

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן במבוא לטופולוגיה (80516)

מועד ב' תשס"ז 3/9/07

המורה: פרופ' עמנואל פרג'ון

הזמן: שעתיים

משקל כל שאלה שווה 25 נקודות

א) יש לענות על אחת משתי השאלות הבאות:

1) תהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה בין מ"ט האוסדורף קומפקטיים. הראי כי אם הגרף של f - $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subseteq X \times Y$ סגור במרחב המכפלה אז f רציפה כאשר X ו- Y טופולוגיים.

2) הוכיח\י שאם לטופולוגיה על X יש בסיס בן מניה אז לכל $A \subseteq X$ ולכל כיסוי פתוח של A יש תת כיסוי בן מניה.

ב) יש לנסח ולהוכיח את אחד מהמשפטים הבאים:

3) נסח\י והוכיח\י את משפט טיכונוף.

4) נסח\י והוכיח\י את משפט המטריזציה של מרחבים נורמליים עם בסיס בן מניה.

ג) יש לענות על שתיים מבין השאלות הבאות:

5) הגדיר\י מהו סגור של קבוצה בתוך מרחב טופולוגי. יהי $A \rightarrow \bar{A}$ אופרטור הסגור על קבוצות כלשהן במ"ט. הראי א) לכל קבוצה $A \subseteq X$ מתקיים $\overline{\overline{A}} = \bar{A}$ ב) לכל פתוחה $A \subseteq X$ מתקיים: $\overline{\text{int}(A)} = \bar{A}$

6) יהי $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. הוכיח\י כי X פשוט קשר.

7) תהי (Y_i, d_i) סדרת מ"מ קומפקטיים. יהי $Y = \prod_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ מכפלת הקבוצות. מצא\י מטריקה על Y כך שהטופולוגיה המתקבלת הינה טופולוגית המכפלה. הוכיח\י את טענותיך.

8) הראי כי מרחב X הוא האוסדורף אם הקבוצה $\Delta = \{(x, x) | x \in X\} \subseteq X \times X$ סגורה כדת מרחב של המרחב $X \times X$.

בהצלחה!