוחה $V\subseteq U$ כך ש- $\bar{V}\subseteq U$ ו- $\bar{V}$ קומפקטית.

נסמן ב- $map(X,Y)$ את אוסף ההעתקות מ-X ל-Y.

טענה: יהי $W(X,Y)$ מרחב עם שתי העתקות $w_X: X\to W$ ו $w_Y: Y\to W$ כך שלכל מרחב טופולוגי T הפונקציה

$$c: map(W,T)\to map(X,T)\times map(Y,T), \quad g\longmapsto (w_X\circ g, w_Y\circ g)$$

היא איזומורפיזם של קבוצות אז $W\cong X\amalg Y$.

טענה: יהי $W(X,Y)$ מרחב עם שתי העתקות $W\to X: w_X$ ו $W\to Y: w_Y$ כך שלכל מרחב טופולוגי הפונקציה $c: map(T,W)\to map(X,T)\times map(Y,T)$ היא איזומורפיזם של קבוצות אז $W\cong X\times Y$.

יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מרחבים טופולוגיים. מרחב המכפלה הוא הקבוצה $X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ המוגדרת ע"י $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha=\{f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha : f(\alpha)\in X_\alpha$ לכל $\alpha\in I\}$ עם הטופולוגיה המינימלית כך שלכל $\alpha\in I$ ההטלה $\pi_\alpha: X\to X_\alpha$ היא רציפה. כלומר תת בסיס לטופולוגיה הוא $\mathcal{B}=\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha^i) : U_\alpha^i\subseteq X_\alpha$ פתוחה $, \alpha\in I\}$. אזי בסיס לטופולוגיה הוא חיתוכים סופיים של איברי $\mathcal{B}$, כלומר איברי הבסיס הם $\prod_{\alpha\in I}U_\alpha$ כאשר עבור מספר סופי בלבד של α מתקיים $U_\alpha\subsetneq X_\alpha$ פתוחה ובשאר לכל ה-α $U_\alpha=X_\alpha$.

טענה: יהי $\{X_\alpha\}$ אוסף מרחבי האוסדורף. אזי $\prod X_\alpha$ מרחב האוסדורף.

הוכחה: יהיו $x,y\in\prod X_\alpha$. קיימת קואורדינטה α שעבורה $x_\alpha\neq y_\alpha$. ב- X_α קיימות קבוצות פתוחות זרות V_α, U_α כך ש- $x_\alpha\in V_\alpha$ ו $y_\alpha\in U_\alpha$. אזי $V_\alpha\times\prod_{\alpha\neq\beta}X_\beta$ ו- $U_\alpha\times\prod_{\alpha\neq\beta}X_\beta$ סביבות זרות ופתוחות של y ו-x בהתאמה. ☺

טענה: מרחב טופולוגי X הוא קומפקטי אמ"מ לכל אוסף של תת קבוצות סגורות של X אם כל חיתוך סופי של איברי האוסף אינו ריק אז גם חיתוך כל איברי האוסף אינו ריק.

הוכחה: ראינו כבר את ההוכחה בסעיף 3 (דף) מתמסטר של כיתוב שלגיה אסופק:

$$\underset{\text{סגורה}}{\forall}\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\ \bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha^c=X \Rightarrow \underset{\text{סופית}}{\exists J\subseteq I}\ \bigcup_{\alpha\in J}F_\alpha^c=X$$

$$\Leftrightarrow \underset{\text{סגורה}}{\forall}\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\ \left(\bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha^c\right)^c=\emptyset \Rightarrow \underset{\text{סופית}}{\exists J\subseteq I}\ \left(\bigcup_{\alpha\in J}F_\alpha^c\right)^c=\emptyset$$

$$\Leftrightarrow \underset{\text{סגורה}}{\forall}\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\ \bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\emptyset \Rightarrow \underset{\text{סופית}}{\exists J\subseteq I}\ \bigcap_{\alpha\in J}F_\alpha=\emptyset$$

$$\Leftrightarrow \underset{\text{סגורה}}{\forall}\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}:\ \underset{\text{סופית}}{\forall J\subseteq I}\ \bigcap_{\alpha\in J}F_\alpha\neq\emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha\neq\emptyset$$

☺

ט) אוסף קבוצות כמו המשפט באר שהוא מקיים את תכונת החיתוך הסופי.

למה: תהי X קבוצה ויהי $\mathcal{A}$ אוסף קבוצות חלקיות של X בעל תכונת החיתוך הסופי. אזי יש אוסף קבוצות חלקיות $\mathcal{D}\subseteq 2^X$ כך ש- $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ בעל תכונת החיתוך הסופי וכל קבוצה של קבוצות חלקיות שמכילה את $\mathcal{D}$ אינה מקיימת את תכונת החיתוך הסופי.

הוכחה: נשתמש בכמה סימונים: $c\in X$, $C\subseteq X$, $\mathcal{C}\subseteq 2^X$, $\mathbb{C}\subseteq 2^{2^X}$

יהי $\mathbb{A}$ אוסף כל המשפחות של קבוצות $\mathcal{B}\subseteq 2^X$ כך ש- $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ ול- $\mathcal{B}$ יש תכונת החיתוך הסופי. צריך להראות שיש ב- $\mathbb{A}$ איבר מקסימלי ביחס ליחס ההכלה $\subseteq$. תהי $\mathbb{B}\subseteq\mathbb{A}$ שרשרת. נראה ש- $\mathcal{C}=\bigcup_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}}\mathcal{B}$ הוא איבר ב- $\mathbb{A}$, כלומר הוא מקיים את תכונת החיתוך הסופי. לכן בוודאי יהיה חסם מלעיל של $\mathbb{B}$ ואז לפי הלמה של צורן יש ב- $\mathbb{A}$ איבר מקסימלי. יש להראות ש- $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$ ושיש לו תכונת החיתוך הסופי. ברור ש- $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$ שהרי לכל $\mathcal{B}\in\mathbb{B}$ $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$. כעת יהיו $C_1,\dots,C_n\in\mathcal{C}$. לכל $1\le i\le n$ קיים $\mathcal{B}_i\in\mathbb{B}$ כך ש- $C_i\in\mathcal{B}_i$. בוודאי $\{\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_n\}\subseteq\mathbb{B}$ ולכן היא סדורה לינארית. אבל היא סופית ולכן יש לה איבר מקסימלי. יהי $\mathcal{B}_k$ האיבר המקסימלי. אזי $C_i\in\mathcal{B}_k$ לכל $1\le i\le n$. ל- $\mathcal{B}_k$ יש תכונת החיתוך הסופי ולכן $\bigcap_{i=1}^{n}C_i\neq\emptyset$. וזה מה שרצינו.

☺

למה: תהי X קבוצה ותהי $\mathcal{D}$ קבוצה מקסימלית ביחס לתכונת החיתוך הסופי. אזי

(1) כל חיתוך סופי של איברי $\mathcal{D}$ הוא איבר ב- $\mathcal{D}$.

(2) אם $A\subseteq X$ כך ש $A\cap D\neq\emptyset$ לכל $D\in\mathcal{D}$ אזי $A\in\mathcal{D}$.

הוכחה:

(1) יהי B חיתוך של מספר סופי של איברי $\mathcal{D}$. נגדיר אוסף $\mathcal{E}=\mathcal{D}\cup\{B\}$. נראה שיש ל- $\mathcal{E}$ תכונת החיתוך הסופי. ניקח מספר סופי של איברי $\mathcal{E}$. אם הם כולם ב- $\mathcal{D}$

אז החיתוך בוודאי לא ריק. ואילו אם B היה אחד מהם אז החיתוך הוא מהצורה $D_1\cap\ldots\cap D_m\cap B$ כאשר B עצמו חיתוך של איברי $\mathcal{D}$. לכן בכל מקרה החיתוך אינו ריק $\Rightarrow$ מהמקסימליות של $\mathcal{D}$ נובע ש- $\mathcal{D}=\mathcal{E}$ ולכן $B\in\mathcal{D}$.

(2) תהי A כנ"ל ונסתכל על $\mathcal{E}=\mathcal{D}\cup\{A\}$. באופן דומה לסעיף (1) ובשימוש בהנחה $\mathcal{E}$ מקיימת את תכונת החיתוך הסופי $\Rightarrow \mathcal{D}=\mathcal{E} \Rightarrow A\in\mathcal{D}$

משפט טיכונוף: יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מרחבים קומפקטיים. אזי $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ קומפקטי.

הוכחה: יהי $X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ מרחב המכפלה. יהי $\mathcal{A}$ אוסף תתי קבוצות של X שמקיים את תכונת החיתוך הסופי. נראה ש- $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}\bar{A}\neq\emptyset$ ומכאן נקבל ש-X קומפקטי.

יהי $\mathcal{D}$ אוסף מקסימלי של קבוצות שמקיימות את תכונת החיתוך הסופי כך ש- $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{D}$. מספיק להראות ש- $\bigcap_{D\in\mathcal{D}}\bar{D}\neq\emptyset$.

יהי $\alpha\in I$. נסתכל על האוסף $\{\pi_\alpha(D):D\in\mathcal{D}\}$ של הקבוצות תתקיות של X_α. לאוסף זה יש את תכונת החיתוך הסופי (שהרי ל-$\mathcal{D}$ יש תכונה זו). X_α קומפקטי ולכן לכל α קיימת נקודה x_α כך ש- $x_\alpha\in\bigcap_{D\in\mathcal{D}}\overline{\pi_\alpha(D)}$. תהי $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I}$. נראה ש- $x\in\bar{D}$ לכל $D\in\mathcal{D}$ ומכאן נקבל את הטענה.

נראה שאם $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ איבר תת בסיס של X שמכיל את x אז $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ חותך כל איבר של $\mathcal{D}$. ואכן, הקבוצה U_β היא סביבה של $x_\beta\in X_\beta$. מאחר ש- $x_\beta\in\overline{\pi_\beta(D)}$ U_β חותכת את $\pi_\beta(D)$ באיזו נקודה $\pi_\beta(y)$ עבור $y\in D$ ולכן $y\in\pi_\beta^{-1}(U_\beta)\cap D$.
לכן כל איבר בתת הבסיס של X שמכיל את x שייך ל- $\mathcal{D}$. אבל איבר בסיס הוא חיתוך סופי של איברי תת בסיס ולכן כל איבר בסיס שמכיל את x שייך ל- $\mathcal{D}$.
אבל ל- $\mathcal{D}$ יש תכונת החיתוך הסופי. לכן כל איבר בסיס שמכיל את x הוא חותך את כל איבר $\mathcal{D}$. ולכן $x\in\bar{D}$ לכל $D\in\mathcal{D}$ כנדרש.

העתקה $p:X\to Y$ בין מרחבים טופולוגיים נקראת העתקת מנה אם:

(1) p על

(2) $U\subseteq Y$ פתוחה אמ"מ $p^{-1}(U)$ פתוחה ב-X

לא כל העתקה היא העתקת מנה. למשל ניקח $X=\{0\}\sqcup(0,1]$; $Y=[0,1]$, וניקח $p:X\to Y$ המוגדרת ע"י $p(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x & x\neq0\end{cases}$. היא חח"ע ועל וגם רציפה כי אם $U\subseteq Y$ פתוחה ו- $0\notin U$ אז $U=p^{-1}(U)$ פתוחה ב- $(0,1]$ ואם $0\in U$ אז $p^{-1}(U)=\{0\}\cup p^{-1}(U\setminus\{0\})$ פתוחה.

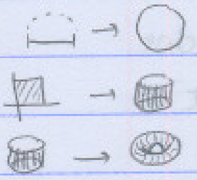
אבל p לא העתקה אופן משום ש-$p^{-1}(\{0\})$; $\{0\}$ פתוחה ב-X אבל לא ב-Y.

יהי X מרחב טופולוגי עם יחס שקילות $\sim$ על איבריו. נגדיר את מרחב המנה $X/\sim$ באופן הבא: $X/\sim$ קבוצת מחלקות השקילות של $\sim$ ב-X. וקבוצה $U\subseteq X/\sim$ היא פתוחה אמ"מ $p^{-1}(U)$ פתוחה ב-X כאשר $p: X\to X/\sim$ פונקציה המעבירה את x למחלקת השקילות שלו $[x]$.

טענה: האוסף הנ"ל של קבוצות ב-$X/\sim$ היא טופולוגיה.
הוכחה: נראה שמתקיימות התכונות הדרושות.
(1) סגירות לאיחוד: נניח $\{U_\alpha\}$ פתוחות. אזי $p^{-1}(U_\alpha)$ פתוחות ב-X ולכן $p^{-1}(\bigcup U_\alpha)=\bigcup p^{-1}(U_\alpha)$ פתוחה ב-X ולכן $\bigcup U_\alpha$ פתוחה ב-$X/\sim$.
(2) סגירות לחיתוך סופי: אם $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ פתוחות. אז $p^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} U_\alpha)=\bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}(U_\alpha)$ וזו קבוצה פתוחה ב-X. ולכן $\bigcap_{i=1}^{n} U_\alpha$ פתוחה ב-$X/\sim$.
(3) $p^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ ולכן $\emptyset$ פתוחה ב-$X/\sim$.
$p^{-1}(X/\sim)=X$ ולכן $X/\sim$ פתוחה ב-$X/\sim$.

אם X מרחב טופולוגי ; $A\subseteq X$ נסמן ב-X/A את מרחב המנה $X/\sim$ כאשר $x\sim y$ אמ"מ $x,y\in A$.

דוגמאות למרחבי מנה:



(1) נסתכל על I ונזהה את הנקודות 0 ו-1. אזי $I/\sim\;\cong S^1$
(2) נסתכל על $I\times I$ ולכל y נגדיר $(0,y)\sim(1,y)$ אזי $I^2/\sim\;\cong S^1\times I$
(3) נסתכל על $S^1\times I$ ונזהה את קצוות הגליל. אזי $S^1\times I/\sim\;\cong S^1\times S^1$
(4) המרחב הפרויקטיבי ה-n-ממדי: $\mathbb{R}^n/_{\substack{\forall v\neq 0\,\forall\lambda\neq 0\\ v\sim\lambda v}}$. אנחנו מתעניינים בכיוון בלבד $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}/\sim\;\cong S^{n-1}$
את המרחב הפרויקטיבי ה-n ממדי מסמנים ב-$\mathbb{RP}^n$.

מרחב X נקרא נורמלי אם X הוא T_1 ולכל שתי קבוצות $A,V\subseteq X$ רק ש-$A\subseteq V$; V פתוחה ; A סגורה קיימת קבוצה פתוחה U רק ש-$A\subseteq U\subseteq\bar{U}\subseteq V$.
X נקרא רגולרי אם הוא T_1 ולכל קבוצה פתוחה $V\subseteq X$ ולכל $x\in V$ קיימת קבוצה פתוחה U רק ש-$x\in U\subseteq\bar{U}\subseteq V$.

הערות:

(1) מרחב נורמלי הוא גם רגולרי

(2) מרחב רגולרי הוא מרחב האוסדורף

(3) יהי X מרחב T_1. אזי הוא רגולרי אמ"מ לכל קבוצה סגורה A ולכל $x\notin A$; x ו-A ניתנות להפרדה.

(4) יהי X מרחב T_1. אזי X נורמלי אמ"מ כל שתי קבוצות סגורות זרות ניתנות להפרדה.

נשים ♡ לכמה פרטים חשובים:

(1) מרחב רגולרי הוא לא בהכרח נורמלי

(2) מרחב T_1 הוא לא בהכרח האוסדורף

(3) מרחב האוסדורף הוא לא בהכרח רגולרי

טענה: אם X הוא T_1 (האוסדורף / רגולרי) אז כל תת מרחב הוא T_1 (האוסדורף / רגולרי)
הוכחה: עבור מרחב האוסדורף כבר ראינו לכן נתן הוכחה אחרת.
נניח X הוא T_1 ; $Y\subseteq X$ ויהיו $x,y\in Y$ ויהיו U_x, U_y פתוחות ב-X ; $x\in U_x$, $y\in U_y$ ו- $x\notin U_y$, $y\notin U_x$. אזי הקבוצות $U_x\cap Y$, $U_y\cap Y$ מקיימות את הדרוש ב-Y.
נניח X מרחב רגולרי ו- $Y\subseteq X$ תהי $x\in Y$ ותהי V פתוחה ב-Y כך ש- $x\in V$. אזי $V=Y\cap U$ כאשר U פתוחה ב-X ובוודאי $x\in U$. לכן קיימת קבוצה פתוחה $A\subseteq X$ כך ש- $x\in A\subseteq\bar{A}\subseteq U$. אזי $B=A\cap Y$ פתוחה ב-Y. הסגור של B ב-Y מוכל בסגור של B ב-X ולכן $x\in B\subseteq\bar{B}\subseteq\bar{A}\subseteq U$.

טענה: אם X,Y הם T_1 (האוסדורף / רגולריים) אז $X\times Y$ הוא T_1 (האוסדורף / רגולרי)
הוכחה: עבור מרחבי האוסדורף כבר ראינו טענה כללית יותר. הטענה עבור מרחב T_1 מתקבלת בצורה דומה. נוכיח עבור מרחבים רגולריים.
נניח X,Y רגולריים. תהי $(x,y)\in X\times Y$ ונניח $U\subseteq X\times Y$ פתוחה כך ש- $(x,y)\in U$. קיימות קבוצות פתוחות $U_1\subseteq X$ ו- $U_2\subseteq Y$ כך ש- $(x,y)\in U_1\times U_2\subseteq X\times Y$. לפי ההנחה קיימות קבוצות פתוחות $V_1\subseteq X$, $V_2\subseteq Y$ כך ש- $x\in V_1\subseteq\bar{V_1}\subseteq U_1$ ו- $y\in V_2\subseteq\bar{V_2}\subseteq U_2$. (פתוחה גם) $V=V_1\times V_2$. אז $(x,y)\in V\subseteq\bar{V}=\bar{V_1}\times\bar{V_2}\subseteq U_1\times U_2\subseteq U$

נשים ♡ שנורמליות לא עוברת לתת מרחבים או למכפלות.

טענה: מרחב מטרי הוא נורמלי.

הוכחה: תהיינה $A,B\subseteq X$ קבוצות סגורות וזרות במרחב מטרי X. נגדיר

$$U=\bigcup_{x\in A}B\left(x,\frac{d(x,B)}{2}\right)\qquad V=\bigcup_{x\in B}B\left(x,\frac{d(x,A)}{2}\right)$$

ברור ש- $A\subseteq U$ וש- $B\subseteq V$ והן פתוחות. נראה שהן זרות: נניח ש- $z\in U\cap V$ אז קיים $x\in A$ כך ש- $d(x,z)<\frac{d(x,B)}{2}$ וקיים $y\in B$ כך ש- $d(y,z)<\frac{d(y,A)}{2}$.
ברור שמתקיים $d(x,B)\le d(x,y)$, $d(y,A)$ ולכן מתקבלת סתירה כי:

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)<\frac{d(x,B)}{2}+\frac{d(y,A)}{2}\le\frac{d(x,y)}{2}+\frac{d(x,y)}{2}=d(x,y)$$

משפט: כל מרחב רגולרי עם בסיס בן מניה הוא נורמלי.

הוכחה: יהי X מרחב רגולרי עם בסיס בן מניה $\mathcal{B}$. יהיו $A,B\subseteq X$ קבוצות סגורות זרות. תהי $x\in A$. קיימת לה סביבה פתוחה U שאינה חותכת את B (כי $X\setminus B$ פתוחה). מרגולריות קיימת קבוצה פתוחה V כך ש- $x\in V\subseteq\bar{V}\subseteq U$. לכל x כזאת נבחר איבר בסיס שמוכל ב- V. ככה מתקבל כיסוי בן מניה של A ע"י קבוצות פתוחות שהסגור שלהן לא חותך את B. נסמן כיסוי זה ב- $\{U_n\}$. באופן דומה נבחר כיסוי $\{V_n\}$ של B כך שלכל n $\bar{V}_n\cap A=\emptyset$. נגדיר $U=\bigcup U_n$ ו- $V=\bigcup V_n$. אלה קבוצות פתוחות שמכילות את A ואת B בהתאמה, אבל הן לא בהכרח זרות. לכל n נגדיר

$$U_n'=U_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\bar{V}_i\qquad V_n'=V_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\bar{U}_i$$

לכל n U_n' ו- V_n' פתוחות כי הן חיתוך סופי של פתוחות. האוסף $\{U_n'\}$ מכסה את A כי כל $x\in A$ שייך לאיזה U_n ו- x לא שייך לאף אחת מהקבוצות $\bar{V}_i$. באותו אופן $\{V_n'\}$ מכסה את B. נגדיר

$$U'=\bigcup U_n'\qquad V'=\bigcup V_n'$$

אלה קבוצות זרות משום שאם $x\in U'\cap V'$ אז $x\in U_j'\cap V_k'$ עבור j,k כלשהם. בה"כ $j\le k$. עפ"י ההגדרה של U_j' נובע ש- $x\in U_j$ (ובפרט ש- $j\le k$) נובע מההגדרה של V_k' ש- $x\notin\bar{U}_j$. סתירה דומה יש גם אם $k\le j$.

הלמה של אוריסון: יהי X מרחב נורמלי. תהיינה $A,B\subseteq X$ קבוצות סגורות זרות. יהי $[a,b]$ קטע סגור ב- $\mathbb{R}$. אזי קיימת העתקה $f:X\to[a,b]$ כך ש- $f|_A\equiv a$ ו- $f|_B\equiv b$.
הוכחה: ברור שמספיק להוכיח עבור הקטע $[0,1]$, שהרי $[a,b]\cong[0,1]$ לכל $a<b$.
ההוכחה מתבצעת בכמה שלבים.

(I) נסמן $P=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. לכל $p\in P$ נגדיר קבוצה פתוחה $U_p\subseteq X$ כך שאם $p<q$ אז $\overline{U_p}\subseteq U_q$, ואז הקבוצות $\{U_p\}$ יהיו מסודרות ביחס להכלה לפי הסדר של הרציונליים.

נסדר את איברי P באיזשהו סידור ונניח ש-0 ו-1 הם הראשונים. כעת נגדיר את הקבוצה U_p באינדוקציה באופן הבא: ראשית, נגדיר $U_1=X\setminus B$. A קבוצה סגורה שמוכלת בקבוצה הפתוחה U_1 ומהנורמליות של X קיימת קבוצה פתוחה U_0 כך ש-$A\subseteq U_0\subseteq\overline{U_0}\subseteq U_1$.

באופן כללי, תהי P_n קבוצת n הרציונליים הראשונים בסידור שבחרנו ונניח ש-U_p מוגדרת לכל $p\in P_n$, ומתקיים עבורן ש-$p<q \Rightarrow \overline{U_p}\subseteq U_q$. יהי r הרציונלי הבא בסדרה. (כלומר $P_{n+1}=P_n\cup\{r\}$) זאת קבוצה סופית ב-P ולכן ניתן לסדר את איבריה לפי יחס $<$. חוץ מהאיברים הראשון והאחרון לכל איבר יש איבר עוקב ואיבר קודם. 0 הוא הראשון ו-1 הוא האחרון כי הנחנו שהם הראשונים בסידור ו-$0<r<1$. יהי q העוקב של r ו-p הקודם ל-r ב-P_{n+1}. הקבוצות U_p, U_q הן מוגדרות ומתקיים $\overline{U_p}\subseteq U_q$. לפי הנורמליות של X קיימת קבוצה U_r פתוחה כך ש-$\overline{U_p}\subseteq U_r\subseteq\overline{U_r}\subseteq U_q$. ונראה שלכל $p,q\in P_{n+1}$ מתקיים $p<q \Rightarrow \overline{U_p}\subseteq U_q$. אם p ו-q ב-P_n זה נובע מהנחת האינדוקציה. וכן אם אחד מהם הוא r והשני $s\in P_n$ אז אם $s\le p$ אז $\overline{U_s}\subseteq\overline{U_p}\subset U_r$ ואם $s\ge q$ אז $\overline{U_r}\subseteq U_q\subset U_s$

בזאת סיימנו להגדיר את U_p לכל $p\in P$.

(II) נרחיב את ההגדרה של U_p לכל הרציונליים $p\in\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ ע"י $U_p=\begin{cases}\emptyset & p<0\\ X & p>1\end{cases}$
ברור שעדיין מתקיים $p<q \Rightarrow \overline{U_p}\subseteq U_q$

(III) תהי $x\in X$. נגדיר $\mathbb{Q}(x)=\{p: x\in U_p\}$. ברור שאין בקבוצה הזו מספרים שקטנים מ-0, ונמצאים בה כל הרציונליים הגדולים מ-1. אז $\mathbb{Q}(x)$ חסומה מלרע ולכן יש לה חסם תחתון. נגדיר $f(x)=\inf\mathbb{Q}(x)=\inf\{p: x\in U_p\}$

(IV) נראה ש-f היא הפונקציה שאנחנו מחפשים. אם $x\in A$ אז $x\in U_p$ לכל $p\ge 0$ ולכן $\mathbb{Q}(x)=\mathbb{Q}^+$ ולכן $f(x)=0$. ואם $x\in B$ אז $x\in U_p$ רק עבור $1\le p$.
$\Rightarrow f(x)=1$.

נראה ש-f רציפה. נראה שאם $x\in\overline{U_r}$ אז $f(x)\le r$ ואם $x\notin\overline{U_r}$ אז $r\le f(x)$.
אם $x\in\overline{U_r}$ אז $x\in U_s$ לכל $s>r$. לכן $\mathbb{Q}(x)$ מכילה את כל הרציונליים הגדולים מ-r ולכן $f(x)=\inf\mathbb{Q}(x)\le r$. ואם $x\notin\overline{U_r}$ אז $x\notin U_s$ לכל $s<r$. לכן $\mathbb{Q}(x)$ לא מכילה רציונליים שקטנים מ-r ולכן $f(x)=\inf\mathbb{Q}(x)\ge r$

כעת תהי $x_0\in X$ ויהי $(c,d)\subseteq\mathbb{R}$ קטע פתוח כך ש-$f(x_0)\in(c,d)$. (נרצה למצוא

סביבה פתוחה U של x_0 כך ש- $f(U)\subseteq (c,d)$. נבחר $p,q\in\mathbb{Q}$ כך ש-
$c<p<f(x_0)<q<d$. נטען ש- $U=U_q\setminus\overline{U_p}$ היא הסביבה שאנחנו צריכים.
נשים לב ש- $x_0\in U$ משום שאם $f(x_0)<q$ אז $x_0\in U_q$ ואם $f(x_0)>p$
אז $x_0\notin\overline{U_p}$. כמו כן, אם $x\in U$ אז $x\in U_q\subseteq\overline{U_q}$ ולכן
$f(x)\le q$ וגם $x_0\notin\overline{U_p}$ ולכן $x\notin U_p$ ולכן $f(x)\ge p$. לכן,
$f(x)\in[p,q]\subseteq(c,d)$ כנדרש.

☺

משפט ההרחבה של טיצה: אם X נורמלי, $A\subseteq X$ סגורה ו- $f:A\to[0,1]$ רציפה, אז קיימת $g:X\to[0,1]$ רציפה כך ש- $g|_A\equiv f$.

יהי X מרחב טופולוגי. נאמר ש- X מטריזבילי אם $X\cong Y$ עבור Y מרחב מטרי עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה.

משפט המטריזביליות של אוריסון: יהי X מרחב רגולרי עם בסיס בן מניה. אזי X מטריזבילי.

הוכחה: לפי משפט קודם X מרחב נורמלי. נראה שהוא משוכן ב- $[0,1]^{\mathbb{N}}$ שהוא מרחב מטרי עם המטריקה $d((x_n),(y_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$ אז נקבל ש- X הומיאומורפי לתת-מרחב של מרחב מטרי ולכן הוא מטריזבילי.

יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה של X ונסתכל על הקבוצה $P=\{(U,V):\overline{U}\subseteq V,\ U,V\in\mathcal{B}\}$
בוודאי P סופית או בת מניה. נגדיר $F:X\to[0,1]^P$ ע"י $(F(x))_{U,V}=F_{U,V}$
כאשר $F_{U,V}:X\to[0,1]$ רציפה כך ש- $F_{U,V}|_{\overline{U}}\equiv 1$ ו- $F_{U,V}|_{V^c}\equiv 0$
הקיום שלה מובטח ע"י הלמה של אוריסון. F רציפה כי $F_{U,V}$ רציפה לכל $V,U\in P$.
נראה שהיא חח"ע וש- $F:X\to F(X)$ שיכון.

- חח"ע: אם $x\neq y$ אז קיימת $V\subseteq X$ פתוחה כך ש- $x\in V$ ו- $y\notin V$. בה"כ $V\in\mathcal{B}$. מהרגולריות קיימת פתוחה $U\subseteq X$ כך ש- $x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq V$. בה"כ $U\in\mathcal{B}$. ואז $F_{U,V}(y)=0$ ו- $F_{U,V}(x)=1$. בפרט $F(x)\neq F(y)$.
- F שיכון: תהי U פתוחה ב- X. נניח ש- $y_0\in F(U)$ ו- $x_0\in X$ כך ש- $F(x_0)=y_0$. תהי $V'\in\mathcal{B}$ כך ש- $x_0\in V'\subseteq U$ ונבחר U' כך ש- $x_0\in U'\subseteq\overline{U'}\subseteq V'$. נראה ש- $\pi^{-1}_{U',V'}((0,1])\cap F(X)\subseteq F(U)$ כאשר $\pi_{U',V'}:[0,1]^P\to[0,1]$ הטלה על הקואורדינטה (U',V').
נניח ש- $F(x)\in\pi^{-1}_{U',V'}((0,1])$. אזי $F_{U',V'}(x)>0 \Rightarrow x\in V'$ שהרי $F_{U',V'}|_{V'^c}\equiv 0$
והרי $V'\subseteq U \Rightarrow x\in U$. נשים לב ש- $y_0\in F(X)\cap\pi^{-1}_{U',V'}((0,1])$ ולכן $F(U)$ פתוחה ב- $F(X)$.

☺

משפט ז'ורדן: המשלים של כל מסילה סגורה במישור הוא בעל שני רכיבי קשירות בדיוק.

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ותהיינה $f,g: X\to Y$ העתקות. הומוטופיה בין f ו-g היא העתקה $H: X\times I\to Y$ כך ש- $H(x,0)=f(x)$ ו- $H(x,1)=g(x)$.
נסמן $f\sim g$ אם קיימת הומוטופיה כנ"ל. ברור שזהו יחס שקילות על $map(X,Y)$.
נסמן ב-$[X,Y]$ את מחלקות ההומוטופיה של $map(X,Y)$.
נאמר שמרחב X הוא פשוט קשר אם:
(1) X קשיר מסילתית
(2) כל העתקה $f: S^1\to X$ היא הומוטופית למסילה קבועה $c: S^1\to X$, $s\mapsto x_0$.

תהיינה $\alpha,\beta: I\to X$ מסילות. נאמר ש-α ו-β הומוטופיות אם הן מחברות את אותן נקודות הקצה, כלומר $\alpha(0)=\beta(0)$ ו- $\alpha(1)=\beta(1)$ וקיימת העתקה $F: I\times I\to X$ כך ש- $F(0,t)=\alpha(0)$, $F(1,t)=\alpha(1)$ לכל $t\in I$. במקרה כזה זהו יחס שקילות.

טענה: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$. אזי כל שתי מסילות ב-$\mathbb{R}^n$ שמחברות את x_1 עם x_2 הן הומוטופיות.
הוכחה: תהיינה $\varphi,\psi: I\to\mathbb{R}^n$ כך ש- $x_1=\varphi(0)=\psi(0)$ ו- $x_2=\varphi(1)=\psi(1)$.
קל לראות ש- $H: I\times I\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י $H(s,t)=(1-t)\varphi(s)+t\cdot\psi(s)$
היא הומוטופיה בין φ ו-ψ.

(11)

תהיינה $\varphi,\psi: I\to X$ מסילות כך ש- $\varphi(1)=\psi(0)$. נגדיר את השרשור $\varphi*\psi$ ע"י
$$(\varphi*\psi)(t)=\begin{cases}\varphi(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \psi(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$
זאת ההדבקה של שתי פונקציות רציפות על קבוצות סגורות, ולכן היא רציפה.
אם $x\in X$ נסמן ב- e_x את המסילה הקבועה $e_x(t)=x$ לכל $t\in I$.
בהינתן $\varphi: I\to X$ המסילה ההפוכה היא $\varphi^{-1}: I\to X$ המוגדרת ע"י $\varphi^{-1}(t)=\varphi(1-t)$.
בהינתן φ,ψ שניתנות לשרשור נסמן $[\varphi*\psi]=[\varphi]*[\psi]$ ו- $[\varphi^{-1}]=[\varphi]^{-1}$.
הטענה הבאה תראה שההגדרה היא טובה, כלומר בלתי תלויה בנציגים.

משפט: אם $\varphi'\sim\varphi$ אז לכל ψ שניתנת לשרשור איתן $\varphi'*\psi\sim\varphi*\psi$ ואם בנוסף $\psi'\sim\psi$ אז $\varphi'*\psi'\sim\varphi*\psi$.
אם $\varphi'\sim\varphi$ אז $\varphi^{-1}\sim(\varphi')^{-1}$, וכן $e_{x_0}\sim\varphi'*\varphi^{-1}$ כאשר $x_0=\varphi(0)$.

טענה: נניח $\varphi,\psi,\eta: I\to X$ רק ש- $\eta*(\psi*\varphi)$ מוגדר. אזי

$$([\varphi]*[\psi])*[\eta] = [\varphi]*([\psi]*[\eta])$$

נשים לב שבאופן כללי $\varphi*(\psi*\eta) \neq (\varphi*\psi)*\eta$. הן אמנם נראות אותו הדבר אבל הפרמטריזציה שלהן שונה.

יהי X מרחב טופולוגי כלשהו ותהי $x_0\in X$. הקבוצה $\pi_1(X,x_0)$ היא קבוצת כל מחלקות השקילות של מסילות סגורות שמתחילות ב-x_0. בקבוצה זו הפעולה $[\varphi]*[\psi]$ מוגדרת היטב כי כל המסילות מתחילות ונגמרות באותה נקודה. איבר היחידה ביחס לפעולה זו הוא $[e_{x_0}]$ ולכל $[\varphi]$ יש הופכי $[\varphi^{-1}]=[\varphi]^{-1}$. כמו כן, לפי המשפט לעיל יש אסוציאטיביות. $\Leftarrow$ $\pi_1(X,x_0)$ חבורה ביחס לפעולה $*$.

נשים לב שבד"כ אם $x_0\neq x_1$ אז $\pi_1(X,x_0)\neq\pi_1(X,x_1)$. π_1 נקראת החבורה היסודית.

משפט: אם קיימת מסילה ב-X מ-x_0 ל-x_1 אז $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$ איזומורפיזם של חבורות.

אנחנו ועד סוף הקורס (עמוד 80) נוכיח ש- $\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z}$, כאשר $S^1\subseteq\mathbb{C}$. האינטואיציה שעומדת מאחורי המשפט הזה היא שמה שמשנה הוא כמה סיבובים מלאים עושה המסילה סביב המעגל ובאיזה כיוון.

נגדיר העתקה $\exp:\mathbb{R}\to S^1$ ע"י $\exp(x)=e^{2\pi ix}$. ברור שמתקיים $|\exp(x)|=1$ לכל x וכן $\exp(x)=1$ אמ"מ $x\in\mathbb{Z}$.

למה: $\exp|_{(0,1)}$ היא הומיאומורפיזם בין $(0,1)$ ל- $S^1\setminus\{1\}$.

הוכחה: ברור ש- $\exp|_{(0,1)}$ היא הפיכה ורציפה. (נראה שהיא פתוחה:) אם $U\subseteq(0,1)$ פתוחה אז $\exp|_{(0,1)}(U)$ פתוחה. שהרי אם $x\in U$ ו- $\exp|_{(0,1)}(x)=y$ אז קיים קטע $x\in(a,b)\subseteq U$ ו- $\exp|_{(0,1)}((a,b))$ נותן קשת ב-S^1 שהיא סביבה של y, או קשת מנוקבת בנקודה 1. בכל אופן יש סביבה ל-y.

מסקנה: לכל $x\in\mathbb{R}$ קיימת סביבה $U_x=(x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2})$ כך ש- $\exp|_{U_x}:U_x\to\exp(U_x)$ הומיאומורפיזם.

הוכחה: ניתן להזיז את U_x ל- $(0,1)$ (בערך) ש- $\exp$ מחזורית עם מחזור 1 סיימנו.

העתקה $f:E\to B$ המקיימת שלכל $e\in E$ קיימת סביבה $U_e\subseteq E$ כך ש- $f|_{U_e}$ הומיאומורפיזם על התמונה נקראת הומיאומורפיזם מקומי.

למה: לכל נקודה $s\in S^1$ קיימת סביבה פתוחה $U_s\subseteq S^1$ כך ש- $\exp^{-1}(U_s)\cong\coprod_{\mathbb{Z}}U$ ו- $\exp^{-1}(U_s)=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}U+n$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}$ ו- $\exp|_U:U\to U_s$ הומיאומורפיזם.

הוכחה: תהי $U_s\subsetneq S^1$ סביבה כלשהי של s ותהי $U=\exp|_{[0,1]}^{-1}(U_s)$ זאת קבוצה פתוחה ומכיוון ש- $\exp$ מחזורי עם מחזור 1 מתקיים $\exp^{-1}(U_s)=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}U+n$ ו- $\exp^{-1}(U_s)\cong\coprod_{\mathbb{Z}}U$ ברור גם ש- $\exp|_U$ הומיאומורפיזם.

למת ההרמה: תהי $\beta:I\to S^1$ מסילה כך ש- β אינה על. תהי $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $\exp(x_0)=\beta(0)$. אזי קיימת העתקה יחידה $\tilde{\beta}:I\to\mathbb{R}$ כך ש- $\tilde{\beta}(0)=x_0$, ו- $\exp\circ\tilde{\beta}=\beta$.

הוכחה: β אינה על אבל ניתן לחשוב עליה כפונקציה $\beta:I\to S^1\setminus\{s\}$. (נסתכל על $\exp^{-1}(S^1\setminus\{s\})$. זהו איחוד זר של קטעים פתוחים ב- $\mathbb{R}$ שמועתקים ע"י $\exp$ באופן הומיאומורפי על $S^1\setminus\{s\}$. ונתון ש- $\exp(x_0)=\beta(0)$ ולכן $x_0\in\exp^{-1}(\{\beta(0)\})$ $\Rightarrow$ x_0 נמצא באחד הקטעים ב- $\exp^{-1}(S^1\setminus\{s\})$. נגדיר $\tilde{\beta}=\exp|_{U_{x_0}}^{-1}\circ\beta$ כאשר U_{x_0} הוא הקטע שבו נמצא x_0. אז $\exp\circ\tilde{\beta}=\beta$ ו- $\tilde{\beta}(0)=x_0$. ברור ש- $\tilde{\beta}$ יחידה כי ברגע שקובעים ש- $\tilde{\beta}(0)=x_0$ זו ההעתקה היחידה שניתן להגדיר.

משפט ההרמה: לכל מסילה $\beta:I\to S^1$ כך ש- $\beta(0)=1$ קיימת הרמה יחידה $\tilde{\beta}:I\to\mathbb{R}$ כך ש-

(1) $\tilde{\beta}(0)=0$

(2) לכל $s\in I$ $\exp(\tilde{\beta}(s))=\beta(s)$

הוכחה: נחלק את I לקטעים $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ כך ש- $\beta|_{[t_i,t_{i+1}]}$ איננה על לכל $0\le i<n$: נבחר כיסוי של S^1 ע"י שתי תת קבוצות ממש פתוחות, כלומר $S^1=V\cup W$, ונסתכל על $\beta^{-1}(V),\beta^{-1}(W)$ אלה קבוצות פתוחות בקטע הקומפקטי I. קיים $\delta>0$ כך שכל קטע באורך קטן מ- δ נמצא באחת מהקבוצות הנ"ל. $\Rightarrow$ לכל x $\beta|_{[x,x+\delta]}$ איננה על ולכן החלוקה הנ"ל קיימת.

כעת נגדיר את $\tilde{\beta}$ באינדוקציה כך שיתקיים

- $\tilde{\beta}|_{[0,t_i]}:[0,t_i]\to\mathbb{R}$
- $\tilde{\beta}(0)=0$
- $\forall x\in[0,t_i]$ $\exp(\tilde{\beta}_i(x))=\beta(x)$

נגדיר את $\tilde{\beta}_1$: נסתכל במסילה $\beta|_{[0,t_1]}$. זו מסילה שאיננה על ! $\exp(0)=\beta|_{[0,t_1]}(0)$ ולפי למת ההרמה קיימת $\tilde{\beta}_1$ כדרוש.

נניח שהגדרנו את $\tilde{\beta}_i$ כך שמתקיים הדרוש. נסתכל על $\beta|_{[t_i,t_{i+1}]}$ איננה על ולכן קיימת עבורה הרמה יחידה $\tilde{\beta}'$ שמתחילה ב-$\tilde{\beta}_i(t_i)$. אז $\tilde{\beta}'$ ו-$\tilde{\beta}_i$ רציפות על קטעים סגורים ומסכימות על נקודת החיתוך, לכן לפי למת ההדבקה $\tilde{\beta}_{i+1}=\tilde{\beta}_i \vee \tilde{\beta}'$ רציפה על $[0,t_{i+1}]$ וכמובן $\exp(\tilde{\beta}_{i+1}(x))=\beta(x)$.

נגדיר $\tilde{\beta}=\tilde{\beta}_n$ וסיימנו.

ברור ש-$\tilde{\beta}$ יחידה ~~בגלל~~ היחידות בכל שלב של הבניה.

משפט הרמת הריבוע: לכל פונקציה רציפה $F: I\times I \to S^1$ כך ש- $F(0,0)=1$ קיימת הרמה יחידה $\tilde{F}: I^2 \to \mathbb{R}$ כך ש-

(1) $\tilde{F}(0,0)=1$

(2) $\exp\circ\tilde{F}=F$

וכן קיימת ויחידה $\tilde{F}_n: I^2\to\mathbb{R}$ כך ש- $\tilde{F}_n(0,0)=n$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

הוכחה: ראשית נסתכל במקרה הפרטי שבו $F: I^2\to S^1$ העתקה שאיננה על ו- $\tilde{x}_0\in\mathbb{R}$ נקודה כך ש- $\exp\tilde{x}_0=F(0,0)=x_0$. אז קיימת ל-$F$ הרמה יחידה $\tilde{F}: I^2\to\mathbb{R}$ כך ש- $\tilde{F}(0,0)=\tilde{x}_0$ ו- $\exp\circ\tilde{F}=F$. נניח ש- $F: I^2\to S^1\setminus\{y\}$. מתקיים $\exp^{-1}(S^1\setminus\{y\})\cong\coprod_n (0,1)_n$ ו- $\exp|_{(0,1)_n}:(0,1)_n\to S^1\setminus\{y\}$ הומאומורפיזם. נגדיר $\tilde{F}=\exp|^{-1}_{(0,1)_n}\circ F$. ברור שמתקיים הדרוש: $\exp\circ\tilde{F}=F$

וגם $\tilde{x}_0\in(0,1)_n$ אז $\tilde{F}(0,0)=\exp|^{-1}_{(0,1)_n}F(0,0)=\exp|^{-1}_{(0,1)_n}(x_0)=\tilde{x}_0$.

ברור גם שהיא יחידה.

נעבור כעת למקרה הכללי. בגלל הקומפקטיות של I^2 ניתן לחלק אותו לריבועים מספיק קטנים $I^2_{i,j}=[t_i,t_{i+1}]\times[s_j,s_{j+1}]$ כך ש-F איננה על על אף אחד מהם. ההרמה $\tilde{F}_{11}$ של הריבוע $I_{1,1}$ נקבעת עפ"י קיום הרמה יחידה. $\tilde{F}_{11}$ נותנת ערך עבור הפינה של הריבוע $I_{1,2}$ ולכן קיימת עבורו הרמה יחידה $\tilde{F}_{1,2}$. צריך לבדוק שאין סתירה על החיתוך. $J=I_{1,1}\cap I_{1,2}$ הומאומורפי לקטע היחידה. $\tilde{F}_{1,1}|_J$ ו- $\tilde{F}_{1,2}|_J$ הן הרמות של J שמסכימות על $(s_1,0)$ ולכן מלמת ההרמה הן שוות. $\Leftarrow$ $\tilde{F}_{1,1}\vee\tilde{F}_{1,2}$ מוגדרת היטב על $I_{1,1}\cup I_{1,2}$.
באופן דומה ניתן להגדיר הרמה על כל השורה הראשונה $\bigcup_{j=1}^{n} I_{1,j}$. כעת הפינה השמאלית התחתונה של $I_{2,1}$ נקבעת ע"י $\tilde{F}_{1,1}$ וכך ניתן למלא את השורה השנייה וכן הלאה. לפי למת ההרמה ברור שבכל שלב ההרמות $\tilde{F}_{i,j}$ מסכימות על החיתוך.

לכל מסילה $\alpha: I \to S^1$ כך ש- $\alpha(0)=\alpha(1)$ נגדיר $\deg \alpha = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$

משפט: $\deg$ הוא שמורה של הומוטופיה של מסילות סגורות.

הוכחה: תהיינה $\alpha,\beta: I \to S^1$ כך ש- $1 = \alpha(1) = \alpha(0) = \beta(0) = \beta(1)$ ונניח ש- $\alpha \sim \beta$ ע"י $H: I \times I \to S^1$. לפי משפט הרמת הומוטופיה קיימת הרמה יחידה $\tilde{H}$ כך ש- $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\alpha}(s)$ ו- $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\beta}(s)$. לכן $\tilde{H}(1,0) = \tilde{\alpha}(1)$ ו- $\tilde{H}(1,1) = \tilde{\beta}(1)$.
נשים לב כי מתקיים $\exp \tilde{H}(1,t) = H(1,t) = 1 \Rightarrow \tilde{H}(1,t) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tilde{H}(1,t)$ קבועה כפונקציה של t. $\Rightarrow \tilde{H}(1,0) = \tilde{H}(1,1) \Rightarrow \tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1)$, כלומר $\deg \alpha = \deg \beta$

משפט: $\deg: \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ איזומורפיזם של חבורות.

הוכחה:

(1) חח"ע: יש להראות שאם $\deg \alpha = \deg \beta$ אז $\alpha \sim \beta$, כלומר אם $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}$ הרמות שמתחילות ב-0 ; $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ אז $\alpha \sim \beta$. אבל $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}$ מתחילות ונגמרות באותה נקודה והן מסילות ב- $\mathbb{R}$. לכן הן הומוטופיות, כלומר $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$. את ההומוטופיה נעביר תחת ההרכבה של פונקציות ולכן $\alpha = \exp \circ \tilde{\alpha} \sim \exp \circ \tilde{\beta} = \beta$.

(2) על: יהי $n \in \mathbb{Z}$. ניקח $\alpha_n: I \to S^1$ המוגדרת ע"י $\alpha_n(t) = \exp(nt)$. אזי $\tilde{\alpha}_n = nt$; $\deg \alpha_n = n$.

(3) איזומורפיזם של חבורות: יש להראות ש- $\deg [\alpha]*[\beta] = \deg[\alpha] + \deg[\beta]$
מספיק להוכיח עבור הנציגים α,β בגלל המשפט הקודם. נניח $\deg \alpha = n$, $\deg \beta = m$.
ניקח $\alpha = \exp(nt)$; $\beta = \exp(mt)$ אמנם אי אפשר לשרשר אותן כי β לא מתחילה בסוף של α אבל אפשר להזיז את β. וברור שהשרשור הומוטופי ל- $\exp((n+m)t)$.

מרחב טופולוגי X נקרא כוויץ אם $Id: X \to X$ הומוטופית להעתקה הקבועה.

משפט: S^1 אינו כוויץ.

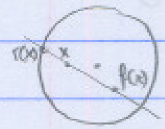
יהי $A \subseteq X$ תת מרחב. נאמר ש- A נסג של X אם קיימת העתקה $r: X \to A$ כך ש- $r \circ i = Id_A$ כאשר $i: A \to X$ העתקת ההכלה.

טענה: $S^1=\partial D^2$ אינו נסג של D^2.

הוכחה: D^2 קבוצה קמורה ולכן $i:S^1\to D^2$ הינה הומוטופית לפונקציה קבועה. לכן גם $r\circ i$ הומוטופית לפונקציה קבועה עבור $r:D^2\to S^1$. אבל אם כך $r\circ i=Id_{S^1}$ ונקבל ש- $S^1\sim *$ וזאת סתירה לכך ש- S^1 אינו כוויץ.

משפט נקודת השבת של בראואר: לכל העתקה $f:D^2\to D^2$ קיימת נקודה $x\in D^2$ כך ש- $f(x)=x$.

הוכחה: נניח בשלילה שלכל $x\in D^2$ $f(x)\neq x$. ניתן לבנות פונקציה $r:D^2\to S^1$ באופן הבא: הישר שעובר את x ו- $f(x)$ חותך את S^1 בשתי נקודות. נגדיר $r(x)=$ נקודת החיתוך מהצד של x.



קל לראות ש- $r(x)$ רציפה ומתקיים לכל $x\in S^1$ $r(x)=x$. לכן $r\circ i=Id_{S^1}$ אבל זה נסג של D^2 בסתירה.