(1)

26.02.07

ת. טופולוגיה

המתרגל: חגי teneh@ma.huji.ac.il

שעת קבלה: יום ד' 18-19 קנדה [illegible]ין

אתר הקורס: owl.huji.ac.il

תרגילים: הגשה 10 מתוך 13 כדי לגשת למבחן

נושאי הקורס:

- מרחבים מטריים
- מרחבים טופולוגיים
- העתקות רציפות
- שקילות טופולוגית

משפטים מעניינים שנלמד:

- משפט בראואר: לכל $f: B_n \to B_n$ רציפה יש נק' שבת, כלומר $x \in B_n$ כך ש- $f(x) = x$
- משפט בורסוק: לכל $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ רציפה יש נקודה $x \in S^2$ כך ש- $f(x) = f(-x)$

<u>הגדרה</u>: מרחב מטרי הוא זוג (X, d) כך ש- X קבוצה ו- $d: X \times X \to \mathbb{R}$ כך ש- לכל $x, y, z \in X$

1) $d(x,y) \geq 0$ ושוויון אמ"מ $x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

<u>דוגמאות</u>: - לכל מרחב נורמי נגדיר $d(x,y) = \|x - y\|$

לדוגמא $\mathbb{R}^n$ עם הנורמות $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

- מרחב דיסקרטי: קבוצה כלשהי עם המטריקה

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$$

קשור לאחרון

- אם $G=(V,E)$ גרף אז נוח להגדיר מטריקה של V ע"י

$$d(x,y) = \min\{\text{אורך המסלולים מ-}x\text{ ל-}y\}$$

המרחב הזה הוא הומאומורפי למרחב דיסקרטי!

- אם X מ"מ, A קבוצה כלשהי, $f:A\to X$ חח"ע, אז ניתן להגדיר מטריקה של A באופן הבא:

$$\tilde{d}(a,b) = d(f(a), f(b))$$

$\tilde{d}$ נקראת המשיכה לאחור של d לאורך f.

- אם X מרחב מטרי נוח להגדיר את המטריקה השקולה

$$\tilde{d}(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

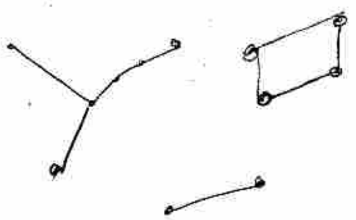
מהיותן לנו מרחבים מטריים X,Y נרצה להגדיר מרחב מטרי חדש שיהיה "האיחוד של שניהם".

נגדיר $X \amalg Y = X\times\{0\} \cup Y\times\{1\}$

$\{0\}$ ו-$\{1\}$ הם סתם שני דברים שלא נמצאים באף אחד מהמרחבים.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \begin{matrix} a\in X\times\{0\} \\ b\in Y\times\{1\} \\ \text{או להפך} \end{matrix} \\ \min\{1, d(x,y)\} & \begin{matrix} a\in X\times\{0\} \\ b\in Y\times\{0\} \end{matrix} \ \text{או} \ \begin{matrix} a\in X\times\{1\} \\ b\in Y\times\{1\} \end{matrix} \end{cases}$$

הנה עוד משהו שאפשר לעשות: נניח שיש לנו גרפים שמשוכנים ב-$\mathbb{R}^2$.



$\subseteq \mathbb{R}^2$

נגדיר מטריקה של הגרף:

נתרכז ראשית בכל רכיב קשירות בנפרד

$$d(x,y) = \min\{1, \text{המסלול הקצר ביותר}\}$$

בין רכיבי קשירות המרחק הוא 1.

(2)

קבוצה פתוחה: U פתוחה ב-X אם לכל $x\in U$
יש $r>0$ כך ש- $B(x,r) \subseteq U$

$$B(x,r) = \{a\in X : d(a,x) < r\}$$

אוסף הקבוצות הפתוחות ב-X נקראו טופולוגיה.

הערות לתרגיל:

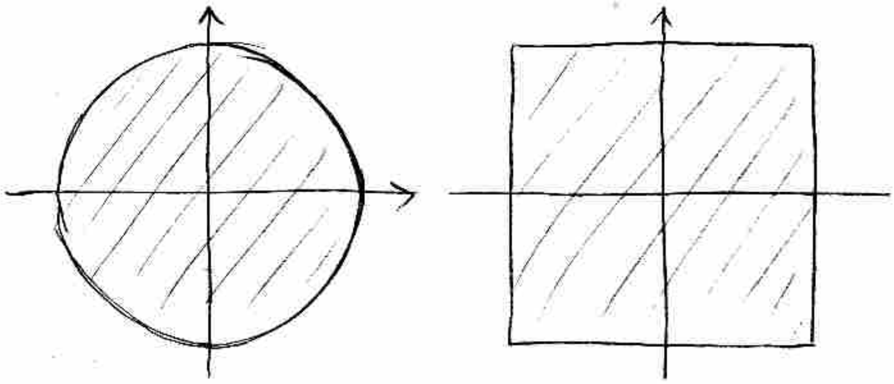
שאלה 1 סעיף ב' - מבוטל

שאלה 3 סעיף א' - 3 צלעות ולא 4

סעיף ב' - אוילרי גרף לא מכוון.

③ 6.3.07
ת. טופולוגיה

היום נפתור את התרגיל:



① דרוש להראות ש- $\bar{B}_n$ הומיאומורפי ל- I^n.

אינטואיטיבית מה שעושה הוא למתוח ישר מהמרכז לשפה הקבוצה ולמתוח את הווקטורים בהתאם.

נגדיר
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} x \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

מתקיים
$$\|f(x)\|_\infty = \left\| \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} x \right\|_\infty = \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} \|x\|_\infty = \|x\|_2$$

אז זה מתקבל ההצגה מעבירה כדורים לקוביות.

למה הפונקציה הזאת רציפה?

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}}{\max(|x_1|, \dots, |x_n|)} (x_1, \dots, x_n)$$

אפשר להראות שהעלאה והוצאת שורש הן פונקציות רציפות ואז הפונקציה הזאת היא הרכבה של פונקציות רציפות.

② דרוש למצוא מטריקה על קבוצת המשולשים X. נגדיר
$$d(\Delta ABC, \Delta A'B'C') = \|A-A'\| + \|B-B'\| + \|C-C'\|$$

אפשר להסתכל על זה ככה: נסתכל בפונקציה $f: X \to \mathbb{R}^6$ המוגדרת ע"י $f(\Delta ABC) = (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$

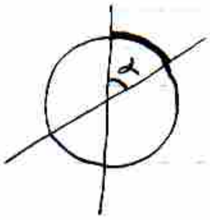
זו העתקה חח"ע ומה שעשינו בעצם היה למשוך לאחור את המטריקה מ- $\mathbb{R}^6$.

תזכורת: אם $f: X \to Y$ חח"ע, Y מ"מ ו- X קבוצה כלשהי (נוכל) להגדיר מטריקה על X ע"י $d_X(a,b) = d_Y(f(a), f(b))$.
d_X נקראת המשיכה לאחור של d_Y.

צריך להגדיר מטריקה על $\mathbb{RP}^n$. אם $x,y \in \mathbb{RP}^n$

$$d(x,y) = \min\left\{ \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|, \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| \right\}$$

נניח שהיינו מגדירים לא את המטריקה הזאת אלא היינו לוקחים את הזווית שבין הישרים. הזווית הזאת היא שווה לפי ההגדרה לאורך הקשת המתאימה. גם זאת מטריקה לגיטימית אבל לא נוגע בה.



$f: S^n \to \mathbb{RP}^n$ ולכל $x \in \mathbb{RP}^n$ יש 2 מקורות - $f(x)=f(-x)$.

הגדרנו לכל $a,b \in \mathbb{RP}^n$ $d(a,b)=\min(d(x_i,y_j))$

כאשר $x_i \in f^{-1}(a)$, $y_j \in f^{-1}(b)$.

תחת המטריקה הזאת הפונקציה f רציפה כי $d(f(x),f(y)) \le d(x,y)$

זאת פונקציה ליפשיצית עם מקדם 1.

(3) נמיין את האותיות

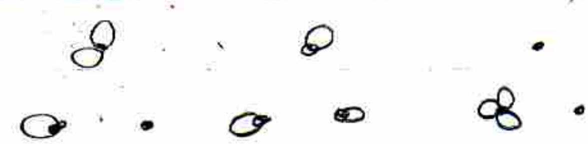
א ב ג ד ה ו ז ח ט י כ ל

מ נ ס ע פ צ ק ר ש ת

- הומאומורפית לקטע היחידה
- הומאומורפי ל- H
- הומאומורפי ל- T
- הומאומורפי ל- ||
- הומאומורפי ל- O

המיון הכי גס של המרחבים הוא לפי רכיבי קשירות.

3)



וכן הלאה

(4) 12.03.07

ת. טופולוגיה

יום הולדת שמונים

היום נדבר על מרחבים טופולוגיים.

מרחב טופולוגי הוא זוג (X,τ) כך ש- X קבוצה

ו- τ אוסף של תת קבוצות של X, כלומר $\tau \subseteq P(X)$

כך שמתקיים:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $U_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$ סגירות לאיחודים

3) $U_1 \ldots U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$ סגירות לחיתוכים סופיים

__הערות:__

א) τ המקיימת תכונה זו נקראת טופולוגיה.

ב) איברי τ נקראים קבוצות פתוחות.

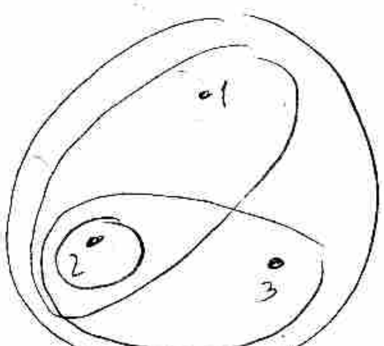
1) __דוגמה מרכזית:__ (X,d) מרחב מטרי ניתן להגדיר את הטופולוגיה המטרית להיות $\tau = \{U \subseteq X : U \text{ פתוחה}\}$

2) הטופולוגיה __הדיסקרטית__ של X - $\tau = P(X)$ זה שקול לכך שכל נקודה היא קבוצה פתוחה.

3) הטופולוגיה __הטריוויאלית__ $\tau = \{\emptyset, X\}$

4) __דוגמה:__

$X = \{1,2,3\}$



$\tau = \{\emptyset, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, \{1,2,3\}\}$

נשים לב שכל מרחב מטרי סופי הוא בעל טופולוגיה דיסקרטית

כי נסמן $d = \min_{x_i \neq x_j} \{d(x_i,x_j)\} > 0$

אז הכדור הפתוח סביב כל נקודה ברדיוס $\frac{d}{2}$ מכיל את הנקודה בלבד ולכן הטופולוגיה במקרה זה היא טופולוגיה דיסקרטית.

5) <u>הטופולוגיה הקו-סופית</u> - בהינתן קבוצה X נגדיר

$$\tau = \{U \subseteq X : |X\setminus U| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

קל לוודא שזוהי טופולוגיה.

מה יקרה אם נדרוש שהטופולוגיה תכיל את כל הקבוצות שאינן סופיות? במקרה זה לא תהיה סגירות לחיתוכים.

<u>דוגמה</u> הראו כי עבור $X=\mathbb{Z}$ אם τ טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ כך שכל קבוצה אינסופית שייכת ל-τ אז τ הטופולוגיה הדיסקרטית.

<u>פתרון</u>: נראה כי כל קבוצה מהצורה $\{m\}$ עבור $m\in\mathbb{Z}$ היא קבוצה פתוחה:

$$\{m\} = \{n\in\mathbb{Z} : n\le m\} \cap \{n\in\mathbb{Z} : n\ge m\}$$

זה חיתוך של שתי קבוצות אינסופיות ולכן $\{m\}\in\tau$.

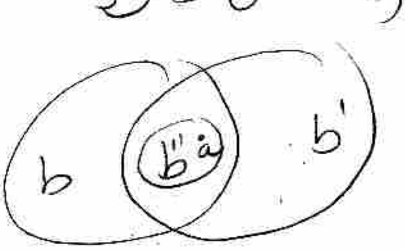
$\Leftarrow$ τ הטופולוגיה הדיסקרטית.

בסיס למרחבים טופולוגיים

<u>הגדרה</u>: תהי X קבוצה. אוסף $\mathcal{B}\subseteq P(X)$ ייקרא <u>בסיס</u> לטופולוגיה אם מתקיים:

1) $X=\bigcup\mathcal{B}$, כלומר לכל $a\in X$ קיים $b\in\mathcal{B}$ כך ש- $a\in b$.

2) לכל $b,b'\in\mathcal{B}$ ולכל $a\in b\cap b'$ ישנה $b''\in\mathcal{B}$ כך ש- $a\in b''\subseteq b\cap b'$



<u>טענה</u>: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ל-X ונגדיר באוסף τ של קבוצות שהן איחוד איברים מ-$\mathcal{B}$. אזי τ עצמה היא טופולוגיה. τ נקראת הטופולוגיה הנוצרת ע"י $\mathcal{B}$.

<u>הוכחה</u>: תרגיל

(5)

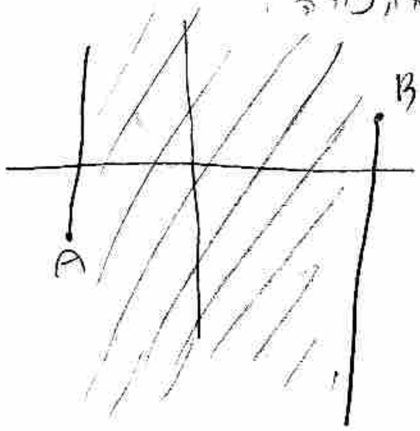
<u>דוגמה:</u> במרחב מטרי אוסף הכדורים הפתוחים מהווה בסיס לטופולוגיה. הטופולוגיה הנוצרת על ידיו נקראת הטופולוגיה המטרית.
(ראינו באינפי 3 שקבוצה הא פתוחה אמ"מ היא איחוד של כדורים פתוחים).

<u>הערה:</u> תכונה (2) של בסיס לטופולוגיה שקולה לכך שהחיתוך של כל שתי קבוצות ב- $\mathcal{B}$ הוא איחוד של איברים מ $\mathcal{B}$.

<u>דוגמה:</u> תהי X קבוצה סדורה קווית (כלומר כל שני איברים ניתנים להשוואה) $(X,<)$.
נגדיר בסיס לטופולוגית הסדר בצורה הבאה
1) $(x,y)\in\mathcal{B}$ $\forall x,y\in X$
$(x,y)=\{a\in X \quad x<a<y\}$
2) אם ל- X יש מינימום x_0 אז $[x_0,x)\in\mathcal{B}$ לכל x.
3) אם ל- X יש מקסימום y_0 אז $(x,y_0]\in\mathcal{B}$ לכל x
4) אם ל- X מינימום ומקסימום x_0, y_0 בהתאמה אז $[x_0,y_0]\in\mathcal{B}$.
צריך לוודא שזהו אכן בסס.
1) $X=\cup\mathcal{B}$ ברור.
2) לכל שני איברי בסיס החיתוך שהם הגם איבר בסיס ולכן התכונה השניה גם מתקיימת.

<u>דוגמאות</u>
1) $(\mathbb{R},<)$ הטופולוגיה המטרית במקרה זה שווה לטופולוגית הסדר עם הסדר הסטנדרטי.
2) כאשר X,Y קבוצות סדורות ניתן להגדיר יחס סדר מילוני על $X\times Y$. אם $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)\in X\times Y$ אז $A<B \iff a_1<b_1 \vee (a_1=b_1 \wedge a_2<b_2)$

למשל, נסתכל על $\mathbb{R}^2$ עם הסדר המילוני. אז
קטע (A,B) הוא מהצורה:



מה היחס בין הטופולוגיה המטרית וטופולוגיית הסדר על $\mathbb{R}^2$?
- כל איבר בבסיס בטופולוגיה המטרית הוא קבוצה פתוחה בטופולוגיית הסדר - הוא איחוד של קטעים פתוחים.
אנכיים (קבוצות בסיס בטופולוגיית הסדר).
$\Leftarrow$ $\tau_d \subseteq \tau_2$

כאשר $\tau_1 \subseteq \tau_2$ נאמר ש- τ_2 היא <u>עידון</u> של τ_1.

<u>תזכורת</u>: יש קורס אחר ב- ישס ויש שם פורום שאפשר לשאול בו שאלות.

פונקציות רציפות

אם $f: X\to Y$ חח"ע ועל אז f^{-1} רציפה $\Leftrightarrow$ f פתוחה.
לכן f הומאומורפיזם אמ"מ היא חח"ע, על ופתוחה.
נשים ♡ שמושג הרציפות תלוי בטופולוגיה של X ובטופולוגיה של Y.

<u>טענה</u>: תהי $f: X\to Y$, B בסיס לטופולוגיה של Y. אזי f רציפה אמ"מ $f^{-1}(b)\subseteq X$ פתוחה לכל $b\in B$.

הוכחה:
$(\Leftarrow)$ זה ברור. אם f רציפה אז לפי ההגדרה $f^{-1}(b)$ פתוחה לכל $b\in B$ משום שאיברי הבסיס הם קבוצות פתוחות.
$(\Rightarrow)$ נניח ש- $f^{-1}(b)$ פתוחה לכל $b\in B$ ונראה ש- f רציפה.
תהי $U\subseteq Y$ פתוחה. אזי $U=\bigcup_\alpha b_\alpha$ כי B בסיס.
$\Leftarrow$ $f^{-1}(U)=\bigcup_\alpha f^{-1}(b_\alpha)$ שזה איחוד של קבוצות פתוחות ולכן קבוצה פתוחה בעצמו. כלומר f^{-1} מעבירה פתוחה לפתוחה $\Leftarrow$ f רציפה.

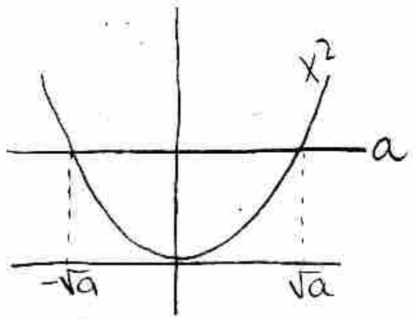
<u>הגדרה</u>: תהי X קבוצה, B אוסף תת קבוצות ב-X. B נקרא תת בסיס אם האיחוד של איברי B שווה ל-X.
הטופולוגיה הנוצרת ע"י B היא הטופולוגיה המינימלית המכילה את איברי B כקבוצות פתוחות.
חיתוכים סופיים של איברי B מהווים בסיס לטופולוגיה.

דוגמה: האוסף של הקרניים הפתוחות ב-$\mathbb{R}$, כלומר האיברים (a,∞)
ו-$(-\infty,a)$ מהווים תת בסיס
הבסיס הנוצר הוא הקטעים הפתוחים ולכן הטופולוגיה הנוצרת היא
הטופולוגיה המטרית.

<u>טענה</u>: B תת בסיס לטופולוגיה של Y. אזי $f:X\to Y$ רציפה
אמ"מ המקור של כל איבר מתת הבסיס הוא פתוח.
<u>הוכחה</u>: כמו קודם

דוגמה:
תהי $f:X\to\mathbb{R}$. f רציפה אמ"מ לכל $q\in\mathbb{Q}$ $f^{-1}(-\infty,q)$
וגם $f^{-1}(q,\infty)$ פתוחות.
<u>פתרון</u>: הקטעים מצורה כו מהווים תת בסיס והבסיס הנוצר
מהם יוצר את הטופולוגיה המטרית (q,p) (ראינו אותה מתרגול).

<u>תרגיל</u>: יהי $\mathbb{R}_{CF}$ הישר עם הטופולוגיה הקו-סופית. תהי
$f:\mathbb{R}_{CF}\to\mathbb{R}_{CF}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$. אזי f רציפה ואינה פתוחה ואינה סגורה.
<u>הוכחה</u>: ניקח את תת הבסיס $U_a=\mathbb{R}\setminus\{a\}$. תת הבסיס פורש את
הטופולוגיה של $\mathbb{R}_{CF}$. (חיתוך סופי של הנקודות
ראה, כל היותר חסר לו מספר סופי של נקודות
ואם לקבוצה חסר מספר סופי של נקודות
אז היא חיתוך של קבוצות בהן חסרה נקודה
אחת מצד שני $\bigcup U_a=\mathbb{R}$).



מה המקור של U_a?
- $a>0$ $f^{-1}(U_a)=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\}$
- $a=0$ $f^{-1}(U_a)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $a<0$ $f^{-1}(U_a)=\mathbb{R}$

f אינה פתוחה כי $f(\mathbb{R})=[0,\infty)$ והוא אינה פתוחה כי המשלים שלה
$(-\infty,0)$ אינו סופי.
f אינה סגורה משום ש- $f(\mathbb{R})$ אינה סגורה.

הגדרה: יהי X מרחב טופולוגי. נאמר ש- $X \ni x_n \to x_0$ אם כל סביבה של x_0 מכילה כמעט את כל איברי הסדרה.

הערה: במרחבים טופולוגיים כלליים גבול של סדרה לא מוכרח יחיד. למשל, אם X מרחב טופולוגי טריוויאלי אז כל סדרה מתכנסת לכל נקודה.

באינפי ראינו ש- f רציפה אמ"מ לכל סדרה מתכנסת ב- X $x_n \to x_0$ מתקיים $f(x_n) \to f(x_0)$ (רציפות סדרתית).
עבור מרחבים טופולוגיים הסיפור שונה לגמרי. רציפות גוררת רציפות סדרתית אבל לא להיפך.

נגדיר $\omega = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ עם הטופולוגיה שבסיסה הוא $\{a\}$ לכל $a \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ $\{\omega\} \cup \{m \geq n\}$. אפשר לוודא שבמרחב טופולוגי X סדרה $x_n \to x_0$ אמ"מ $f: \omega \to X$ המוגדרת ע"י $f(n) = \begin{cases} x_n & n \in \mathbb{N} \\ x_0 & n = \omega \end{cases}$ היא פונקציה רציפה.

המסקנה היא שרציפות גוררת רציפות סדרתית. אם $x_n \to x_0$ אזי יש

$$\omega \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$$

$f \circ g$ רציפה כהרכבה של רציפות ולכן הסדרה המתקבלת מקיימת $f(x_n) \to f(x_0)$.

הכיוון השני לא נכון. נראה פונקציה שהיא רציפה סדרתית אבל לא רציפה.
ניקח Ω - הסודר הראשון שאינו בן מניה ונסמן $X = S\Omega = \overline{\Omega}$ (הסגור של Ω) ונגדיר $f: X \to \underbrace{\{0,1\}}_{\text{דיסקרטית}}$ ע"י $f(x) = \begin{cases} 0 & x = \Omega \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$

נראה ש- f רציפה סדרתית. נניח (x_n) סדרה של איברים שונים מ- Ω. אז x_n אינה שואפת ל- Ω: $\Omega \neq x_n$ לכן בן מניה $\Leftarrow l = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ בן מניה. אז $\Omega \in (l, \Omega]$ הוא זה פתוחה שמכילה את Ω שלא מכילה איברים מהסדרה. $\Leftarrow x_n \not\to \Omega \Leftarrow f$ רציפה סדרתית. נותר לוודא ש- f אינה רציפה (תרגיל) (לא מסובך).

(8) 26.3.04
ת.טופולוגיה

יום הולדת שמח!!!

התרגול עובר באופן קבוע למתמטיקה 2

קשירות וקשירות מסילתית

נסמן ע"י $\boxed{\text{פו"ס}}$ קבוצה שהיא גם פתוחה וגם סגורה clopen

בכל מרחב טופולוגי X יש לפחות שתי קבוצות שהן פו"ס- $\emptyset, X$

נגיד ש- X קשיר אם"ם אלו הן הקבוצות היחידות שהן פו"ס.

זה שקול לכך שאם $X=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$ וכן הן פתוחות/סגורות אז אחת מהן שווה ל- X והשנייה ל- $\emptyset$.

במרחב קשיר יש "מעט" קבוצות פתוחות.

המשמעות: אם (X,τ) קשיר ו $\tau'\subseteq\tau$ אז (X,τ') קשיר.

אם נוסיף פתוחות המצב יכול להשתנות.

דוגמה: $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית הוא קשיר (נוכל להוכיח את זה לעצמנו בעזרת משפט ערך הביניים)

הקבוצות הקשירות ב- $\mathbb{R}$ הן כל הקבוצות הקמורות.

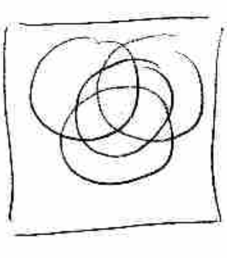
המרחב $\mathbb{R}_\ell$ ($\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הנפרשת ע"י הבסיס $\{[a,b)\}$)

אינו קשיר. הקבוצות $(-\infty,0)$ ו $[0,\infty)$ מהוות חלוקה של $\mathbb{R}_\ell$ לשתי פתוחות ולכן הוא לא קשיר.

דוגמאות לקבוצות קשירות: $\mathbb{R}$, I, (a,b)

דוגמאות לקבוצות לא קשירות: מ"ט דיסקרטי עם יותר מנקודה אחת, $\mathbb{R}_\ell$, $\mathbb{Q}$

טענה שהוכחנו בהרצאה: אם $\{A_\alpha\}$ קשירות, ו $A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset$ לכל α,β אז $\bigcup A_\alpha$.



הסקנו שניתן להגדיר לכל $x_0\in X$ את רכיב הקשירות שלו כאיחוד כל הקבוצות הקשירות המכילות את x_0 ולפי הטענה זה ת"מ קשיר.

דוגמאות: ב-$\mathbb{Q}$ רכיבי הקשירות הם היחידונים.
ב-$\mathbb{R}_\ell$ רכיבי הקשירות הם היחידונים.

הגדרה: למרחב בו היחידונים הם רכיבי הקשירות נקרא מרחב בלתי קשיר לחלוטין.

ראינו שרכיבי קשירות תמיד סגורים. לא תמיד רכיבי הקשירות הם פתוחים (למשל ב-$\mathbb{Q}$).
אם כל רכיבי הקשירות הם גם פתוחים אז המרחב מתנהג "יפה" - לכל העתקה $f:X\to Y$ (רכיבי הקשירות של X פתוחים)
f רציפה $\Leftrightarrow$ $f|_{X_\alpha}$ רציפה לכל X_α.
במקרה כזה נאמר כי X הוא איחוד זר של רכיבי הקשירות שלו $X=\coprod X_\alpha$.

$\mathbb{R}$ קשיר, $\mathbb{Q}$ בלתי קשיר לחלוטין. מה ההעתקות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$?
f רציפה $\Leftrightarrow$ f קבועה כי כל רכיב קשירות ב-$\mathbb{R}$ צריך לעבור לתוך רכיב קשירות ב-$\mathbb{Q}$ ואלו הם היחידונים.
בכיוון ההפוך, לא כל העתקה $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ היא רציפה וזה מעיד אומר ש- $\mathbb{Q}\ncong\coprod_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$

נתבונן במרחב $M_n(\mathbb{R})\supseteq O_n=\{A\in M_n(\mathbb{R}) : AA^t=I\}$
האם זהו מרחב קשיר? ראינו בשיעור שלא כי יש את $\det:O_n\to\{+1,-1\}$ רציפה ועל.

קשירות מסלתית.

מרחב X נקרא קשיר מסילתית אם קיימת $x_0 \in X$ כך שלכל $y \in X$ יש מסלה $\gamma: I \to X$ כך ש- $\gamma(0)=x_0$ ו- $\gamma(1)=y$.
לפי ההגדרה ונראה מרחב ריק הוא לא קשיר מסלתית.

היתרון העיקרי של קשירות מסלתית הוא שזה משהו שהרבה יותר קל לבדוק בד"כ מאשר קשירות.

<u>משפט</u>: אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

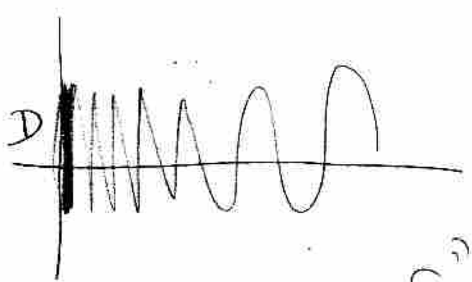
<u>הערה</u>: שני התנאים (1) קשירות
(2) קשירות מסלתית
אינם שקולים.

<u>דוגמא</u>: נביט בגרף הפונקציה $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

$$\Gamma_f = \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1)\}$$

נסמן $A = \overline{\Gamma_f} = \Gamma_f \cup D$ כאשר $D = \{(0,t) : t \in [-1,1]\}$

1) צ"ל A קשרה. זה ברור כי
Γ_f קשירה כי היא הומאומורפית ל-$(0,1)$
ו- $A = \overline{\Gamma_f}$ $\Rightarrow$ גם A קשירה.



2) A אינה קשרה מסלתית. נניח בשלילה
ש- A קשירה מסילתית. $\gamma: I \to A$ מסלה כך ש-
$\gamma(1)=(\frac{1}{2}, \sin 2)$, $\gamma(0) \in D$. γ רציפה $\Leftarrow$ $\gamma^{-1}(D)$
סגורה ב-I ולכן יש לה מקסימום קטן ממש מ-1 (נסמן אותו ב-M). נצמצם להעתקה $\gamma|:[M,1] \to A$ ונקבל
ש- $\gamma(M) \in D$ ו- $\gamma(x) \notin D$ לכל $x \neq M$.
γ רציפה וכן ההטלה על ציר ה-X רציפה ולכן גם
$\pi_x \circ \gamma : [M,1] \to \mathbb{R}$ המקיימת $\gamma(M)=0$ $\gamma(1)=\frac{1}{2}$ כיוון שהקטע
$[M,1]$ קשיר אז תמונתו קשירה ולכן מכילה את $[0,\frac{1}{2}]$ בפרט
כל $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ שייך לתמונה. $\Leftarrow$ כל האיברים

מהגדרה $(x_n,1)$ שייכים ל- $\mathrm{Im}\, g$
ומקומפקטיות נובע שגם $(0,1)$ שייכת ל- $\mathrm{Im}\, g$
ובדומה $(0,-1)$

(10) 28.5.07
טופולוגיה

החל מהשבוע הבא התרגול יימשך שעתיים.

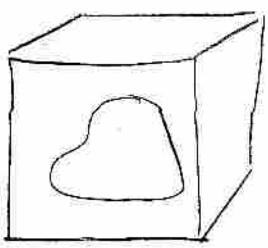
מרחבים קומפקטיים

הגדרה: מרחב טופולוגי (X,τ) נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח של X ישנו תת כיסוי סופי.

הרעיון הוא שמרחב טופולוגי מתנהג דומה למרחב סופי. אנחנו נראה שיש הרבה משפטים שמשותפים לשניהם.

אם (X,τ) קומפקטי ! $\tau'\subseteq\tau$ אז (X,τ') קומפקטי.
זה ברור!

קומפקטיות ב-$\mathbb{R}^n$ - קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אמ"מ היא סגורה וחסומה



$=\prod[a_i,b_i]$ הקובייה היא קומפקטית
(זה ממשפט טיכונוף שנלמד בעתיד)
וקבוצה סגורה בתוכה היא קומפקטית.

דוגמאות:

- $GL_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}) : \det A\neq 0\}=\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ פתוחה ו-$\det$ רציפה $\Leftarrow$ $GL_n(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}^{n^2}$
פתוחה. $\mathbb{R}^{n^2}$ קשיר $\Leftarrow$ $GL_n(\mathbb{R})$ אינה סגורה
$\Leftarrow$ אינה קומפקטית

- $SL_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}) : \det A=1\}$

זאת קבוצה סגורה כי זה המקור של $\{1\}$ תחת $\det$
אבל היא לא קומפקטית כי אינה חסומה: שהרי, לכל
$t\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} t & & 0\\ & \frac{1}{t} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}\in SL_n(\mathbb{R})$

- $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$
האוסף הזה סגור. אם $f: M_n(\mathbb{R}) \circlearrowleft$ מוגדרת ע"י $f(A) = AA^t$, לכן היא העתקה רציפה. למעשה $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I)$ ולכן סגורה.
חוץ מזה האוסף חסום. מטריצה היא אורתונורמלית אמ"מ העמודות שלה מהוות בסיס אורתונורמלי. בפרט כל הקואורדינטות חסומות ע"י 1 בערך מוחלט.
- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i^2 = 1\}$ קומפקטית כי סגורה וחסומה.
- $T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ קומפקטית משני סיבות: - S^1 קומפקטי $\Leftarrow$ טיכונוף המכפלה קומפקטית
- קבוצה סגורה וחסומה ב- $\mathbb{R}^{2n}$

קומפקטיות במרחבים מטריים

קבוצה $K \subseteq X$ (X מ"מ) קומפקטית $\Leftarrow$ סגורה וחסומה.
הכיוון ההפוך אינו נכון. (למשל, מרחב דיסקרטי אינסופי הוא סגור וחסום אך לא קומפקטי.
חוץ מזה, יש את משפט היינה בורל: X מ"מ קומפקטי אמ"מ X קומפקטי סדרתי אמ"מ לכל תת-קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות..

<u>שאלה למחשבה:</u> יש קשר בין קומפקטיות לבין חסימות במ"מ. איך תכונה לא טופולוגית מתקשרת לתכונה טופולוגית? מה הבעייתיות ומה הפיתרון?
האם חסימות היא תכונה טופולוגית? מאיפה מגיע?

קומפקטיות במרחב האוסדורף - אם X האוסדורף

! - $K \subseteq X$ קומפקטית אז היא סגורה.

עבור מרחב כלליים זה לא נכון! למשל במרחב טופולוגי טריוויאלי.

וגם ישנם מרחבים שבהם חיתוך שתי קומפקטיות אינו קומפקטי (בניגוד למרחבים מטריים).

באופן כללי עבור מרחבים טופולוגיים כלליים מתקיים היחס

קומפקטיות סדרתית SC $\Rightarrow$ BW $\Leftarrow$ קומפקטיות

BW לכל תת קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות

הכיוונים ההפוכים לא נכונים. למשל $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$ טריוויאלי, מקיים את BW אבל לא קומפקטי וגם לא קומפקטי סדרתית.

<u>דוגמאות</u>

1) כל מרחב סופי / בעל טופולוגיה סופית הוא קומפקטי.

2) מרחב עם טופולוגיה קו-סופית הוא קומפקטי.

3) ספרת היחידה $\subseteq \ell_2$ כלומר $\{x : \|x\| = 1\} \subseteq \{(x_n) : \sum x_k^2 < \infty\}$

זהו מרחב שאינו קומפקטי. נסתכל בנקודות

$e_n = (0, \dots, \underset{\text{מקום } n}{1}, \dots 0)$

המרחק בין כל זוג e_n, e_m הוא $\sqrt{2}$ ולכן זו קבוצה דיסקרטית סגורה אינסופית $\Rightarrow$ ספרת היחידה אינה קומפקטית. כי אם היה קומפקטי אז תת קבוצה סגורה גם היא קומפקטית.

4) $\prod[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subseteq \ell_2$ - קוביית הילברט - קומפקטי (צריך להראות שהטופולוגיה היא טופולוגיית המכפלה)

(12) 4.6.07
ק' טופולוגיה

קומפקטיות

הגדרה: X נקרא <u>קומפקטי</u> אם לכל כיסוי פתוח יש תת-כיסוי סופי.

X נקרא <u>קומפקטי סדרתית</u> אם לכל סדרה יש ת"ס מתכנסת (SC)

X נקרא <u>קומפקטי נקודת גבול</u> אם לכל קבוצה אינסופית יש <u>נקודת הצטברות</u> (לכל A אינסופית יש $a\in X$ כך ש- $a\in\overline{A\setminus\{a\}}$). (BW)

המטרה: להוכיח:

קומפקטי $\Rightarrow$ BW

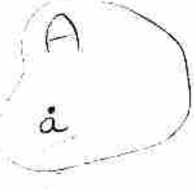
CS $\Rightarrow$ BW

<u>צעד I</u> קומפקטי $\Rightarrow$ BW

יהי X מרחב קומפקטי ו-A קבוצה ללא נקודות הצטברות.

$\Rightarrow$ • A סגורה (כי $\bar{A}=A\cup B$ כאשר B קבוצת נקודות ההצטברות של A).

• A דיסקרטית (כי אף נקודה אינה נקודת הצטברות לכן לכל $a\in A$ $a\notin\overline{A\setminus\{a\}}$ לכן ק"מת סביבה פתוחה של a שאינה חותכת את $A\setminus\{a\}$.



$\Rightarrow$ $\{a\}$ פתוחה בטופולוגיה המושרית.

A סגורה בתוך מרחב קומפקטי X. לכן קומפקטית. אבל היא גם דיסקרטית. $\Rightarrow$ A סופית.

<u>צעד II</u> אם X מרחב SC ונניח ש-A קבוצה אינסופית, ניקח סדרה $a_n\in A$ שאיבריה שונים זה מזה. ל-(a_n) יש ת"ס מתכנסת $a_{n_k}\to a_0$ ואז a_0 נק' הצטברות של A.

$\boxed{\text{דוגמה:}}$ קומפ' $\not\Rightarrow$ SC

נביט ב- $X=\{0,1\}^{P(\mathbb{N})}$ הטופולוגית המכפלה.

X קומפקטי ממשפט טיכונוף אבל X לא SC. למה?

נגדיר סדרה $(a_n)\subseteq X$. לכל $U\subseteq\mathbb{N}$ (נצטרך להגדיר סדרה (a_n^U)). נגדיר כך:

$$a_n^U=\begin{cases}0 & n\notin U\\ 1 & n\in U\end{cases}$$

בהמשך הבא נניח שהתכנסות במרחב המכפלה שקולה להתכנסות בכל קואורדינטה.

נראה ש ל-(a_n) אין ת"ס מתכנסת. נניח a_{n_k} ת"ס. כדי להראות ש- a_{n_k} אינה מתכנסת צריך להראות שיש קואורדינטה U_0 כך ש- $(a_{n_k}^{U_0})$ לא מתכנסת.

ניקח $U_0=\{n_{2k}\}$ אז

$$a_{n_k}^{U_0}=\begin{cases}1 & k \text{ זוגי}\\ 0 & k \text{ אי-זוגי}\end{cases}$$

$\boxed{\text{דוגמה:}}$ SC $\not\Rightarrow$ קומפקטיות

יהי S_Ω הסודר הראשון שאינו בן מניה עם טופולוגית הסדר. S_Ω אינו קומפקטי: - אין איבר מקסימלי ולכן כל x מוכל בקבוצה מהצורה $[0,a)$ כאשר $x<a$.

אז $\{[0,a)\}$ הוא כיסוי של S_Ω אבל אין לו תת כיסוי סופי $\Leftarrow$ S_Ω לא קומפקטי.

אבל S_Ω הוא SC. כיוון שלכל סדרה בסודר יש limsup שהוא תמיד בסגור של הסדרה, כלומר גבול חלקי.

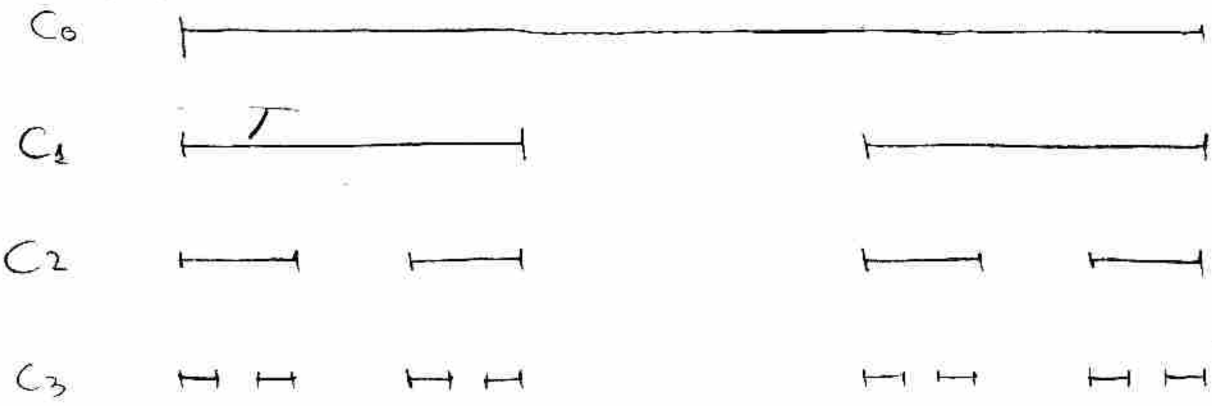
$\boxed{\text{דוגמה:}}$ BW $\not\Rightarrow$ קומפקטי או SC

ראינו בשבוע שעבר ש $\mathbb{Z}\times\{0,1\}$ עם הטופולוגיה הטריוויאלית על $\{0,1\}$

קבוצת קנטור

ניקח את הקטע $[0,1]$ ונסמן $C_0=[0,1]$

רקורסיבית מכל קטע נסיר את השליש האמצעי:



קבוצת קנטור היא $C=\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. תכונות:

1) C חיתוך של סדרת קומפקטיות לא ריקות ולכן C קומפקטית לא ריק

2) המידה של C היא אפס (המידה של C_n היא $(\frac{2}{3})^n$, $\mu(C_n)=(\frac{2}{3})^n$)

3) $x\in C$ אמ"מ קיים פיתוח של x לפי בסיס 3 כך שבפיתוחו לא מופיעה הספרה 1.

4) $\aleph = |C| = 2^{\aleph_0}$

5) $\mathring{C}=\emptyset$, $\bar{C}=C$

כל נקודה ב-C היא נקודת הצטברות

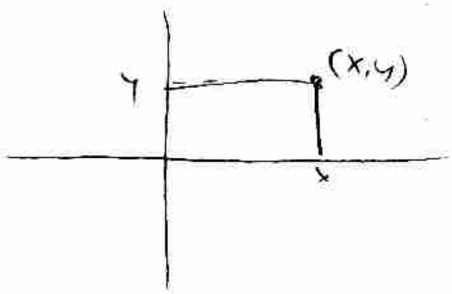
6) $C \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

7) משפט אלכסנדרוב: כל מרחב מטרי קומפקטי הוא תמונה רציפה של C.

מרחבי מכפלה

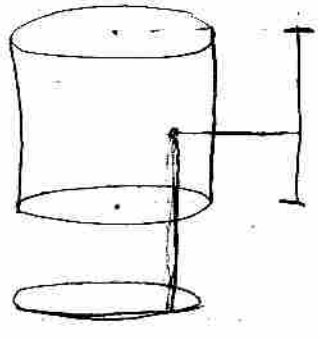
דוגמאות: $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

לפי ההגדרה הקבוצות הפתוחות ב-$\mathbb{R}^2$ נוצרות ע"י מכפלות $U\times V$ כאשר U,V פתוחות ב-$\mathbb{R}$.



ההטלות $\pi_x:(x,y)\mapsto x$, $\pi_y:(x,y)\mapsto y$ רציפות ופתוחות! מקיימים את התכונה האוניברסלית שהעתקה $f:A\to X\times Y$ היא רציפה אמ"מ ההעתקות $\pi_x\circ f$, $\pi_y\circ f$ רציפות (כלומר f רציפה בכל קואורדינטה)

$S^1\times I$



העתקה רציפה $f:A\to S^1\times I$ היא למעשה שתי העתקות
$f_1:A\to S^1$
$f_2:A\to I$

<u>תרגיל</u>: הראו כי $x_n\to x_0$ אמ"מ לכל α $\pi_\alpha(x_n)\to\pi_\alpha(x_0)$

<u>הוכחה</u>: נזכור כי $x_n\to x_0 \iff$ הפונקציה $f:\mathbb{N}^+\to X$, $n\mapsto x_n$, $\infty\mapsto x_0$

רציפה $\iff$ $\pi_\alpha\circ f$ רציפה לכל α $\iff$ $\pi_\alpha(x_n)\to\pi_\alpha(x_0)$ לכל α.

11

<u>תרגיל</u>: X_α מ"ט ו- $A_\alpha\subseteq X_\alpha$ סגורות אז $\prod_\alpha A_\alpha\subseteq\prod X_\alpha$ בטופולוגיית המכפלה סגורה. האם המכפלה סגורה בטופולוגיית הקופסאות? - התשובה: כן! כי טופולוגיית הקופסאות היא עידון של טופולוגיית המכפלה.

תרגיל: יהי (X,τ) מ"ט האוסדורף קומפקטי
- אם $\tau \subsetneq \tau'$ אז (X,τ') אינו קומפקטי.
- אם $\tau' \subseteq \tau$ אז (X,τ') אינו האוסדורף

פתרון: מהיות האוסדורף קומפקטי יש זהות בין קבוצות סגורות לקומפקטיות. אם נוסיף קבוצה פתוחה U אז נוסיף גם קבוצה סגורה $V=U^c$. אבל V גם הייתה קומפקטית ולכן גם עכשיו אינה קומפקטית. לכן (X,τ') אינו קומפקטי.
הטענה השנייה דומה.

דוגמה: I^ω בטופולוגיית הקופסאות אינה קומפקטית. I^ω קומפקטית האוסדורף במכפלה ולכן לפי התרגיל אינה קומפקטית.

קומפקטיות מקומית

הגדרה: X נקרא קומפקטי מקומית אם לכל $x_0 \in X$ יש סביבה עם סגור קומפקטי.
אם X הוא האוסדורף זה שקול לכך שיש קומפקטית המכילה סביבה של x_0.

דוגמאות: $\mathbb{R}^n$
- כל מרחב קומפקטי האוסדורף
- $\mathbb{N}$

משפט: אם X האוסדורף קומפקטי מקומית אז קיים שיכון $X \hookrightarrow X^+$ כאשר X^+ קומפקטי האוסדורף.

משפט: המשפט היסודי של האלגברה: לכל $p\in\mathbb{C}[X]$ שאינו קבוע קיים $x_0\in\mathbb{C}$ כך ש $p(x_0)=0$.

הוכחה:

ראשית נזהה $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ ע"י $a+ib \leftrightarrow (a,b)$
הפולינום מגדיר פונקציה של $\mathbb{C}$ ולאחר הזיהוי הוא מגדיר פונקציה של $\mathbb{R}^2$ - $\tilde{p}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$

שנית, כדי להוכיח את המשפט יש להראות ש- 0 בתמונה של $\tilde{p}$ או להראות ש- $\tilde{p}$ היא על.

נקודה $x\in\mathbb{R}^2$ נקראת נקודה רגולרית אם $Df(x)$ הפי׳ רגולרית. $y\in\mathbb{R}^2$ נקראת ערך רגולרי אם לכל $x\in f^{-1}(y)$ x רגולרית

לכל $y\in\mathbb{R}^2$ יש מספר סופי של מקורות ואם כולם רגולריים אז יש סביבה U של y כך ש- $f(U)=V_1\cup\dots\cup V_n$ שכולן מועתקות הומאומורפית ל- U. $\Leftarrow$ מספר המקורות במקרה זה הוא קבוע מקומית.

(15) 11/6/07
ת. טופולוגיה

מרחבי מנה

<u>הגדרה:</u> העתקה $f: X\to Y$ נקראת העתקת מנה אם:
1) f על
2) $U\subseteq Y$ פתוחה אמ"מ $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה.

<u>הערות</u>
1) העתקת מנה היא רציפה
2) אם נחליף את המילה "פתוחה" ב"סגורה" בהגדרה, נקבל הגדרה שקולה
3) העתקה פתוחה והעתקה סגורה הן העתקות מנה של תמונתן.

<u>דוגמאות:</u>
1) $f:\mathbb{R}\to S^1$ המוגדרת ע"י $f(t)=(\cos t, \sin t)$
היא העתקת מנה. היא פתוחה - התמונה של קטע פתוח הוא קשת פתוחה. אבל היא לא סגורה כי $f(\{\frac{1}{n}+2\pi n\})$ אינה סגורה.
2) $f: I\to S^1$ - מצמצום f מקודם. f סגורה כיוון ש-I קומפקטי ו-S^1 האוסדורף.
באופן כללי הלא נכון שצמצום של העתקת מנה הוא העתקת מנה.
3) באופן כללי: אם $f:X\to Y$ על ורציפה ו-X קומפקטי ו-Y האוסדורף אז f העתקת מנה (כי היא סגורה).

<u>הגדרה:</u> יהי X מ"ט ו-$\sim$ יחס שקילות על X. נרצה להגדיר טופולוגיה על $X/\sim$ (כלומר על מחלקות השקילות) בצורה הבאה: $U\subseteq X/\sim$ פתוחה אמ"מ $\bigcup_{u\in U} u$ פתוחה ב-X.
(ישנה העתקה טבעית $X\to X/\sim$, $x\mapsto [x]$ העתקה זו היא העתקת מנה.)

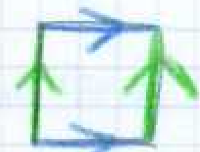
דוגמאות לשימושים בטופולוגיית המנה:

1) הדבקה

2) להכווץ תת מרחב $A\subseteq X$ שאנחנו רוצים. (מס' ב X/A)

3) כאשר G חבורה פועלת על X, X/G זהו המרחב שיחס השקילות שלו הוא $x\sim y \iff \exists g\ gx=y$. נקרא מרחב המסלולים.

דוגמא:

$I^2=$ 

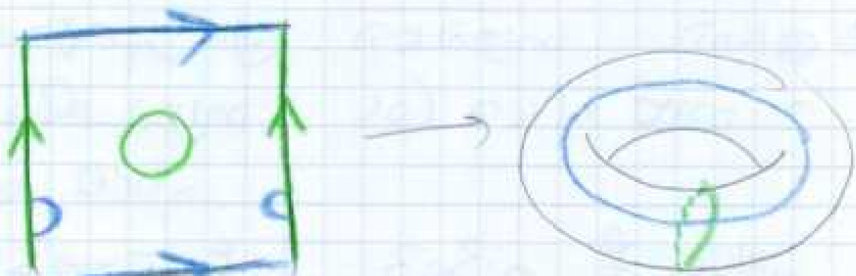
יחס שקילות:

$(x,0)\sim(x,1)$

$(0,y)\sim(1,y)$

אז $I^2/\sim\ \cong S^1\times S^1$ טורוס, דו ממדי!

איך נראות קבוצות פתוחות ב- $I^2/\sim$?



הדבר החשוב ביותר בטופולוגיית המנה הוא התכונה האוניברסלית:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & \end{tikzcd}$$

העתקת מנה

רציפה

אם f העתקת מנה ו- g רציפה ו- $f(x)=f(x') \Rightarrow g(x)=g(x')$

אז קיימת העתקה יחידה $\tilde{g}:Y\to A$

כך ש- $g=\tilde{g}\circ f$ ו- $\tilde{g}$ רציפה.

קודם כל, נשים לב שאם $\sim$ יחס שקילות על X ; $p:X\to X/\sim$

טופ' יחידה על $X/\sim$ כך ש p היא מנה. בעזרתה נבין איך נראים מרחבי המנה.

תרגיל 1: $I/\{0,1\} \cong S^1$.

נגדיר $g: I \to S^1$ ע"י $g(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

g מקיימת $g(0)=g(1)$ ולכן קיימת העתקה יחידה

$\tilde{g}: I/\{0,1\} \to S^1$. $\tilde{g}$ היא: 1) רציפה

2) חח"ע ועל

3) I קומפקטי ו- S^1 האוסדורף

$\Rightarrow$ $\tilde{g}$ סגורה.

$\Rightarrow$ $\tilde{g}$ הומאומורפיזם

תרגיל 2: מצאו את מרחב המנה של $I^2/\sim$ כמו בציור.

נראה ש- $I^2/\sim \cong T^2 = S^1 \times S^1$.

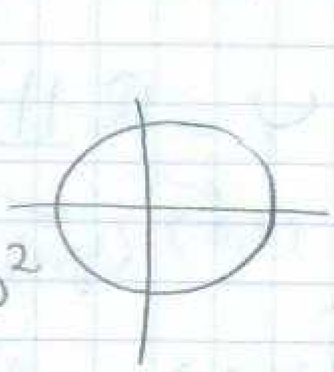
נגדיר $g: I^2 \to S^1 \times S^1$ ע"י

$$g(x,y) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y)$$

$I^2/\sim$ קומפקטי, $S^1 \times S^1$ האוסדורף,

$\tilde{g}$ חח"ע ועל $\Rightarrow$ $\tilde{g}$ הומאומורפיזם.

תרגיל 3:

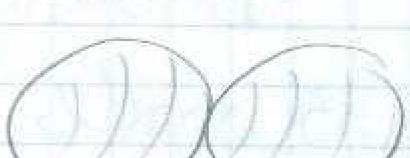


D^2

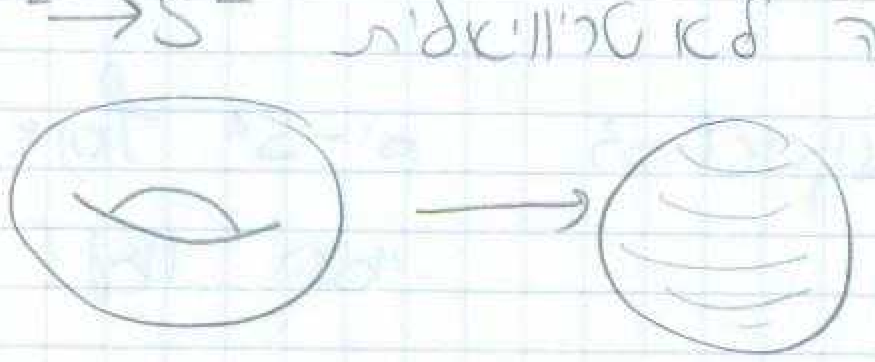
$\sim$ - נקודות השפה.

$$D^2/S^1 \cong S^2$$

תרגיל 4: $S^2/S^1 = S^2 \vee S^2$



תרגיל 5: בנו העתקה לא טריוויאלית $f: T^2 \to S^2$



שימושים למרחבי מנה:

- גרף הוא מרחב מנה: $G = \coprod_{u\in E} I\times\{u\} \big/ \sim$

- בהינתן מרחב X נגדיר את המתלה של X:

$$\Sigma X = X\times I \Big/ {\scriptstyle (x,0)\sim(x',0) \atop (x,1)\sim(x',1)}$$

למשל $\Sigma S^1 =$  $\cong S^2$

- $(X,*_1)$ מרחב מנוקד ו- $(Y,*_2)$ מרחב מנוקד אז

$$X\vee Y = X\coprod Y \big/ *_1\sim *_2$$

בעיות

- מרחב המנה יכול להיות מאוד מכוער

$$Y = \underset{(x,0)}{\mathbb{R}}\coprod\underset{(y,1)}{\mathbb{R}} \Big/ {\scriptstyle (x,0)\sim(x,1) \atop x\neq 0}$$

מה שקיבלנו זה קו הישר עם הראשית הכפולה וזה מרחב שאינו האוסדורף.
נשים ♡ שלמרחב זה מתקיים: לכל נקודה יש סביבה הומאומורפית ל- $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong$ אינסוף S^1-ים זה לא קומפקטי אבל לא הומאומורפי לזר הפרחים.

המישור הפרויקטיבי הדו-מימדי הינו $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \big/ {\scriptstyle v\sim\lambda v,\ \lambda\neq 0}$

זה שקול לאוסף הישרים ב-$\mathbb{R}^3$ שעוברים דרך הראשית.

ננסה להבין למה שווה מרחב זה.

נטען ש- $\mathbb{RP}^2 \cong S^2/_{x\sim -x}$:

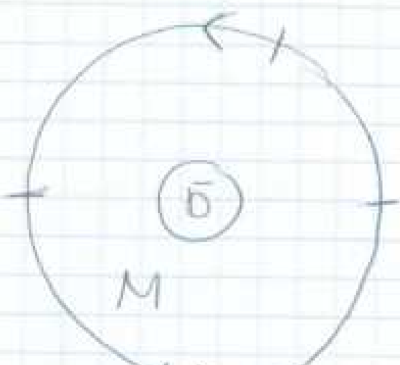
$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[d] \arrow[dr, "x\mapsto \mathrm{span}\{x\}"] & \\ S^2/_\sim \arrow[r, "\exists! g"] & \mathbb{RP}^2 \end{tikzcd}$$

g הינו חח"ע ועל וגם מכיוון ש- $S^2/_\sim$ קומפ' ו-$\mathbb{RP}^2$ האוסדורף (ראינו בתרגיל בית שהוא מטריזבילי)

$\Rightarrow$ g הומאומורפיזם.

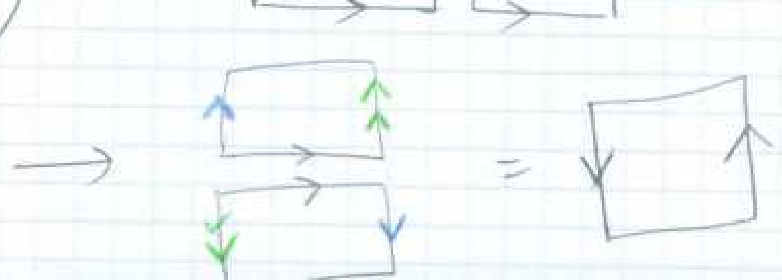
עוד - $\mathbb{RP}^2 \cong D^2 \big/ {\scriptstyle x\sim -x}$ רק על השפה.

$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[r] \arrow[d] & S^2 \arrow[r] & S^2/_\sim \\ D^2/_\sim \arrow[urr, dashed] & & \end{tikzcd}$$



נראה ש- $\mathbb{RP}^2 = D \amalg Mb/_\sim$

טענה: $M =$  הומאומורפי לטבעת מוביוס.



מרחבים נורמליים

מ"ט נקרא נורמלי אם הוא T_1 וגם כל זוג סגורות זרות ניתנות להפרדה ע"י פתוחות זרות.

בד"כ קשה מאוד לבדוק האם X נורמלי.

לדוגמה מכפלה של נורמלים לא בהכרח נורמלית. ($\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$)

תת מרחב של נורמלי לא בהכרח נורמלי.

מתי X נורמלי?

- אם X מטריזבילי
- אם X האוסדורף קומפקטי
- אם X ת"מ סגור של נורמלי
- אם X רגולרי עם בסיס בן מניה.

18 18.6.07
ת.טופולוגיה

המסתבר שיהיו בקורס 11 תרגילים בכל אופן לא יותר.
אפשר לא להגיש 3 תרגילים.
התרגילים יהוו כ- 10% מהציון
ב- 20/7 יש מועד א' של תלפיונים. אפשר להגיש לאחד ממועדי ה-א'.

טופולוגיה אלגברית

אינווריאנטים של מ"ט: קומפקטיות, האוסדורף, נורמליות, מטריזביליות, רכיבי קשירות של המרחב, רכיבי קשירות מסילתית.

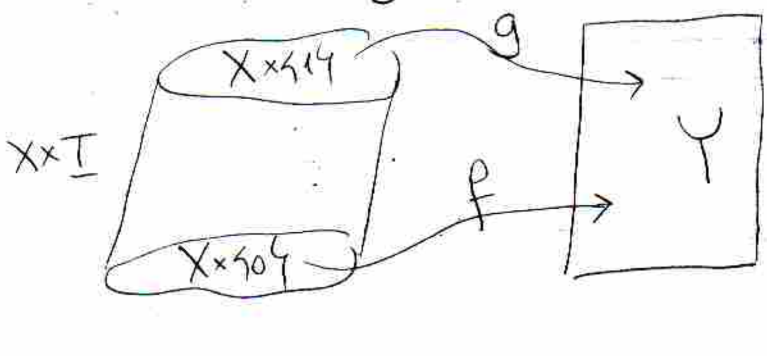
בעיה גדולה: לא ניתן להבדיל בין מ"ט עד כדי הומאומורפיזם בעזרת תכונות אלו.

- האם S^2 הומא' ל- $\mathbb{RP}^2$?
- האם S^2 הומא' ל Mb?

יותר קל לענות על שאלות כאלה לגבי חבורות.
אז נרצה להתאים לכל מ"ט איזשהו אוביקט אלגברי (חבורה, חוג, שדה, מו) כיוון שבד"כ אוביקטים אלה יותר קלים להבנה.

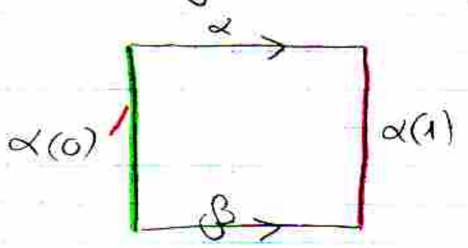
מהי הומוטופיה?

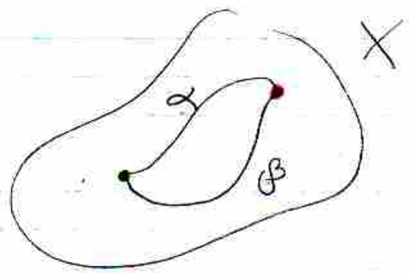
תהיינה $f,g: X\to Y$ נאמר ש- $f\sim g$ אם קיימת $H: X\times I\to Y$ רציפה כך ש- $H(x,0)=f(x)$; $H(x,1)=g(x)$

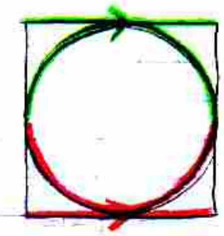


האפשרות להרחיב את f,g לכל $X\times I$

שתי מסילות $\alpha,\beta: I\to X$ נקראות הומוטופיות אם ק"מ
$H: I^2\to X$ רצ' ש- $H(0,y)=\alpha(0)$ $\quad H(x,0)=\alpha(x)$
$H(1,y)=\alpha(1)$ $\quad H(x,1)=\beta(x)$

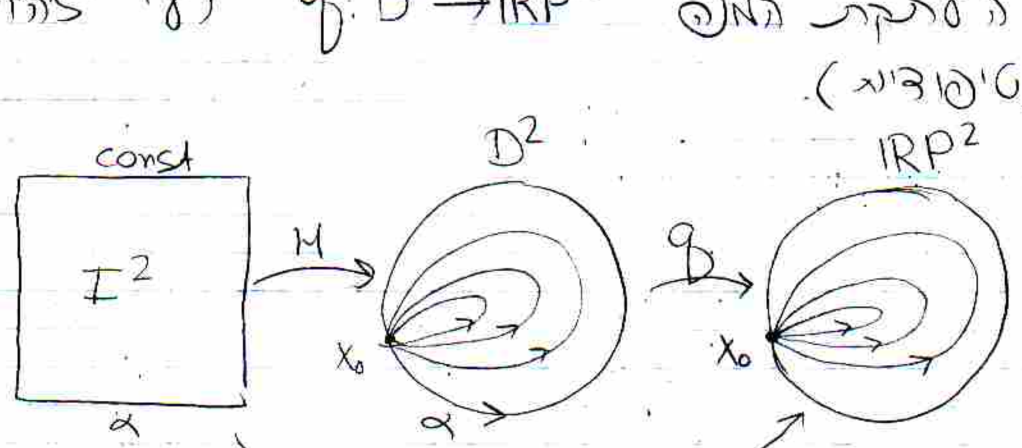






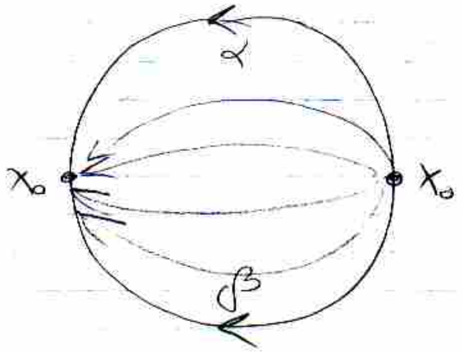
זה המצב שלנו למסילות הומוטופיות:
α,β הומוטופיות זה כמו להגיד שיש
העתקה מ- I^2 ל- X. אבל כל
צד ימין הוא $\alpha(1)$ וכל צד שמאל הוא
$\alpha(0)$. נחשוב על כל צד כנקודה אחת. ומעשה זה
מרחב המנה $D^2 \cong I^2/_\sim$. אז בדיסקית α
עוברת על החצי העליון ! β עוברת על החצי התחתון.

__דוגמה:__ ב- D^2 המסילה α שעוברת על כל היקף
המעגל הומוטופית למסילה הקבועה.
תהי q העתקת המנה $q: D^2\to \mathbb{R}P^2$ (ע"י זיהוי
נקודות אנטיפודיות).



(19)

נסתכל על $\mathbb{R}P^2$ ועל המסלולים α, β כמו בציור



$\alpha \sim \beta$. אבל לפי ההגדרה

$\beta = \alpha^{-1}$. $\Leftarrow$ $\alpha^{-1} \sim \alpha$

$\Leftarrow$ $\alpha^2 = Id$.

אפשר להראות ש- $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

<u>הגדרה</u>: יהי X מ"ט ו- $x_0 \in X$. <u>החבורה היסודית</u> של X מתחת לנק' x_0 היא אוסף ההעתקות $\gamma : I \to X$ המקיימות $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ מודולו יחס השקילות של הומוטופיה.
פעולת הכפל בחבורה מגיעה מפעולת השרשור של מסלולים.

מרחב נקרא <u>פשוט קשר</u> אם הוא קשיר מסילתית ו- $\pi_1(X,x_0) = \{1\}$

מרחב נקרא <u>כוויץ</u> אם $Id : X \to X$ הומוטופי להעתקה הקבועה.

ניתן להראות שאם X כוויץ אז X פשוט קשר.

<u>דוגמאות</u>:

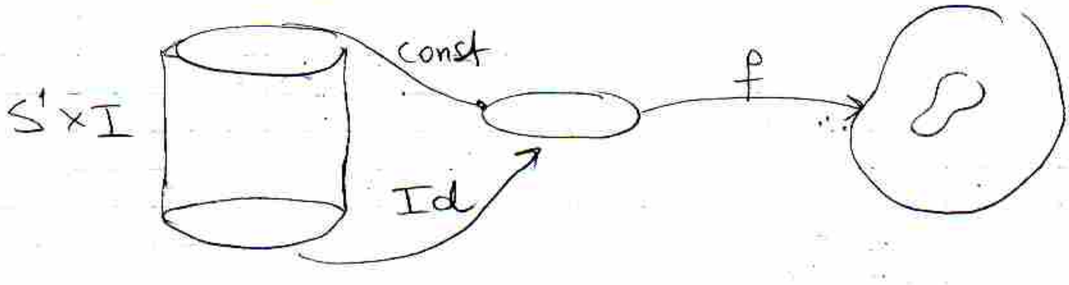
(1) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>קבוצה קמורה</u> ולא ריקה אז A כוויצה ולכן $\pi_1(A, x_0) = \{1\}$.

צ"ל: $Id : A \to A$ הומוטופית לקבועה. אז ניקח

$$H : X \times I \to X$$
$$H(x,t) = tx_0 + (1-t)x$$

(2) $\pi_1(S^1, *) = \mathbb{Z}$

אם $\pi_1(S^1, *)$ הייתה חבורה טריוויאלית היה נובע כי $\pi_1(X, *)$ הייתה חבורה טריוויאלית לכל מ"ט X



איך יודעים ש- $\pi_1(S^1,*)\neq\{1\}$? ניזכר שאם F
שדה משמר מקומית ! אז $\gamma_1\sim\gamma_2$ אז $\int_{\gamma_1}Fd\gamma=\int_{\gamma_2}Fd\gamma$
וראינו מסילה סגורה ב- $\mathbb{R}^2$ כך ש- $\int_\gamma Fd\gamma\neq 0$.
זה רומז ש- γ אינה הומוטופית לקבועה ולכן $\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\neq\{1\}$.
$\Leftarrow\ \pi_1(S^1)\neq\{1\}$.

③ $\pi_1(S^n)=\{1\}$ לכל $n>1$. (מתרגיל)

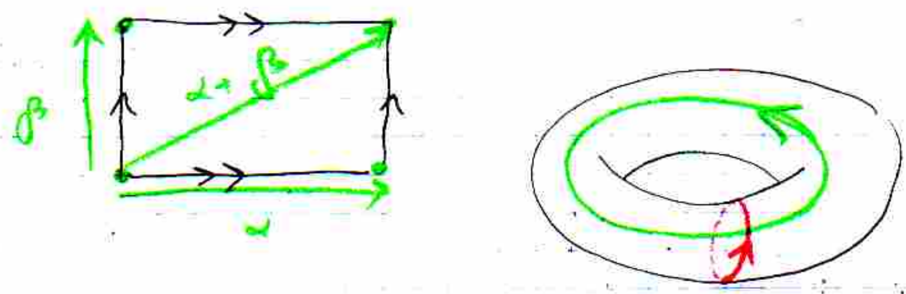
④ $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})=\{1\}$ לכל $n>2$:

$$\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\cong S^n\times\mathbb{R}_+$$
$$x\longmapsto\left(\frac{x}{\|x\|},\|x\|\right)$$

$$\pi_1(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})=\pi_1(S^n\times\mathbb{R}_+)=\pi_1(S^n)\times\pi_1(\mathbb{R}_+)=\pi_1(S^n)=\{0\}$$

<u>הערה</u> $\mathbb{R}^2\not\cong\mathbb{R}^3$ כי אם מורידים מהם את –
הראשית עבור $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ החבורה היסודית אינה
$\{1\}$ ועבור $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ החבורה היסודית $\{1\}$.

④ $\pi_1(S^1\times S^1)=\mathbb{Z}^2$



פונקטוריאליות של π_1 :

$\left\{\begin{array}{l}X\xrightarrow{f}Y\\ x_0\longmapsto y_0\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \pi_1(X,x_0)\xrightarrow{f_*}\pi_1(Y,y_0)$ הומומורפיזם

① $Id_*=Id$

② $(gf)_*=g_*f_*$

<u>הגדרה</u>: יהי $A \subseteq X$ נקרא <u>רטרקט</u> של X
אם קיימת העתקה $f: X \to A$ רק ש- $f|_A = Id$.

אפשר לרשום זאת רק:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & X \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

מפונקטוריאליות נובע שאם A רטרקט של X
אז יש דיאגרמה מתחלפת

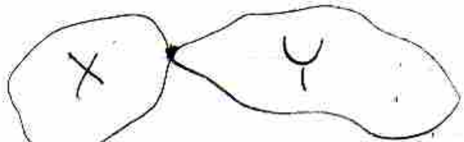
$$\begin{tikzcd} \pi_1(A,*) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & \pi_1(X,*) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(A,*) \end{tikzcd}$$

<u>מסקנה</u>: אם A רטרקט של X אז $i_*: \pi_1(A,*) \to \pi_1(X,*)$
היא חח"ע ו- $f_*: \pi_1(X,*) \to \pi_1(A,*)$ היא על

<u>דוגמא</u>: רטרקט של מרחב פשוט קשר הוא פשוט קשר.
לכן לדוגמא, S^1 אינו רטרקט של D^2.

1) <u>החבורה היסודית של מכפלה</u>:
$$\pi_1(X \times Y,\ x_0 \times y_0) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

2) $X \vee Y$



$$\pi_1(X \vee Y, *) = \underbrace{\pi_1(X,*) * \pi_1(Y,*)}$$

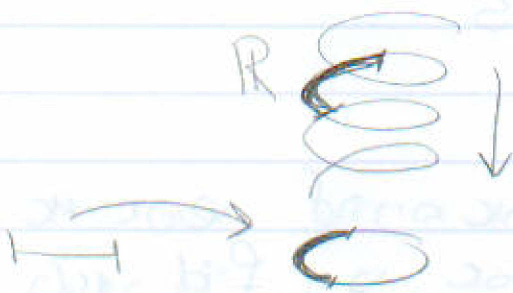
איברים מהצורה $g_1 h_1 \dots g_n h_n$
כאשר $g_i \in G$, $h_i \in H$

25/6/07
ת. טופולוגיה

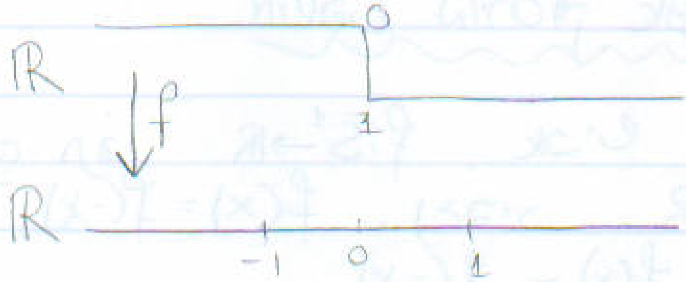
תרגול אחרון

את התרגול אפשר להגיש עד מחר בתרגול בין 3 ל-4 במקנדה שלין.

תזכורת: להעתקה $f:\mathbb{R}\to S^1$ המוגדרת ע"י $f(t)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi t\\ \sin 2\pi t\end{pmatrix}$ יש את תכונת הרמת המסילות ותכונת הרמת ההומוטופיה של מסילות.



ויש העתקות על שאין להן את התכונה הזאת.

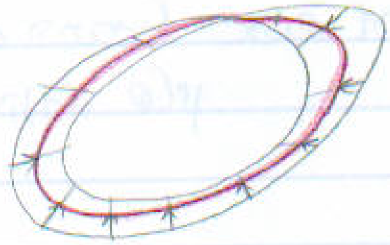


$$f(x)=\begin{cases} x & x\le 0\\ 0 & x\in[0,1]\\ x-1 & 1\le x\end{cases}$$

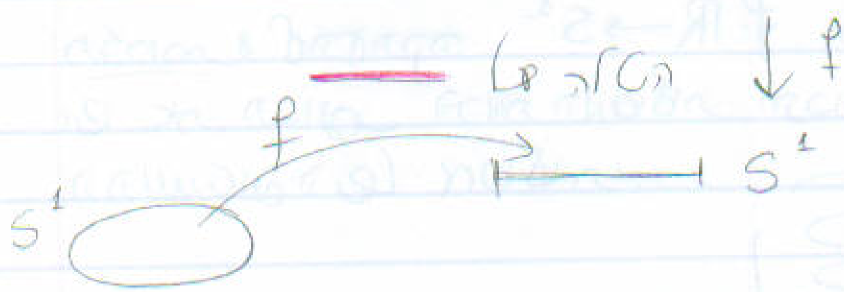
למשל את המסילה $\gamma: I\to[-1,1]$, $t\mapsto 2t-1$ לא ניתן להרים
כלומר לא קיימת $\tilde\gamma$ רציפה כך ש- $f\circ\tilde\gamma=\gamma$.

אין ברירה אלא להרים את $[-1,0)$ ל- $[-1,0)$ ומטעמי רציפות $\tilde\gamma$ צריך לעבור ל-0. אבל $(0,1)$ חייב לעבור ל- $(1,2)$ ואז $\tilde\gamma$ יוצאת לא רציפה.

טבעת מביוס



$Mb\setminus S^1$



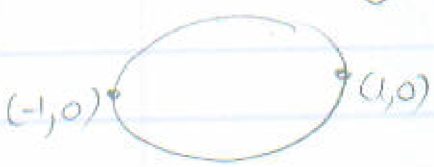
אי אפשר להרים את S^1 (תלרה) . $Mb\setminus S^1$
כלומר $f=id$, כי אם נמשיך אותם את הקצוות של S^1 נפרמים.

משפט בורסוק אולם

<u>משפט</u>: תהי $f:S^1\to\mathbb{R}$. אזי יש נק' $x\in S^1$ כך ש- $f(x)=f(-x)$. נגדיר $g:S^1\to\mathbb{R}$ ע"י

$$g(x)=f(x)-f(-x)$$

ראשית, g רציפה.



$$g(1,0)=f(1,0)-f(-1,0)$$
$$g(-1,0)=f(-1,0)-f(1,0)$$
$$=-g(1,0)$$

לכן ממשפט ערך הביניים יש x כך ש- $g(x)=0$.
$\Leftarrow$ $f(x)=f(-x)$.

<u>טענה:</u> תהי $f:S^2\to\mathbb{R}^2$ אז יש נק' $x\in S^2$ כך
ש- $f(x)=f(-x)$

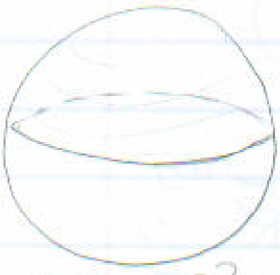
<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שלא קיימת נק' כזו ונגדיר

$$g:S^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}\in S^1$$

מה התכונות של g?

$$g(-x)=-g(x)$$

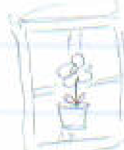


$S\hookrightarrow S^2$

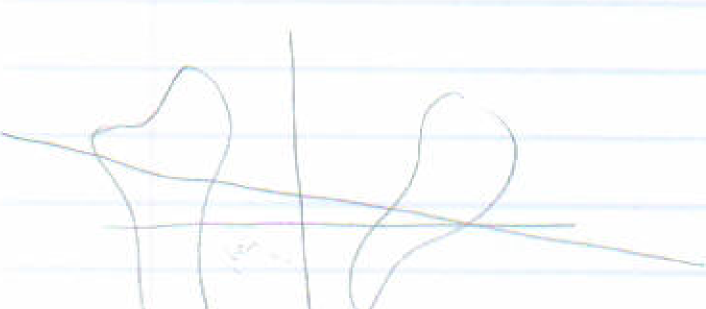
נתבונן בהעתקה המושרית

$$g|_{\text{קו המשווה}}:S^1\longrightarrow S^1$$

כיוון ש- g אי-זוגית נובע שהמסילה המתאימה
עושה מספר אי-זוגי של מעגלים בפרט g אינה
הומוטופית לקבועה. מצד שני $g|_S$ הינו
הומוטופית לקבועה כיוון שניתן להרחיב אותה לדיסק
(לדוגמא חצי הספרה העליונה).



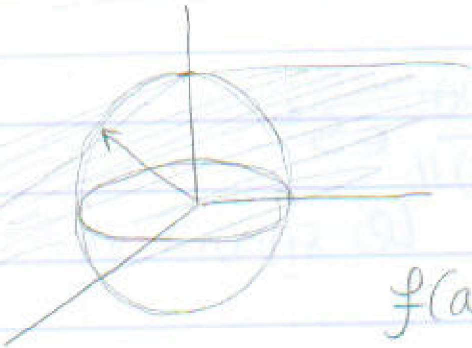
מכאן סתירה $\Longrightarrow$ ל- f חייבת להיות נקודה $x\in S^2$
כך ש- $f(x)=f(-x)$.



שתי קבוצות חסומות
ב- $\mathbb{R}^2$.
הטענה היא שניתן
להעביר ישר שחוצה
כל אחת מהקבוצות
לשני חלקים שווים בשטחם.

טענה: יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצות חסומות. אז יש ישר ℓ המחלק כל אחת משתי הקבוצות לשתי קבוצות שוות שטח!

הוכחה:



נשכן את $\mathbb{R}^2$ ב-$\mathbb{R}^3$ ע"י

$$(x,y)\longmapsto(x,y,1)$$

לכל $a\in S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ נגדיר

$f(a)=$ (השטח של A מעל המישור המאונך ל-a , השטח של B מעל המישור המאונך ל-a)

תחת הנחות מתאימות על A,B ניתן להראות ש $f:S^2\to\mathbb{R}^2$ רציפה. לכן מבורסוק אולם יש $x\in S$ כך ש- $f(x)=f(-x)$. כלומר השטח של A מעל המישור המאונך ל-x = השטח של A מתחת למישור המאונך ל-x. בדומה עבור B

משפט בורסוק אולם ב-n ממדים (והמשפט) n קבוצות חסומות ב-$\mathbb{R}^n$ ניתן לחלק בעזרת על מישור יחיד. ב-$\mathbb{R}^3$ זה נקרא משפט Hamsandwich

18.7.07
טופולוגיה

שיעור חזרה

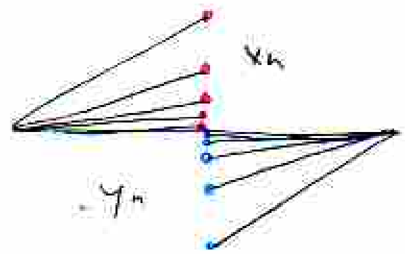
המבחן: שלושה חלקים
- 1 מתוך 2 שאלות מתרגילים
- 1 מתוך 2 הוכחת משפטים
- 2 מתוך 4 שאלות יחסית חדשות אבל דומות למה שהיה.

המבחן סגנון לא קל אבל את הרוב אנחנו כבר מכירים

פונקטור - לא הגדרנו מה זה הגדרנו תכונה שנקראת פונקטוריאליות ואמרנו שהחבורה היסודית מקיימת את התכונה הבאה. לכל העתקה $X \xrightarrow{f} Y$
מתאימה העתקה $\pi_1(X,*) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y,f(*))$
והפונקטוריאליות אומרת ש- $1)\ (g\circ f)_* = g_*\circ f_*$
$2)\ Id_* = Id$
כלומר תכונת הפונקטוריאליות של החבורה היסודית

כמו שבמבחנים של ארז ופיד לא סגרו לנו להתכוננות ארז נתן שאלות אמריקאיות. הדגש אצלנו יהיה לענות על שאלות פתוחות דומות למה שכבר ראינו אולי יהיו שאלה או שתיים שלא ראינו.
המבחנים של רון לבנה יותר דומים למה שיהיה לנו
המבחנים של יורי גם לא כ"כ רלוונטים

המסרק הכפול:



הסדרה הורודה שואפת לאותה נקודה כמו הסדרה הכחולה. (נסמן את הנקודה הזאת ב- (0).

אז אינטואיטיבית אם אנחנו רוצים לכווץ את המרחב אז את הנקודות הורודות צריך להביא שמאלה ואת הכחולות ימינה.
אם ישנה הומוטופיה אז מתכווציות שלה, לכל $0 \le t \le 1$ ומתקיים

$$f_t(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_t(0)$$
$$f_t(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_t(0)$$

ופתאום אנחנו בבעיה כי לאן תלך (0)? היא לא יכולה ללכת לאף אחד מהצדדים..

אם היינו מורידים את (0) היינו מקבלים מרחב שאינו קשיר מסילתית. יש לו שני רכיבי קשירות וכל אחד מהם כוויץ בנפרד.

<u>משפט</u>: אם X רגולרי עם בסיס בן מניה היא מטריזבילי.

המשפט הבא מתבסס על הלמה של אוריסון: אם X נורמלי, $A,B \subseteq X$ סגורות וזרות אז יש $f: X \to \mathbb{R}$ רק ש- $f|_A \equiv 1$ וגם $f|_B \equiv 0$.

איך הלמה קשורה למשפט? והטכניקה היא שנשכן את X בתוך מרחב מטריזבילי. $I^{\mathbb{N}}$ = מכפלה בת מניה של מרחבים מטריים קומפקטיים ולכן הוא גם מטרי. ואז יקבל ש- X מטריזבילי.

שלב I: מורידים שרגולרי + בסיס בן מניה $\Rightarrow$ נורמלי.

שלב II: נעבור מכל זוגות איברי הבסיס U,V רק ש- $\bar{U} \subseteq V$ ונגדיר $f_{U,V}: X \to I$ רק ש- $f|_V \equiv 0$! $f|_{\bar{U}} \equiv 1$.

שלב III: נגדיר $f = \prod f_{U,V} : X \to I^{\aleph}$

נב: f חח"ע. יהיו $x_1 \neq x_2$ ניתן להפריד אותן
ע"י קבוצות פתוחות $x_1 \in V$. מרגולריות קיימת U
כך ש- $\bar{U} \subseteq V$, ואז $f_{U,V}(x_1) = 1$ ו- $f_{U,V}(x_2) = 0$.
לכן $f_{U,V}$ מפרידה בין x_1 ו- x_2 ולכן f
מפרידה ביניהן

נב: f היא שיכון, כלומר, לכל $U \subseteq X$ פתוחה $f(U) \subseteq f(X)$
פתוחה. תהי $y_0 \in U$ ונניח $f(x_0) = y_0$. קיימת
קבוצה פתוחה $U' \subseteq U$ כך ש- $x_0 \in U'$ ומרגולריות
קיימת V' כך ש- $x_0 \in \overline{V'} \subseteq U'$, אז $f_{V',U'}|_{V'} = 1$
ו- $f_{V',U'}|_{U'^c} = 0$. אם $\pi : I^{\aleph} \to I$ ההטלה בשעת אינדקס
V',U' נסמן $V = \pi^{-1}((0,1])$. אז נראה ש-
$V \cap f(X) \subseteq f(U)$ וזה יראה לנו ש- $f(U)$ פתוחה ב- $f(X)$
משום ש- $y_0 \in V \cap f(X)$. הרי ש- $f(U') \subseteq f(U)$, ומתקיים
$V \cap f(X) = \{f(x) : f_{V',U'}(x) \neq 0\} \subseteq \{f(x) : x \in U'\} = f(U') \subseteq f(U)$