(1) 26.02.07
טופולוגיה

מהדורת סמסטר ב'

מי שרוצה לגשת לבחינה צריך להגיש 10 תרגילים!
אם תהיה סטיה רצינית מציון הבחינה לציון התרגיל אז יתחשבו בו.
הסיכומים של המרצה יהיו באתר הקורס אשר ייפתח בימים הקרובים.
ספרים מומלצים: Hocking-Young/Topology , Munkres/Topology

מרחבים מטריים

מרחב מטרי הוא זוג (סדור) (X,d) כאשר X קבוצה
ו-d היא פונקציה $d: X\times X \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ רק ש-

$$(1) \quad d(x,y)=0 \iff x=y$$

$$(2) \quad d(x,y) = d(y,x)$$

$$(3) \quad d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$$

הפונקציה d נקראת מטריקה על X.

הדוגמה המרכזית של מרחב מטרי היא $X=\mathbb{R}^n$.
המטריקה הרגילה היא $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$.
תכונות (1) ו-(2) מתקיימות בברור. בשביל (3) צריך לעבוד קצת אבל אי-שוויון קושי שוורץ עושה את רוב העבודה.
המטריקה הנ"ל נקראת המטריקה האוקלידית. אבל אפשר לחשוב גם על מטריקות אחרות. למשל

$$d_{max}(x,y) = \max_{1\le i\le n}\{|x_i-y_i|\}$$

$$d_{11}(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

תרגיל לחימום: להוכיח ש-d_{max} ו-d_{11} הן אכן מטריקות על $\mathbb{R}^n$.

כשנגיד $\mathbb{R}^n$ כמרחב מטרי בלי לציין מטריקה במפורש הכוונה היא למטריקה האוקלידית.

תת מרחבים של מרחב מטרי (סימון):

אם X מרחב מטרי עם מטריקה $d=d_X$ אזי לכל $A\subseteq X$ קבוצה חלקית של X יש מטריקה מושרית מ-X.

$$d_A(a_1,a_2) \triangleq d_X(a_1,a_2)$$

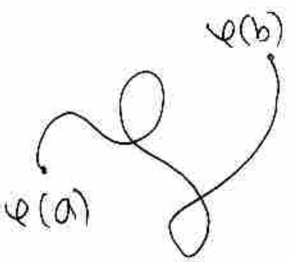
לדוגמא ב-$\mathbb{R}^2$ יש את התת מרחבים הממש חשובים הבאים:

$$S^1=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$$

ובאופן כללי ב-$\mathbb{R}^{n+1}$ יש תת מרחב $S^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1}): \sum x_i^2=1\}$

ב-$\mathbb{R}^n$ אפשר לצייר מסילה $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$.

אזי $Im(\varphi)\subseteq\mathbb{R}^n$ הינו תת מרחב מטרי.



הנה עוד דוגמא חשובה:

המטריקה הדיסקרטית - Y קבוצה כלשהי.

אפשר להגדיר עליה את המטריקה

$$d(y_1,y_2)=\begin{cases}1 & y_1\neq y_2\\ 0 & y_1=y_2\end{cases}$$

אלה מרחבים לא כל כך מעניינים אבל אם נצליח להראות שמטריקה כלשהי היא מעצם דיסקרטית. אז זה הופך את המרחב המדובר ללא מעניין.

אנטי-דוגמא: מה עם מרחב הסדרות האינסופיות?

$$X=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}=\mathbb{R}^{\infty}=\prod \mathbb{R}=\times\, \mathbb{R}$$

רוצה: ניתן להגדיר מטריקה "יפה" (לא דיסקרטית) על X?

על הקבוצה $\mathbb{R}^{\infty}\supseteq H=\{(a_1,a_2,\dots): \sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty\}$

אפשר להגדיר מטריקה $d_H(x,y)=\sqrt{\sum_{\infty}(x_i-y_i)^2}$

המרחב הזה נקרא מרחב הילברט.

②

<u>תזכורת</u>: פתרונות של משוואות פולינומיאליות

$(\deg P = 2)$ $\quad P(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + dy + f$

אנו מעוניינים בקבוצה

$$\mathbb{R}^2 \supseteq V_p = \{(x,y) : P(x,y) = 0\}$$

מוכרים לנו כמה סוגי פתרונות:

① אליפסה, מעגל

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

② פרבולה $\quad y - x^2 = 0$

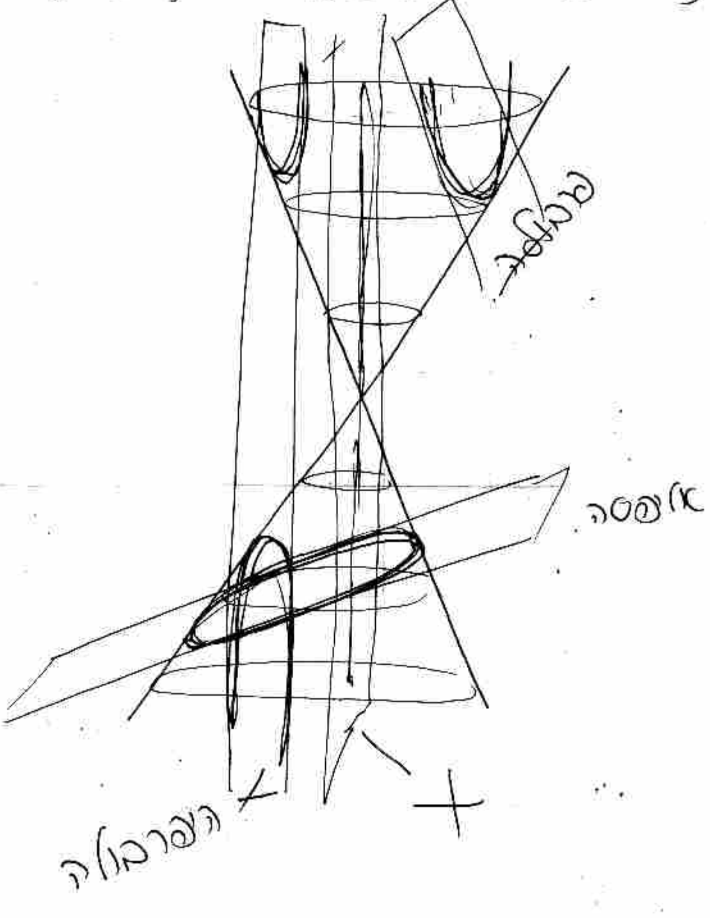
③ היפרבולה $\quad xy = 1$

④ $\quad xy = 0$

⑤ $\quad x^2 + y^2 = 0$

כל אלה הם חתכים של חרוט כפול אינסופי (ב-$\mathbb{R}^3$)

אם חותכים את החרוט בכל מיני צורות מתקבלות צורות שונות.



כל האליפסות הן שונות אבל יש דמיון מבחינה מסויימת.
כנ"ל לגבי כל ההיפרבולות וכו'. איך נגדיר בצורה פורמלית את הדימיון הזה?

פונקציה בין מרחבים מטריים $f: X\to Y$ היא רציפה אם לכל $x\in X$ לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta=\delta(x,\epsilon)$ כך שאם $d(x,y)<\delta$ אז $d(f(x),f(y))<\epsilon$.

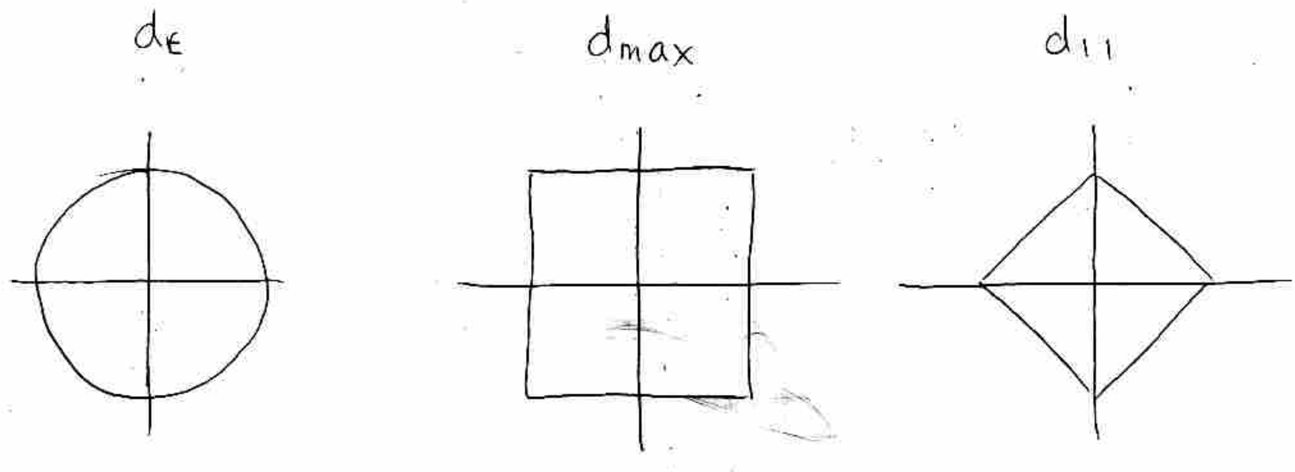
<u>תרגיל</u>: תהי $f:\mathbb{R}^n\to X$ פונק' למרחב מטרי X כלשהו. אם היא רציפה באחת המטריקות d_E, d_{11}, d_{max} אז היא רציפה בכולן.

<u>כיוון לפתרון התרגיל</u>: נתבונן בסביבות-δ של $0\in\mathbb{R}^n$ לפי המטריקות השונות.

~~תזכ'~~ במרחב מטרי אפשר להגדיר <u>כדור פתוח</u> - x נקודה במרחב, $r>0$ ממשי. הכדור הפתוח ברדיוס r סביב x הוא

$$B(x,r)=\{y\in X : d(x,y)<r\}$$

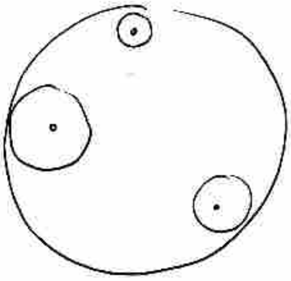
כדור היחידה הוא כדור ברדיוס 1.
תחת מטריקות שונות כדורי היחידה נראים אחרת.



מהציורים האלה אנחנו רואים שכל אחד מהכדורים אפשר להכניס בכל אחד מהאחרים (בתוספת כיווץ מתאים). ולכן מעניין התרגיל: אם יש δ שמתאים במטריקה מסויימת אפשר לכווץ אותה והיא תתאים גם לאחרות.

③

<u>הגדרה</u> (מרכזית ביותר) יהי (X,d) מרחב מטרי ויהי $U\subseteq X$.
נאמר ש-U פתוחה ב-X אם לכל $x\in U$ קיים $\varepsilon>0$ כך
ש-$B(x,\varepsilon)\subseteq U$. (״כמו התנלות״)



<u>משפט</u>: פונקציה בין מרחבים מטריים $f: X\to Y$
היא רציפה אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq Y$
גם $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

$\{x\in X : f(x)\in U\}$ זה ׳פונקצית המקורות.

<u>סימון חשוב</u>: (לא קשור למרחבים מטריים)
תהי $g: A\to B$ פונק' בין קבוצות כלשהן.
סמן $2^A = P(A) = \{S : S\subseteq A\}$ קבוצת החזקה
סמן $g^{-1} : P(B)\longrightarrow P(A)$
$$g^{-1}(S) = \{a\in A : g(a)\in S\}$$
נשים ♥ ש- $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset$
$$g^{-1}(B) = A$$

<u>הגדרה</u>: יהיו X,Y מרחבים מטריים. נאמר שהם שקולים
טופולוגית (= הומאומורפיים) אם קיימות שתי פונקציות רציפות
$f: X\to Y$, $g: Y\to X$ כך שמתקיים
$$f\circ g = Id_Y \qquad g\circ f = Id_X$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\text{זהות}"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "\text{זהות}"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

מסמנים $X\cong Y$

במילים אחרות, אם קיימת $f: X\to Y$ כך ש-:
1) f חח"ע
2) f על
3) f רציפה
4) הפונקציה ההפוכה $(inv(f))$ רציפה (זאת בעצם g מההגדרה)
אז המרחבים הומאומורפיים. f נקראת שקילות טופולוגית.

טענה: בהגדרה הנ"ל $g = inv(f)$.

$inv(f)$ מוגדרת רק במקרה ש- f עצמה היא חח"ע ועל כי אנחנו דורשים שלכל נקודה יהיה קיים מקור ושהוא יהיה יחיד.

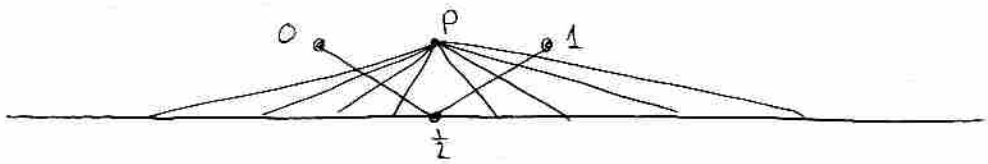
דוגמה: $(0,1) \cong (0,2)$.

$$f : (0,1) \to (0,2), \quad x \mapsto 2x$$

$$g : (0,2) \to (0,1), \quad x \mapsto \tfrac{1}{2}x$$

דוגמה: $(0,1) \cong (-\infty,\infty)$

נעשה בניה גאומטרית נחמדה:



כל נקודה של הישר מתחברים עם P והיא חותכת את ה-.

צריך לרשום את הנוסחאות בעצמו להשתכנע שזה רציף וכן הלאה.

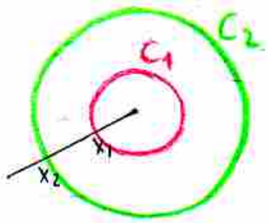
הגדרה (מרחבית) יהי (X,d) מרחב מטרי. הטופולוגיה $T(X)$ של X היא אוסף הקבוצות הפתוחות ב- X.

כמובן $T(X) \subseteq P(X)$. נשים ♥ ש- $\emptyset \in T(X)$ (התנאי מתקיים באופן ריק כי אין נקודות בפנים)

(4) 28.02.07
טופולוגיה

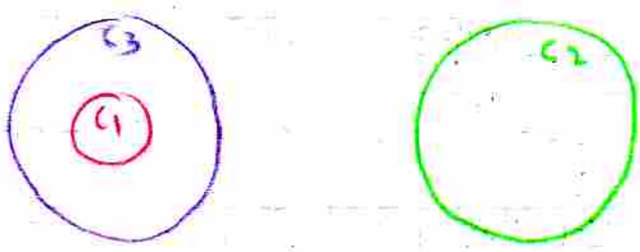
בשיעור הקודם דיברנו על שקילות טופולוגית.
ראינו ש- $(0,1) \cong (-\infty,\infty) \cong (a,b)$ לכל $a<b$. כלומר כל הקטעים
הפתוחים בתוך מרחבים מטריים ללא תלות באורך שלהם (גם אינסופי)
הם שקולים טופולוגית (לא מטרית כמובן).

בעלי מרכז משותף
עוד דוגמא זה מעגלים עם (רדיוס גדול מאפס). הם כולם תת מרחבים של
$\mathbb{R}^2$ והם כולם שקולים. (טענו ש- $C_1 \cong C_2$.



דרך לראות שתי פונקציות רציפות שהרכבתן נותנת
את הזהות. כל קרן שיוצאת מהמרכז חותכת את C_1
בדיוק בנקודה אחת x_1 וחותכת את C_2 בדיוק בנקודה אחת
C_2. ואם להפך אם יוצאים מנקודה x_2 על C_2 ומחברים אותה למרכז
מקבלים נקודה יחידה שבה הקרן חותכת את C_1. אז דרך לראות
שהפונקציות האלה מוגדרות היטב, הפכיות (אבל זה ברור) ורציפות.
גם אם המעגלים אינם בעלי מרכז משותף הם שקולים טופולוגית.

מה נעשה? נראה ש- C_2 שקול למעגל C_3 שמרכזו זהה למרכז של C_1
ורדיוסו זהה לרדיוס של C_2 ואז עשינו רדוקציה למקרה הקודם.



<u>מסקנה:</u> אם C_1 ו- C_2 שני מעגלים במישור עם רדיוס גדול מאפס אזי $C_1 \cong C_2$

<u>אנטי-דוגמה:</u> $(0,1) \cong [0,1]$ מכיוון ש- $[0,1]$ קומפקטי כמרחב
ואילו $(0,1)$ איננו. קומפקטיות היא שמורה טופולוגית.

דוגמא: $I=[0,1] \ncong S^1$ הראשון קטע היחידה שקול למעגל?

לא! כמו שלמדנו באינפי 3, אם הם היו שקולים אזי אחרי שנוריד נקודה (^עם נקודה) עדיין יהיו שקולים. אבל אם מ-I נקבל מרחב שאינו קשיר מסילתית ואילו מ-S^1 נקבל מרחב שכן קשיר מסילתית.

קשירות מסילתית היא שמורה טופולוגית.

($X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$ ש"ס $\Leftarrow$ $Y-\{f(x)\} \rightleftarrows X-\{x\}$ ש"ס)

האמת היא ש-S^1 פחות נקודה שקול לקטע פתוח שהוא תמיד קשיר מסילתית.

טענה: אם $X \cong Y$ אזי X קשיר מסילתית אמ"מ Y קשיר מסילתית.

זה די ברור כי אם יש פונקציה מקטע היחידה* ל-Y שהיא רציפה אז פשוט נותן ע"י הרכבה לקשר נקודות ב-X ובאותו אופן בכיוון ההפוך.

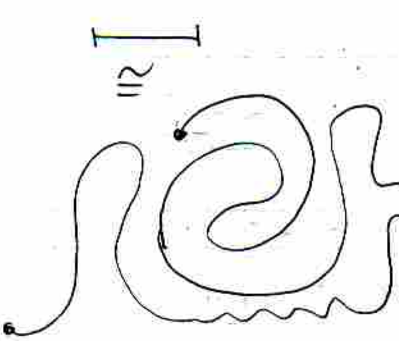
סיכום: $\boxed{\text{קשירות מסילתית וקומפקטיות הן שמורות טופולוגיות}}$ (כלומר נשמרות תחת שקילות טופולוגית.

משפט: (מבחן האוטומטי לשקילות טופולוגית)

תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל בין שני מרחבים מטריים קומפקטיים, אזי f היא שקילות טופולוגית.

דוגמא: תהי $\varphi: I\to \mathbb{R}^n$ חח"ע ורציפה. אזי $I \cong Im\,\varphi$

(זה יכול להיות גם מאוד מאוד מסובך אבל עדיין נכון).



מדוע? כי φ כמובן על התמונה שלה, והנתון שהיא רציפה וחח"ע. I קומפקטי $\Leftarrow$ $f(I)$ קומפקטית. $\Leftarrow$ מתקיימים כל התנאים של המשפט

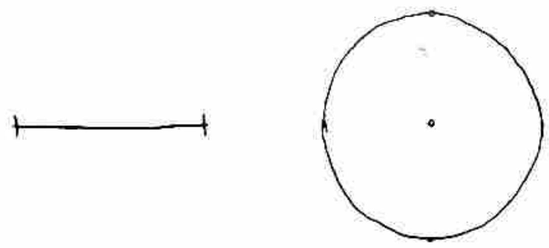
$\Leftarrow$ גם ההופכית שלה היא רציפה.

באותו אופן אם $\varphi: S^1\to\mathbb{R}^n$ חח"ע ורציפה אזי $\varphi(S^1)\cong S^1$.

(5)

<u>דוגמה חשובה</u> נסתכל על הפונקציה $exp: I \to S^1$

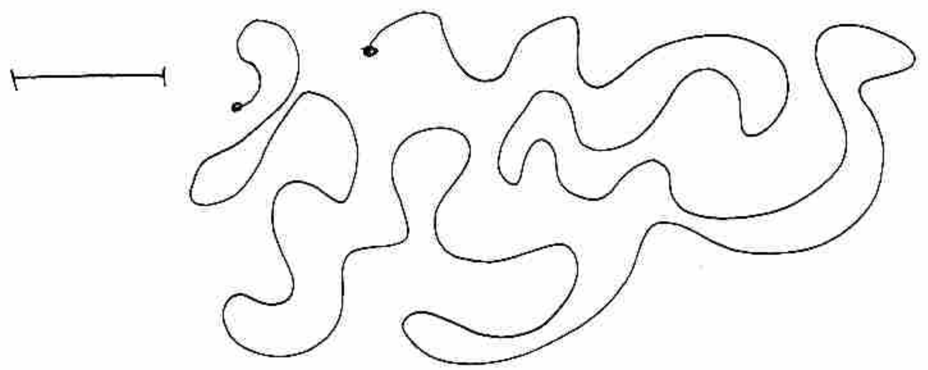
$exp(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



אם נחשוב על S^1 כתת מרחב של $\mathbb{C}$ אז בעצם $exp(t) = e^{2\pi i t}$

אם נצמצם את exp ל-$[0,1)$ היא גם תהיה חח"ע. אז ב-$[0,1)$, exp היא חח"ע, על ורציפה אבל היא לא שקילות טופולוגית. וזה ככה בגלל ש-$[0,1)$ אינו קומפקטי.

<u>שאלה:</u> נסתכל על $\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ רציפה וחח"ע



האם $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(I) \cong \mathbb{R} \setminus I$? זאת שאלה קשה. הוא לא נותן לנו את התשובה.

$\boxed{\text{קשר}}$ זאת התמונה של פונקציה חח"ע ורציפה מ-S^1. למשל

$\psi: S^1 \to$ 

לפי המשפט (שעוד לא הוכחנו) $S^1 \cong \psi(S^1)$

המשלימים שלהם אינם שקולים - ~~המשלימים~~ אלא שלהוכיח את זה זה קשה: המשלימים אינם קומפקטיים, קשירים מסילתית, פשוטי קשר. אף אחד מהקריטריונים שאנחנו מכירים לא מאפשר לנו לתת תשובה.

האינטואיציה אומרת שהם לא שקולים.

⑥ 7/3/07
טופולוגיה

משפט: אם $f: X\to Y$ פונקציה חח"ע ועל בין שני מ"מ קומפקטיים אזי f הומאומורפיזם.

הוכחה: עלינו לבנות פונקציה רציפה $g: Y\to X$ כך שמתקיימים התנאים הדרושים. ברור שהמועמדת היחידה היא $g=\mathrm{inv} f$. היא כמובן מוגדרת היטב וחח"ע ועל. עלינו רק לבדוק ש-$\mathrm{inv} f$ רציפה, כלומר יש להוכיח שלכל קבוצה פתוחה $U\subseteq X$ מתקיים ש-$(\mathrm{inv} f)^{-1}(U)$ פתוחה ב-Y. אבל $(\mathrm{inv} f)^{-1} = f$, כלומר $f(U) = (\mathrm{inv} f)^{-1}(U)$ כיוון ש-f איזומורפיזם של קבוצות (לפונק' חח"ע ועל f תמיד $\mathrm{inv}\,\mathrm{inv} f = f$).

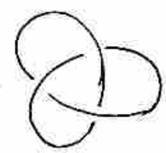
1) מספיק להראות ש-$f(C)$ סגורה לכל C סגורה, שהרי $f(U)$ פתוחה אמ"מ $Y\setminus f(U)$ סגורה. אבל $f(X\setminus U) = Y\setminus f(U)$.

2) מספיק להוכיח ש-$f(K)$ קומפקטית לכל K קומפקטית כי אם C סגורה בתוך מרחב קומפקטי אז היא קומפקטית.

3) אבל כל פונקציה רציפה מעבירה קומפקטית לקומפקטית (אינפי 3) כיוון ש-$f(K)$ קומפקטית אזי היא סגורה (היא סגורה כי המשלים פתוח והמשלים פתוח כי הוא איחוד של כדורים פתוחים והוא איחוד של כדורים פתוחים כי בין נקודה לקבוצה קומפקטית הוא חיובי)

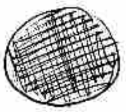
נחזור אל הדוגמאות

קשרים:  $= S^1 \cong K \subseteq \mathbb{R}^3$

$S^1 \cong K_1 =$ 

רצוי להבדיל בין $K\subseteq\mathbb{R}^3$ לבין $S^1\subseteq\mathbb{R}^3$ נשאלת שאלה יותר קשה:

האם יש שקילות טופולוגית $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש- $\varphi(K)=S^1$
מבחינה פיסיקלית φ היא פשוט שינוי קואורדינטות של $\mathbb{R}^3$?
התשובה היא לא. אולי בסוף הקורס נוכל להוכיח את זה.
איזה תפקיד משחק פה $\mathbb{R}^3$? בכל המימדים האחרים דווקא כן אפשר לעשות את זה.
עוד שאלה שאפשר לשאול זה האם המשלימים שלהם ב- $\mathbb{R}^3$ שקולים, והתשובה היא לא.



משפט נקודת השבת עבור D^2 $(D^2=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \|x\|\le 1\})$

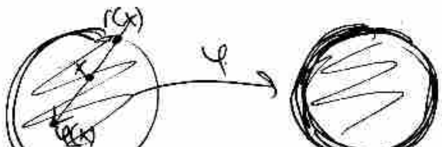
משפט: (בראואר) תהי $f:D^2\to D^2$ פונקציה רציפה. קיימת נקודה $x\in D^2$ כך ש- $f(x)=x$.

הערה: קיימת פונקציה רציפה $B_0(0,1)\to B_0(0,1)$ כך ש- $f(x)\neq x$ לכל x. הרי $\mathbb{R}^2\cong B_0(0,1)$ ועל $\mathbb{R}^2$ בוודאי יש פונקציה כזאת, $(x,y)\mapsto(x+1,y)$ אין פה נק' שבת. לכן יש פונק' רציפה גם על $B_0(0,1)$.

הערה: המשפט הזה נכון לכל מימד. עבור $n=0$ זה בוודאי נכון כי כל המרחב הוא נקודה אחת. עבור $n=1$ זה נובע ממשפט ערך הביניים.

הערה: המשפט למעבר התלת מימדי - אם נערבב כוס קפה סופית - אז חייב להיות אטום שחוזר למקום שיצא ממנו.

הוכחה: נוכיח בדרך השלילה. נניח שקיימת פונק' רציפה $\varphi:D^2\to D^2$ כך ש- $\varphi(x)\neq x$ לכל x. אנחנו רוצים לקבל סתירה. נגדיר מתוך φ פונקציה $r:D^2\to\partial D^2$ כך ש- $r(s)=s$ לכל s בשפה. נסתכל על הווקטור $(x,\varphi(x))$. נמשיך אותו עד נקודת החיתוך עם השפה וזאת תהיה $r(x)$. קל לראות ש- r רציפה. ועכשיו קיבלנו סתירה:



$$\underbrace{S^1=\partial D^2 \xhookrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1=\partial D^2}_{\text{זהות}}$$

אבל לדעתנו ש- $r\circ i$ = זהות - איננה הומוטופית לפונקציה קבועה. אבל כל פונקציה רציפה $D^2\to S^1$ הינה הומוטופית לקבועה.

(7) 12.03.07
טופולוגיה

הודעה: השיעור ביום רביעי עבר לאולם כימיה 7

מרחבים טופולוגיים

<u>מוטיבציה</u>: בהינתן שני מרחבים מטריים (למשל $X = Y = \mathbb{R}$)
נסתכל על אוסף כל הפונקציות הרציפות $\{f: X \to Y : f \text{ רציפה}\}$.
כשמדובר במרחב מטרי כללי אנחנו לא יודעים איזה מבנה
נוסף אפשר להלביש על הקבוצה הזאת. אנחנו לא יודעים אם
אפשר לחבר פונקציות, לגזור, לאסכם.
לא ברור גם אם קיימת מטריקה "יפה" של קבוצת הפונקציות
הרציפות. אם X קומפקטי אז אפשר לקחת את מטריקת
המקסימום (או הסופרמום) אבל זה לא ברור במקרה הכללי.
מצד שני, גם אם אין מטריקה של הפונקציות ברור לנו מה זה גבול.
$f_n \to f$ אם לכל x $f_n(x) \to f(x)$.

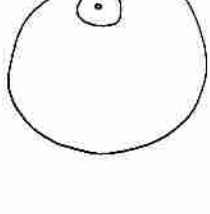
<u>הגדרה</u>: תהי X קבוצה כלשהי. <u>טופולוגיה על X</u> היא אוסף
T של תתי קבוצות $U \subseteq X$ רק שמתקיים:
1- T סגורה תחת איחוד כלשהו (גם לא בן מנייה)
2- T סגורה תחת חיתוך סופי
3- $\emptyset, X \in T$

<u>מרחב טופולוגי</u> הוא זוג (X,T) כאשר X קבוצה ו-T טופולוגיה עליה

נשים לב ש-3 נובע מ-1 ו-2 משום ש- $\bigcup_{\emptyset} = \emptyset$
(איחוד ריק) ו- $X = \bigcap_{\emptyset}$ (זה עניין של הגדרה)

איבר בטופולוגיה T <u>נקרא קבוצה פתוחה</u>

<u>דוגמאות</u>:
(1) כל מרחב מטרי מתאימה <u>טופולוגיה טבעית</u>
$T = \{A \subseteq X : A \text{ פתוחה ב-} X\}$ (לפי ההגדרה של המטריקות)
קבוצת כל הקבוצות הפתוחות ב-X.
ברור שזוהי באמת טופולוגיה.



לכן כל מרחב מטרי הוא באופן טבעי מרחב טופולוגי אבל זה לא אומר שאי אפשר להתחכם ולהלביש עליו טופולוגיות אחרות.

(2) <u>הטופולוגיה הדיסקרטית</u> של X: $(X, 2^X)$

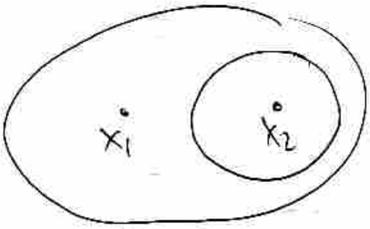
2^X - אוסף <u>כל</u> התת קבוצות של X.

ברור שזוהי טופולוגיה של כל קבוצה X.

במרחב הזה כל יחידון $\{x\}$ הוא קבוצה פתוחה (אז כל יחידון עומד בפני עצמו ואין לו שכנים באיזשהו מובן, אבל מתקיים כי ממש לא האינטואיציה מאחורי טופולוגיות).

(3) <u>הטופולוגיה הטריוויאלית</u> - $(X, \{\emptyset, X\})$ זו טופולוגיה מינימלית שמכילה רק 2 איברים. ברור שזו אכן טופולוגיה.

אם ב-X יש יותר מנקודה אחת אז לא טופולוגיה שמושרית מאיזו מטריקה. יש תכונה יסודית של מ"מ עם יותר מנקודה אחת שאיננה מתקיימת בטופולוגיה הטריוויאלית. אם יש שתי נקודות שונות x_1, x_2 אז יש קבוצה פתוחה שמכילה את x_2 ולא את x_1 - $B_0(x_2, d(x_1,x_2)/2)$ וזה לא מתאים לטופולוגיה הטריוויאלית. אומרים שהטופולוגיה אינה מפרידה בין הנקודות.



(4) תהי X קבוצה כלשהי ונגדיר

$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : X\setminus U \text{ קבוצה סופית}\} \cup \{\emptyset\}$ - <u>טופולוגיית המשלימים הסופיים</u>. אם היא אינה מושרית ממטריקה.

<u>הגדרה:</u> יהי X מרחב טופולוגי כלשהו ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה של X. נגדיר טופולוגיה של A כדלקמן:

$$T_A = \{U \cap A : U \in T_X\}$$

יש להוכיח שזו אכן טופולוגיה של A אבל זה לא מסובך.

בסיס ותת בסיס (של טופולוגיה)

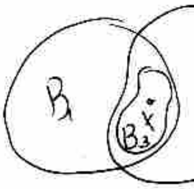
תהי X קבוצה כלשהי. $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ נקראת <u>בסיס</u> אם מתקיימות שתי תכונות:

① $X = \bigcup \mathcal{B}$, $X = \bigcup_{B_\alpha \in \mathcal{B}} B_\alpha$

כלומר לכל $x \in X$ קיים α כך ש- $x \in B_\alpha \in \mathcal{B}$

② אם $x \in B_1 \cap B_2$ אז קיימת $\mathcal{B} \ni B_3$

כך ש- $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$



<u>דוגמה:</u> אם (X,d) מרחב מטרי אזי לא קשה להראות שאוסף הכדורים $\{B(x,r) : r>0,\ x \in X\}$ הוא בסיס עבור X.

<u>טענה:</u> לכל מרחב X עם בסיס $\mathcal{B}$ ניתן להגדיר מרחב טופולוגי (X,τ) כדלקמן:

$\tau = \{ \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha : B_\alpha \in \mathcal{B},$ קבוצת אינדקסים $I \}$

לא קשה להראות שזו באמת טופולוגיה על X:

למשל, אם $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ נוכיח ש- $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. אם $x \in B_1 \cap B_2$ אז יש $x \in B_x \subseteq B_1 \cap B_2$ ולכן (נרשום) $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B_x$. עבור חיתוך סופי כלשהו ניתן להוכיח באינדוקציה. השאר ניתן כתרגיל.

<u>הגדרה:</u> <u>תת בסיס</u> של קבוצה X הוא אוסף כלשהו $\{X_\alpha\}$ כך ש- $X = \bigcup X_\alpha$ ומתוך תת הבסיס ניתן לקבל בסיס ע"י סגירה לגבי חיתוכים סופיים.

הכללת מושגים מטריים
למרחבים טופולוגיים כלליים

<u>הגדרה:</u> יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. קבוצה $V \subseteq X$ נקראת <u>סגורה</u> אם $X \setminus V$ פתוחה (כלומר $X \setminus V \in \tau$)

* קבוצה יכולה להיות גם פתוחה וגם סגורה.

תכונות יסוד של אוסף הסגורות:

1. $X, \emptyset$ סגורות
2. איחוד סופי של סגורות – סגור
3. איתוך כלשהו של סגורות – סגור

ברור שאוסף כל הסגורות והפתוחות מגדירים זה את זה, כלומר ניתן להגדיר טופולוגיה בעזרת אוסף כל הסגורות

$$\tau = \{ X\setminus U \ : \ U \text{ סגורה} \}$$

הגדרה: תהי $V \subseteq X$. נגדיר סגור $\bar{V}$ ופנים $\mathring{V}$:

1. $\bar{V}$ הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את V.

$$\bar{V} = \bigcap \{ K : K \supseteq V, \ K \text{ סגורה} \} \quad (\text{סגורה})$$

2. $\mathring{V}$ הוא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב-V. (יכול להיות גם הקבוצה הריקה)

$$\mathring{V} = \bigcup \{ O : V \supseteq O, \ O \text{ פתוחה} \} \quad (\text{פתוחה})$$

הגדרנו
$$\bar{\ } : 2^X \to 2^X,\ V \mapsto \bar{V} \qquad \circ : 2^X \to 2^X,\ V \mapsto \mathring{V}$$

מתבקשת השאלה כיצד מתנהגים האופרטורים האלה לגבי חיתוכים, איחודים, משלימים (סופיים ואינסופיים).

משפט: $\overline{A\cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

דוגמה נגדית: לא מתקיים עבור איחודים אינסופיים (רציונליים, ממשיים)

למה: (אפיון נקודות ב-$\bar{V}$). $y \in \bar{V}$ אמ"מ כל קבוצה פתוחה U המכילה את y מקיימת $U \cap V \neq \emptyset$.

הוכחה: נראה שאם y מקיים את התכונה הנ"ל אזי $y \in \bar{V}$. כלומר יש להוכיח שלכל K סגורה כך ש-$K \supseteq V$, $y \in K$. נניח בשלילה ש-$y \notin K$ כל שהו. אזי $y \in X\setminus K$. אבל $X\setminus K$ פתוחה, y נמצאת בה אבל $V \cap X\setminus K = \emptyset$ שהרי $K \supseteq V$ בסתירה להנחה.

את הצד השני של הלמה קל. ☺

<u>הוכחת המשפט:</u> $\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cup B}$

$\overline{A\cup B}$ היא סגורה שמכילה את A. $\Leftarrow$ $\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}$.

באותו אופן $\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$. $\Leftarrow$ $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$

מצד שני, תהי $x\in\overline{A\cup B}$. אם $x\notin\overline{A}$

אז קיימת פתוחה U_A המכילה את x ו- $U_A\cap A=\varnothing$.

אם $x\notin\overline{B}$ אז קיימת פתוחה U_B כך ש $x\in U_B$

ו- $U_B\cap \ =\varnothing$

(10) 14.3.07

טופולוגיה

<u>הגדרה</u>: מרחב טופולוגי הוא זוג (X,τ) כאשר X קבוצה לא ריקה ו- $\tau \subseteq P(X)$ כך שמתקיים:

- $X, \emptyset \in \tau$
- τ סגורה לאיחוד כלשהו
- τ סגורה לחיתוך סופי

<u>הגדרות</u>:

לכל $V \subseteq X$ - הגדרנו את $\bar{V}$ = הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את V

- הגדרנו את $\mathring{V}$ = הקבוצה הפתוחה המינימלית שמוכלת ב- V.

ראינו ש- $\bar{V}$ היא קבוצת כל הנקודות ב- V שכל סביבה פתוחה שלהן מכילה נקודות מ- V.

מה קורה עם מושג הגבול? השתמשנו במרחבים מטריים אמרנו ש $x_n \to x$ אם לכל ε קיים N כך שלכל $n > N$
$x_n \in B(a,\varepsilon)$

ניתן להציע ולהחליף את זה במרחבים טופולוגיים כללים בהגדרה לכל קבוצה פתוחה $O \in \tau$ קיים N כך שלכל $N<n$ $x_n \in O$.
אבל ההגדרה הנ"ל מאבדת את יחידות הגבול. למשל במרחב טריוויאלי! רק X ועוד הקבוצה הריקה ואז כל הנקודות הן גבול של סדרה.

<u>הגדרה</u>: תהי $A \subseteq X$ קבוצה במרחב טופולוגי X. אומרים ש- a היא <u>נקודת גבול</u> של A, או נקודת הצטברות (accumulation point) אם לכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a מתקיים $O \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

אז אם בקבוצה יש רק נקודה אחת אז היא לא נקודת הצטברות.
זה קצת שונה מהמרחבים המטריים ששם אמרנו שכל נקודה היא גבול של הסדרה הקבועה.

דוגמה: O היא נקודת הצטברות של סדרה $\frac{1}{n}$.

הגדרה: תהי $x \in X$ נקודה במרחב טופולוגי. קבוצה $V \subseteq X$ נקראת סביבה של x אם $x \in \mathring{V}$
(זה מחליף את האמירה קבוצה פתוחה שמכילה את x).

נשים לב שסגור ונקודת הצטברות הם מושגים שונים. הסגור של נקודה יחידה הוא אותה נקודה אבל לנקודה כזו אין נקודת הצטברות.
לגבי דוגמה, במרחב בדיד אין בכלל נקודות הצטברות אבל כל קבוצה היא סגורה ולכן הסגור של עצמה.
אז ממש לא נכון להגיד - "סגור של קבוצה הוא איחוד נקודות ההצטברות שלה".
מה שכן נכון הוא שסגור מכיל את נקודות ההצטברות.

"גישה קטגורית" - ברגע שמגדירים אובייקטים חדשים מיד צריכים להגדיר פונקציות ביניהם.
אנחנו ננקוט גישה כזו אז עלינו להגדיר פונקציות בין מרחבים טופולוגיים ששומרות על המבנה. אלה פונקציות רציפות ונקרא להן העתקות.

הגדרה: יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. פונקציה של קבוצות $f: X \to Y$ תיקרא רציפה (= העתקה) אם לכל $O \in \tau_Y$ $f^{-1}(O) \in \tau_X$. (המקור של פתוחה הוא פתוחה).

הגדרה: שני מרחבים טופולוגיים X, Y ייקראו שקולים טופולוגית (הומאומורפיים) אם קיימות שתי העתקות (כלומר שיהיו רציפות) $g: Y \to X$, $f: X \to Y$ כך ש-

1) $f \circ g = Id_Y$
2) $g \circ f = Id_X$

בפרט זה אומר שהן חח"ע ועל, כלומר $f^{-1} = g$

(11)

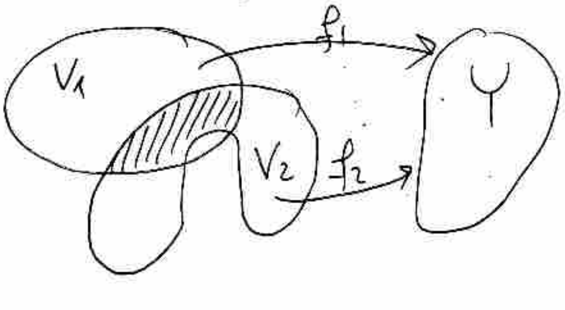
בעצם f, g משרות איזומורפיזם בין τ_Y ל-τ_X.
כלומר τ_Y ו-τ_X. אלה העתקות הפיכות
ששומרות על הטופולוגיות.

<u>משפט</u>: (קל): פונקציה $f: X\to Y$ רציפה אמ"מ לכל
סגורה $V\subseteq Y$ גם $f^{-1}(V)$ סגורה ב-X.
<u>הוכחה</u>: f^{-1} שומרת על משלימים ולכן אם f^{-1}
מעבירה סגורות לסגורות אז הוא מעביר משלימות של
סגורות למשלימות של סגורות, כלומר פתוחות לפתוחות. (11)

הכלים המרכזיים לבניית ובדיקת רציפות של פונקציות:

<u>משפט</u>: תהי $f: X\to Y$ פונקציה. אזי f רציפה אם
מתקיים אחד התנאים הבאים:
(1) קיים כיסוי פתוח של X $X=\bigcup O_\alpha$ O_α פתוחות
רק ש- $f|_{O_\alpha}$ רציפה. (זה מאוד נוח כי באיזשהו
מובן זה אומר שהבדיקה היא מקומית- מחלקים את המרחב
לסביבות קטנות ובודקים עליהן). הכיסוי יכול להיות אינסופי
כמובן - וגם לא בן מניה.
(2) אם $X=V_1\cup V_2$ כאשר V_1, V_2 סגורות ! - $f|_{V_i}$
רציפות.
(3) באינדוקציה לכל $n\in\mathbb{N}$ סופי אם $X=V_1\cup\ldots\cup V_n$
כאשר V_i סגורות ! - $f|_{V_i}$ רציפות.

<u>הערה</u>: (בוחן ז-ע). נניח שנתונות 2 העתקות
$f_i: V_i\to Y$ רק ש- $f_1|_{V_1\cap V_2} = f_2|_{V_1\cap V_2}$
אזי הן מגדירות העתקה
יחידה $f: V_1\cup V_2\to Y$
רק ש $f|_{V_i}=f_i$.
(* V_i סגורות)



הוכחה:

נוכיח את (2) למשל, אבל הם כולם קלים.
מספיק להראות שלכל סגורה $V \subseteq Y$ מתקיים $f^{-1}(V)$
סגורה ב-X. אבל $V = V_1 \cup V_2$ אם

$$f^{-1}(V) = (f|_{V_1})^{-1}(V) \cup (f|_{V_2})^{-1}(V)$$

אבל $f|_{V_i}$ רציפות. $\Leftarrow$ $(f|_{V_2})^{-1}(V)$, $(f|_{V_1})^{-1}(V)$ סגורות
ב-V_1, V_2 בהתאמה. אבל V_i סגורות ב-X
$\Leftarrow$ $(f|_{V_i})^{-1}(V)$ סגורות ב-X. $\Leftarrow$ האיחוד הסופי
$f^{-1}(V)$ סגור.

תרגיל: נחשוב על $\mathbb{R}$ כעל מרחב טופולוגי. תהיינה
$f,g : X \to \mathbb{R}$ העתקות (כלומר פונקציות ממשיות רציפות
המוגדרות על X). אזי $f+g$, $f \cdot g$ רציפות
כאשר $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.
כלומר אוסף כל הפונקציות הממשיות הרציפות $C^0(X,\mathbb{R})$ הוא חוג.

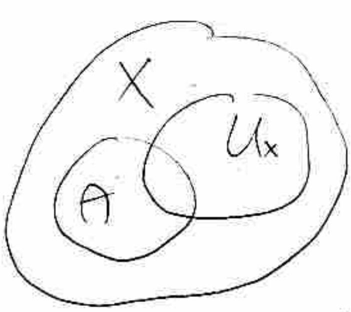
(12) 19.3.07
טופולוגיה

הערות על פונקציות רציפות:

① הרכבה של שתי פונקציות רציפות היא תמיד רציפה.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

אם $U \subseteq Z$ פתוחה אז $(g\circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$
$g^{-1}(U)$ פתוחה ולכן $f^{-1}(g^{-1}(U))$ פתוחה. ולכן
מקור של פתוחה ב- Z היא פתוחה ב- X $\Leftarrow$ $g\circ f$ רציפה.
בפרט אם X מ"ט ונסתכל על תת מרחב $A \subseteq X$. אז U_A
פתוחה ב- A אמ"מ $U_A = A \cap U_X$ כאשר $U_X \in \tau_X$.
כלומר אנו בוחרים טופולוגיה מינימלית על A רק שההכלה הנתונה
$A \hookrightarrow X$ תהיה רציפה. ההכלה $A \hookrightarrow X$
רציפה אמ"מ לכל U_X פתוחה ב- X
תמונתה ההפוכה $(i)^{-1}(U_X) = A \cap U_X$ פתוחה
ב- A.

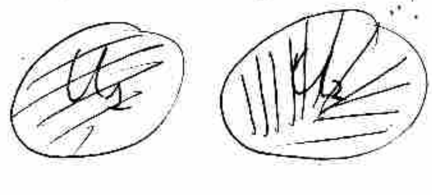


בהינתן קבוצה Y ותת קבוצה $B \subseteq Y$ זה
מגדיר פונקציה של קבוצות $i : B \to Y$
$b \mapsto b$

קשירות וקשירות מסילתית

הגדרה: מ"ט X יקרא קשיר אם איננו ניתן להצגה $X = U_1 \cup U_2$
כך ש- ① U_1, U_2 פתוחות
② U_1, U_2 זרות
③ U_1, U_2 אינן ריקות

מרחב שאיננו קשיר ניתן לפירוק כזה ולכן התמונה המנטלית שלנו
לגביו היא

$X =$ 

דוגמה: הקבוצה הריקה $\emptyset$ הינה קשירה כי ברגע שרושמים
$\emptyset = A\cup B$ בהכרח $A=B=\emptyset$.

דוגמה: מרחב עם נקודה אחת הוא קשיר.

דוגמה: $\{0,1\}$ עם טופולוגיה בדידה לא קשיר

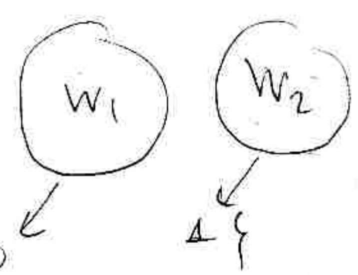
דוגמה: $I=[0,1]$ קשיר, $\mathbb{R}^n$ קשיר.

דוגמה: $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ מרחב לא קשיר כי $\mathbb{Q} = (-\infty,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$.
זה מזמין אותנו לשאול האם $\mathbb{Q}$ הומאומורפי למרחב $(-\infty,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$ שבו בין $(\sqrt{2},\infty)$ ל- $(-\infty,\sqrt{2})$ ונשמר מרחק ממש גדול מ-0 ביניהם. הם באמת שקולים, אנחנו פשוט מרחיקים אותם אחד מהשני. העובדה ש-$\sqrt{2}$ אי רציונלי אומרת ששני הצדדים ממש רחוקים זה מזה ולהבדל לא משנה איפה הם יושבים. קשירות זה תכונה פנימית (בניגוד לפתיחות/סגירות למשל)

משפט: מרחב X הוא אינו קשיר אמ"מ קיימת העתקה על $\{0,1\}$
$$X \to \{0,1\} = \text{מרחב בדיד}$$

הוכחה: נניח שקיימת העתקה e כנ"ל. אז
$$X = e^{-1}(0)\cup e^{-1}(1)$$
הוא פירוק כנדרש.

מצד שני נניח שהמרחב X אינו קשיר. אז ניתן לפרק $X=W_1\cup W_2$ כאשר W_i פתוחות, זרות ואינן ריקות. נגדיר



$$w: X\to\{0,1\}$$
$$W_1\mapsto 0$$
$$W_2\mapsto 1$$

נטען שזו פונקציה רציפה. אבל זה ברור כי $w^{-1}(0)$, $w^{-1}(1)$ פתוחות.

משפטי קשירות:

1. תמונה של מ"ט קשיר הוא קשירה, כלומר אם X קשיר ו- $f: X \to Y$ העתקה על $f(X)$ קשירה.
2. הסגור של תת-קבוצה קשירה (כלומר היא קשירה בתור תת-מרחב) הוא קשיר.
3. תהיינה $A_\alpha \subseteq X$ משפחה של תתי מרחב קשירים, של מ"ט X. נניח שלכל α, β $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ אזי $\bigcup A_\alpha \subseteq X$ קשיר.

הוכחה:

1. אם $X \twoheadrightarrow Y$ העתקה על ו- X קשיר ו- Y לא, אז יש העתקה $Y \twoheadrightarrow \{0,1\}$. ואז ההרכבה $X \twoheadrightarrow Y \twoheadrightarrow \{0,1\}$ היא העתקה על מסתירה לכך ש- X קשיר.
2. $A \subseteq X$ קשיר. נניח ש- $\bar{A}$ אינו קשיר, אז יש העתקה $\bar{A} \twoheadrightarrow \{0,1\}$. נראה שההרכבה $A \overset{i}{\hookrightarrow} \bar{A} \xrightarrow{f} \{0,1\}$ היא על. נראה למשל ש-0 מתקבל. נניח שיש $\bar{a} \in \bar{A}$ כך ש $\bar{a} \mapsto 0$ אז נניח $\bar{a} \in U_0 = f^{-1}(\{0\})$. $\bar{a} \in \bar{A}$, כלומר לפי ההגדרה כל פתוחה, ובפרט U_0, המכילה את $\bar{a}$ מקיים $U_0 \cap A \neq \emptyset$. נניח $a \in U_0 \cap A$. אז $fi(a)=0$. ובאותו אופן קיים a' כך ש- $fi(a')=1$. אז ההרכבה היא על מסתירה.
3. תרגיל באותו סגנון.

מרכיבי קשירות

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. $C \subseteq X$ נקרא מרכיב קשירות אם:

1. C קשירה
2. C מקסימלית קשירה. כלומר לכל $D \supsetneq C$, D אינה קשירה.

ננסה לפרק את X למרכיבי קשירות.

טענה: לכל $x\in X$ קיים מרכיב קשירות (יחיד!) C_x המכיל את x:

הוכחה: נגדיר $C_x=\bigcup\{C : x\in C \text{ ו- } C \text{ קשירה}\}\neq\emptyset$ כי $\{x\}$ קשירה ו- $x\in\{x\}$.

ע"פ (3) מהמשפט הקודם כיוון שכל חיתוך $C\cap C'$ במשפחה זו מכיל את x אזי C_x קשירה.

המקסימליות נובעת מכך שכל קבוצה קשירה המכילה את X היא חלקית ע"פ הגדרה ל- C_x.

ברור גם שהיא יחידה כמובן. (:

טענה: כל מ"ט X הוא איחוד זר של מרכיבי הקשירות שלו.

הוכחה: ברור ש- $X=\bigcup_{\alpha\in X}C_\alpha$. כמו שרשמנו את זה יש שם קבוצות שאולי חוזרות על עצמן. אז אפשר לרשום $X=\bigcup_{\text{מכ } C_\alpha}C_\alpha$. כמובן $C_\alpha\cap C_\beta=\emptyset$ אם הן שונות.

?? לא ברור מה בדיוק קורה דרשין בשיעור

שאלה: האם תמיד איחוד זר?

תשובה: לא!

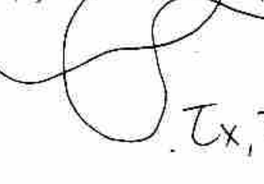
דוגמה: $\{0,1\}$ - מרכיבי הקשירות הם $C_0=\{0\}$ $C_1=\{1\}$.

לכל מרחב קשיר יש מרכיב קשירות אחד!

מהם מרכיבי הקשירות של הרציונליים $\mathbb{Q}$? כל מרכיב קשירות של $\mathbb{Q}$ מורכב מנקודה אחת: כי בין כל שני רציונליים יש אי-רציונלי.

אז $\mathbb{Q}=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ הוא פירוק של $\mathbb{Q}$ למרכיבי קשירות.

כל הקבוצות הן זרות אבל זה לא איחוד זר של מרחבים טופולוגיים. נגדיר מה זה איחוד זר.



נניח שיש לנו שני מ"ט X,Y אז נסתכל על הקבוצה $(X\times\{0\})\cup(Y\times\{1\})$. עכשיו X ו- Y זרים.

והטופולוגיה תהיה הטופולוגיה המינימלית הנוצרת ע"י איחוד τ_X,τ_Y.

מסמנים איחוד זר ע"י $X\amalg Y$.

(14)

במילים אחרות, $U_{X \amalg Y}$ פתוחה אמ"מ חיתוכה עם X ועם Y פתוח.

<u>הערה:</u> $X \amalg X \neq X$

$X \amalg X$ הוא מרחב שבנוי משני העתקים זרים של X.

$$\Leftarrow \quad \mathbb{Q} \cong \coprod_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$$

(15) 21.3.07
טופולוגיה

<u>הודעה</u>: ב-26 במרץ 18:15 יתקיים "אשנב למתמטיקה"
בנושא "כיצד לפרק אפונה ולהרכיב מחלקיה את הלבנה"
(פרדוקס בנך-טרסקי) - מאוד מומלץ וקשור לטופולוגיה אפילו.

בשיעור שעבר דיברנו על קשירות ופירוק של מרחבים טופולוגיים.
אם $X = O_1 \cup O_2$ כאשר $O_i \neq \emptyset$ פתוחות וזרות אז
ניתן לכתוב $X \cong O_1 \amalg O_2$ (ברור ש- $|X| = |O_1| \amalg |O_2|$ - כלומר
זה גם איחוד זר במובן הקבוצתי, אבל אנחנו מדברים על
האיחוד הזר הטופולוגי).

לפורמלי
סתירה
(תרגיל)

<u>שאלה</u>: אדג מרחב טופולוגי Y ושני תת מרחבים Y_0, Y_1 כך ש-
$|Y| = |Y_1| \amalg |Y_2|$ אבל $Y \ncong Y_0 \amalg Y_1$.

<u>תשובה</u>: $[0,1] = [0,\frac{1}{2}] \uplus (\frac{1}{2},1]$ זה אכן איחוד זר במובן קבוצות
אבל $[0,1] \ncong [0,\frac{1}{2}] \amalg (\frac{1}{2},1]$ משום שב-$[0,1]$ יש מרכיב קשירות
אחד אבל ב-$[0,\frac{1}{2}] \amalg (\frac{1}{2},1]$ יש שני מרכיבי קשירות.
$[0,\frac{1}{2}]$ קבוצה פתוחה ב-$[0,\frac{1}{2}] \amalg (\frac{1}{2},1]$ וכך גם $(\frac{1}{2},1]$,
שהרי קבוצה באיחוד זר היא פתוחה אם החיתוך שלה עם
Y_0 ועם Y_1 הוא פתוח. Y_0 ו-Y_1 מרחבים אלה פתוחים.
$\Leftarrow$ תמיד גם Y_0 וגם Y_1 פתוחים ב-$Y_0 \amalg Y_1$.
$\Leftarrow$ $Y_0 \amalg Y_1$ אינו קשיר.

<u>הערה</u>: קשירות (אי קשירות) היא תכונה טופולוגית, כמו כן מספר
מרכיבי הקשירות היא שמורה טופולוגית (invariant)

איך מוכיחים שקשירות היא תכונה טופולוגית?

<u>הגדרה</u>: תכונה של מרחב טופולוגי נקראת שמורה טופולוגית אם
עבור כל שני מרחבים טופולוגיים X,Y כך ש- $X \cong Y$ היא
מתקיימת עבור X אמ"מ היא מתקיימת עבור Y.
כלומר היא אינווריאנטית לגבי שקילות טופולוגית

דוגמאות לתכונות טופולוגיות
- קשירות
- קומפקטיות
- קיום בסיס בן מניה

<u>הערה:</u> $|\mathbb{Q}| \cong \coprod_{q\in|\mathbb{Q}|}\{q\}$ זה איזומורפיזם של קבוצות וזה ברור. כל קבוצה היא איחוד זר של היחידונים שלה.

<u>אבל</u> מה שני מרכיבי הקשירות של $\mathbb{Q}$ כמרחב טופולוגי הם היחידונים $\{q\}_{q\in\mathbb{Q}}$ ולכן כאן $\mathbb{Q}\not\cong\coprod\{q\}$ (הומאומורפיזם של מרחבים טופולוגיים). משום שב-$\coprod\{q\}$ כל קבוצה היא פתוחה - כלומר זה מרחב דיסקרטי, כל קבוצה היא גם סגורה. אם הם היו שקולים אז התמונה של פתוחה הייתה פתוחה. אז מספיק למצוא קבוצה אחת ב-$\mathbb{Q}$ שאינה פתוחה ואינה סגורה. כל יחידון איננו פתוח ב-$\mathbb{Q}$. אבל ב-$\coprod\{q\}$ כל הקבוצות פתוחות ולכן הם לא שקולים.

לדוגמה כאן אם נחלק את הרציונליים לשני קבוצות - נניח $(-\infty,\pi)$ ו-(π,∞) אז דווקא כן $\mathbb{Q}=(-\infty,\pi)\coprod(\pi,\infty)$. חוץ מזה, זה גם תלוי בטופולוגיה. אם היינו מסתכלים על $\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית אז $\mathbb{Q}\cong\coprod_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$. אבל כשאנחנו מדברים על $\mathbb{Q}$ בלי לציין טופולוגיה אנחנו מתכוונים לטופולוגיה המטרית.

<u>טענה:</u> אם X איחוד (כלשהו) של קבוצות פתוחות זרות בזוגות אזי הוא איחוד זר שלהן כמרחבים טופולוגיים.

<u>הערה:</u> מרכיב קשירות לא חייב להיות פתוח. למשל ברציונליים היחידונים הם מרכיבי הקשירות אבל הם לא פתוחים.

(10) 26.3.07
טופולוגיה

יום הולדת שמח לסמי!

הודעות:

1) תרגיל יום ב' יתקיים מעתה באולם את' 2.
2) אחרי פסח יהיה בוחן לא קשה.

בשיעור שעבר ראינו $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ קשיר

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ לא קשיר לחלוטין (מרכיבי הקשירות הם נקודות)

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \amalg \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} \cong \coprod_{\omega} \mathbb{Q} \end{array}\right\} \text{בתרגיל}$$

$\coprod_{\omega} \{q\} \ncong \mathbb{Q}$ (כי זה מימין הוא בדיד)

הערה: הרבה יותר קשה להוכיח ש- $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$\mathbb{R} \ncong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

כידוע: $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}\setminus\{0\}$ כי אחד קשיר ואחד לא קשיר.
נשאלת השאלה $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}\setminus\{0\}$? התשובה היא כן אבל
צריך לעבוד על זה קצת.

קשירות מסילתית

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי ותהיינה $x,y \in X$. נאמר ש-
$x \sim y$ (קשירים מסילתית) אם קיימת ביניהם מסילה, כלומר
העתקה $\varphi: I \to X$ כך ש $\varphi(0)=x$, $\varphi(1)=y$.
זהו יחס שקילות והוא מחלק את המרחב X למחלקות שקילות.
כל מחלקה נקראת מרכיב (רכיב component) קשירות מסילתית.
קבוצת רכיבי הקשירות המסילתית מסומנים ב- $\pi_0 X$. זוהי קבוצה.

דוגמאות:

- $\pi_0 \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}|$
- $\pi_0 \mathbb{R}^n = \{*\}$ - יש רק מרכיב קשירות אחד. (וזה איזומורפי ל- $\{\mathbb{R}^n\}$)

הגדרה: אם ב- $\pi_0 X$ יש בדיוק איבר אחד אזי אומרים ש- X הוא **קשיר מסילתית**.

זה אומר שיש נקודה אחת שכל נקודה אחרת קשורה מסילתית אליה. בפרט אם X קשיר מסילתית אז $X \neq \emptyset$.

דוגמה: יהי $O(n)$ מרחב כל המטריצות ה אורתוגונליות $n \times n$ (= מטריצות שהעמודות שלהן והשורות שלהן הן אורתונורמליות).
אפשר לחשוב על $O(n)$ כתת קבוצה של $\mathbb{R}^{n^2}$ ולכן הוא מקבל משם טופולוגיה מושרית. מה זה $\pi_0 O(n)$? את מספר האיברים נהוג לסמן ב- #. נטען ש- $\#(\pi_0 O(n)) = 2$.
נפגע את זה. נזכר שה דטרמיננטה צריכה להיות ± 1.

$O(1) = \{\pm 1\}$

$O(2) = \{$שיקופים, סיבובים$\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$$ וכל אלה קשירים מסילתית

נבנה פונקציה $\det : O(n) \to \{+1, -1\}$ - זאת פונקציה רציפה וקל לראות שהיא על. $\Leftarrow$ $O(n)$ מרחב לא קשיר.

תרגיל: יש ב- $O(n)$ בדיוק שני רכיבי קשירות מסילתית (וזה הפירוק היסודי של המטריצות הללו).

תזכורת: מרחב טופולוגי Y הוא קשיר אמ"מ אין לו העתקה על $Y \to \{0,1\}$.

משפט: אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

הוכחה: נניח בשלילה ש- X איננו קשיר. $\Leftarrow$ יש העתקה $f : X \to \{0,1\}$ על, $x_1 \mapsto 1$, $x_0 \mapsto 0$.
ובגלל הקשירות המסילתית יש מסילה φ בין x_0 ל- x_1.
נסתכל על ההרכבה $I \xrightarrow{\varphi} X \to \{0,1\}$. היא רציפה והיא על $\{0,1\}$
$\varphi \circ f(0) = 0$, $\varphi \circ f(1) = 1$ סתירה. (:

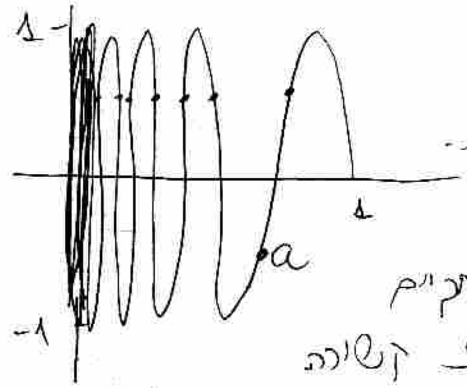
הכיוון השני אינו נכון. ק"ם מרחב X קשר שאינו קשר מסילתית. למשל, ניקח טופולוגיה טריוויאלית של $\{0,1\}$.
זה מרחב קשר כי הקבוצות הפתוחות היחידות בו הן X ו-$\emptyset$.
ויש גם מסילה בין 0 ל-1: $I \xrightarrow{\varphi} \{0,1\}$

$\varphi(0)=0$
$\varphi(1)=1$
$\varphi(x)=0 \quad x\neq 1$

אז זאת לא דוגמא טובה !

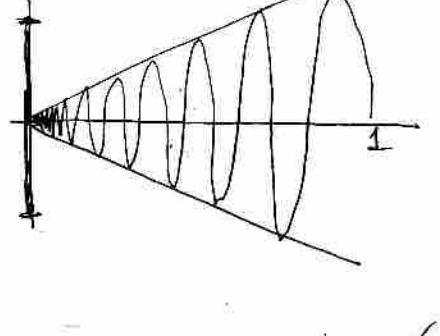
הערה: יהי X מרחב טופולוגי טריוויאלי. אזי כל פונקציה ממרחב טופולוגי Y $f: Y\to X$ היא רציפה.

אז יש דוגמא טריוויאלית - הקבוצה הריקה היא קשירה אבל אינה קשירה מסילתית.
אבל יש דוגמא יותר מעניינת: מרחב הגרף של $\sin\frac{\pi}{x}$ עבור $0<x\le 1$



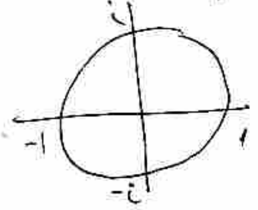
$S=\{(x,\sin\frac{\pi}{x}) : 0<x\le 1\}\cup\{(0,t): -1\le t\le 1\}$
נוכיח שהוא קשר אבל לא קשר מסילתית.
(עם הטופולוגיה שמושרית מ-$\mathbb{R}^2$)
נסמן $S=S_1\cup S_0$. נשים ♡ שמתקיים $S=\overline{S_1}$. S_1 היא קשירה ולכן S קשירה.
מצד שני, ננסה להראות שלא קיימת מסילה בין a ל-$(0,1)$. זה תרגיל נחמד.

לעומת זאת, אם נתבונן בגרף $x\sin\frac{\pi}{x}$ אז $S_0\cup\{(x,x\sin\frac{1}{x})\}$ הוא קשר וגם קשר מסילתית.



<u>בעיות יותר קשות</u> (קורס מתקדם בטופולוגיה)
- משפט נקודת השבת נובע מהטענה ש-$map(S^1,S^1)$ - מרחב ההעתקות מ-S^1 ל-S^1 עם טופולוגיית ההתכנסות הנקודתית לא קשר מסילתית.

למשל, אין מסילה בין שתי הפונקציות הבאות: α_0 = קבוע : $S^1 \xrightarrow{\text{קבועה}} 1 \in S^1$
$\alpha_1 : S^1 \xrightarrow[\text{זהות}]{} S^1$



לא קשה לראות (וזה נראה לנו בסוף הקורס) ש- $map(S^2,S^1)$ עם אותה טופולוגיה הוא קשיר מסילתית, וכך גם $map(S^1,S^2)$.
אבל קשה לראות ש- $map(S^3,S^2)$ איננו קשיר מסילתית.
ושאלה קשה מאוד: עבור אילו זוגות שלמים l,k $map(S^l,S^k)$ קשיר מסילתית.

אקסיומות ההפרדה

סדרת הנחות נוספות על מרחבים טופולוגיים (בהן נפסיק להתעסק במרחבים טופולוגיים כלליים)

נגדיר כאן הנחות על הטופולוגיה של מרחב טופולוגי X.

<u>אקסיומה T_0</u>: יהי X מרחב טופולוגי. אומרים ש- X הוא מרחב T_0 אם עבור כל שתי נקודות $x \neq y \in X$ עבור לפחות אחת מהן $a \in \{x,y\}$ קיימת קבוצה פתוחה U_a המכילה את a ולא מכילה את הנקודה השנייה.

<u>אקסיומה T_1</u>: מרחב טופולוגי X נקרא מרחב T_1 אם לכל שתי נקודות $x,y \in X$ קיימות שתי קבוצות פתוחות U_x, U_y, $x \in U_x$, $y \in U_y$ וכך ש- $y \notin U_x$, $x \notin U_y$.

אנו מנסים לשאול: באיזה תנאים של מרחב טופולוגי X עבור כל $x \in X$ הקבוצה $\{x\} \subseteq X$ היא סגורה? כלומר, $X \setminus \{x\}$ פתוחה...
אם מרחב הוא T_1 אז כל $\{x\}$ הינו סגור.

<u>אקסיומה T_2</u>: מרחב הוא האוסדורף אם הוא מקיים את התנאי הבא: לכל שתי נקודות $x \neq y$ ב- X קיימות שתי קבוצות פתוחות זרות $U_x \cap U_y = \emptyset$ כך ש $x \in U_x$, $y \in U_y$.

(18) 28.3.07
טופולוגיה

הבוחן - מתוך התרגילים - אין צריך לדעת את כל הפתרונות בעל פה!!!!

אקסיומות ההפרדה

דיברנו על T_0, T_1, T_2. הן כולן מתקיימות במרחב מטרי. הכי חשובה לנו היא T_2 שנקראת גם האוסדורף.

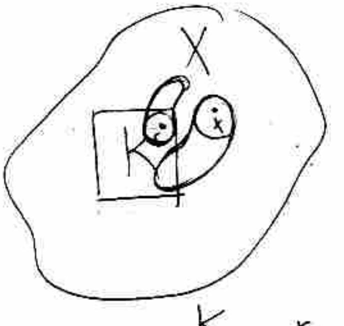
<u>משפט</u>: במרחב האוסדורף X אם לסדרה (x_i) יש גבול אז הוא יחיד.

<u>הוכחה</u>: בשלילה אם $x_i \to x$ וגם $x_i \to y$ ו- $x \neq y$ אז קיימות שתי סביבות פתוחות וזרות זו לזו $U_y \cap U_x = \emptyset$ אבל קיים N כך שלכל $n > N$ x_i נמצאים בסביבה של x, בפרט ב- U_x ולכן לא יכולים להיות ב- U_y הסתירה. ☺

אנחנו יכולים לשאול את עצמנו אם המשפט הזה שקול להאוסדורף - כלומר גם זה שיש גבול יחיד גורר האוסדורף. ובכן, זה לא נכון. אבל יחידות הגבול גוררת T_1. זה תרגיל נחמד.

<u>משפט</u>: במרחב האוסדורף כל קבוצה קומפקטית היא סגורה.

<u>הוכחה</u>: ראשית, נזכיר מה זה מרחב קומפקטי: מרחב טופולוגי X נקרא <u>קומפקטי</u> אם לכל כיסוי של X ע"י קבוצות פתוחות יש תת כיסוי סופי. כלומר אם $\{U_\alpha\}$ כיסוי אז אפשר לרשום $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$.



עכשיו נוכיח את המשפט. יש לנו X ה"מ ו- $K \subseteq X$ קומפקטית
צריך להראות ש- $X \setminus K$ פתוחה. נציג את המשלים כאיחוד של פתוחות:
נראה שלכל $x \in X \setminus K$ קיימת סביבה O_x שאינה חותכת את K ואז $X \setminus K = \bigcup_{x \in X \setminus K} O_x$, ויהיה קבוצה פתוחה כאיחוד של פתוחות.
אז נבנה את O_x. לכל x קבוע. לכל $c \in K$ $c \neq x$ ולכן קיימות שתי קבוצות זרות $x \in U_x$, $c \in V_c$ כך ש- $U_x \cap V_c = \emptyset$.

אזי האוסף $(V_x)_{x\in K}$ מהווה כיסוי פתוח של K. $\Leftarrow$ קיים לו תת כיסוי סופי $(V_{x_i})_{i=1}^{N}$. נגדיר $O_x = \bigcap_{\text{סופי}} U_{x_i}$ פתוחה.

נשים ♡ ש- $\emptyset = K \cap (\cap U_{x_i})$ כי

$$\emptyset = (\underbrace{\cup V_{x_i}}_{K \text{ מכסים את}}) \cap (\cap U_{x_i})$$

ישר ראו איזו בעיה באינדקסים אבל הרעיון ברור.

$x \in \cap U_{x_i}$ נמצאת בכל אחת מ- U_{x_i} אך לא נמצאת באף אחת מ- U_{x_i}. $\Leftarrow$ $X \setminus K = \cup O_x$ פתוחה. ☺

<u>תרגיל</u>: תהיינה K_1, K_2 שתי קבוצות קומפקטיות במ"ט האוסדורף כך ש- $K_i \subseteq X$ ו- $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. $\Leftarrow$ קיימות שתי פתוחות זרות V_i כך ש- $K_i \subseteq V_i$, כלומר אפשר להפריד לא רק 2 נקודות אלא גם שתי קבוצות קומפקטיות.

<u>משפט</u>: תהי $f: X \to Y$ העתקה חח"ע ועל בין שני מרחבי האוסדורף קומפקטיים. אזי f הינו שקילות טופולוגית.

<u>הוכחה</u>: עלינו להראות ש- f^{-1} רציפה. מספיק להראות ש- f עצמה מעבירה סגורה לסגורה. כלומר $f(S)$ סגורה לכל $S \subseteq X$.
זה דומה למרחבים קומפקטיים. אם נראה ש- $f(S)$ קומפקטית אז היא גם סגורה. בגלל ש- S סגורה במרחב האוסדורף קומפקטי אז S קומפקטית (אותה הוכחה כמו במרחבים מטריים) והעתקה מעבירה קומפקטית לקומפקטית (שוב אותה הוכחה כמו במרחבים מטריים) $\Leftarrow$ $f(S)$ קומפקטית ב- Y $\Leftarrow$ סגורה ב- Y. ☺

האמת היא שהשתמשנו כאן בפחות הנחות ממה שהנחנו אז אפשר לצמצם אותן. אבל ככה קל יותר לזכור את זה.

(19)

מרחבים קומפקטיים

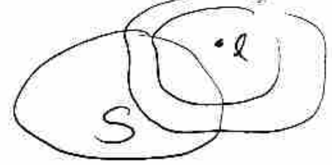
מקובלות 3 הגדרות של "קומפקטיות":

① $\boxed{\text{קומפקטיות}}$ - לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי

② קומפקטיות סדרתית - לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת

③ קומפקטיות גבולית - לכל תת קבוצה אינסופית $S\subseteq X$ יש נקודת גבול (הצטברות) - כלומר יש נקודה שבכל סביבה שלה יש נקודות מ-S השונות ממנה.

חוזק



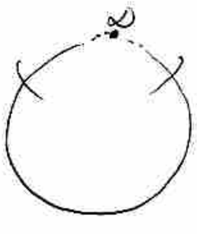
קל לראות ש ① ⇐ ② ⇐ ③

קומפקטיות זה נורא חשוב במתמטיקה וכל הכיף הוא שקומפקטיות מבטיחה לנו שתהליכים אינסופיים מתכנסים.

אנחנו נראה כמה תהליכים שבהם הופכים מרחבים לא קומפקטיים למרחבים קומפקטיים.

קומפקטיפיקציה של מ"ט

בד"כ זה מתבצע ע"י הוספת נקודות "אידיאליות" ב"אינסוף".
הדוגמא הסטנדרטית היא $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. את ∞ הוספנו בשני הצדדים. זה כאילו הפכנו את הישר הממשי לעיגול
צריך להגדיר קבוצות פתוחות חדשות -
כי זה כבר לא $\mathbb{R}$ רגיל.
נוסיף לטופולוגיה של $\mathbb{R}$ קבוצות חדשות: $(\mathbb{R}\setminus K)\cup\{\infty\}$ - המשלימות של ~~...~~ סביבות של ∞ הן קומפקטיות.


$\cong \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

(20) 28.5.07
טופולוגיה

שיעורי השלמה: ימי רביעי ב-20:00.
הודעה לגבי המיקום תגיע בהמשך.

יש רשימות באתר. חייבים לדעת אותן בע"פ למבחן.
חייבים לדעת את כל התרגילים בע"פ למבחן. במבחן יופיעו תרגילים!!!

מרחבים קומפקטיים

הדוגמה המרכזית היא הקטע הסגור $[0,1]$.

<u>הגדרה</u>: מ"ט X "יקרא <u>קומפקטי</u> אם לכל כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$
($\bigcup U_\alpha = X$, U_α פתוחות) קיים תת כיסוי סופי, כלומר
$U_{\alpha_1}\cup\dots\cup U_{\alpha_n} = X$

<u>השימוש המרכזי</u>: לכל העתקה ממרחב קומפקטי X לממשיים
$f: X\to\mathbb{R}$ יש מקסימום ויש מינימום.

<u>בעיה מרכזית</u>: בהינתן מ"ט X כיצד נדע שהוא קומפקטי?

<u>משפט</u>: תת מרחב סגור (כתת קבוצה) של מ"ט קומפקטי הוא קומפקטי.

<u>תזכורת</u>: אם $A\subseteq X$ אז A תת מרחב של X עם
הטופולוגיה $\{U\cap A : U \text{ פתוחה ב-} X\}$ אם אנחנו אומרים ש-A
תת מרחב סגור הכוונה היא ש-A סגורה כתת קבוצה של X.

<u>הוכחה</u>: יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A (לדוגמה $\{V_\alpha\}=\{A\}$).
נראה שיש ל-A תת כיסוי סופי. נמנה בעזרת $\{V_\alpha\}$ כיסוי
פתוח של X. נתבונן באוסף $\{X\setminus A\}\cup\{V_\alpha\}$. זה כיסוי של
X אבל הוא לא בהכרח פתוח. (נשתמש בעובדה שלכל V_α
קיים $U_\alpha\subseteq X$ פתוחה ב-X כך ש- $V_\alpha = A\cap U_\alpha$.
$\Leftarrow$ האוסף $\{U_\alpha\}\cup(X\setminus A)$ הוא כיסוי פתוח של X

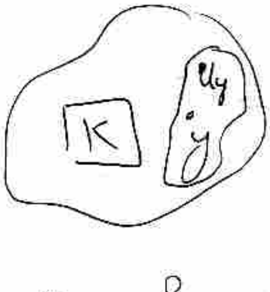
X קומפקטי ⇐ יש לו ת"ס סופי. ברור ש- $X\setminus A$ לא תורם לכיסוי של A. אז מבין שאר איברי הכיסוי הסופי $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$ נסתכל על $V_{\alpha_1},\dots,V_{\alpha_n}$ וזה תת כיסוי סופי של A. ⇐ A קומפקטי.

<u>דוגמה:</u> יתכן להיות שיש העתקה חח"ע $f:A\to X$ בין שני מרחבים טופולוגיים רק ש- A אינו שקול טופולוגית ל- $f(A)$.
למשל, אם X מ"ט לא דיסקרטי כלשהו ו- X^{dis} אותה קבוצה עם מרחב דיסקרטית אז $i: X^{dis}\to X$, $x\mapsto x$ מקיימת את הדרוש. כי $i(X^{dis})=X$ ואחד קומפקטי והשני לא. חוץ מזה i רציפה כי כל פונקציה ממרחב דיסקרטי היא רציפה.
הנה דוגמה קונקרטית יותר: $(0,1]\to S^1$, $t\mapsto e^{2\pi i t}$
הם לא הומיאומורפיים כי S^1 קומפקטי ו- $(0,1]$ אינו קומפקטי!

<u>הקשר בין קומפקטיות לסגירות</u>

האם תת קבוצה קומפקטית היא סגורה? - בד"כ לא!

<u>משפט:</u> כל תת קבוצה קומפקטית של מרחב האוסדורף היא סגורה.
<u>הוכחה:</u> תהי $K\subseteq X$ קומפקטית. צריך להראות ש- $X\setminus K$ פתוחה. נציג את $X\setminus K$ כאיחוד של פתוחות. לכל $y\in X\setminus K$ נטען שקיימת סביבה U_y רק ש- $U_y\cap K=\emptyset$. ואז $X\setminus K=\bigcup_{y\in X\setminus K} U_y$. קל להראות שאכן קיימת U_y כנ"ל.



<u>טענה:</u> תהיינה K_1,K_2 קבוצות קומפקטיות במרחב האוסדורף. אזי קיימות פתוחות U_1,U_2 רק ש- $U_i\supseteq K_i$ ו- $U_1\cap U_2=\emptyset$.

<u>משפט:</u> תהי $f:X\to Y$ העתקה הפיכה בין מרחב קומפקטי X למרחב האוסדורף Y. אזי f היא הומיאומורפיזם.

משפט: תהי $f:X\to Y$ העתקה כאשר X קומפקטי. אזי $f(X)\subseteq Y$ תת קבוצה קומפקטית.

הוכחה: אם $\{V_\alpha\}$ כיסוי של $f(X)$ אזי $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ כיסוי של X. נבחר מתוכו תת כיסוי סופי, נפעיל עליו את f ונקבל תת כיסוי סופי של $f(X)$. ☺ |

מסקנה: תהי $f:X\to\mathbb{R}$ העתקה ממשית. אם X קומפקטי אז יש ל-f מקסימום ומינימום.

הוכחה: $f(X)$ קומפקטית ב-$\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $f(X)$ סגורה וחסומה $\Leftarrow$ החסם העליון (התחתון) נמצא ב-$f(X)$ והוא מתקבל עבור x_{max} (x_{min}). ☺

שאלה: כיצד "נהפוך" מ"ט כלשהו X למרחב קומפקטי? כלומר, כיצד נשכן את X בתוך מ"ט קומפקטי?

דוגמה: $X=(0,1)$. יש שתי קומפקטיפיקציות:

$$(0,1)\hookrightarrow[0,1]$$
$$(0,1)\hookrightarrow S^1$$

בעיה יסודית: קומפקטיפיקציה חד-נקודתית
one-point compactification

הגדרה: יהי X מ"ט כלשהו. נגדיר מ"ט חדש X^+ באופן הבא:

$$|X^+| = |X|\cup\{\infty\}$$

(איבר זר לקבוצה.)

נגדיר תת בסיס $\mathcal{B}$ לטופולוגיה של X^+ כך:

$$\mathcal{B} = \tau_X \cup \{(X\setminus K)\cup\{\infty\}\}_{\substack{K\subseteq X\\ \text{קומפ'}}}$$

טענה: לכל X המרחב X^+ קומפקטי.

הוכחה: ניקח כיסוי של X^+ $\{U_\alpha\}$. נרצה למצוא תת כיסוי סופי של X^+. קיימת α_∞ כך ש: $\infty\in U_{\alpha_\infty}$. נתבונן ב: $X\setminus U_{\alpha_\infty}$. זו

קבוצה קומפקטית ב- X (למה? נשים ♡ שנתון לנו תת בסיס.
U_α הינו איחודים אינסופיים וחיתוכים סופיים של קבוצות
מהצורה $X\setminus K$. אבל איחוד סופי של קומפקטיות הינו קומפקטי
וחיתוך אינסופי של קומפקטיות הינו קומפקטי. לכן הכל מסתדר).
הכיסוי הנתון מכסה את X^+ לכן בוודאות מכסה את $X\setminus U_{\alpha_0}$.
ניתן לבחור תת כיסוי סופי. ולכן תת הכיסוי הסופי + U_{α_0} מהווה
כיסוי סופי של X. ☺

<u>שאלה:</u> האם $X \xrightarrow[\text{הכלה}]{\varphi} X^+$, $x\mapsto x$ פונקציה רציפה?
עלינו להראות ש- $\varphi^{-1}(W)$ עבור W פתוחה ב- X^+ היא
פתוחה. אם $\infty\notin W$ אזי לפי הגדרה W פתוחה ב- X
$\Leftarrow$ $W=\varphi^{-1}(W)$ ולכן פתוחה.
אם $V\subseteq X^+$ פתוחה שמכילה ∞ אז $V=(X\setminus K)\cup\{\infty\}$.
אז $\varphi^{-1}(V)=X\setminus K$. האם זה פתוחה?

<u>משפט:</u> לכל מרחב האוסדורף X קיים מרחב טופולוגי <u>האוסדורף</u>
X^+ רק ש $X\hookrightarrow X^+$ שיכון רציף.

<u>דוגמאות:</u>

- יהי $X=\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$. מהו המרחב X^+?
ראשית, נשים ♡ שב-$\mathbb{N}^+$ יש מספר בן מנייה של איברים.
הטענה: $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{0\}\cong\mathbb{N}^+$. $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{0\}$ קומפקטית ב- $\mathbb{R}$
ו- $\mathbb{N}^+$ האוסדורף. לכן מספיק למצוא העתקה הפיכה ביניהן.

- $(0,1)^+\cong S^1$
- $[0,1]^+=[0,1]\amalg\{\infty\}$ ואז $\{\infty\}$ פתוחה ב- K^+.
באופן כללי, אם K קומפקטי אזי $K^+=K\amalg\{\infty\}$
איחוד זר טופולוגי.

(22) 30.5.07
טופולוגיה

הערה: נבחנים באולם מתמטיקה 2 בשעה 8

קומפקטיפיקציה חד נקודתית

בשיעור שעבר ראינו שאפשר לכל X מ"ט להתאים
מ"ט קומפקטי ע"י הוספת נקודה "באינסוף" בקלות:
$X^+ = \{\infty\} \cup X$.
ראינו שבד"כ ההעתקה $\begin{matrix} X \to X^+ \\ x \mapsto x \end{matrix}$ איננה רציפה.

הגדרה של קומפקטיפיקציה חד-נקודתית של מרחבי האוסדורף –

הגדרה: יהי נתון מ"ט האוסדורף X. מרחב Y האוסדורף נקרא
קומפ' חד-נקודתית של X אם:
1) Y קומפקטי (+ האוסדורף)
2) $Y \supseteq X$ הוא תת מרחב
3) $X \setminus Y$ מורכב מנקודה אחת בדיוק.

שאלה: מתי קיימת ל-X קומפקטיפיקציה חד נקודתית?

הטופולוגיה של $\{\infty\} \amalg X$ היא כפי שהגדרנו ע"י משלימים
של קבוצות קומפקטיות ב-X. חסר לנו: 1) שיכון $X \subset X^+$
2) X^+ האוסדורף
כדי שנקבל ש-X^+ הוא אכן האוסדורף אנו דורשים תנאי נוסף!

הגדרה: מרחב X האוסדורף נקרא קומפקטי מקומית locally compact
אם לכל נקודה קיים תת מרחב קומפקטי K כך ש $x \in K$
ו- K מכיל סביבה פתוחה של x.

כל מרחב האוסדורף קומפקטי (גם) הוא קומפקטי מקומי כי לכל x ניקח את K להיות כל X.

יש הרבה מרחבים קומפקטיים מקומית. למשל $\mathbb{R}^n$ - לכל x אפשר לשים אותה בתוך קוביה סגורה. אומרים "לכל נקודה יש סביבה קומפקטית" והכוונה היא שהנקודה מוכלת בקבוצה קומפקטית ובתוך הקבוצה הקומפקטית הזאת יש סביבה פתוחה של x.

<u>תזכורת:</u> יהי מרחב טופולוגי X ו- $x\in X$ אומרים ש- $L\subseteq X$ היא סביבה של x אם קיימת קבוצה פתוחה U כך ש- $x\in U\subseteq L$.

<u>שאלה:</u> מתי קיים ל-X קומפ' חד נקודתית?

<u>משפט:</u> (מונקרס עמ' 183-184). יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף קומפקטי מקומית. אזי קיימת ל- X קומפ' חד נקודתית.

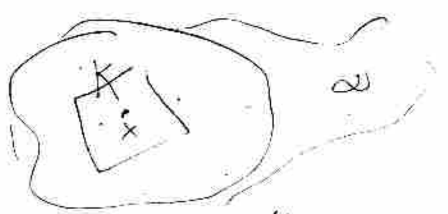
<u>סקירת ההוכחה:</u> בונים את טופו' X^+ כמו שראינו ע"י משלים של קבוצות קומפקטיות ב- X. צריך להוכיח:

① X^+ קומפקטי (ראינו)

② $X\subseteq X^+$ הוא שיכון רגיל (נובע מתכונת האוסדורף)

③ X^+ הוא האוסדורף (נובע מקומפקטיות מקומית):

אנו מחפשים סביבה פתוחה של ∞ וסביבה פתוחה של x שתהיינה זרות. אז מחפשים K ו- U כך ש- $X\setminus K$ סביבה של ∞ ו- U סביבה של x. וזה בדיוק נותן מקומפקטיות מקומית. כי ניקח את K להיות סביבה קומפ' של x. בתוכה יש U ואז יוצא מה שצריך.



למעשה המשפט הזה הוא אמ"מ!

(23)

תרגיל: מסתבר שקומפקטיות מקומית שקולה לתנאי הבא על X האוסדורף:

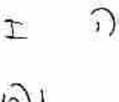
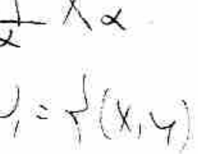
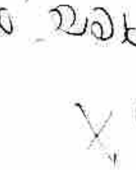
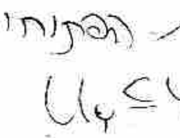
הגדרה שקולה: לכל $x\in X$ ולכל פתוחה $x\in U\subseteq X$ קיימת סביבה פתוחה $V\subseteq U$ כך ש- $\bar{V}\subseteq U$ קומפקטית.

סיכום: מסתבר שמרחבי האוסדורף קומפקטיים הם "יפים במיוחד" "קצת פחות יפים" הם קומפקטיים מקומית.
זה איזשהו איזון בכמות הקבוצות הפתוחות: מספיק קבוצות פתוחות כדי שניתן יהיה להפריד בין נקודות, אבל לא יותר מדי כדי שהמרחב יהיה קומפקטי.

מכפלות של מרחבים טופולוגיים

ראינו שבהינתן משפחה $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ (I לא מוכרחה בת מניה) אפשר לבנות איחוד זר $\coprod_\alpha X_\alpha$

אם יש לנו X,Y אז $X\times Y=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}$
ונתן בסיס לקבוצות הפתוחות הן המכפלות $U_x\times U_y$ כאשר $U_x\subseteq X$, $U_y\subseteq Y$ פתוחות.

דוגמאות: $X\times\emptyset=\emptyset$
- אם S בדיד דיסקרטי אז $X\times S\cong\coprod_{s\in S}X$
(זה דורש הוכחה אבל לא קשה)
- $I\times I=$ 
-  $\cong I\times S^1\simeq$ 
- $S^1\times S^1=$  - טורוס

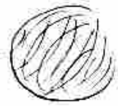
← זה מרחב מאוד מעניין!!

מעניין: מה נשמר תחת מכפלה?

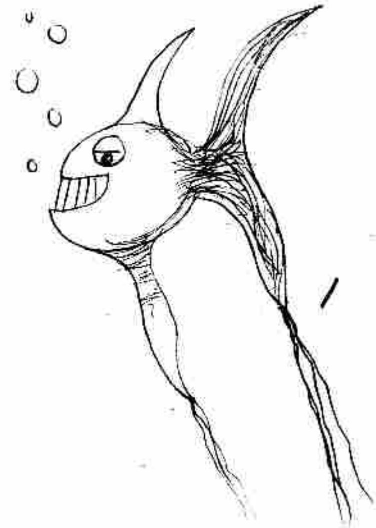
הערות

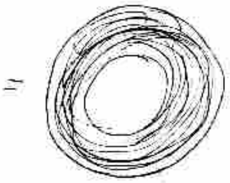
① המרחב X^+ הוא קומפקטי ואושר X עצמו הוא האוסדורף. אחרת, אינו יוצא ש- $X\setminus K$ פתוחה ב-X ואז אנחנו לא יכולים להתקדם.

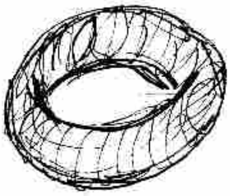
② הקומפקטיפיקציה בנקודה אחת של מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית הוא יחידה. היחידות הזאת חשובה מאוד. קודם כל, באופן פילוסופי זה אומר שעשינו משהו טוב. מה הכוונה ביחידות? נניח שיש לנו $Y=X\cup\{y\}$ ו- $Y'=X\cup\{y'\}$ קומפקטיים רק ש-X תת מרחב של שניהם. אז Y ו-Y' שקולים טופולוגית, כלומר היחידות היא עד כדי שקילות טופולוגית. אז במצב הזה X^+ הוא יחיד. למעשה קיימת פונקציה יחידה בין Y ל-Y' שהיא הומאומורפיזם. הפונק' הזאת כמובן לוקחת את y ל-y' ואת X ל-X ע"י הזהות.

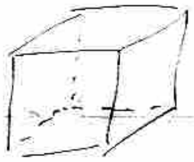
③ דוגמה לשימוש ביחידות: $(\mathbb{R}^2)^+\cong S^2=$ 
כיוון שהמרחבים הם האוסדורף קומפקטיים מקומית מספיק להראות ש- $\mathbb{R}^2\cong S^2\setminus\{N\}$. אם N הקוטב הצפוני נראה ש- $\mathbb{R}^2\cong S^2\setminus\{N\}$. אם $V\cong W$ אז $V^+\cong W^+$ (שהרי הבנייה היא טופולוגית) ולכן אם $\mathbb{R}^2\cong S^2\setminus\{N\}$ אז $(\mathbb{R}^2)^+\cong S^2$

מכפלות של מ"ט



$S^1 \times I =$ 

טורוס $= S^1 \times S^1$  (doughnut)

$I^3 =$ 

אנחנו מעוניינים להגדיר תכונה אוניברסלית שמגדירה את המכפלה $X\times Y$ באופן <u>יחיד</u> עד כדי הומאומורפיזם. כלומר רוצים תכונה טופולוגית של המרחב $X\times Y$ שתלויה רק את X ואת Y ומגדירה את $X\times Y$. וכל מרחב אחר שיש לו את התכונה הזאת יהיה שקול ל- $X\times Y$.

<u>תזכורת:</u> העתקה רציפה $X\amalg Y \to T$ לכל מ"ט T נתונה ע"י זוג העתקות $f_X: X\to T$, $f_Y: Y\to T$.

נגדיר $map(X\amalg Y, T) =$ אוסף הפונקציות הרציפות מ- $X\amalg Y$ ל- T

הקבוצה הזו איזומורפית (כקבוצה) למכפלה של הקבוצות $map(X,T)\times map(Y,T)$.

אם יש איזשהו מרחב שמקיים את התכונה הזו אז נראה שקול טופולוגית ל- $X\amalg Y$

רק הערה: אנחנו צריכים לא סתם איזומורפיזם, אלא פונקציה ספציפית בשם coupling שתכף נגדיר אותה שהיא צריכה להיות איזומורפיזם.

מה זה הפונקציה הזאת?

יש לנו $X\amalg Y \xrightarrow{f} T$. באופן טריוויאלי יש שתי העתקות i_X ו- i_Y שמשכנות את X ואת Y בהתאמה ב- $X\amalg Y$. זה נותן לנו זוג פונקציות שמתקבלות ע"י הרכבה: $i_X\circ f$, $f\circ i_Y$. אז הפונקציה c שלנו אומרת לה עבור את f ל- $(i_X\circ f, i_Y\circ f)$ ואנחנו רוצים שזה יהיה איזומורפיזם של קבוצות.

<u>טענה</u>: יהי נתון מרחב $W(X,Y)$ עם שתי העתקות:

$$w_X : X \to W$$
$$w_Y : Y \to W$$

כך שלכל מ"ט T

$$map(W,T) \xrightarrow{\cong} map(X,T)\times map(Y,T)$$
$$g \longmapsto (w_X\circ g,\ w_Y\circ g)$$

איזומורפיזם של קבוצות אזי $W \cong X\amalg Y$.

אז נתבונן ב- $X\times Y$. זה מרחב שבא באופן טבעי עם שתי פונקציות - הטלות:

$$Y \xleftarrow{p_Y} X\times Y \xrightarrow{p_X} X$$

אלה פונקציות רציפות. אם U פתוחה ב- X אז $p_X^{-1}(U) = U\times Y$ והיא פתוחה ב- $X\times Y$.
כנ"ל עבור p_Y.

<u>טענה</u>: $map(T, X\times Y) \cong map(T,X)\times map(T,Y)$
לומר c איזומורפיזם בין הקבוצות.

$$T \xrightarrow{g} X\times Y \begin{matrix} \xrightarrow{p_X} X \\ \xrightarrow[p_Y]{} Y \end{matrix}$$

$$c(g) = (p_X\circ g,\ p_Y\circ g)$$

ויתר על כן מהי התכונה האוניברסלית שחיפשנו.
כלומר לכל W עם שתי העתקות $\varphi_X: W\to X$
$\varphi_Y: W\to Y$ כך שעבורן C היא איזומורפיזם לכל T
מתקיים $W\cong X\times Y$ כלומר אם לכל T

$$map(T,W)\cong map(T,X)\times map(T,Y)$$

אז $W\cong X\times Y$.

<u>תזכורת</u>: השלמנו סינפי במשתנים רבים
מספרים על פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. כי f
כנ"ל נתונה "רכיבה ע"י רכיבים" $f=(f_1,f_2\dots f_m)$
ואנחנו לוקחים כדבר מובן מאליו שכל התכונות של
f נתונות להצגה כתכונות של $(f_1\dots f_m)$. בלי
לחשוב פעמיים אפילו.

מכפלה אינסופית

נתון אוסף $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ של מ"ט. מעוניינים להגדיר
את המכפלה $\prod_{i\in I}X_i$. נשים ♡ שאין שום תנאי
על I - היא לא בהכרח בת מנייה / סדורה.
המכפלה תבוא עם הטלות $p_i:\prod X_j\to X_i$ רציפות!
כמו כן, אנחנו רוצים שלכל T

$$\left(T\xrightarrow{\text{רציפה}}\prod_{i\in I}X_i\right)\leftrightarrow\{f_i:T\to X_i\}$$

<u>הגדרה</u>: $\prod_{i\in I}X_i=\{f:I\to\bigcup X_i \mid f(i)\in X_i\}$

ואז קבוצה זו נגדיר טופולוגיה - הטופולוגיה המינימלית
שמכילה את הקבוצות הבאות כקבוצות פתוחות:

$$\{p_i^{-1}(U_i) : \underset{\text{פתוחה}}{U_i\subseteq X_i},\ i\in I\}$$

אוסף פונקציות שמוגבלות בקואורדינטה i וחופשיות בכל שאר הקואורדינטות.

נשים לב שבד"כ תת קבוצה ב- $\prod_{i\in I} X_i$ מהצורה $\prod_{i\in I} U_i$ כאשר $U_i \subseteq X_i$ פתוחה איננה פתוחה!
אין שום סיבה שהיא תהיה פתוחה והיא לא מוגדרת כך. הקבוצות הפתוחות מוגדרות ע"י מכפלות של קבוצות שרק איבר אחד במכפלה הוא שונה $U_i \subseteq X_i$ ואילו שאר האיברים במכפלה הם X_j.
ואיחוד קבוצות פתוחות שכאלה.

<u>דוגמה:</u> $X_i=\{0,1\}$ מרחב בדיד.
מכפלה <u>סופית</u> של המרחב הזה היא מרחב בדיד עם 2^n נקודות (מכפלה של N ראינו). זה לא קשה לראות.
אבל המרחב $\prod_{i=1}^{\infty} X_i = 2^{\mathbb{N}}$ מרחב לא בדיד.
<u>תרגיל</u>: $2^{\mathbb{N}}$ = קבוצת קנטור

(26) 4/6/07
טופולוגיה

מרחבי מכפלה

בשיעור הקודם הגדרנו טופולוגיה של $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ כאשר $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של מרחבים טופולוגיים.

בחרנו את הטופולוגיה המינימלית של
$$|\prod X_\alpha| = \{f: I\to \bigcup X_\alpha \ : \ f(i)\in X_i\}$$
כך ש- $\pi_j:\prod X_i \to X_j$ רציפות.

כלומר פונקציה כשהי $\prod g_\alpha: Y\to \prod X_\alpha$ היא מוגדרת ורציפה אמ"מ לכל α $g_\alpha: Y\to X_\alpha$ מוגדרת ורציפה.

תת בסיס לטופולוגיה של $\prod X_\alpha$ הוא קבוצות מהצורה
$$U_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta$$

<u>משפט</u>: (תלוי באקסיומת הבחירה) $\emptyset \neq \prod X_\alpha$ אמ"מ $X_\alpha\neq\emptyset$ לכל α.

<u>הוכחה</u>: ברור שאם $X_{\alpha_0}=\emptyset \Leftarrow \prod X_\alpha=\emptyset$ כי הפונקציות ב- $\prod X_\alpha$ צריכות לבחור איבר ב- X_{α_0} אבל אין שם אף איבר.
הצד השני הוא בעצם אקסיומת הבחירה. כדי להבטיח ש- $\prod X_\alpha \neq \emptyset$ כאשר $X_\alpha\neq\emptyset$ לכל α יש להשתמש באקסיומה מתורת הקבוצות - אקסיומת הבחירה. זהו למעשה ניסוח של אקסיומת הבחירה.

<u>שאלה</u>: נניח ש- X_α מקיים תכונה טופולוגית כלשהי P לכל α, האם התכונה עוברת גם ל- $\prod X_\alpha$?

<u>דוגמאות חיוביות</u>: - לא ריק
- האוסדורף, קומפקטיות

<u>דוגמאות שליליות</u> - דיסקרטיות ($\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ איננו דיסקרטי)

<u>משפט</u>: אם כל X_α האוסדורף אז $\prod X_\alpha$ האוסדורף.

<u>הוכחה</u>: אם $x,y \in \prod X_\alpha$ שונות אז קיים α כך ש $(x_\alpha)\neq(y_\alpha)$.
ו- $x_\alpha, y_\alpha \in X_\alpha$ יש סביבות מפרידות U_x, U_y. אז
$U_x\times\prod X_\alpha$, $U_y\times\prod X_\alpha$ סביבות מפרידות של x,y.

הערה: מהו בסיס לטופולוגיה של $\prod X_\alpha$?
תת בסיס כבר ראינו. איבר אופייני בבסיס הוא
$$U_{\alpha_1}\times \dots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\substack{\beta\neq\alpha_j \\ \forall 1\le j\le n}} X_\beta$$

משפט הקומפקטיות (טיכונוף)
מכפלה של אוסף מ"ט קומפקטיים היא קומפקטית.
הבעיה: לא יודעים באופן ישיר להוכיח קיום תת כיסוי סופי.
אז נשתמש בתכונת החיתוך הסופי במקום.
נזכור ש-X הוא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X $(U_\alpha)_\alpha$
יש תת כיסוי סופי. $\Longleftrightarrow$ אם $(U_\alpha)_\alpha$ אוסף פתוחות כך שכל אוסף
סופי שלו אינו מכסה את X אז $(U_\alpha)_\alpha$ אינו מכסה.
$\Longleftrightarrow$ אם $(V_\alpha)_\alpha$ אוסף פתוחות כך שהאוסף $(X\setminus V_\alpha)_\alpha$ מקיים
שכל חיתוך סופי של איבריו אינו ריק אז $\bigcap (X\setminus V_\alpha)\neq\emptyset$.
קיבלנו ש-X קומפקטי אמ"מ מתקיים התנאי הבא: לכל אוסף של סגורות
$(C_\alpha)_{\alpha\in I}$ המקיימות את תנאי החיתוך הסופי מתקיים $\bigcap C_\alpha\neq\emptyset$.

נאמר שמשפחה של תת קבוצות של קבוצה X מקיימת תח"ס
(תכונת חיתוך סופי) אם כל חיתוך סופי של איבריה אינו ריק.
וניסוח שקול לקומפקטיות הוא שמ"ט X הוא קומפקטי אמ"מ לכל
אוסף $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ המקיים תח"ס מתקיים $\bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}\neq\emptyset$
ברור שהתנאי הזה גורר קומפקטיות. מצד שני אם מרחב הוא קומפקטי
ויש אוסף קבוצות שמקיים תח"ס אז גם הסגורים שלהם תח"ס
ולכן $\bigcap \overline{A_\alpha}\neq\emptyset$.

הוכחת משפט טיכונוף: בארבעה חלקים.
חלק 1: כל אוסף $(B_\alpha)_{\alpha\in I}$ תח"ס ניתן להגדלה לאוסף $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$
תח"ס מקסימלי (כלומר אם נוסיף עוד קבוצה זה כבר לא יהיה תח"ס)
נתבונן ב- $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_\beta\}$ - משפחה של אוספי הקבוצות שהם תח"ס.
אנחנו נחפש איבר מקסימלי ב-$\mathcal{B}$.

הלמה של צורן (מתורת הקבוצות): נתונה קבוצה S עם סדר חלקי חלש
$\leq$. אם לכל שרשרת (chain), כלומר תת קבוצה סדורה מלא,
קיים חסם ב- S אז כל שרשרת ב- S ניתנת לשיכון
בשרשרת מקסימלית (כלומר יש איברים מקסימליים ב- S).

אז ניקח S להיות אוסף כל משפחות של תת קבוצות
מקבוצה Y נתונה המקיימת תח"ס וניקח סדר חלקי הכלה.
נבחר שרשרת (S_α) שרשרת ב- S ... $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \dots \subseteq S_\alpha \subseteq \dots$
עלינו למצוא חסם ב- S לשרשרת (S_α) שמקיים תח"ס.
ניקח את האיחוד. ברור ש- $S_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} S_\alpha$ לכל α. האם
הוא מקיים את תכונת החיתוך הסופי? אם ניקח מתוכו מספר
סופי של הקבוצות כל אחת מהן נמצאת באוסף תח"ס.
כולן נמצאות באוסף התח"ס המקסימלי (ויש כזה כי
מדובר בקבוצה סופית). לכן החיתוך אינו ריק.
$\Leftarrow$ $\bigcup_{\alpha\in J} S_\alpha \in S$. $\Leftarrow$ לפי הלמה של צורן יש מקסימלי.

למה עשינו את צעד 1? כיוון שכל אוסף ניתן להרחבה
לאוסף מקסימלי M הרי שאם נראה ש- $\bigcap_M \bar{S}_\alpha \neq \emptyset$
זה יגרור מיד ש- $\bigcap_{S_\alpha \in A} \bar{S}_\alpha \neq \emptyset$ עבור כל אוסף תח"ס. שהרי
$\bigcap_A \bar{S}_\alpha \supseteq \bigcap_M \bar{S}_\alpha$
$\Leftarrow$ כדי להוכיח קומפקטיות נסתפק בבחינה של אוספים
מקסימליים של תח"ס.

<u>חלק 2</u> תכונות של אוספים מקסימליים של תח"ס
(א) יהי M אוסף מקסימלי תח"ס. אזי M סגור לגבי
חיתוכים סופיים.
אם $S_1,\dots,S_n \in M$ ו- $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \notin M$ אז נוסיף את $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ ל- M.
נקבל אוסף גדול יותר לפי יחס הסדר (והוא עדיין מקיים תח"ס.
וזו סתירה למקסימליות של M.

ב) יהי M אוסף תח"ס מקסימלי. אם קבוצה $T \subsetneq Y$
חותכת איבר ב- M אז היא נמצאת ב- M.
אם היא לא ב- M נוסיף אותה. זה מגדיל את M ועדיין
מתקיימת תח"ס בסתירה למקסימליות של M.

עד כה לא השתמשנו בטופולוגיה בכלל

(92) 6/6/07
טופולוגיה

שבוע הבא מתחיל איתנו ארז לפיד

המשך הוכחת משפט טיכונוף: אנחנו אומרים להראות שאם X_α קומפקטיים אז $\prod X_\alpha$ קומפקטי.

ראינו שמספיק להראות שאם $A=(A_i)_{i\in I}$ משפחה מקסימלית של תתי קבוצות $A_i \subseteq \prod X_\alpha$ המקיימות תח"ס אזי $\bigcap \bar{A_i} \neq \emptyset$.

ציינו שתי תכונות של אוסף מקסימלי של תח"ס:

1) סגור לגבי חיתוכים סופיים

2) אם $S\cap A_j \neq \emptyset$ לכל j אזי $S\in A$. עלינו למצוא נקודה $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigcap_{i\in I}\bar{A_i}$.

נניח שמצאנו נקודה $x=(x_\alpha)$. איך נבדוק שהיא אכן נמצאת בחיתוך? צריך להראות ש- $x\in\bar{A_i}$ לכל $i\in I$. כלומר כל קבוצה פתוחה ב- $\prod X_i$ שמכילה את x חותכת את A_i. כלומר לכל $V\subseteq \prod X_i$ פתוחה $V\cap A_i\neq\emptyset$. מספיק להראות את זה לאיברי בסיס של הטופולוגיה שמכילים את x. אבל A היא מקסימלית. אז אם איבר בסיס חותך את כל איברי A אז האיבר נמצא ב- A. סה"כ מספיק להראות שכל איבר בסיס המכיל את x נמצא במשפחה A.

עכשיו נשים לב: איבר בסיס הוא מהצורה $U_{\alpha_1}\times U_{\alpha_2}\times\dots\times U_{\alpha_n}\times\prod_{\beta\neq\alpha_i} X_\beta$ זהו חיתוך סופי של איברים מתת הבסיס. קבוצה מקסימלית תח"ס סגורה לחיתוכים סופיים. אז מספיק להראות שכל איבר תת בסיס $\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$ שמכיל את x נמצא ב- A.

התנאי ש- $U_\alpha\times\prod_{\beta\neq\alpha}X_\beta$ שקול לכך ש- $x_\alpha\in U_\alpha$

אז אם $x_\alpha\in U_\alpha$ אז $U_\alpha\cap\pi_\alpha(A_i)\neq\emptyset$ כלומר $x_\alpha=\pi_\alpha(x)$.

נתבונן באוסף $\pi_\alpha(A_i)$ עבור α קבוע. מספיק למצוא נקודה $x_\alpha\in\bigcap\overline{\pi_\alpha(A_i)}$ כי עבור נקודה כזו לכל פתוחה $U_\alpha\subseteq X_\alpha$ מתקיים $\emptyset\neq U_\alpha\cap\pi_\alpha(A_i)$. ונבדוק ש- $x\in\bigcap\bar{A_i}$ קיבלנו תנאי לכל α לחוד. כלומר: לכל $U_\alpha\subseteq X_\alpha$ המכילה $x_\alpha\in U_\alpha$

מתקיים לכל i $U_\alpha \cap \pi_\alpha(A_i) \neq \emptyset$.

האוסף $(\pi_\alpha(A_i))_{i\in I}$ הוא תח"ס שהרי הוא תמונה של אוסף המקיים את תח"ס. כלומר יש לנו ש- $x_\alpha \in \bigcap \overline{\pi_\alpha(A_i)}$ לכל α. עכשיו נבחר x_α הנמצא בחיתוך $\bigcap\overline{\pi_\alpha(A_i)}$ (α קבוע).
כדי למצוא x_α כזה, אנו משתמשים בקומפקטיות של X_α עצמו.
כיוון ש- $\{\pi_\alpha(A_i)\}$ מקיים תח"ס, אז יש נקודה בחיתוך הסגורים.

מרחבי מנה

<u>תזכורת</u>: אם נתונה חבורה G ותת חבורה נורמלית $N \trianglelefteq G$ נוכל לבנות את חבורת המנה G/N שבה המחלקה N היא בעצם איבר היחידה.

<u>תזכורת</u>: אם W מרחב וקטורי מעל שדה K ואם $V \subseteq W$ תת מרחב אנו יכולים לבנות את מרחב המנה W/V שבו מדביקים את כל איברי V עם נקודה אחת - האפס.

במרחבים טופולוגיים שוב אנו מתעניינים במרחבי מנה. מתוך מקרה פרטי נדבר עבור $A \subseteq X$ תת מרחב של X, A קבוצה כלשהי ב-X עם הטופולוגיה המושרית, לבנות מרחב חדש X/A.

<u>דוגמאות</u>: $X = I = [0,1]$ $\quad A = \{0,1\}$ $\quad \Rightarrow \quad I/\{0,1\} \cong S^1$

$D^2 =$  $\quad D^2/\partial D^2 = D^2/S^1 \cong S^2$

רוצים תהליך כללי שמאפשר להפוך תת מרחב שלם לנקודה אחת.

מרחבי מנה (מונקרס 135-142).

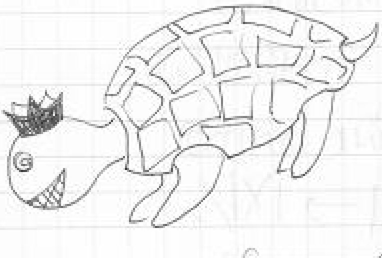
אנחנו נדבר על העתקות $p:X\to Y$ שהן על.

<u>הגדרה:</u> העתקה $p:X\to Y$ נקראת העתקת מנה אם:

1) p על

2) $U\subseteq Y$ פתוחה אמ"מ $p^{-1}(U)$ פתוחה ב-X

(כיוון אחד תמיד נכון כי p רציפה)



<u>דוגמא להעתקה שאיננה מנה:</u>

$X=\{0\}\sqcup(0,1]$ $\qquad$ $Y=[0,1]$

אין בעיה לקחת העתקה רציפה $p:X\to Y$ שהיא על.

0 עובר ל-0 ו-$(0,1]$ עובר לעצמו.

אבל, ניקח $U=\{0\}$

מתקיים $p^{-1}(\{0\})=\{0\}$ פתוחה ב-X אבל U לא פתוחה ב-Y.

<u>דוגמאות להעתקת מנה:</u>

1) הזהות

2) $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow[p_1]{\text{הטלה}}\mathbb{R}$

3) ברור שאם $p:X\to Y$ העתקה פתוחה ועל אז היא העתקת מנה.

(תזכורת: $f:A\to B$ פתוחה אם לכל $U\subseteq A$ פתוחה גם $f(U)\subseteq B$ פתוחה.)

למה זה ברור? נניח ש-$p^{-1}(U)$ פתוחה ב-X. צריך להראות ש-U פתוחה ב-Y. אבל $U=p(p^{-1}(U))$. p פתוחה

$\Rightarrow U$ פתוחה.

להשתמש ש-p היא על. כי אחרת יכול להיות שיש איבר ב-U שאין לו מקור.

בנייה של מרחב מנה

הגדרה: יהי מ"ט X עם יחס שקילות $\sim$ על איברי הקבוצה $|X|$.
נגדיר מ"ט $X/_\sim$ כדלקמן:
הקבוצה $|X/_\sim|$ היא קבוצת מחלקות השקילות של $\sim$
(מסומן $|X|/_\sim = X$)
הטופולוגיה של $X/_\sim$: קבוצה $O \subseteq X/_\sim$ היא
פתוחה אמ"מ $p^{-1}(O)$ פתוחה ב-X כאשר
$p: |X| \to |X|/_\sim$ ההעתקה של
(כלומר הטופולוגיה של $X/_\sim$ היא המקסימלית כך
שההעתקה $p: X \to X/_\sim$ רציפה.)

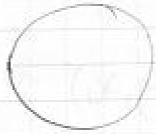
טענה: האוסף הנ"ל של קבוצות ב-$X/_\sim$ היא טופולוגיה.
הוכחה: יש להראות שהאוסף מכיל את $\emptyset$, $X/_\sim$ וכן סגור
לגבי חיתוכים סופיים ואיחודים כלשהם.
תהיינה $U_\alpha \subseteq X/_\sim$ פתוחות, כלומר $p^{-1}(U_\alpha)$ פתוחות ב-X.
אזי $p^{-1}(\bigcup U_\alpha) = \bigcup p^{-1}(U_\alpha)$
וזו קבוצה פתוחה $\Leftarrow$ $\bigcup U_\alpha$ פתוחה.
באותו אופן עבור חיתוך סופי של פתוחות.
כמו כן, כמובן $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ פתוחה $\Leftarrow$ $\emptyset$ פתוחה
$p^{-1}(X/_\sim) = X$ פתוחה $\Leftarrow$ $X/_\sim$ פתוחה.

הערה: לפי ההגדרה $X \to X/_\sim$ היא העתקת מנה.

יש שתי דרכים לקבל מרחב מנה - להדביק מרחבים או
לפרק מרחבים.

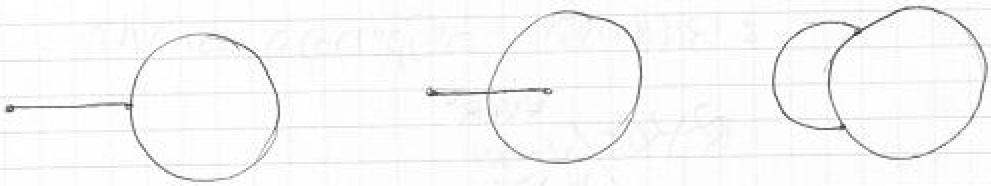
דוגמאות:

מרחבי הדבקה -

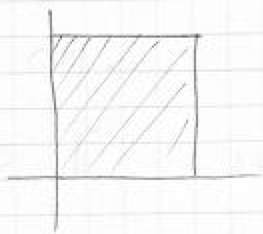
$X = S^1$ 

$Y = I$ 

אפשר להדביק בכל מיני דרכים.

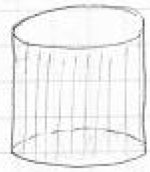


$X = I \times I$



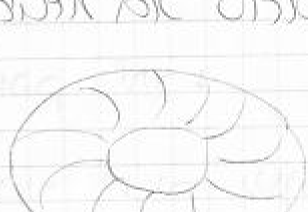
אם נגדיר יחס שקילות: של $(0,y) \sim (1,y)$

$$\Rightarrow I\times I/_{\sim} = S^1 \times I$$

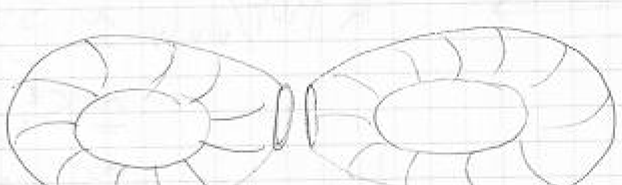


בצורה הזאת אפשר לקבל צורות די מסובכות.

למשל אפשר לקבל טורוס אם מדביקים את קצות הגליל:



אפשר להוציא דיסק מתוך הטורוס, ולשרשר את זה ולהדביק:



ואפשר לשרשר ככה עוד טורוס ועוד ועוד....

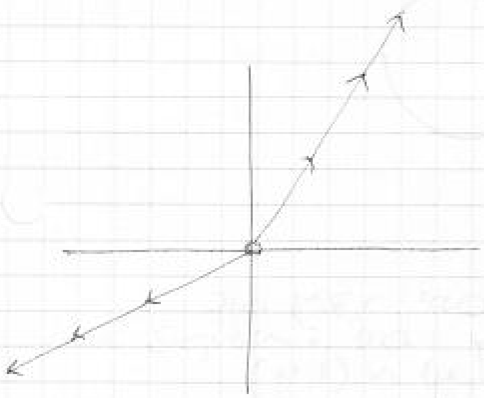
$\boxed{\text{מרחבי מנה}}$ -

$$X=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$\forall y,x_1,x_2 \qquad (y,x_1)\sim(y,x_2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}\cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\sim$$

המרחב הפרוייקטיבי (הדו-ממדי):



$$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\Big/_{\substack{\forall v\in\mathbb{R}^2\\ v\sim\lambda v\\ \forall\,\lambda>0}}$$

אז מתקבל S^1, כי בעצם

כל מה שנשאר לנו הוא כיוון.

קודם קיבלנו את S^1 ע"י $I/_{0\sim1}$

אך כל זה יכולנו לעשות באופן כללי ולקבל

$$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\Big/_{\substack{v\sim\lambda v\\ \lambda>0}} \cong S^{n-1}$$

הנה משהו מסובך יותר:

$$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\Big/_{\substack{v\sim\lambda v\\ \lambda\neq0}}$$

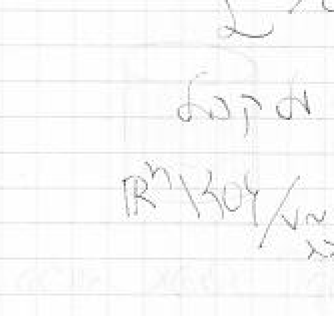
נבדוק מה קורה עבור n-ים נמוכים.

$n=1$

$$\mathbb{R}\setminus\{0\}/_{v\sim\lambda v} = \{pt\}$$

נקודה אחת

$n=2$



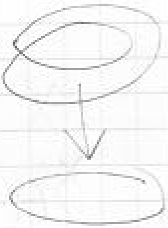
$$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}/_{v\sim\lambda v} \cong S^1/_{v\sim -v}$$

מזהים שתי נקודות אנטיפודיות

$$\cong S^1_+/_{-1\sim1}$$

$$\cong S^1$$ מה מוכר!

$$p: S^1 \longrightarrow S^1/\sim$$
$$v \longmapsto [v,-v]$$
$$-v \longmapsto [-v,v]$$

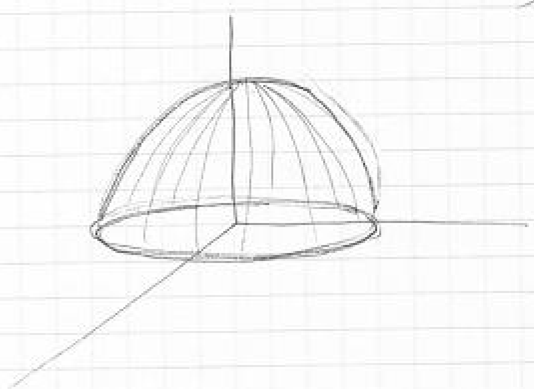


$n=3$ $\quad \mathbb{R}^3\setminus\{0\}/_{v\sim\lambda v} \;=\;$ המישור הפרויקטיבי $= \mathbb{RP}^2$

real · projection · 2D

מרחב הישרים שעוברים דרך הראשית

רצו למצוא צורה לה דרך קלה כדי למצוא מודלים לישרים. אז ניקח חצי ספרה עליונה $z\geq 0$.



כל ישר חותך את הספרה הזאת בנקודה אחת או בשתיים במקרה ש- $z=0$.
יש דרך לזהות את הנקודות האלה כך:

$$S^2_+/_{\substack{v\sim -v \\ \forall v=(x,y,0)}}$$

תמונה של $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}/_{\substack{v\sim\lambda v \\ \lambda\neq 0}}$ כמרחב המנה [illegible]

אפשר לחשוב על S^2_+ כדיסקית

הנקודות הפנימיות הן אלה שיש להן נציג יחיד. ואילו לנקודות אנחנו רוצים לזהות את v עם $-v$ אז $\mathbb{RP}^2 = D^2/_{\substack{v\sim -v \\ v\in\partial D^2}}$ ולזה אין בכלל שיכון ב- $\mathbb{R}^3$.

יש הרבה שאלות שאפשר לשאול על מרחבי מנה. אנחנו נעסוק בהן בעיקר בתרגול.

מקרה פרטי:

נניח $A\subseteq X$ תת קבוצה של מ"ט X.

אזי מסמנים: $X/A = X/_{a\sim a' \ \forall a,a'\in A}$

למשל, $D^2/\partial D^2 = S^2$

$I/\partial I = S^1$

(32) 11.6.07
טופולוגיה

ארנן לפיד מחליף את פרגין

הגדרה: מרחב (X,τ) יקרא נורמלי אם X הוא T_1 ולכל $A \subseteq V$ סגורה A פתוחה V קיימת U פתוחה כך ש-
$A \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq V$

X נקרא רגולרי אם X הוא T_1 ולכל $x \in V$ פתוחה קיימת U פתוחה כך ש- $x \in U \subseteq \bar{U} \subseteq V$.

- ברור שנורמליות גוררת רגולריות.
- רגולריות ⇐ האוסדורף (תרגיל למחשבה)
- רגולריות ⟺ T_1 וגם לכל קבוצה סגורה A ו- $x \notin A$ - $\{x\}$ ו- A ניתנות להפרדה.
(תרגול למחשבה ע"י מעבר למשלים)
- נורמליות ⟺ T_1 וגם כל שתי קבוצות סגורות זרות ניתנות להפרדה.

הערה - מרחב רגולרי הוא לא בהכרח נורמלי.
- מרחב T_1 איננו בהכרח האוסדורף.
- מרחב האוסדורף אינו בהכרח רגולרי.

טענה: - אם X הוא T_1 (בהתאמה האוסדורף / רגולרי) אז כל תת מרחב הוא T_1 (בהתאמה האוסדורף / רגולרי)
- אם X,Y הם T_1 (האוסדורף / רגולריים) אז $X \times Y$ הוא T_1 (האוסדורף / רגולרי).

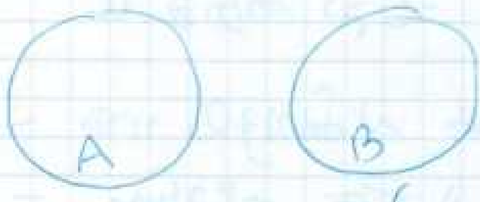
הוכחה: פשוטה למדי. המקרה הכי מסובך הוא רגולריות אז נעשה אותו. נניח ש- X,Y רגולריים ונראה ש- $X \times Y$ רגולרי. נניח $U \subseteq X \times Y$ פתוחה ו- $(x_0,y_0) \in U$ קיימות $x_0 \in U_1 \subseteq X$, $y_0 \in V_1 \subseteq Y$ פתוחות כך ש- $U_1 \times U_2 \subseteq U$.
לפי ההנחה קיימות V_1, V_2 פתוחות ב- X ו- Y בהתאמה כך ש- $x_0 \in V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1$, $y_0 \in V_2 \subseteq \bar{V}_2 \subseteq U_2$. ניקח $V = V_1 \times V_2$.
אז $(x_0,y_0) \in V \subseteq \bar{V} = \bar{V}_1 \times \bar{V}_2 \subseteq U_1 \times U_2 \subseteq U$.

הערה: זה נכון גם למכפלה בשתי (בטופולוגיית המכפלה)

הערה: נורמליות לא בהכרח עוברת לתת מרחבים או למכפלות.

טענה: מרחב מטרי הוא נורמלי.

הוכחה: נניח A, B סגורות זרות.



$$d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$$

ה- inf הוא לא בהכרח מינימום אפילו אם A סגורה. (למשל $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $A=\mathbb{R}_{<0}$ $x=1$)

אבל אם A סגורה אז $d(x,A)=0$ אמ"מ $x\in A$.

(אם $d(x,A)=0$ אז קיימים x_n כך ש- $d(x,x_n)<\frac{1}{n}$ ואז $x_n\to x$. כיוון ש- A סגורה $x\in A$).

נגדיר $U=\bigcup_{x\in A} B_x\left(\frac{d(x,B)}{2}\right)$ $V=\bigcup_{x\in B} B_x\left(\frac{d(x,A)}{2}\right)$

כמובן $A\subseteq U$, $B\subseteq V$.

נראה ש- V, U זרות. אם $z\in V\cap U$ אז קיים $x\in A$ כך ש- $d(x,z)<\frac{d(x,B)}{2}$ וקיים $y\in B$ כך ש- $d(y,z)<\frac{d(y,A)}{2}$. כמובן

$$d(x,B)\le d(x,y)$$
$$d(y,A)\le d(x,y)$$

ואז

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)<\frac{d(x,B)}{2}+\frac{d(y,A)}{2}\le\frac{d(x,y)}{2}+\frac{d(x,y)}{2}=d(x,y)$$

וזאת סתירה.

במרחב מטרי, לכל נקודה יש בסיס בן מניה של סביבות של x. כלומר $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ פתוחות $x\in U_n$ כך שלכל $x\in V$ פתוחה קיים n כך ש- $U_n\subseteq V$. למשל $U_n=B_x(\frac{1}{n})$.

שאלה מנחה בטופולוגיה: האם/איך ניתן לאפיין מרחבים מטריים טופולוגית?

<u>משפט המטריזביליות של Urysohn</u>: אם X רגולרי עם בסיס בן מניה אז X מטריזבילי (כלומר X הומאומורפי למרחב מטרי).

<u>הערה</u>: ההפך לא בהכרח נכון. (למרחב מטרי אין בהכרח בסיס בן מניה.)

<u>תרגיל</u>: למרחב מטרי יש בסיס בן מניה אמ"מ יש לו סדרה צפופה.

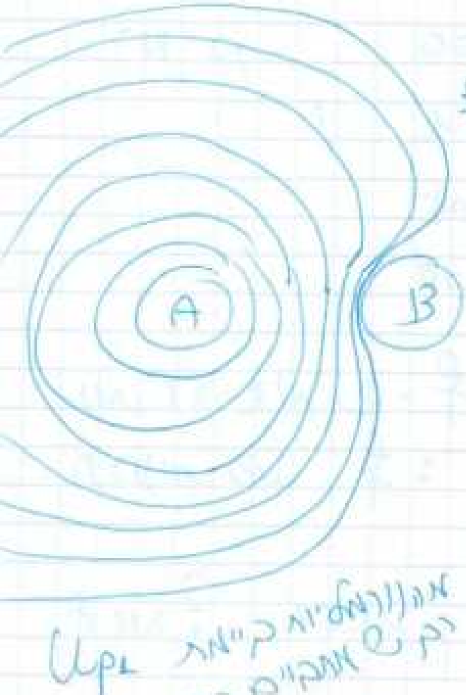
<u>הלמה של Urysohn</u>: אם X נורמלי; $A,B\subseteq X$ סגורות זרות. אז קיימת $f:X\to[0,1]$ רציפה כך ש- $f|_A\equiv 0$, $f|_B\equiv 1$!

<u>הערה</u>: 1) יש מרחב רגולרי X כך שכל פונקציה רציפה $f:X\to\mathbb{R}$ היא קבועה..

2) הכיוון ההפוך של הלמה של Urysohn הוא נכון גם כן: ניקח $U=f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$, $V=f^{-1}((\frac{1}{2},1])$

3) אם X מרחב מטרי אפשר לקחת

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$



<u>הוכחת הלמה</u>: נסמן $P=\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{p_0,p_1,p_2,\dots\}$

כאשר $p_0=1$, $p_1=0$.

המטרה היא להגדיר לכל $p\in P$ קבוצה פתוחה $U_p\subseteq X$ עם התכונות הבאות:

1) $U_1=U_{p_0}=X\setminus B$

2) לכל $p<q$ ב-P: $\overline{U_p}\subseteq U_q$

מהנורמליות קיימת U_{p_1} כך שמתקיים הדרוש

$U_{p_0}=X\setminus B$

נגדיר U_{p_n} באינדוקציה: נניח שהגדרנו $U_{p_0},\dots,U_{p_n}$ והם מקיימים ש- $\overline{U_{p_i}}\subseteq U_{p_j}$

אם $p_i<p_j$ (*). נגדיר את $U_{p_{n+1}}$ באופן הבא:

$$\max_{\substack{p_j<p_{n+1}\\ j=0,\dots,n}}\{p_j\} = p_\ell < p_{n+1} < p_k = \min_{\substack{p_j>p_{n+1}\\ j=0\dots n}}\{p_j\}$$

נבחר את $U_{p_{n+1}}$ כך ש-

$$\overline{U_{p_\ell}} \subseteq U_{p_{n+1}} \subseteq \overline{U_{p_{n+1}}} \subseteq U_{p_k}$$

(קיים בגלל הנורמליות). נראה ש-(*) מתקיים עבור $1\le i,j\le n+1$.

אם $p_i<p_{n+1}$ אז $\overline{U_{p_i}} \subseteq \overline{U_{p_\ell}} \subseteq U_{p_{n+1}}$

אם $p_{n+1}<p_i$ אז $\overline{U_{p_{n+1}}} \subseteq U_{p_k} \subseteq U_{p_i}$.

כעת עבור $p\in\mathbb{Q}$ כך ש- $p<0$ נגדיר $U_p=\emptyset$

ועבור $p>1$ $U_p=X$ וכעת התכונות (1) ו-(2) מתקיימות לכל $p,q\in\mathbb{Q}$.

נגדיר $f(x)=\inf\{p\in\mathbb{Q} : x\in U_p\}$

זה מוגדר היטב כי אם $x\in U_p$ אז $p\ge 0$, כלומר $f(x)\ge 0$

ו- $x\in U_p$ לכל $p>1$ ולכן $f(x)\le 1$

כמו כן $f|_A\equiv 0$ כי $A\subseteq U_0$

ו- $f|_B\equiv 1$ כי אחרת $x\in B$ ו- $x\in U_p$

עבור $p<1$ ואז $U_p\subseteq U_1=X\setminus B$ סתירה

לכך ש- $x\in U_p$.

נותר להראות ש- f רציפה.

תכונות של f: 1) אם $x\in\overline{U_r}$ אז $f(x)\le r$

2) אם $x\notin U_r$ אז $f(x)\ge r$

למה? 1) אם $x\in\overline{U_r}$ אז $x\in U_p$ לכל $r<p$ ולכן

$$f(x)\le\inf_{p\in\mathbb{Q}}\{p : p>r\}=r$$

2) אם $x\in U_p$ אז $p>r$ ולכן $f(x)\ge r$

לפי הגדרת f.

אז עכשיו נראה רציפות של f:

נניח $x_0 \in X$, $f(x_0)=a$ ו- $\varepsilon>0$. צריך להראות

שקיימת U פתוחה $x_0 \in U$ וכך ש- $f(U)\subseteq(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

קיימים $p,q\in\mathbb{Q}$ כך ש- $a-\varepsilon<p<a<q<a+\varepsilon$.

ניקח $U=U_q \setminus \overline{U_p}$. נראה ש- $f(U)\subseteq[p,q]\subseteq(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

אם $x\in U$ אז $x\in U_q\subseteq\overline{U_q}$ ולכן לפי (1) $f(x)\le q$.

מצד שני, $x\notin\overline{U_p}$, ובפרט $x\notin U_p$ ולכן לפי (2) $f(x)\ge p$.

☺

משפט יותר חזק: משפט ההרחבה של Tietze

אם X נורמלי, $A\subseteq X$ סגורה, ו- $f:A\to[0,1]$

רציפה אז קיימת $g:X\to[0,1]$ רציפה כך ש- $g|_A\equiv f$.

זה אכן חזק יותר כי אם A,B סגורות ניקח

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in A\\ 1 & x\in B\end{cases}$$

f רציפה על $A\cup B$. הרחבה רציפה של f לכל X

שקולה ללמה של Urysohn.

ההוכחה מסתמכת על הלמה של Urysohn.

35 13.6.07 שיעור עם ארז לפיד

טופולוגיה

משפט המטריזביליות של אוריסון:

אם X רגולרי עם בסיס בן-מניה אז X מטריזבילי.

הוכחה: כדי להשתמש בלמה של אוריסון צריך להראות ש-X נורמלי.

יהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה ותהיינה A,B סגורות זרות. אנחנו רוצים להפריד אותן ע"י קבוצות פתוחות.

תהי $\mathcal{B}_1=\{U\in\mathcal{B} : \bar{U}\cap B=\emptyset\}$

נטען ש- $\mathcal{B}_1$ כיסוי של A: לכל $x\in A$ $x\in B^c$

מהרגולריות קיימת U פתוחה כך ש- $x\in U\subseteq\bar{U}\subseteq B^c$.

אפשר לקחת $V\in\mathcal{B}$ כך ש- $x\in V\subseteq U$ ואז $V\in\mathcal{B}_1$.

ומכאן, $\mathcal{B}_1$ כיסוי של B^c.

באותו אופן $\mathcal{B}_2=\{U\in\mathcal{B}: \bar{U}\cap A=\emptyset\}$ כיסוי של B.

הבעיה שאין ש- $\cup\mathcal{B}_1$ ו- $\cup\mathcal{B}_2$ זרות! (אמנם פתוחות).

עכשיו נשתמש בכך ש- $\mathcal{B}$ בן מניה. $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ בנות מניה.

נניח

$$\mathcal{B}_1=\{U_1',U_2',\dots\}$$
$$\mathcal{B}_2=\{V_1',V_2',\dots\}$$

נגדיר

$U_n=U_n'\setminus(\bar{V}_1'\cup\dots\cup\bar{V}_n')$ פתוחה

$V_n=V_n'\setminus(\bar{U}_1'\cup\dots\cup\bar{U}_n')$ פתוחה

ונגדיר $U=\bigcup_1^\infty U_n$ $V=\bigcup_1^\infty V_n$ פתוחות.

אז $A\subseteq U$ כי $U_n\cap A=U_n'\cap A$

כלומר

$$U\cap A=\cup(U_n\cap A)=$$
$$=\cup(U_n'\cap A)=\cup U_n'\cap A=A$$

ואותו טיעון אומר ש- $B\subseteq V$ (שים לב שהוכחנו רק דברים שלא מזכירים את B).

נראה ש- $U\cap V=\emptyset$. אחרת, אם $x\in U\cap V$ אז $x\in U_n$ ו- $x\in V_m$. נניח בה"כ $m\le n$. אז $x\in V_m'$ כי $V_m\subseteq V_m'$. מצד שני $x\in U_n$ ו- $m\le n$

ולכן $x \notin \overline{V_m'}$ ובפרט $x \notin V_m'$ בסתירה.

$\Leftarrow$ X נורמלי.

כעת נראה ש- X משוכן ב $[0,1]^{\aleph}$ (שהוא מרחב מטרי- טופולוגיית המכפלה על $[0,1]^{\aleph}$ היא הטופולוגיה שמושרית ממטריקת המכפלה $d((x_n),(y_n)) = \sum 2^{-n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$.

אז נקבל ש- X הומאומורפי לתת מרחב של מרחב מטרי ולכן מטריזבילי. אז נבנה את השיכון.

B בסיס בן מניה. נסתכל על $P=\{(U,V) : U,V\in B\ \ \overline{U}\subseteq V\}$

P סופית או בת מניה. נגדיר $F: X \to [0,1]^P$

$$(F(x))_{U,V} = F_{U,V}$$

כאשר $F_{U,V} : X \longrightarrow [0,1]$ היא פונקציה רציפה כך ש-

$$F_{U,V}|_{\overline{U}} \equiv 1$$

$$F_{U,V}|_{V^c} \equiv 0$$

(קיום $F_{U,V}$ מובטח מהלמה של אוריסון)

F רציפה כי $F_{U,V}$ רציפה לכל $(U,V)\in P$.

צריך להראות: 1) F חח"ע

2) F שיכון, כלומר $F: X \longrightarrow F(X)$ הומאומורפיזם.

טופולוגיה המושרית מ- $[0,1]^P$

כלומר לכל U פתוחה ב- X, $F(U) = V\cap F(X)$ עבור V פתוחה ב- $[0,1]^P$.

F חח"ע: אם $x\neq y$ אז קיימת V פתוחה כך ש- $x\in V$ ו- $y\notin V$. בה"כ $V\in B$. מנורמליות קיימת U פתוחה כך ש- $x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq V$. בה"כ $U\in B$ ואז

$$F_{U,V}(x)=1 \quad F_{U,V}(y)=0$$

ובפרט $F(x)\neq F(y)$.

תהי U פתוחה.

F הומיאומורפיזם: נניח ש- $y_0 \in F(U)$. קיים $x_0 \in U$ כך ש- $y_0 = F(x_0)$. נבחר $V' \in \mathcal{B}$ כך ש- $x_0 \in U$.

~~[illegible]~~

$x_0 \in V' \subseteq U$. נבחר $U' \in \mathcal{B}$ כך ש $x_0 \in U' \subseteq \overline{U'} \subseteq V'$.

נראה ש- $F(U) \supseteq \pi^{-1}_{U',V'}((0,1]) \cap F(X)$ (*)

כאשר $\pi_{U',V'} : [0,1]^{\mathcal{B}} \to [0,1]$ ההטלה על הקואורדינטה (U',V'). נשים לב ש- $y_0 \in F(X) \cap \pi^{-1}_{U',V'}((0,1])$

$\Leftarrow$ $F(U)$ פתוחה ב- $F(X)$ ונסיים.

אז נוכיח את (*). נניח $F(x) \in \pi^{-1}_{U',V'}((0,1])$, כלומר $F_{U',V'}(x) > 0$. $\Leftarrow$ $x \in V'$ שהרי $F_{U',V'}|_{X \setminus V'} = 0$

ו- $V' \subseteq U$ $\Leftarrow$ $x \in U$.

:)

הערה: הראינו טיפה יותר: מרחב רגולרי עם בסיס בן מניה משוכן ב- $[0,1]^{\aleph_0}$ ("קוביית הילברט"). בפרט כל מרחב מטרי ספרבילי (ניתן) שיכון בקוביית הילברט.

כאן עמנואל אלך

התחלה: הוכחת משפט בראואר (עמ' 316-330)

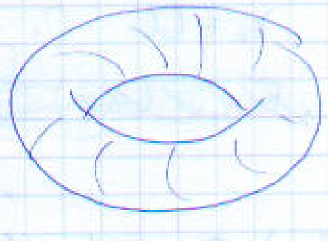
בעיית יסוד קשה בטופולוגיה שלא פתורה עד היום: בהינתן שני מרחבים X,Y האם $X \cong Y$?

אם חושדים ששני מרחבים טופולוגיים שקולים, אז ננסה לבנות שתי העתקות $Y \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X$ כך שמתקיים הדרוש.

אבל זה החלק הקל: החלק הקשה יותר הוא להוכיח ש- X איננו שקול ל- Y. למשל $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ גורר $n=m$.

זו אחת התגליות הגדולות של המאה ה-20. המרחבים האלה הם איזומורפיים בקבוצות: אבל אין שום העתקה הפיכה רציפה ביניהם! עוד דוגמא, ראינו ש- $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$. האם גם $\mathbb{RP}^2 \cong S^2$? התשובה היא לא, אבל הם דומים מאוד.

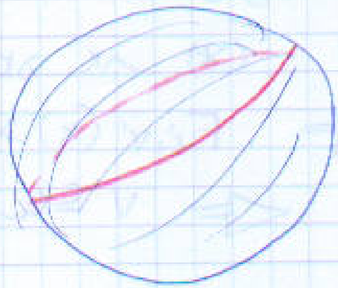
<u>בעיה:</u> $S^1\times S^1 \overset{?}{\cong} S^2$

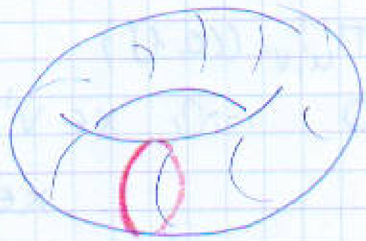


הם לא שקולים!

S^2 הוא פשוט קשר אבל $S^1\times S^1$ אינו פשוט קשר!

עוד הבדל: אם נוציא מ-S^2 מסילה סגורה נקבל מרחב שאינו קשיר. אבל יש מסילות סגורות שאפשר להוציא מ-$S^1\times S^1$ ועדיין נקבל מרחב קשיר





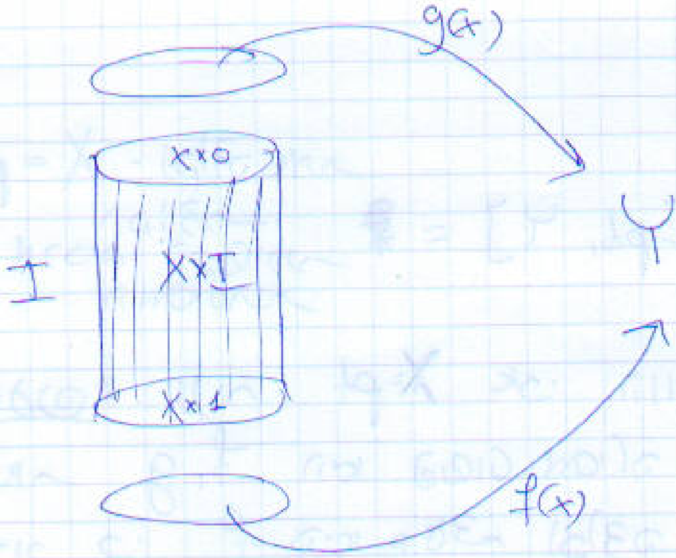
(חלאוהרחה)

<u>משפט ז'ורדן:</u> המשלים של כל מסילה סגורה במישור (= שיכון של S^1 במישור) הוא בעל שני מרכיבי קשירות בדיוק!

איך מראים ש-$S^1\times S^1$ לא פשוט קשר? די אינטואיטיבי שהמסילה בציור לא ניתנת לכיווץ לנקודה. אבל איך אפשר להוכיח את זה פורמלית?

ראינו שאם שדה F הוא משמר מקומית ו-β, α הומוטופיות אז $\int_\alpha F=\int_\beta F$. אז צריך להגדיר שדה משמר מקומית שהאינטגרל על המסילה הוא לא אפס. זאת דרך מסדר אבל היא לא כל כך בעולם הטופולוגי. אנחנו רוצים לדעת להתמודד עם מרחבים טופולוגיים שלא קשורים לאנליזה, שאי אפשר לגזור בהם, שהם לא חלקים ויפים...

<u>הגדרה:</u> הומוטופיה בין העתקות $f,g: X\to Y$: הומוטופיה היא העתקה $H: X\times I\to Y$ רק ש- $H(x,0)=f(x)$ ו- $H(x,1)=g(x)$.



הומוטופיה היא
כמו הרחבה
של ההעתקות
f,g אל
הגליל.

הגדרה: נגדיר יחס שקילות על אוסף הפונקציות $map(X,Y)=\{f:X\to Y\}$. אומרים ש- $g\sim f$ (f הומוטופית ל-g) אם קיימת הומוטופיה H ביניהן.

הומוטופיה זה אומר שאפשר לעוות (deform) באופן רציף את f ל-g. כלומר יש משפחה של פונקציות רציפות שמעבירה אותנו מ-f ל-g.

משפט יסוד: יחס ההומוטופיה הוא יחס שקילות.

הוכחה: (סמן $H_t(x)=H(t,x)$.

$f\sim f$ כי ניקח $H_t=f$ לכל t.

אם $g\sim f$ אז $f\sim g$ כי בפשטות אפשר להפעיל את H בכיוון ההפוך, כלומר $H'(t,x)=H(1-t,x)$

אם $g\sim f$; $g\sim h$ אז $f\sim h$ כי אפשר להדביק את הפונקציות אחת לשניה. ☺

קבוצת מחלקות ההומוטופיה של העתקות בין X ל-Y תסומן ב- $[X,Y] = map(X,Y)/_{\sim}$.

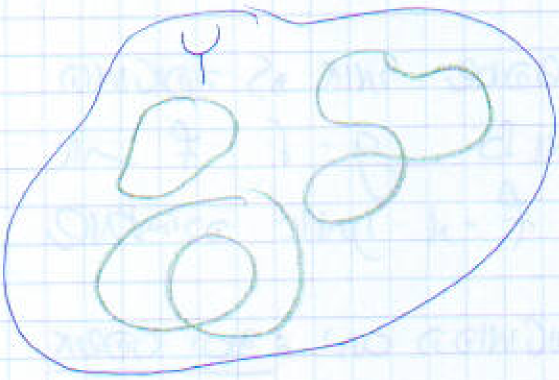
דוגמאות

1) $X = pt$ - נקודה אחת

$$\pi_0 Y := [pt, Y] =$$ הקבוצת מרכיבי הקשירות המסילתית

<u>הערה</u>: נניח $X = pt$ אזי הומוטופיה בין שתי פונקציות f, g היא פשוט מסילה ב-Y. וזה ברור כי f היא בעצם נקודה ב-Y ו-g היא נקודה ב-Y ואם $pt \times I \xrightarrow{H} Y$ הומוטופיה הרי $I \cong I \times pt$ אז זו פשוט מסילה.

2) $X = S^1$ הומוטופיות של מסילות סגורות במרחב.



$f, g : S^1 \to Y$

אומרים ש-X הוא פשוט קשר אם:

① X קשיר מסילתית

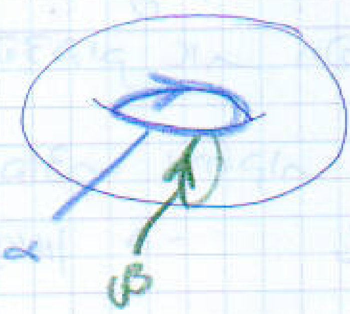
② כל העתקה $f : S^1 \to X$ היא הומוטופית למסילה קבועה - כלומר $c : S^1 \to X$

$s \longmapsto x_0 = const$

כלומר לא סתם המקושר, אלא הקשירות שלו פשוטה.

למשל $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ אינו פשוט קשר

אם נסתכל על α, β כמו בציור אז $\beta \not\simeq \alpha$.

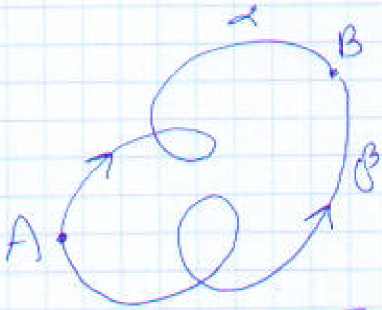


<u>הגדרה</u>: נגדיר יחס (שקילות) על אוסף כל ההעתקות

$I \to X$ - יחס הומוטופיה של מסילות (<u>תמיד</u> ביחס

לנקודות הקצה) בצורה הבאה:

$$F : \underset{(s)}{I} \times \underset{(t)}{I} \longrightarrow X$$



נתונות שתי מסילות בין שתי נקודות A,B

$$\alpha, \beta : I \to X$$

$$\alpha(0) = \beta(0)$$

$$\alpha(1) = \beta(1)$$

$$F_t(0) = F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$$

$$F_t(1) = F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$$

זה כמו הומוטופיה רק שיש נקודות קצה וחשוב שהן לא ישתנו במעבר של הפונקציה.

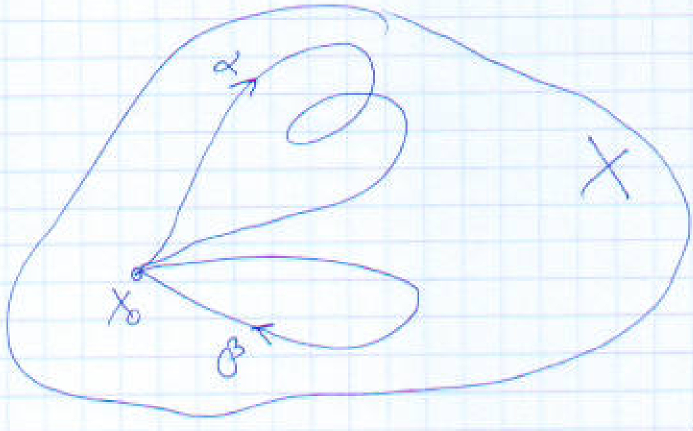
אם זה יחס שקילות (לא קשה להוכיח) ✓

<u>הערה</u>: כל העתקה $I \to X$ הומוטופית (אם מרשים לנקודות הקצה לנוע) לפונקציה קבועה!

וזה לא מעניין. זה מעניין רק אם קובעים את נקודות הקצה.

<u>הרעיון של החבורה היסודית</u>:

הבחנה: $[S^1, X]$ בד"כ איננה חבורה. <u>אבל</u>, אם נקח מסילות סגורות שמתחילות ונגמרות בנקודה קבועה אחת $x = x_0$



$$\alpha, \beta : I \to X$$

עם נקודות קצה קבועות אפשר לעשות מסילה שרצה פי 2 יותר מהר על α ואז פי 2 יותר מהר על β. זה נקרא שרשור ומסמנים $\alpha * \beta$.

החבורה היסודית $\pi_1(X, x_0)$ תלויה בנקודה שבחרנו!

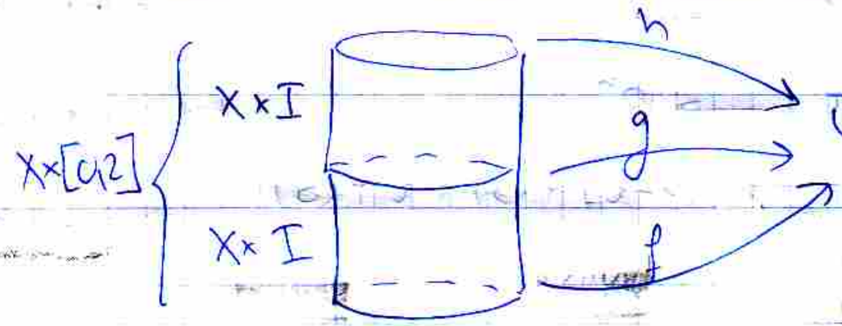
(39) 18.6.07

טופולוגיה

בשיעור הקודם דיברנו על הומוטופיה ועל הומוטופיה בין מסלולים (ביחס לנקודות קצה)

הערה: עבור מרחבים "סופיים" X,Y המתקבלים מ"הדבקות" של משולשים
אז קלבית ה- אמדיים $\le \aleph_0$ $\#[X,Y] = \{f: X\to Y\}/_\sim$
$f\sim g$ אם קיימת הומוטופיה $H: X\times I \to Y$.

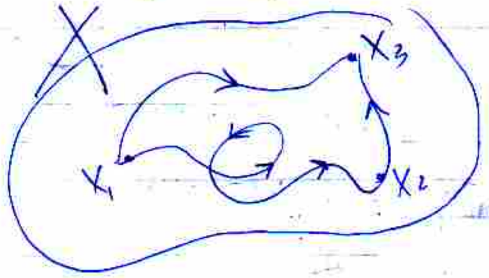
יחס ההומוטופיה הוא יחס שקילות: לא ממש הסברנו את הטרנזיטיביות.
נניח ש- $f\sim g\sim h$.



באמת הומוטופיה $f\sim g$ אמ"מ קיימת פונקציה $H': X\times[0,2]\to Y$
רק ש- $H'(x,0)=f(x)$; $H'(x,1)=g(x)$.
זה ברור כי $[0,1]\cong[0,2]$ (פשוט כיווץ והרחבה בהתאם).
$\Rightarrow$ ברור מ"ד ש- $f\sim h$. כי יש לנו שתי הומוטופיות
מ- $X\times I$ ואותן אפשר להדביק בקלות להומוטופיה אחת
מ- $X\times[0,2]$.

נקבע מרחב טופולוגי X (אולי עם כמה נקודות ב- X) ונתעניין
במסלולים עד כדי הומוטופיה בין נקודות אלו.

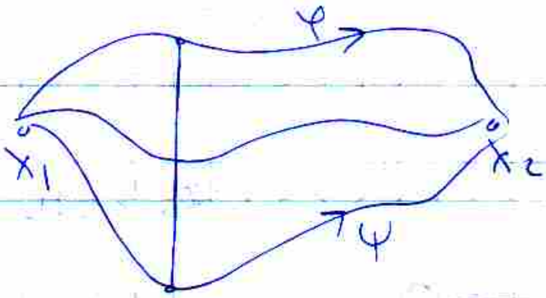
$I \xrightarrow{\gamma} X$



החבורה היסודית $\pi_1(X,x_0)$

<u>טענה</u>: יהי $X=\mathbb{R}^n$ ויהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. אזי כל שתי מסילות φ,ψ שמחברות את x_1 עם x_2 הן הומוטופיות.

<u>הוכחה</u>: $\varphi,\psi: I\to\mathbb{R}^n$, $\varphi(1)=\psi(1)=x_2$, $\varphi(0)=\psi(0)=x_1$



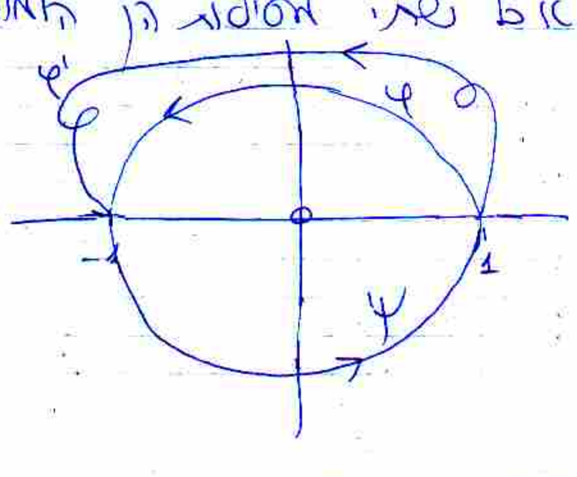
$$H(s,t): I\times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(s,t)\longmapsto (1-t)\varphi(s)+t\psi(s)$$

קל לראות שזו אכן הומוטופיה ☺

<u>טענה</u>: כל שתי מסילות בתת $\underbrace{\text{קבוצה קמורה של}}^{X\subseteq\mathbb{R}^n}$ $\mathbb{R}^n$ הומוטופיות.

<u>הגדרה</u>: $K\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת קמורה אם לכל $x,y\in K$ כל נקודה מהצורה $p=sx+(1-s)y$ עבור $0\le s\le 1$ היא ב-K.

לעומת זאת, ב-$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ לא כל שתי מסילות הן הומוטופיות



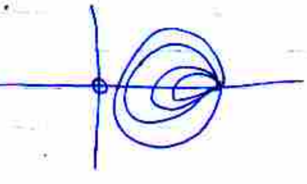
$\varphi \not\sim \psi$

משום ש- $\int_\psi d\theta=-\int_\varphi d\theta$

ומצאת, $\varphi\sim\varphi'$.

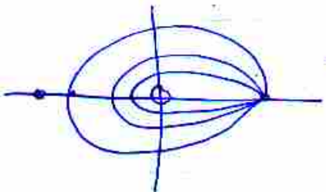
עוד דוגמה:

אלה הומוטופיות לקבוע:



כי כאן כל התחום קמור

אבל אלה לא:



וכאן לא.

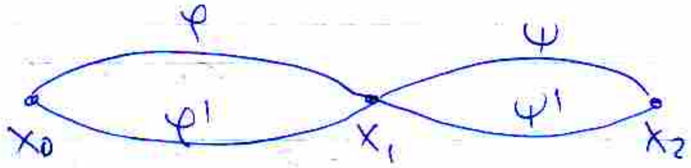
שרשור מסילות – ("אפילו חיידקים יודעים את זה")

נתונות שתי מסילות $\varphi,\psi: I\to X$. φ מחברת את x_0 עם x_1 ו- ψ מחברת את x_1 עם x_2 ..

$$(\varphi * \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ \psi(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

ראינו הדבקה של שתי פונקציות רציפות $\xRightarrow{\text{על קבוצות סגורות}}$ רציפה.

משפט: אם $\varphi\sim\varphi'$ אז לכל ψ $\varphi*\psi \sim \varphi'*\psi$
אם בנוסף $\psi\sim\psi'$ אז $\varphi'*\psi' \sim \varphi*\psi$.

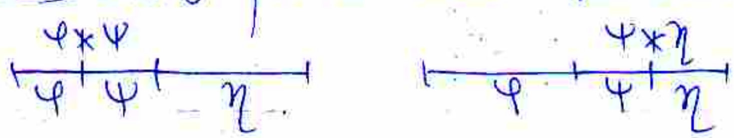


סימון: אם $x_0,x_1\in X$ ו- φ מסילה מ- x_0 ל- x_1 נסמן ב- $[\varphi]$ את מחלקת ההומוטופיה של φ. לפי המשפט ניתן להגדיר: $[\varphi*\psi] \overset{\text{def}}{=} [\varphi]*[\psi]$ וזה ב"ת בבחירת הנציגים.

טענה קלה: מתקיים כלל הצירוף: לכל מקרה בו צד ימין מוגדר גם צד שמאל מוגדר (ולהפך) והם שווים:

$$([\varphi]*[\psi])*[\eta] = [\varphi]*([\psi]*[\eta])$$

נשים ♡ ש- $(\varphi*\psi)*\eta \neq \varphi*(\psi*\eta)$. האמת היא שהן נראות אותו דבר. אבל יש להן פרמטריזציות שונות



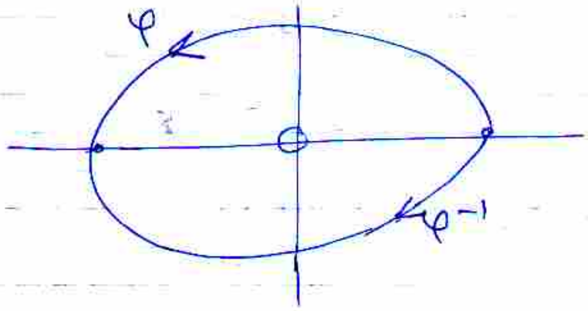
הגדרה: אם $x\in X$ נגדיר את המסילה הקבועה $e_x: I\to X$, $* \mapsto x$

הגדרה: (המסילה ההפוכה) $\varphi: I\to X$ מסילה. אז φ^{-1} היא המסילה ההפוכה המוגדרת ע"י $\varphi^{-1}(s) = \varphi(1-s)$

$\varphi: x_0 \rightsquigarrow x_1$
$\varphi^{-1}: x_1 \rightsquigarrow x_0$

גם אם $x_0 = x_1$ לא בהכ"ח $\varphi \neq \varphi^{-1}$ ואפילו $[\varphi] \neq [\varphi^{-1}]$

לדוגמא:



<u>הגדרה:</u> $[\varphi]^{-1} \overset{def}{=} [\varphi^{-1}]$

<u>טענה:</u> $\varphi \sim \varphi' \Rightarrow \varphi^{-1} \sim (\varphi')^{-1}$

<u>מסקנה:</u> ההגדרה היא טובה

<u>טענה:</u> $e_{x_0} \sim \varphi * \varphi^{-1}$

<u>הוכחה:</u> צריך לבנות הומוטופיה $H: I \times I \to X$
(מונקרס 336-340). הרעיון הוא שנעבור מ- $\varphi * \varphi^{-1}$
ל- e_{x_0} ע"י שבשלבי הביניים נלך על φ עד נקודה
מסוימת. נחכה שם כמה זמן ואז נחזור אחורה. (11)

הגדרת החבורה היסודית $\pi_1(X, x_0)$: יהי X מ"ט כלשהו
ותהי $x_0 \in X$. נגדיר את הקבוצה $\pi_1(X, x_0)$ כקבוצת
כל מחלקות השקילות של $[\varphi] : x_0 \sim x_0$
$\varphi : I \to X \quad \varphi(0) = \varphi(1) = x_0$
כלומר מחלקת ההומוטופיה של מסילות סגורות המתחילות
ונגמרות ב- x_0.
הפעולה $[\varphi] * [\psi]$ היא שרשור והיא מוגדרת היטב כי כל
המסילות מתחילות ונגמרות באותה נקודה.
איבר היחידה הוא $[e_{x_0}]$
ההופכי מוגדר כי $[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$
האסוציאטיביות נובעת ע"י המשפט על השרשור

הערה: בחירה אחרת של x_0 נותנת חבורה אחרת:

$$x_1 \neq x_0 \not\Leftrightarrow \pi_1(X,x_0) \neq \pi_1(X,x_1)$$

משפט: נניח שקיים מסילה $x_0 \rightsquigarrow x_1$. אז

$$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$$

תזכורת: $\pi_0(X) = \pi_0 X =$ קבוצה

הערה: $\pi_1(X,x_0)$ נקראת חבורת ההומוטופיה הראשונה.

לכל $n \geq 1$ מוגדרת חבורה $\pi_n(X,x_0)$

$$\pi_1 - I \to X$$

$$\pi_2 - I \times I \to X$$

$$\vdots$$

$$\pi_n - I^n \to X$$

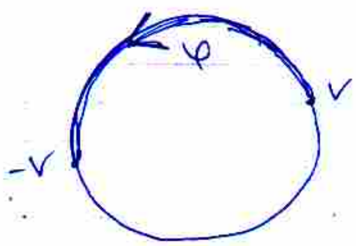
דוגמאות:

(1) $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = (e) = \{1\}$

(2) $\pi_1(S^n, x) = \{1\}$ עבור $n \geq 2$ (לומר S^n עבור $n>1$ הוא פשוט קשר)

(3) $\pi_1(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$

(4) $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ לומר 2 סוגי הומוטופיה ויש רק מסלול אחד סגור שאינו הומוטופי לקבוע.



לא קל לראות ש- $\varphi \nsim (e_v)$

(5) $\pi_1(\text{Torus}, x) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

(6) תהי G חבורה כלשהי. קיים CW X_G ("ון-קמפן") רק ש- $\pi_1(X_G, x) \cong G$.

(42)

20.6.07

טופולוגיה

(חבורת ההומוטופיה הראשונה)

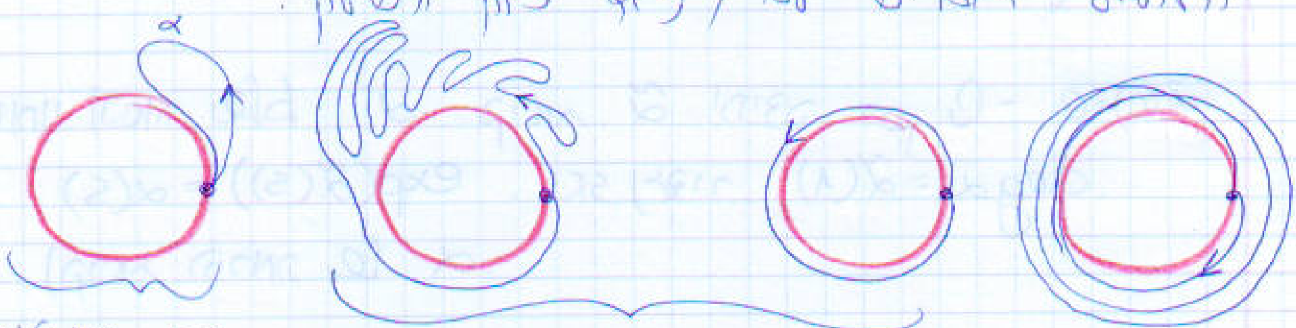
בשבוע שעבר: הגדרנו את החבורה היסודית. בהינתן מ"ט X ו- $x\in X$ היא חבורה $\pi_1(X,x)$ (דיסקרטית) שהאיברים בה הם $[\alpha]$ - מחלקות השקילות ההומוטופית של מסילות סגורות שמתחילות ב- x.

אמרנו שאם יש מסילה $x_1 \sim x_2$ אז $\pi_1(X,x_1)\cong\pi_1(X,x_2)$.

<u>משפט</u> (חשוב עם הוכחה חשובה) נסתכל על $1\in S^1\subseteq \mathbb{C}$

$$\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z}$$

<u>הסבר</u>: העניין החשוב הוא כמה פעמים מקיפים את המעגל וגם יש עם / נגד כיוון השעון.



זאת הומוטופית למסילה הקבועה $[\alpha]=0\equiv[0]$

אלה מסילות הומוטופיות

פה הקפנו 3 פעמים

זה די אינטואיטיבי וכל תינוק יודע את זה!

אבל אנחנו רוצים להוכיח את זה.

<u>אמצעי עיקרי - בניית עלר תשובה:</u> יש לנו $I\xrightarrow{\alpha}S^1$, $\alpha(0)=\alpha(1)=1$

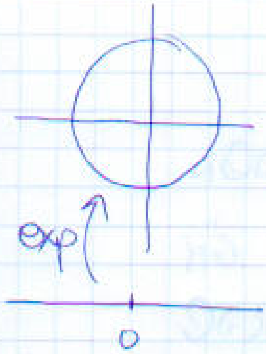
זאת מסילה שאנחנו רוצים להפוך אותה לסטנדרטית.

לכל $[\alpha]$ נתאים דרגה שלמה. כלומר נרצה העתקה של חבורות

$$\deg:\pi_1(S^1,1)\longrightarrow\mathbb{Z}$$

ונרצה ש- $\deg$ תהיה איזומורפיזם.

אינטואיטיבית נרצה ש- $\deg$ תהיה מספר הפעמים שהקפנו את S^1, כלומר $\deg[\alpha]=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha d\theta$ אבל לא נשתמש באינטגרציה כי אנחנו עובדים במרחבים טופולוגיים כלליים וגם α לא בהכרח חלקה.



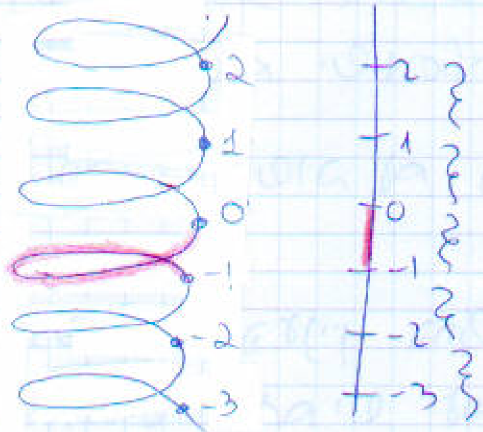
נתבונן בהעתקה $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$\exp(x) = e^{2\pi i x} = \operatorname{cis} 2\pi x \in \mathbb{C}$

או $\exp(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \in \mathbb{R}^2$

(ברור שזה אותו הדבר). נסמן $|\exp(x)| = 1$.

מתקיים $\exp(x) = 1 \iff x \in \mathbb{Z}$



כל אחד מהקטעים האלה נמתח על S^1 וזה חוזר על עצמו אינסוף פעמים.

אנחנו נראה שלכל α קיימת $\tilde{\alpha}$ יחידה כך ש- $\tilde{\alpha}(0)=0$ ו- $\exp(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s)$. ואז נגדיר $\deg \alpha = \tilde{\alpha}(1)$.
$\tilde{\alpha}$ נקראת הרמה של α.

<u>משפט ההרמה</u>: לכל מסילה $\alpha: I \to S^1$ כך ש- $\alpha(0)=1$ קיימת הרמה יחידה $\tilde{\alpha}: I \to \mathbb{R}$ כך ש-

① $\tilde{\alpha}(0) = 0$

② לכל $s \in I$ $\exp(\tilde{\alpha}(s)) = \alpha(s)$

<u>הערה על פונק' exp</u>: $\exp: \mathbb{R} \to S^1$ היא העתקה בין חבורות: $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

מכפלה של מרוכבים.

כאן אנחנו מסתכלים על $\mathbb{R}$ כחבורה חיבורית, ו- S^1 חבורה כפלית: חיבור זוויות מודולו 2π. (בגלל שכל הערכים המוחלטים הם 1 אז בשביל לכפול 2 מרוכבים רק צריך לחבר זוויות).
exp הומו' על S^1 והגרעין שלה הוא $\ker(\exp) = \mathbb{Z}$.

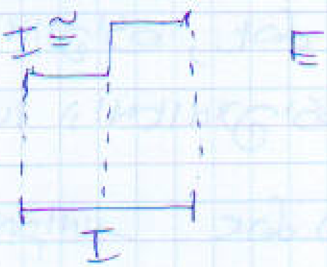
43

דוגמאות: קיום הרמה של מסילות כנ"ל הוא תכונה נדירה של העתקות $X \to E$ בין מ"ט.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[ur, dashed, "\exists ? \tilde{\alpha}"] & B \end{tikzcd}$$

(נאמר קיים $\tilde{\alpha}$ כך ש- $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$?)

1. אם $E = \emptyset$ אין הרמה.
2. דוגמאות כאשר π היא על:

- אם $E = [0,\frac{1}{2}] \amalg [\frac{1}{2},1]$ ו- $\alpha = id$!
- 

ל-id לא תהיה הרמה

- 

להיות לא תהיה הרמה.

למה: הצמצום של exp נותנת שקילות טופולוגית רציפה:

$$\exp|_{(0,1)}: (0,1) \to S^1 \setminus \{1\}$$

הוכחה: ברור ש- $\exp|_{(0,1)}$ חח"ע ועל. מה שחדש בלמה הנתון הוא ש- $(0,1) \cong S^1 \setminus \{1\}$ אלא שגם exp לכך היא הומאומורפיזם. אז exp היא כמובן רציפה. לכן מספיק להראות ש- exp פתוחה, אבל זה ברור מהנוסחה. אז exp הומאומורפיזם.

11

מסקנה: לכל $x \in \mathbb{R}$ קיימת סביבה $U_x = (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2})$ פתוחה כך ש- $\exp|_{U_x}: U_x \to \exp(U_x)$ היא שקילות טופולוגית.

הוכחה: את U_x אפשר להזיז להיות סביב 0. משום ש- exp היא מחזורית עם מחזור 1 נקבל את המסקנה.

$U_x = (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}) \cong (0,1) \cong S^1\setminus\{1\} \cong S^1\setminus \exp(x+\frac{1}{2}) = \exp(U_x)$

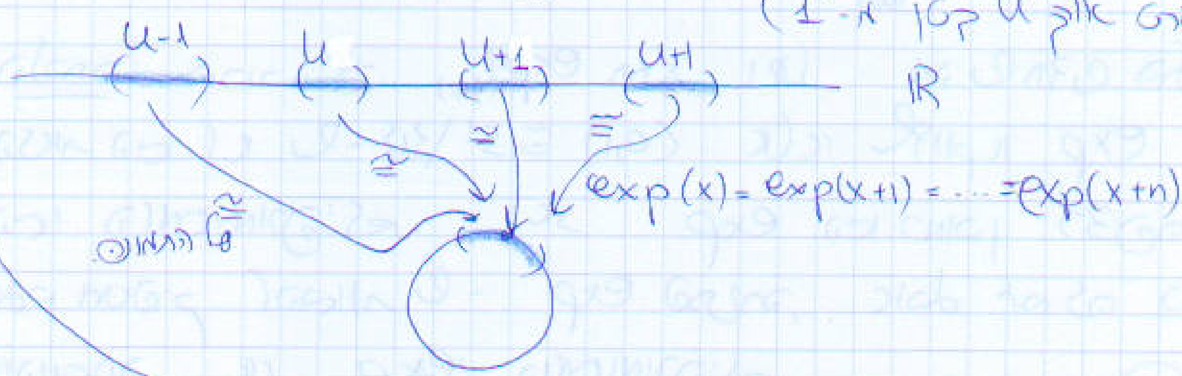
<u>הגדרה:</u> העתקה $f: E\to B$ המקיימת את התכונה, כלומר לכל $e\in E$ קיימת סביבה $U_e\subseteq E$ כך ש $f|_{U_e}$ הוא שיכון טופולוגי, נקראות <u>הומאומורפיזם מקומי</u>.

<u>דוגמה:</u> $X \amalg X \xrightarrow{id \amalg id} X$ לכל נקודה יש סביבה שבה הוא הומאומורפיזם, אבל הפונק' כולה (גלובלית) לא הומאומורפיזם.

<u>דוגמה:</u> $\exp|_{(0,1)}: (0,1)\to S^1$ שיכון מקומי. אבל הוא איננה על ולכן איננה הומאומורפיזם.

<u>דוגמה:</u> באופן כללי שיכון טופולוגי הוא הומאומורפיזם מקומי!

<u>למה:</u> לכל נקודה $s\in S^1$ קיימת סביבה $U_s\subseteq S^1$ פתוחה כך ש- $\exp^{-1}(U_s) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} U+n \cong \coprod_{\mathbb{Z}}(U_s)$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}$ ו- $\exp|_U: U\to U_s$ הומאומורפיזם.
(בפרט אורך U קטן מ-1)



$U_s = S^1\setminus(s+\pi)$ זו תת קבוצה ב-B שמכילה את s ואינה מכילה את כל S^1.

44

הוכחת משפט ההרמה

מקרה פרטי: למת הרמה: תהי $\beta: I \to S^1$ מסילה כלשהי, כך ש- β אינה על. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $\exp(x_0)=\beta(0)$. אזי קיימת הרמה יחידה $\tilde\beta$ ל- β כך ש- $\tilde\beta(0)=x_0$.

הוכחה: נחשוב על β כעל פונקציה $\beta: I \to S^1\setminus\{z\}$. נתבונן בתמונה ההפוכה $\exp^{-1}(S^1\setminus\{z\})$ זהו איחוד זר של קטעים ב- $\mathbb{R}$ (כולם באורך 1) שמועתקים ע"י $\exp$ באופן הומאומורפי על $S^1\setminus\{z\}$. $\exp(x_0)=\beta(0) \Rightarrow$ $x_0 \in \exp^{-1}(\beta(0))$ אבל x_0 נמצא בדיוק באחד הקטעים U_{x_0} מהלמה הקודמת, כאמור מהקטעים $\exp^{-1}(S^1\setminus\{z\})$.

נגדיר $\tilde\beta = \mathrm{inv}\exp|_{U_{x_0}} \circ \beta \Rightarrow \exp\circ\tilde\beta = \beta$; $\beta(0)=x_0$.

למה $\tilde\beta$ יחידה? אנו נמצאים במצב

יש אינסוף בחירות אפשריות של x_0, אבל בהינתן x_0 $\tilde\beta$ היא יחידה.

$$
\begin{tikzcd}
 & A = U_{x_0} \arrow[d, "h"', "\cong"] \arrow[dr, "\cong"] & \\
I = X \arrow[ur, "\exists!\tilde\beta"] \arrow[r, "\beta"] & B & S^1\setminus\{z\}
\end{tikzcd}
$$

$$\forall x\ \exists!\, a\in A\ \ h(a)=\beta(x)$$

מקרה כללי: תהי העתקה $\beta: I\to S^1$ כך ש- $\beta(0)=1$ (אח"כ נפטר מההנחה הזאת). נראה שקיימת הרמה יחידה $\tilde\beta$ המקיימת $\tilde\beta(0)=0$.

הוכחה: נחלק את קטע היחידה $[0,1]$ לתת קטעים

$$0=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=1$$

כך ש- $\beta|_{[t_i,t_{i+1}]}$ אינה על: ניקח כיסוי של S^1 ע"י שתי תת קבוצות ממש פתוחות (V,W). $\beta^{-1}(V), \beta^{-1}(W)$ הן שתי הקבוצות פתוחות בקטע הקומפקטי I. קיים $\delta>0$ כך שכל קטע באורך $\le\delta$ נמצא באחת מהקבוצות $\beta^{-1}(V), \beta^{-1}(W)$.

⇐ לכל x $\beta|_{[x,x+\delta]}$ איננה על ולכן קיימת הרמה כנ"ל.

נגדיר את $\tilde{\beta}$ באינדוקציה כדלקמן כך שיתקיים:

$$\tilde{\beta}_i|_{[0,t_i]}: [0,t_i] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{\beta}(0) = 0$$

$$\forall x\in[0,t_i] \quad \exp(\tilde{\beta}(x)) = \beta(x)$$

הגדרת $\tilde{\beta}_1$: נתבונן במסילה $\beta|_{[0,t_1]}$. זוהי מסילה שאיננה על ; $\exp(0)=\beta|_{[0,t_1]}(0)$. אז מתקיימים תנאי למת ההרמה.

⇐ קיימת $\tilde{\beta}_1$ יחידה כנ"ל.

כעת נסתכל על $\beta|_{[t_1,t_2]}$. זו היא מסילה שאיננה על לכן קיימת עבורה הרמה יחידה $\tilde{\beta}_2'$ שמתחילה ב- $\tilde{\beta}_1(t_1)$ שזה סוף המסילה הקודמת. אז $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2'$ רציפים על קטעים סגורים ומסכימים על נק' החיתוך ולכן לפי למת ההדבקה $\tilde{\beta}_2=\tilde{\beta}_1 \vee \tilde{\beta}_2'$ רציפה על $[0,t_2]$. ככה ממשיכים הלאה. אם הגדרנו $\tilde{\beta}_i$ כך ש- $\tilde{\beta}_i:[0,t_i]\to\mathbb{R}$ נבנה את $\tilde{\beta}_{i+1}'$ כך ש $\tilde{\beta}_{i+1}'|_{[t_i,t_{i+1}]}:[t_i,t_{i+1}]\to\mathbb{R}$ איננה על והיא מתחילה ב- $\tilde{\beta}_i(t_i)$. ונשתמש שוב בלמת ההדבקה (כדי) להגדיר $\tilde{\beta}_{i+1}$ רציפה ע"י $\tilde{\beta}_{i+1}=\tilde{\beta}_i \vee \tilde{\beta}_{i+1}'$.

$\tilde{\beta}_n$ היא ההרמה שחיפשנו.

שבוע הבא נוכיח את היחידות.

(45) 25.6.07

טופולוגיה.

בשיעור הקודם הוכחנו את משפט ההרמה: אם $\varphi: I \to S^1$ כך ש- $\varphi(0)=1$ קיימת $\tilde{\varphi}: I \to \mathbb{R}$ יחידה כך ש- $\tilde{\varphi}(0)=0$ ו- $\varphi = \exp\circ\tilde{\varphi}$. כמו כן, לכל $n\in\mathbb{Z}$ קיימת הרמה יחידה $\tilde{\varphi}_n: I\to\mathbb{R}$ שמקיימת $\tilde{\varphi}_n(0)=n$ ו- $\exp\tilde{\varphi}_n=\varphi$.

אפשר לנסח את הטיעון המרכזי באופן הבא: יהי $x_{max}\in I$ הסופרמום של כל ה- $x\in I$ שעבורם יש הרמה לצמצום φ ל- $[0,x]$. בוודאי $x_{max}\geq 0$ שהרי את 0 לבדו ניתן להרים. אז אפשר להרים את $[0,x_{max})$. נראה ש- $x_{max}=1$. נניח בשלילה ש- $0\le x_{max} \le 1$. קיימת סביבה של x_{max} $(x_{max}-\varepsilon, x_{max}+\varepsilon)$ כך ש- $\varphi|_{(x_{max}\pm\varepsilon)}$ לא על. אולם $\exp^{-1}(x_{max}\pm\varepsilon) \cong \coprod [x_{max}\pm\varepsilon]$ (כי היא לא על). ואז אם $x_{max}<1$ יש סביבה שלמה של x_{max} עבורה אפשר למצוא הרמה, בסתירה לכך ש- x_{max} הינו הסופרמום.

<u>הגדרה:</u> לכל מסילה $\alpha: I\to S^1$ כך ש- $\alpha(0)=\alpha(1)=1$ נגדיר

$$\deg\alpha = \tilde{\alpha}(1) \in\mathbb{Z}$$

(הדרגה סופרת את מספר הסיבובים השלמים שעושים סביב S^1).

דוגמה למסילה והרמתה:

יהי $[n]: I\to\mathbb{R}$ $\quad [n](t)=nt$

נגדיר $\varphi(t)=\exp([n](t))$

$\tilde{\varphi}=[n]$ כי זוהי הרמה והיא יחידה.

$$\Rightarrow \deg\varphi = n$$

<u>משפט:</u> $\deg\varphi$ היא שמורה של הומוטופיה בין מסילות סגורות. כלומר, אם $\varphi\sim\varphi'$ שתי מסילות הומוטופיות אז $\deg\varphi=\deg\varphi'$.

הערה: אנו מעוניינים בשלוש טענות מרכזיות:

① $\deg\alpha$ היא שמורה הומוטופית

② $\deg\alpha$ הוא איזומורפיזם של קבוצות

③ $\deg\alpha$ היא העתקה של חבורות.

משפט הרמת הריבוע:

לכל פונקציה רציפה $F: I\times I \to S^1$ קיימת הרחבה יחידה

כך ש $F(0,0)=1$ קיימת הרחבה יחידה $\tilde{F}: I^2 \to \mathbb{R}$

כך ש-: ① $\tilde{F}(0,0)=0$

$\exp\tilde{F}=F$

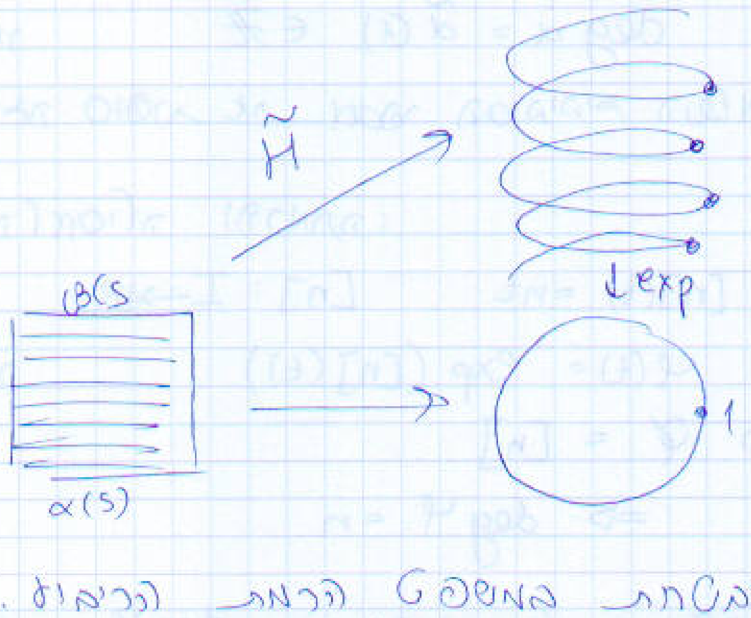
(וקיימת ויחידה כך ש- $\tilde{F}_n(0,0)=n$ לכל $n\in\mathbb{Z}$).

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d] \\ \square \arrow[ur, "\exists!\tilde{F}"] \arrow[r, "F"] & S^1 \end{tikzcd}$$

מסקנה: $\deg\alpha$ שמורה הומוטופית.

הוכחה: תהיינה $\alpha,\beta: I\to S^1$ מסילות כך ש- $\alpha(0)=\beta(0)=\alpha(1)=\beta(1)=1$ ונניח ש- $\alpha\sim\beta$. כלומר

קיימת הומוטופיה של מסילות $H: I\times I\to S^1$



נתבונן ב- $\tilde{H}$ המובטחת במשפט הרמת הריבוע.

$$\left.\begin{aligned}\tilde{H}(s,0)&=\tilde{\alpha}(s)\\ \tilde{H}(s,1)&=\tilde{\beta}(s)\end{aligned}\right\}$$ מיחידות הרמת המסילות.

(46)

$$\tilde H(1,1)=\tilde\beta(1) \quad \Leftarrow$$
$$\tilde H(1,0)=\tilde\alpha(1)$$

בנוסף $\tilde H(1,t): I\to \mathbb{R}$ וגם ש- $\exp\tilde H(1,t)=H(1,t)=1$

$\Leftarrow$ $\tilde H(1,t)\in\mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $\tilde H(1,t): I\to \mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ רציפה

מרחב דיסקרטי של $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\tilde H(1,t)$ קבועה כפונקציה של

t. $\Leftarrow$ $\tilde H(1,0)=\tilde H(1,1)$ $\Leftarrow$ $\tilde\alpha(1)=\tilde\beta(1)$.

(צריך גם לומר שהגדרנו אותו $\tilde H(0,t)=c\in\mathbb{R}$ היא מסילה קבועה).

(11)

$\boxed{\text{C.T.C. Wall} \quad \text{Geometric Intro. to Topology}}$

מסקנה: deg מגדירה פונקציה

$$\pi_1(S^1,1)\longrightarrow\mathbb{Z}$$
$$[\alpha]\longmapsto\deg\alpha$$

רצו מנינו להראות ש- deg הוא איזומורפיזם של חבורות.

צריך להראות:

(א) חח"ע

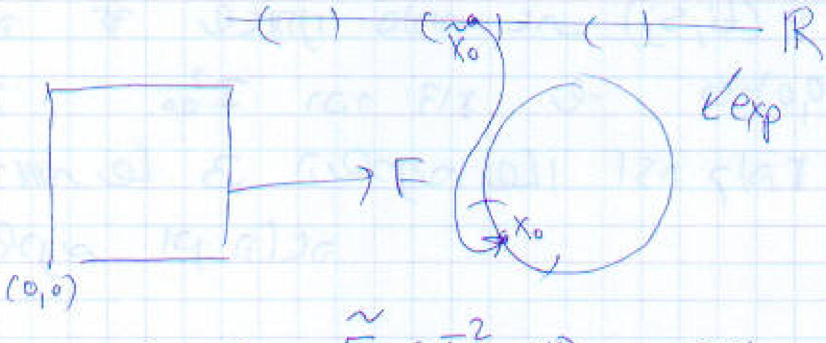
(ב) על

(ג) $\deg[\alpha*\beta]=\deg\alpha+\deg\beta$

הוכחת משפט הרמת הריבוע

ראשית, נטפל במקרה פרטי: תהי $F: I^2\to S^1$ העתקה שאינה על.

תהי $\tilde x_0\in\mathbb{R}$ נקודה המקיימת $\exp\tilde x_0=F(0,0)=x_0$



אזי קיימת ל- F הרמה יחידה $\tilde F: I^2\to\mathbb{R}$ כך ש-

$\tilde F(0,0)=\tilde x_0$ ו- $\exp\tilde F=F$

הוכחת המקרה הפרטי: F אינה על. נניח שהיא מחסירה נקודה

y. כלומר $F: I^2 \to S^1 \setminus \{y\}$. אבל $\coprod_n (0,1)_n \cong \exp^{-1}(S^1 \setminus \{y\})$

ו- $\exp|_{(0,1)_n} : (0,1)_n \xrightarrow{\cong} S^1 \setminus \{y\}$ שקילות טופולוגית $\exp_n^{-1}$

ע"י $\exp(\exp_n^{-1}) = Id(S^1 \setminus \{y\})$

באופן סימבולי: $\tilde{F} = \log F$ אבל באופן מפורש

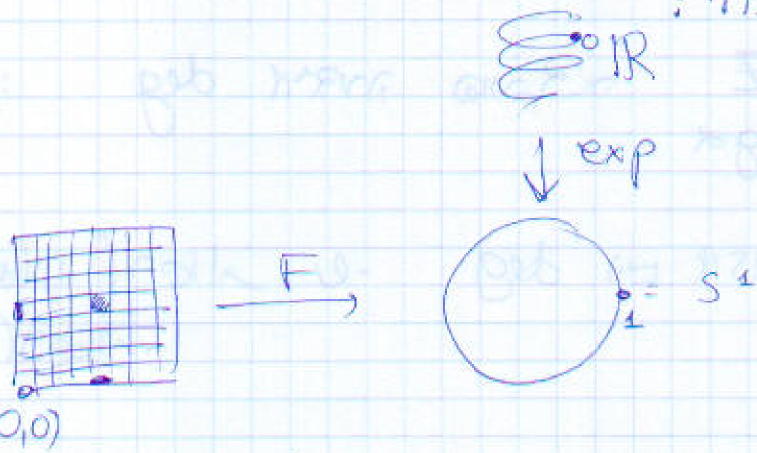
$$\tilde{F} := \exp_n^{-1} \circ F$$

כאשר $\tilde{x}_0 \in (0,1)_n$

$$\exp \tilde{F} = \exp \cdot \exp_n^{-1} F = F$$

$$\tilde{F}(0,0) = \exp_n^{-1} F(0,0) = \exp_n^{-1} x_0 = \tilde{x}_0$$

אז נעבור למקרה הכללי:



נחלק את I^2 ל"ריבועים קטנים" ע"י חלוקה של I ל-

$$0 = s_0 < \dots < s_n = 1$$

$$0 = t_0 < \dots < t_n = 1$$

כך שכל "ריבוע קטן" $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] = I^2_{ij}$ הפונקציה F אינה על.

(זה אפשרי בעזרת מספר לבג)

לכל ריבוע קטן יש הרמה של $F|_{I^2_{ij}} : I^2_{ij} \to S^1$. אבל היא לא יחידה עד שאנחנו בוחרים את $\tilde{F}(t_i, s_j)$.

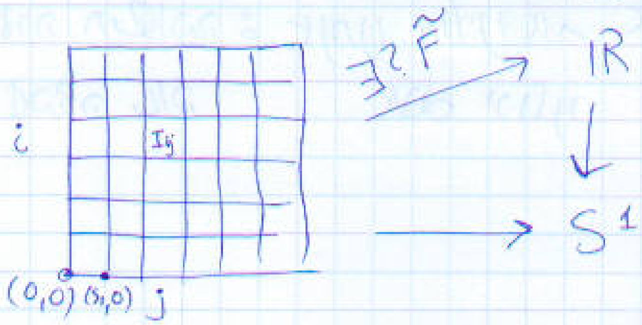
עבור $I^2_{0,0}$ דבר ידוע ש- $\tilde{F}(0,0) = 0$. הוא קובע את ההרמות של 3 השכנים שלו וזה קובע את ההרמה של 5 השכנים וכן הלאה.

47

27.6.07

טופולוגיה

סיום הוכחת הרמת הריבוע:



ראינו שכל תת ריבוע I_{ij} ניתן להרמה יחידה בתנאי שערכה של פינת הריבוע נקבעת.

אנחנו רוצים ש- $\tilde{F}(0,0)=0$.

אז ההרמה $\tilde{F}_{1,1}$ של הריבוע $I_{1,1}$ נתונה ע"י קיום הרמה יחידה. $\tilde{F}_{1,1}$ נותנת ערך עבור פינה של הריבוע $I_{1,2}$. תהי $\tilde{F}_{1,2}$ ההרמה היחידה.

עלינו לבדוק שההרמות מתאימות על $I_{1,1}\cap I_{1,2}$. אבל $I\cong I_{1,1}\cap I_{1,2}$ זה קטע היחידה. אז $\tilde{F}_{1,1}|_{\text{חיתוך}}$ הוא הרמה של החיתוך שהוא הומאומורפי ל- I.

אז יש לנו שתי הרמות של הקטע $I_{1,1}\cap I_{1,2}$ - $\tilde{F}_{1,1}|_{\text{חיתוך}}$ ו- $\tilde{F}_{1,2}|_{\text{חיתוך}}$. ההרמות האלה מסכימות על הנקודה $(1,0)$ ולכן הן שוות. $\Leftarrow$ $\tilde{F}_{1,1}\vee\tilde{F}_{1,2}$ מוגדרת היטב על $I_{1,1}\cup I_{1,2}$.

באותו אופן אפשר למלא את כל השורה הראשונה, כלומר קיימת הרמה של איחוד הריבועים $I_{1,j}$.

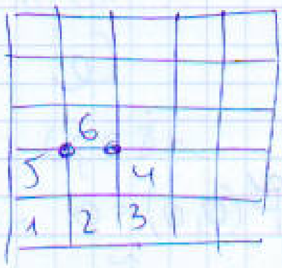
עבור ל- $I_{2,1}$. נסתכל על הפינה השמאלית התחתונה שלו. הערך שלה נתון ע"י $\tilde{F}_{1,1}$ ולכן קיימת הרמה יחידה $\tilde{F}_{2,1}$. $I\cong I_{1,1}\cap I_{2,1}$ וכמו בלפני יש התאמה בין $\tilde{F}_{1,1}$ ל- $\tilde{F}_{2,1}$.

כעת עבור ל- $I_{2,2}$. הפינה השמאלית התחתונה שלו נקבעת ע"י $\tilde{F}_{2,1}$. אז יש הרמה יחידה. אבל חיתוך עם הריבועים שנושקים לו שקול טופולוגית ל- I $\Leftarrow$ שתי הרמות שמסכימות על נקודה בקטע (או נקודה כלשהי) מסכימות.

אז כך באינדוקציה ניתן למלא את כל הריבוע בצורה יחידה! ☺

מסתבר שמשפט דומה נכון עבור כל העתקה
$S^1 \to Y$ כאשר Y קשיר מסילתית מקומית ופשוט קשר.

הערה חשובה: אנחנו סידרנו את הריבוע בצורה מסויימת שעבדה טוב. אבל יכולנו לסדר כך:



נניח שעשינו את 1, 2, 3, 4, 5 ועכשיו אנחנו באים לעשות את 6. החיתוך של 6 עם מה שכבר עשינו הוא לא קטע אלא שתי נקודות נפרדות! ואפריורי שום דבר לא מבטיח לנו שההרמה שנקבעת ע"י הנקודה הימנית תתאים להרמה שנקבעת ע"י הנקודה השמאלית ולהפך. בדיעבד, אחרי שהוכחנו את המשפט ההרמה היא יחידה ולכן לא משנה איך נמלא את הריבועים. אבל בהוכחה היינו צריכים לבחור באסטרטגיה חכמה.

סוף הוכחת המשפט: $deg : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$
איזומורפיזם של חבורות.
צריך להראות:
(1) חח"ע
(2) על
(3) העתקה של חבורות.

<u>הוכחות:</u>
(1) עלינו להוכיח שאם $deg[\alpha]=deg[\beta]$ אז $[\alpha]=[\beta]$,
כלומר אם $deg\, \alpha = deg\, \beta$ אז $\beta \sim \alpha$.
כאמור אם $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ הרמות המתחילות ב-0 ל-α ו-β
(מתחילות ונגמרות ב-1) עלינו לתת את S –

אם $\tilde{\beta}(1)=\tilde{\alpha}(1)$ (*) אז $\beta\sim\alpha$, שהרי $\tilde{\alpha}(1)$
זו הדרגה של α.
אבל $\tilde{\beta},\tilde{\alpha}: I\to\mathbb{R}$ ו-(*) אומר שהן מתחילות ונגמרות
באותן נקודות של $\mathbb{R}$. וראינו שכל שתי מסילות
ב-$\mathbb{R}^n$ שמתחילות ונגמרות באותה נקודה הן הומוטופיות.
$\Leftarrow$ $\tilde{\beta}\sim\tilde{\alpha}$ אבל הומוטופיה נשמרת ע"י הרכבה
של פונקציות. $\Leftarrow$ $\beta=\exp\tilde{\beta}\sim\exp\tilde{\alpha}=\alpha$

(2) עלינו להוכיח שלכל $n\in\mathbb{Z}$ קיימת מסילה $\alpha_n: I\to S^1$
רק ש-$\deg\alpha_n=n$. פשוט ניקח $\alpha_n(t)=\exp(nt)$.
אז $\tilde{\alpha}_n=nt$ ו-$\deg\alpha_n=n$.

(3) עלינו להוכיח ש-$\deg[\alpha]*[\beta]=\deg[\alpha]+\deg[\beta]$
זה שקול לך ש-$\deg\alpha*\beta=\deg\alpha+\deg\beta$
נוכל לבחור α,β נציגים כלשהם.
אז אם $\deg[\alpha]=n$ ו-$\deg[\beta]=m$ ניקח
$\alpha=\exp(nt)$, $\beta=\exp(mt)$. אי אפשר לשרשר את
α ו-β כי β לא מתחילה בסוף של α, אבל אין
בעיה להזיז את β. ברור שהשרשור הומוטופי
ל-$\exp((n+m)t)$ וסיימנו!

מסקנה: העתקת הזהות $S^1\to S^1$ איננה הומוטופית
לפונקציה קבועה. כלומר S^1 איננו כוויץ.
הוכחה: (בערך) בשלילה תהי $H: S^1\times I\to S^1$ הומוטופיה של הזהות
לפונקציה הקבועה: $H(s,0)=s$, $H(s,1)=*\in S^1$
יהי $[\alpha]\in\pi_1 S^1$, כלומר $\alpha: I\to S^1$ רק ש-
$\alpha(0)=\alpha(1)=1$. ונרכיב את זה עם הזהות $I\to S^1\to S^1$
מהנחת השלילה ההרכבה הומוטופית לפונקציה קבועה, כלומר
האיבר α הוא הומוטופי ל-0.
יש פה שקר קטן: הומוטופיות ב-$\pi_1 S^1$ הן הומוטופיות

ששומרות על נקודת הבסיס. אבל ההומוטופיה שבנינו לא מקיימת את התנאי הזה. אז צריך לתקן קצת. נבנה לבנות הומוטופיה (בהנחת השלילה) H_* כך ש- $H_*(1,t)=1$ לכל t (כלומר היא לא מזיזה את 1) נגדיר

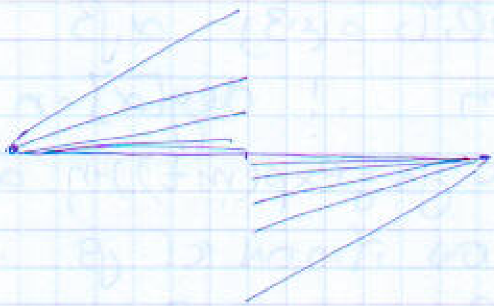
$$H_*(s,t) = \underbrace{H(1,t)^{-1}}_{\text{ההופכי ב-}S^1\text{ כחבורה}} \cdot H(s,t)$$

כפל ב-S^1 כחבורה

ואז $H_*\alpha$ היא הומוטופיה של α לפונקציה קבועה: 0

וזו סתירה לכך ש- $\pi_1(S^1,*)\neq\{0\}$.

בתרגול ראינו מסרק הפוך שהוא איננו כוויץ



$(0,0)$ צריך ללכת לאן שהוא. הקווים התחתונים צריכים ללכת ימינה. אז $(0,0)$ צריך ללכת איתם. אבל הקווים העליונים חייבים ללכת שמאלה. ! $(0,0)$ חייב ללכת איתם. אז זאת סתירה !

משפט נקודת השבת של בראואר

משפט: לכל העתקה $f:D^2\to D^2$ קיימת נקודה $x\in D^2$ כך ש- $f(x)=x$

הערה: המקבילה עבור מימד 1, כלומר לכל $g:I\to I$ קיים $t\in[0,1]$ כך ש- $g(t)=t$ נובע ממשפט ערך הביניים.

הערה: המשפט הזה נכון בכל מימד. אם $h: I^n \to I^n$ רציפה אז קיים x כך ש- $h(x)=x$.

טענת עזר: $\partial D^2 = S^1$ איננה רטרקט של D^2, כלומר לא קיימת פונק' רציפה $r: D^2 \to \partial D^2 = S^1$ כך ש- $r\circ i = Id_{S^1}$

הסבר: אי אפשר להעביר את המעגל לקצוות מבלי לקרוע אותה. כל חיידק יודע את זה!

D^2

הוכחה: $i: S^1 \to D^2$ הינה הומוטופית לפונקציה קבועה (כי העתקה לתוך קבוצה קמורה הינה הומוטופית לפונקציה קבועה - $H(t,x)=(1-t)f(x)$) $\Leftarrow$ $r\circ i$ גם הינה הומוטופית לפונקציה קבועה $\Leftarrow$ $\not\simeq Id$ סתירה!

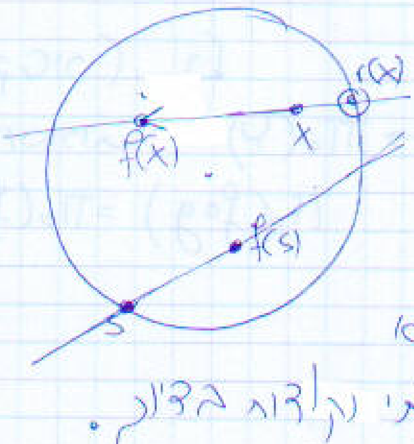
הוכחת משפט נקודת השבת

בשלילה, נניח שקיימת $f: D^2 \to D^2$ כך שלכל x $f(x)\neq x$ ונבנה רטרקט, r של D^2 ל- S^1.

נבנה את r כדלקמן:

נקח $x\in D^2$ ונתבונן בוקטור $(x, f(x)) \neq 0$

הווקטור ישר יחיד בתוך המעגל והוא חותך את השפה בשתי נקודות בדיוק.



נגדיר את $r(x)$ להיות נקודת החיתוך שהיא בכיוון המנוגד לכיוון של $(x, f(x))$, כלומר x בין $r(x)$ ל- $f(x)$. כי ברור ש- $r(x)$ פונקציה רציפה

ולנקודות השפה כמובן מתקיים $r(s)=s$. סתירה!

הערת רקע:

יהי $X \overset{i}{\hookleftarrow} A$ תת מרחב (או תת חבורה, תת מרחב וקטורי, או תת קבוצה). אומרים ש- A רטרקט של X אם קיימת העתקה r: $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{r} A$ כך ש- $r\circ i = Id_A$

בגלל המשפט הפואנקרה ההוכחה היא לכה רק להוכיח ש- S^n אינו כוויץ לכל $n \geq 1$.

תכונות יסוד של החבורה היסודית

משפט: (π_1 הוא פונקטור) כל $f:(X,x)\to(Y,y)$ משרה העתקה של חבורות $\pi_1(f):\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,y)$ כך ש:
$$\pi_1(f\circ g)=\pi_1(f)\circ\pi_1(g)$$

למשל: אם היה רטרקט $D^2\to S^1$ (נסמן r)
$$\partial D^2 \hookrightarrow D^2 \to \partial D^2$$
$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \mathbb{Z}\cong\pi_1(S^1,1) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{זהות}"'] & \underset{\overset{\parallel}{0}}{\pi_1(D^2,x)} \arrow[r] & \pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

קיבלנו
$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{זהות}"'] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

וזה כמובן לא יכול להיות!

משפט: (π_0 היא פונקטור) כל $f:X\to Y$ משרה העתקה של חבורות $\pi_0(f):\pi_0(X)\to\pi_0(Y)$ כך ש- $\pi_0(f\circ g)=\pi_0(f)\circ\pi_0(g)$

המבחן

3 חלקים: (25%) חלק 1: ישר מהתרגולים (1 מתוך 2)

(25%) חלק 2: משפטים (כוו) חלקים ממשפטים גדולים)

(50%) חלק 3: בחירה 2 מתוך 4 (1 מתוך 2)

שאלות שלא לקוחות מילה במילה מהתרגולים אבל דומות.

כדי להתכונן למבחן: רצוי לדעת ולהבין היטב את כל התרגולים.

שמואל וחגי יהיו פה במהלך