80.577
מ"ס 1/ג

בחינה בתורת המידה (80517) - מועד ג' תשס"ה

הוראות: יחס לכל סעיף. בכל שאלה: בדוק את תחומי ידיעתך ואת יכולתך להסיק!

א. ענה על כל שש השאלות הבאות (24%)

1. יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה ותהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. הגדר מהו אינטגרל לבג של f על E ביחס למידה μ.
2. נסח את הלמה של Fatou.
3. הגדר מהי מידה חיובית σ-סופית על מרחב מדיד.
4. נסח את משפט ההצגה של Riesz לפונקציונלים ליניאריים חסומים.
5. תהי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{C}$ פונקציה כלשהי. הגדר מהי הכוונה ש-f היא "$\mathbb{R}^k$ בהחלט תלוי על $\mathbb{R}^k$".
6. נסח את משפט Fubini.

ב. ענה על אחד (רק אחד!) מהשאלות הבאות (76%)

1. יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה, ותהי $f:X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה ונניח כי $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ לכל $x\in X$. הוכח: ש- $\int_X f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

2. הוכח שלכל מידה חיובית μ ולכל $1\le p\le\infty$, $L^p(\mu)$ הוא מרחב מטרי שלם.

3. נסח והוכח את אי-שוויון Hölder ואת אי-שוויון Minkowski.

4. נסח והוכח את משפט Lusin.

5. תהי $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$. הגדר מהי נקודת לבג של f והוכח שכמעט כל $x\in\mathbb{R}^k$ (ביחס למידת לבג) היא נקודת לבג של f.

בהצלחה!!!

80, 577
מס"ו / מ'

בחינה בתורת המידה (80517) - מועד ב' תשס"ה

הוראות: יחס לכל הנמקה! משך הזמן: 3 שעות שים תומו עצו עיניכם ותנו!

ט', ענה על כל שש השאלות הבאות (24%)

1. הגדר מהו מרחב מידה, מה, פונקציה מידה ומרחב כזה נאמר סופי, ומה: מידה תורכית על מרחב כזה.
2. נסח את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג.
3. נסח את ואי-השוויונים של Minkowski-1 Hölder, Jensen.
4. יהי $(X,\mathcal{M},m)$ מרחב מידה. הגדר מהו סופרמום עיקרי (essential supremum) של פונקציה מדידה $f:X\to[0,\infty]$ ומצא הומרכים $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ ו- $L^\infty(X,\mu)$.
5. הגדר מהי מידה מושלמת ומן על מרחב מידה (X,m) ומהי מידת הלוי-בי-ה הטוטולית. ומן על מידה כזו.
6. נסח את משפט Fubini.

ב. ענה על שניים (וזה שלושה) מתוך השלושה הבאים (76%)

1. נסח והוכח את משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג.

2. נסח את משפט הייצוג של Riesz לפונקציונלים לינאריים חיוביים במרחב ס-קומפקטי. מן הגדרה הקונסטרוקטיבית של ה-טלסקופה והמידה המופעות במשפט. הוכח שהמידה שהגדרת היא לפחות מידה תיקונית ושזו היא אכן מידה בדלת ההתכנסות המתוארות במשפט, וכי היא יחידה.

3. נסח והוכח את משפט Egoroff.

4. נסח והוכח את משפט Radon-Nikodym.

5. הגי $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$. הגדר מהי נקודת לבג של f והוכח שכמעט כל $x\in\mathbb{R}^k$ (ביחס למידת לבג) היא נקודת לבג של f.

בהצלחה!!!

80.517
תשס"ו/ב

בחינה בתורת המידה (80517) - מועד ב' תשס"ו

הוראות: יום עסק בלבד! משך הזמן עבור שניכם מותר!!!

א. ענה על כל שש השאלות הבאות (30%)

1. הגדר מהו מרחב מידה, מהו פונקציונל מידה ממושלם כללי למרחב סובלגורב, ומהו מידה חיובית על מרחב כללי.
2. יהי $(\mu,\mathcal{M},X)$ מרחב מידה ותהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה ו- $E\in\mathcal{M}$. הגדר מהו אינטגרל לבג של f על E ביחס למידה μ.
3. נסח את משפט ההצגה של Riesz לפונקציונל ליניארי חיובי (ניסוח במרחב שאינו קומפקטי) - קומפקטי).
4. יהי $(\mu,\mathcal{M},X)$ מרחב מידה. הגדר מהו סופרמום עיקרי (ess-sup) של פונקציה מדידה $f:X\to[0,\infty]$ ומהו המרחב $L^\infty(X,\mu)$.
5. נסח את משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג.
6. הגדר מהי מידה מושלמת μ על מרחב מדיד $(X,\mathcal{M})$ ומהי מידת ההשלמה האוניברסלית של מידה כזו.

ב. ענה על שלוש (וכן שלוש!) מהשאלות הבאות (70%)

1. נסח והוכח את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ואת הלמה של Fatou.
2. נסח והוכח את המשפטים על אי-השוויונים של Hölder ו-Minkowski.
3. תהי μ מידה חיובית ו- $1\le p\le\infty$. הגדר מהו המרחב $L^p(\mu)$ והוכח שהוא מרחב מטרי שלם.
4. תהי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ לבג מדיד. הגדר מהי נקודת לבג של f והוכח שכמעט כל $x\in\mathbb{R}^k$ (ביחס למידת לבג) הוא נקודת לבג של f.

בהצלחה!!!

בחינה בקורס מידה (80517) - מועד ב' תשס"ו

משך: שלוש שעות. מותר: 2.5 בלבד. שים לב: ענה על כל השאלות בבחירה (30%)

1. הגדר: מה זה מרחב מידה, מה זה קבוצה מדידה ביחס למרחב כזה, ומה זה מידה חיובית על מרחב כזה.
2. יהי $(X,\mathcal{M},m)$ מרחב מידה ותהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. הגדר מהו אינטגרל לבג של f ביחס למידה m.
3. נסח את משפטי Hölder, Jensen ו- Minkowski.
4. נסח את הלמה של Fatou ואת משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג.
5. תהי $\phi:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ העתקה קווית הפיכה. הגדר מהו הכפל ב- ϕ של "נפח" בקבוצה מדידה על $\mathbb{R}^k$.
6. תהי $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$. הגדר מהו נקודת לבג של f.

ענה על שלוש (וכל שלוש!) מהשאלות הבאות (70%)

1. נסח את משפט ההצגה של Riesz לפונקציונלים ליניאריים חיוביים במרחב שאינו קומפקטי. תן הגדרה קונסטרוקטיבית של פס-אלפא ומידה המוגדרות במשפט, והוכח שהמידה שהגדרת היא למעלה מידה חיובית השווה לפונקציונל המתאחות במשפט, ושהיא יחידה.
2. נסח והוכח את משפט Lusin.
3. נסח והוכח את משפט Radon-Nikodym.
4. תהי m מידה חיובית $1-\infty\le p\le 1$. הגדר מהו המרחב $L^p(m)$ והוכח שהוא מרחב מטרי שלם.

בהצלחה!!!

מבחן בקורס אנליזה ריאלית (80517) - מועד ב' תשס"א

הוראות: יש לפתור בכתב עט בלבד; משך המבחן שלוש שעות!!!

א. ענה על כל שש השאלות הבאות (30%)

1. הגדר מהו אוסף מדיד, מהי פונקציה מדידה ומהי סכום פונקציות מדידות, ומה מידה תורית על אוסף כזה.
2. נסח את משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג.
3. נסח את משפט Lusin.
4. נסח את משפט Egoroff.
5. נסח את משפט הפירוק של Hahn.
6. תהי $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$. הגדר מהי נקודת לבג של f.

ב. ענה על שלוש (וכל שלוש!) מהשאלות הבאות (70%)

1. נסח והוכח את משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ואת הלמה של Fatou.

2. נסח את משפט ההצגה של Riesz (לפונקציונל ליניארי חסום שמוגדר על $C(X)$, כאשר X קומפקטי) והוכח את הטענה הבאה שהוכחת משפט זה, כלומר שאם $f \in C(X)$, $\int_X f d\mu = f(1)$, כאשר 1 הפונקציונל המשפט ל-μ הוא שהוגדרו בשלבים המוכרים לך מן ההוכחה.

3. נסח והוכח את המשפטים על אי-השוויונים של Jensen, Hölder, Minkowski.

4. נסח והוכח את משפט הפירוק של לבג.

בהצלחה !!!

בחינת בקורת הנאיקה (80517) - מועד ב' תשס"ח

הוראות: יחס עסק בלבד! משך הזמן עבור שאלה אחת!!!

שאלה 1 (חובה) - שאלות הבנה (30%)

1. יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה ו"ו. $f:X\to[0,\infty]$ מידה. $E\in\mathcal{M}$.
   הגדרו מהו אינטגרל פונקציה f על E ביחס למידה μ.
2. נסח את משפט ההתכנסות המונוטונית של לוי ואת הלמה של Fatou.
3. נסח את משפט Lusin.
4. הגדרו מהי מידה מושלמת μ על מרחב מידה $(X,\mathcal{M},\mu)$ ומהי מידת
   השלמה. האם המידה μ מושלמת?
5. נסח את משפט הפירוק של Hahn.
6. תהי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{C}$ פונקציה בורל. הגדרו מהי התכולה של f ביחס
   ל"ז בטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}^k$!

שאלה 2. יהי μ מידה על σ-אלגברה $\mathcal{M}$ על X! (70%)

1. נסח את משפט הייצוג של Riesz (לפונקציונלים לינאריים חסומים) עבור מרחב שטוח σ-קומפקטי
   והוכח את חלקו הראשון (הוכחת משפט זה, דהיינו שלכל $f\in C_c(X)$,
   $\forall x\in S_\mu$ $f=f\cdot V$, כאשר V הפונקציונל המתאים ל-μ המידה שהוגדרה בשלב
   הקודם, יהיו של ההוכחה).

2. תהי μ מידה חיובית ו- $1\le p\le\infty$. הגדרו מהו $L^p(\mu)$ והוכח שהוא
   מרחב מנה, שלם.

3. נסח והוכח את משפט Egoroff.

4. נסח והוכח את משפט Radon-Nikodym.

בהצלחה!!!