מבחן בטופולוגיה - משפטים, למות וטענות

- תהי $f: \mathbb{R}^n \to X$ פונק' למרחב מטרי כלשהו X. אם f רציפה באחת המטריקות d_E, d_{max}, d_{11} אז היא רציפה בכולן.

- פונקציה בין מרחבים מטריים $f: X \to Y$ היא רציפה אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq Y$ הקבוצה $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

- הומאומורפיזם של מרחבים מטריים הוא יחס שקילות.

- לכל $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ מתקיים $(a,b) \cong (-\infty,\infty)$
לכל שני מעגלים במישור C_1, C_2 עם רדיוסים גדולים מאפס $C_1 \cong C_2$.

- יהיו X,Y מרחבים מטריים ותהי $A \subseteq X$. נניח ש-$f: X \to Y$ שקילות טופולוגית. אזי גם $X \setminus A \cong Y \setminus \{f(A)\}$

- קשירות מסילתית וקומפקטיות הן שמורות טופולוגיות.

- מבחן האוסדרף לשקילות טופולוגית: תהי $f: X \to Y$ פונקציה הפיכה ורציפה בין שני מרחבים מטריים קומפקטיים. אזי f שקילות טופולוגית.
בפרט, אם $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ חח"ע ורציפה אז $I \cong \varphi(I)$
אם $\psi: S^1 \to \mathbb{R}^n$ חח"ע ורציפה אז $S^1 \cong \psi(S^1)$

- משפט נקודת השבת עבור D^2: תהי $f: D^2 \to D^2$ פונקציה רציפה. אזי קיימת נקודה $x \in D^2$ כך ש-$f(x) = x$.

- יהי X מרחב טופולוגי טריוויאלי עם יותר מנקודה אחת. אזי הטופולוגיה אינה מושרית ממטריקה כלשהי על X.

- יהי X מרחב טופולוגי. אזי
  - $\varnothing$ ו-X סגורות ב-X.
  - איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה
  - חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה

- יהי X מרחב טופולוגי ותהיינה $A,B\subseteq X$ תת קבוצות. אזי $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$

- יהי X מרחב טופולוגי ותהי $V\subseteq X$ תת קבוצה. אזי $x\in\overline{V}$ אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ כך ש- $x\in U$ מתקיים $U\cap V\neq\emptyset$.

- פונקציה בין מרחבים טופולוגיים $f:X\to Y$ היא רציפה אמ"מ לכל $V\subseteq Y$ סגורה גם $f^{-1}(V)$ סגורה ב-X.

- תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים. f רציפה אם מתקיים אחד הבאים:
  - קיים כיסוי פתוח של X, $X=\bigcup O_\alpha$ כאשר $\{O_\alpha\}$ פתוחות ב-X כך ש- $f|_{O_\alpha}$ רציפה לכל α.
  - אם $X=V_1\cup V_2$ כאשר V_1,V_2 סגורות ו- $f|_{V_i}$ רציפות.
  - לכל $n\in\mathbb{N}$ אם $X=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ כאשר V_i סגורות ו- $f|_{V_i}$ רציפה לכל $1\le i\le n$.

- תהיינה $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ העתקות בין מרחבים טופולוגיים. אזי גם ההרכבה $g\circ f:X\to Z$ היא העתקה.

- יהי (X,d) מרחב מטרי סופי. אזי הטופולוגיה המושרית ע"י המטריקה d היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

- תהי $f:X\to Y$ פונקציה הפיכה בין מרחבים טופולוגיים. אזי f^{-1} רציפה אמ"מ f פתוחה. בפרט, f הומאומורפיזם אמ"מ f העתקה פתוחה.

- תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים ויהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה של Y אזי f רציפה אמ"מ לכל $B\in\mathcal{B}$ $f^{-1}(B)$ פתוחה ב-X.
אם $\mathcal{B}$ תת בסיס לטופולוגיה של Y אז f רציפה אמ"מ לכל $B\in\mathcal{B}$ $f^{-1}(B)$ פתוחה.

- מרחב טופולוגי X הוא לא קשיר אמ"מ קיימת העתקה $e:X\to\{0,1\}$ כאשר e על $\{0,1\}$ ו- $\{0,1\}$ מרחב דיסקרטי.

- אם X מרחב טופולוגי קשיר ו- $f:X\to Y$ העתקה אז $f(X)$ קשירה.

- תהי $V\subseteq X$ תת קבוצה קשירה במרחב טופולוגי. אזי $\bar{V}$ קשירה.

- תהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq X$ משפחה של תת מרחבים קשירים של מרחב טופולוגי X. אם לכל $\alpha,\beta\in I$ $A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset$ אזי $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\subseteq X$ קשיר.

- יהי X מרחב טופולוגי. אזי לכל $x\in X$ קיים מרכיב קשירות יחיד C_x כך ש- $x\in C_x$.

- כל מרחב טופולוגי הוא איחוד של מרכיבי הקשירות שלו.

- יהי X מרחב לא קשיר כך ש- $X=\coprod_{\alpha\in I}U_\alpha$ כאשר לכל α,β, U_α,U_β הן פתוחות, זרות ולא ריקות. אזי $X\cong\coprod_{\alpha\in I}U_\alpha$.

- יהי $X\amalg Y$ איחוד זר. אזי הקבוצה $V\subseteq X\amalg Y$ היא פתוחה אמ"מ $V\cap X$ פתוחה ב- X ו- $V\cap Y$ פתוחה ב- Y.

- מספר מרכיבי הקשירות של מרחב טופולוגי הוא שמורה טופולוגית.

- מרחב X הוא קשיר אמ"מ הקבוצות X ו- $\emptyset$ הן היחידות שהן גם פתוחות גם סגורות.

- יהי (X,τ) מרחב קשיר ותהי τ' טופולוגיה על X כך ש- $\tau'\subseteq\tau$. אזי גם (X,τ') קשיר.

- יהי X מרחב קשיר מסילתית. אזי הוא קשיר.

- יש מרחב קשיר שאינו קשיר מסילתית - Γ_f כאשר $\Gamma_f=\{(x,\sin\frac{\pi}{x}):0<x\leq 1\}$

- יהי X מרחב האוסדורף ותהי (x_n) סדרה מתכנסת. אזי הגבול של (x_n) הוא יחיד.

- יהי X מרחב טופולוגי. אם לכל סדרה מתכנסת הגבול הוא יחיד אזי X מרחב T_2.

- במרחב האוסדורף כל קבוצה קומפקטית היא סגורה.

- תהיינה K_1, K_2 שתי קבוצות קומפקטיות במרחב האוסדורף X כך ש- $K_1 \cap K_2 = \emptyset$
אזי קיימות שתי קבוצות פתוחות וזרות U_1, U_2 כך ש- $K_1 \subseteq U_1$; $K_2 \subseteq U_2$.

- תהי $f: X \to Y$ העתקה חח"ע ועל כאשר X קומפקטי ו- Y האוסדורף. אזי f הומאומורפיזם.

- יהי X מרחב קומפקטי. אזי הוא קומפקטי נקודת גבול.

- יהי X מרחב קומפקטי סדרתית. אזי הוא קומפקטי נקודת גבול.

- קיים מרחב קומפקטי שאינו קומפקטי סדרתית - $\{0,1\}^{P(\mathbb{N})}$ בטופולוגיית המכפלה.

- תהי $f: X \to \mathbb{R}$ העתקה כאשר X מרחב קומפקטי. אזי יש ל- f מינימום ומקסימום.

- תהי $K \subseteq X$ קבוצה סגורה במרחב קומפקטי. אזי K קומפקטית.

- יהי X מרחב האוסדורף ותהי $K \subseteq X$ קבוצה קומפקטית אזי K סגורה.

- תהי $f: X \to Y$ העתקה כאשר X קומפקטי. אזי $f(X) \subseteq Y$ תת קבוצה קומפקטית.

- יהי X מרחב טופולוגי כלשהו. אזי X^+ מרחב קומפקטי.

- לכל מרחב האוסדורף X קיים מרחב טופולוגי האוסדורף X^+ כך ש- $i: X \to X^+$ שיכון רציף.

- יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית. אזי קיימת ל- X קומפקטיפיקציה חד נקודתית יחידה.

- יהי X מרחב האוסדורף. אזי X קומפקטי מקומית אמ"מ לכל $x \in X$ ולכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ כך ש- $x \in U$ קיימת סביבה פתוחה $V \subseteq U$ כך ש- $\bar{V} \subseteq U$ קומפקטית.

- יהיו X, Y, T מרחבים טופולוגיים. אזי $map(X\amalg Y,T)\cong map(X,T)\times map(Y,T)$ איזומורפיזם של קבוצות.

- יהי $W(X,Y)$ מרחב טופולוגי עם שתי העתקות $w_X: X\to W$ ו- $w_Y: Y\to W$ כך שלכל מרחב טופולוגי T ההעתקה $c: map(W,T)\to map(X,T)\times map(Y,T)$ המוגדרת ע"י $c(g)=(w_X\circ g, w_Y\circ g)$ איזומורפיזם של קבוצות אזי $W\cong X\amalg Y$.

- יהי $W(X,Y)$ מרחב טופולוגי עם שתי העתקות $\omega_X: W\to X$ ו- $\omega_Y: W\to Y$ כך שלכל מרחב טופולוגי T ההעתקה $c: map(T,W)\to map(T,X)\times map(T,Y)$ והמוגדרת ע"י $c(g)=(\omega_X\circ g, \omega_Y\circ g)$ איזומורפיזם של קבוצות אזי $W\cong X\times Y$.

- יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מרחבי האוסדורף אזי $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ מרחב האוסדורף.

- יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מרחבים טופולוגיים קומפקטיים אזי $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ מרחב קומפקטי.

- יהי X מרחב טופולוגי. אזי X קומפקטי אמ"מ לכל אוסף של קבוצות סגורות $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אם לכל תת אוסף סופי החיתוך אינו ריק אז $\bigcap_{\alpha\in I}C_\alpha\neq\emptyset$

- יהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף מרחבים טופולוגיים ותהינה $A_\alpha\subseteq X_\alpha$ קבוצות סגורות. אזי $\prod A_\alpha$ סגורה ב- $\prod X_\alpha$.

- יהי (X,τ) מרחב האוסדורף קומפקטי. אם $\tau\subsetneq\tau'$ אז (X,τ') אינו קומפקטי ואם $\tau''\subsetneq\tau$ אז (X,τ'') אינו האוסדורף.

- יהיו X,Y ו- A מרחבים טופולוגיים. תהי $f: X\to Y$ העתקת מנה ; $g: X\to A$ העתקה כך שלכל $x,y\in X$ אם $f(x)=f(y)$ אז $g(x)=g(y)$ אזי קיימת העתקה יחידה $\tilde{g}: Y\to A$ כך ש- $\tilde{g}\circ f=g$ וגם $\tilde{g}$ רציפה.

- יהי X מרחב נורמלי. אזי X רגולרי.

- יהי X מרחב רגולרי. אזי X האוסדורף.

- יהי X מרחב T_1. אזי X רגולרי אמ"מ לכל קבוצה סגורה $A \subseteq X$ ולכל $x \notin A$ הקבוצות A ו- $\{x\}$ ניתנות להפרדה.

- יהי X מרחב T_1. אזי X נורמלי אמ"מ כל שתי קבוצות סגורות זרות הן ניתנות להפרדה.

- יהי X מרחב T_1, האוסדורף או רגולרי. יהי $Y \subseteq X$ תת מרחב. אזי Y הינו T_1, האוסדורף או רגולרי בהתאמה.

- יהיו X,Y מרחבי T_1, האוסדורף או רגולריים. אזי $X \times Y$ הוא מרחב T_1, האוסדורף או רגולרי בהתאמה.

- מרחב מטרי הוא נורמלי.

- משפט המטריזביליות של אוריסון: יהי X מרחב רגולרי עם בסיס בן מניה. אזי X מטריזבילי.

- למרחב מטרי יש בסיס בן מניה אמ"מ יש לו סדרה צפופה.

- הלמה של אוריסון: יהי X מרחב נורמלי ותהיינה $A,B \subseteq X$ סגורות וזרות. אזי קיימת $f: X \to [0,1]$ רציפה כך ש- $f|_A \equiv 0$ ו- $f|_B \equiv 1$.

- משפט ההרחבה של טיצה: יהי X מרחב נורמלי ותהי $A \subseteq X$ קבוצה סגורה. אם $f: A \to [0,1]$ רציפה אזי קיימת $g: X \to [0,1]$ רציפה כך ש- $g|_A \equiv f$.

- משפט ז'ורדן: המשלים של כל מסילה סגורה במישור הוא בעל שני מרכיבי קשירות בדיוק.

- הומוטופיה של העתקות היא יחס שקילות.

- יהי $X = \mathbb{R}^n$ ויהיו $x_1, x_2 \in X$. אזי כל שתי מסילות שמחברות את x_1 עם x_2 הן הומוטופיות.

- תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה. אזי כל שתי מסילות ב-A הן הומוטופיות.

- תהיינה φ,φ' מסילות ב-X כך ש-$\varphi\sim\varphi'$. אזי לכל מסילה ψ כך ש-$\varphi(1)=\psi(0)$ מתקיים $\varphi*\psi\sim\varphi'*\psi$. יתר על כן, אם $\psi\sim\psi'$ אז $\varphi*\psi\sim\varphi'*\psi'$.

- יהי X מרחב טופולוגי ותהיינה $\varphi,\psi,\eta: I\to X$ מסילות כך ש-$\varphi(1)=\psi(0)$; $\psi(1)=\eta(0)$. אזי $([\varphi]*[\psi])*[\eta]=[\varphi]*([\psi]*[\eta])$.

- תהיינה φ,φ' מסילות ב-X. אם $\varphi\sim\varphi'$ אז $\varphi^{-1}\sim(\varphi')^{-1}$

- תהי φ מסילה במרחב טופולוגי X כך ש-$\varphi(0)=x_0$. אזי $e_{x_0}\sim\varphi*\varphi^{-1}$

- יהיו X מרחב טופולוגי ו-$x_0\in X$. אזי $\pi_1(X,x_0)$ חבורה ביחס לפעולת השרשור.

- יהי X מרחב טופולוגי ; $x_0,x_1\in X$ כך שקיימת מסילה ביניהן. אזי $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$ איזומורפיזם של חבורות.

- נסמן $S^1\subseteq\mathbb{C}$. אזי $\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z}$

- משפט ההרמה: לכל מסילה $\alpha: I\to S^1$ כך ש-$\alpha(0)=1$ קיימת פונקציה יחידה $\tilde{\alpha}: I\to\mathbb{R}$ כך ש-
  - $\tilde{\alpha}(0)=0$
  - לכל $s\in I$ $\exp(\tilde{\alpha}(s))=\alpha(s)$

- פונקציית $\exp$ הינה הומאומורפיזם בין $(0,1)$ ו- $S^1\setminus\{1\}$

- לכל $x\in\mathbb{R}$ קיימת סביבה $U_x=(x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2})$ פתוחה כך ש- $\exp|_{U_x}: U_x\to\exp(U_x)$ היא שקילות טופולוגית.

- לכל נקודה $s\in S^1$ קיימת סביבה פתוחה $U_s\subseteq S^1$ כך ש-
$\coprod_{n\in\mathbb{Z}}(U+n)=\exp^{-1}(U_s)\cong\coprod_{\mathbb{Z}}U_s$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}$ ו- $\exp|_U:U\to U_s$ הומיאומורפיזם.

- הדרגה של מסילה היא שמורה של הומוטופיה בין מסילות סגורות. כלומר אם $\varphi,\varphi':I\to S^1$ מסילות סגורות אזי $\deg\varphi=\deg\varphi'$

- משפט הרמת הריבוע: לכל פונקציה רציפה $F:I\times I\to S^1$ כך ש- $F(0,0)=1$
קיימת הרמה יחידה $\tilde{F}:I\times I\to\mathbb{R}$ כך ש-
  - $\tilde{F}(0,0)=0$
  - $\exp\circ\tilde{F}=F$

  וכן לכל $n\in\mathbb{Z}$ קיימת $\tilde{F}_n:I\times I\to\mathbb{R}$ יחידה כך ש- $\tilde{F}_n(0,0)=n$

- הפונקציה $\deg$ היא איזומורפיזם של חבורות $\deg:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$

- S^1 אינו מרחב כוויץ.

- S^1 אינו רטרקט של D^2

- פונקטוריאליות של π_0: יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. כל העתקה $f:X\to Y$
משרה הומומורפיזם של חבורות $\pi_0(f):\pi_0X\to\pi_0Y$ כך ש- $\pi_0(f\circ g)=\pi_0(f)\circ\pi_0(g)$

- פונקטוריאליות של π_1: יהיו X,Y מרחבים מטריים ו- $x\in X$ ו- $y\in Y$. כל העתקה $f:(X,x)\to(Y,y)$ משרה הומומורפיזם של חבורות
$\pi_1(f):\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,y)$ כך ש- $\pi_1(f\circ g)=\pi_1(f)\circ\pi_1(g)$

- יהי X מרחב טופולוגי כוויץ. אזי X פשוט קשר.

- כל קבוצה קמורה ולא ריקה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא כוויצה

- משפט בורסוק-אולם: תהי $f:S^1\to\mathbb{R}$. אזי יש נקודה $x\in S^1$ כך ש- $f(x)=f(-x)$

- תהי $f:S^2\to\mathbb{R}^2$. אזי יש נקודה $x\in S^1$ כך ש- $f(x)=f(-x)$