תורת המידה, תרגיל 1.

(1) יהא A קבוצה במ"מ (X,d). הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) $X\setminus A$ קבוצה פתוחה

(ב) כל נקודת גבול של A היא ב A [בתנאים אלה נגיד כי A סגורה]

(2)(א) הוכיחו כי איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

(ב) הוכיחו כי חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

האם חיתוך אינסופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה?

(3) השתמשו ב (1א) כדי להראות כי חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה, וכי איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

האם איחוד אינסופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה?

(4) הוכיחו כי $\bar{A}=\{x\in X:$ x נקודת גבול של $A\}$

(5) יהיו (Y,ρ) ו (X,d) מ"מ ו $f: X\to Y$ פונקציה. הראו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) אם $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ב (X,d) אז $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ ב (Y,ρ)

(ב) לכל $A\subseteq X$ $f(\bar{A})\subseteq \overline{f(A)}$

(ג) לכל $F\subseteq Y$ סגורה, $f^{-1}(F)$ סגורה ב X

(ד) לכל $G\subseteq Y$ פתוחה $f^{-1}(G)$ פתוחה ב X

פונקציה שמקיימת תנאים אלה נקראת רציפה.

(6) יהי (X,d) מ"מ. עבור $A\subseteq X$ נגדיר את השפה $\partial A\subseteq X$ להיות קבוצת הנקודות $x\in X$ כך שלכל $r>0$ הכדור $B(x,r)$ חותך בצורה לא טריוויאלית את A וגם את $X\setminus A$. תהי $\mathbb{1}_A: X\to\mathbb{R}$ הפונקציה:

$$\mathbb{1}_A(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}$$

הוכיחו כי x נקודת רציפות של $\mathbb{1}_A$ אמ"ם $x\notin\partial A$.

(פונקציה כזו נקראת פונקציה אופיינית של קבוצה A)

(7) יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות $f_n: X\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$ (כלומר זוהי סדרה מונוטונית). תהי $f: X\to\mathbb{R}$ כך ש $f_n\to f$ נקודתית.

(א) תנו דוגמה המראה ש f אינה בהכרח רציפה.

(ב) הוכיחו שאם f רציפה אז ההתכנסות $f_n \to f$ היא במ"ש

(ג) הסיקו במקרה ש $\overline{X}=[a,b]$ שאם סדרה מונוטונית של פונקציות רציפות מתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה f אז

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

(8) מרחב מטרי $(\overline{X},d)$ נקרא ספרבילי אם יש קבוצה בת מנייה $X_0\subseteq \overline{X}$ צפופה ב $\overline{X}$ (כלומר כל $x\in\overline{X}$ הוא גבול של סדרת נקודות מ X_0) הוכיחו שמרחב מטרי קומפקטי הינו ספרבילי.

(9) הוכיחו כי פונקציה רציפה (בין מרחבים מטריים) מעבירה קבוצה קומפקטית לקבוצה קומפקטית.

תורת המידה. תרגיל 2.

לא לפתור את 7!

(1) תהא $F: X\to Y$ פונקציה. הוכיחו:

(א) אם $\mathfrak{M}$ σ-אלגברה על Y, אזי $\{f^{-1}(A): A\in\mathfrak{M}\}$ σ-אלגברה על X

(ב) אם $\mathfrak{M}$ σ-אלגברה על X, אזי $\{A\subset Y: f^{-1}(A)\in\mathfrak{M}\}$ σ-אלגברה על Y.

(2) יהי $(X,\mathfrak{M})$ מרחב מדיד ! פונקציה מדידה $f: X\to\mathbb{R}$. יהי $\mathcal{B}$ σ-אלגברת בורל על $\mathbb{R}$. הוכיחו:

(א) האוסף $\{f^{-1}(B): B\in\mathcal{B}\}$ היא תת σ-אלגברה של $\mathfrak{M}$

(ב) האוסף $\{B\in\mathcal{B}: f^{-1}(B)\in\mathfrak{M}\}$ היא תת σ-אלגברה של $\mathcal{B}$

(3) תהא $S\subseteq\mathcal{P}(X)$ משפחה לא ריקה של תתי קבוצות של X המקיימת:

(1) לכל $A\in S$, A^c הוא איחוד סופי של אברי S

(2) לכל $A,B\in S$: $A\cap B\in S$

תהא $\mathfrak{M}$ אוסף הקבוצות שהן איחודים סופיים זרים של אברי S. הוכיחו כי $\mathfrak{M}$ הינה אלגברה.

(4) תהא $\mathfrak{M}$ אלגברה על X. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) $\mathfrak{M}$ σ-אלגברה

(ב) $\mathfrak{M}$ סגורה לאיחודים בני מניה ~~סגורים~~ (כנראה זרים)

(ג) $\mathfrak{M}$ סגורה לאיחוד בן מניה עולה

(ד) $\mathfrak{M}$ סגורה לחיתוך בן מניה יורד.

(5) מהי σ-אלגברת בורל על $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$? (במטריקה הרגילה המושרית מ-$\mathbb{R}^2$)

(6) יהי $(X,\mathfrak{M})$ מרחב מדיד ! $f: X\to\mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) f מדידה

(ב) $f^{-1}(B)$ מדידה לכל קבוצה B בσ-אלגברת בורל על $\mathbb{R}$

(ג) לכל $r\in\mathbb{Q}$ קיים $f^{-1}((-\infty,r))\in\mathfrak{M}$

(7) נגדיר פונקציה $f_n(x,a)=\begin{cases}\frac{1}{(x-a)^2} & x\neq a\\ \infty & x=a\end{cases}$ ותהי $\{\frac{p_n}{q_n}\}_{n=1}^{\infty}=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ לא לפתור

תהי $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-q_n}f_n(x,\frac{p_n}{q_n})$. הוכיחו כי f מדידה ! f מקבלת ערך סופי פרט לקבוצה שמידתה 0 [הוכיחו כי f מקבלת ערך ∞ על קבוצה לא ספירה בעלת מידה 0]

כמו: מספרי Liouville.

תורת המידה. פתרון תרגיל 2.

① שני הסעיפים נובעים בקלות מכך שהמקור של משלים הוא משלים המקור והמקור של איחוד הוא איחוד המקורות.

② (א) נסמן $\mathcal{N}=\{f^{-1}(B): B\in\mathcal{B}\}$ ונראה שזו σ-אלגברה

(1) $X=\mathcal{N} \Rightarrow X\in\mathcal{N}$ (2) נניח $A\in\mathcal{N} \Rightarrow A=f^{-1}(B)$ עבור $B\in\mathcal{B}$

אז $X\setminus f^{-1}(B)=f^{-1}(\mathbb{R}\setminus B)$ והיות ! $B\in\mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus B\in\mathcal{B} \Rightarrow X\setminus B\in\mathcal{N}$

(3) יהיו $A_i\in\mathcal{N} \Rightarrow A_i=f^{-1}(B_i)$ לקבוצות $B_i\in\mathcal{B}$. היות ! $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\in\mathcal{B}$

והיות ! $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)=f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{N}$

לא השתמשנו כאן במדידות של f, אבל אם נניח ש f מדידה נקבל

$\mathcal{N}\subseteq\mathfrak{M}$ לפי סעיף (ב) כי שם מראים שאם f מדידה אז

$f^{-1}(B)\in\mathfrak{M}$ לכל קבוצה בורל B.

(ב) נסמן $C=\{E\in\mathcal{B}: f^{-1}(E)\in\mathfrak{M}\}$ ונראה שזה σ-אלגברה

(1) $f^{-1}(\mathbb{R})=X \Rightarrow \mathbb{R}\in C$ (2) אם $E\in C \Rightarrow f^{-1}(E)\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$X\setminus f^{-1}(E)\in\mathfrak{M}$. אבל $X\setminus f^{-1}(E)=f^{-1}(\mathbb{R}\setminus E) \Rightarrow \mathbb{R}\setminus E\in C$

(3) יהיו $E_i\in C \Rightarrow f^{-1}(E_i)\in\mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i)\in\mathfrak{M}$. אבל

$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i)=f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\in C$.

③ $\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right)\cap\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}\right)=\dot{\bigcup}_{i,j} A_i\cap B_j \Rightarrow \mathfrak{M}$ סגורה לחיתוך.

$\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ ⁝ $\mathfrak{M}$ סגורה לחיתוך סופי $\Rightarrow$ מספיק להראות שכל A_i^c ש"ך

ל $\mathfrak{M}$. אבל זה נתון $\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$ סגורה לחיתוך סופי ולמשלים ולכן אלגברה

④ אם $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow A$ איחוד עולה של $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=B_n$ ואיחוד זר

של $\left(A_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)=C_n$. כמו כן אם $A=\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ אז A חיתוך

יורד של $D_n=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ולכן מזה הכל נובע.

⑤ $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ בת מנייה וכל נקודה היא קבוצה סגורה $\Rightarrow$ בורל ולכן

$\mathcal{P}(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$ (אוסף כל תתי קבוצות של $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$) היא בורל, σ-אלגברה

⑥ (א) $\Leftarrow$ (ב) בעצם סעיף (ב) של ③

(ב) $\Leftarrow$ (ג) מיידי כי הקבוצות $(-\infty,r)$ הן קבוצות בורל

(ג) $\Leftarrow$ (א) יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהי $r_i\in\mathbb{Q}$ סדרה עולה ל a. אז

$$f^{-1}((-\infty,a))=f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(-\infty,r_i)\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty,r_i))\in\mathfrak{M}$$

לפי (c). $f^{-1}((-\infty,a))\in$ מדידה עבור $a\in\mathbb{R}$, $\Rightarrow$ σ-אלגברה.

$\mathcal{C}=\{B\in\mathcal{B} : f^{-1}(B)\in \mathcal{M}\}$ מכילה את הקטעים. כמו כן לכל $a<b$

$(a,b)=(-\infty,b)\setminus\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,a+\frac{1}{n})\right)$, היות וכל קבוצה פתוחה ב $[0,1]$

היא איחוד בן מניה של קטעים פתוחים, $\mathcal{C}$ מכילה את כל הקבוצות הפתוחות

$\Leftarrow$ f מדידה.

(7) נראה כי $f^{-1}(\infty)$ היא G_δ צפופה: לכל $m<n$ נסמן:

$$S_{m,n}(x)=\sum_{i=m}^{n}\frac{2^{-q_i}}{\left(x-\frac{p_i}{q_i}\right)^2}$$

מתורת הטורים החיוביים $f(x)=\infty \iff$ לכל m יש n כך ש $S_{m,n}>1$. ולכן:

$$f^{-1}(\infty)=\{x\in[0,1] : f(x)=\infty\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m+1}^{\infty}S^{-1}_{m,n}\left((1,\infty)\right)$$

אבל $S_{m,n}$ רציפה כפונקציה $[0,1]\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (הוכחה) $\Leftarrow$ $S^{-1}_{m,n}((1,\infty))$

פתוחה. לכל m,n $\Leftarrow$ $\bigcup_{n>m}S^{-1}_{m,n}((1,\infty))$ פתוחה $\Leftarrow$ $f^{-1}(\infty)$ חיתוך

בן מניה של פתוחות $\Leftarrow$ G_δ. צפיפות נובעת ישירות מכך ש $\mathbb{Q}\subseteq f^{-1}(\infty)$

נראה כי $f^{-1}(\infty)$ ממידה 0: לכל $k\geq 1$ נגדיר:

$$B_{k,n}=\left\{x\in[0,1] : \left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|^2<\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-q_n}\right\}$$

ויהיה $B_k=\bigcup_n B_{k,n}$. היות ו $B_{k,n}$ הוא קטע באורך $\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-q_n}$ $\Leftarrow$ ניתן לכסות את B_k ע"י סדרת קטעים שסכום אורכיהם:

$$\sum_n |B_{k,n}|\leq\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}=\frac{2}{k}\to 0$$

ולכן $B=\bigcap B_k$ היא ממידה 0. (כי לכל $\varepsilon>0$ קיים k כך ש $\frac{2}{k}<\varepsilon$ ואז הכיסוי $\{B_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ של B הוא כיסוי ע"י קטעים באורך כולל של פחות מ ε). כעת נראה שאם $x\notin B$ אז $f(x)<\infty$

מכך נובע ש $f^{-1}(\infty)\subseteq B$ ולכן גם היא ממידה 0.

אם $x\notin B$ $\Leftarrow$ קיים k כך ש $x\notin B_k$ $\Leftarrow$ לכל n $\left(x-\frac{p_n}{q_n}\right)^2\geq\frac{1}{k}\left(\frac{3}{2}\right)^{-q_n}$

$$\Leftarrow\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-q_n}}{\left(x-\frac{p_n}{q_n}\right)^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}k\left(\frac{(3/2)^{q_n}}{2^{q_n}}\right)<\infty$$

תורת המידה. תרגיל 3.

(1) יהי $(X,\mathcal{M})$ מרחב מדיד ויהיו $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ פונקציות מדידות. הראו כי $\{x: f(x)<g(x)\}$ ו- $\{x: f(x)=g(x)\}$ הן קבוצות מדידות.

(2) יהי $(X,\mathcal{M})$ מרחב מדיד ויהיו $f_n: X\to[-\infty,\infty]$ פונקציות מדידות. הראו כי $\{x:$ $\inf_n f_n(x)$ קיים וסופי$\}$ היא קבוצה מדידה.

(3) יהי $(X,\mathcal{M})$ מרחב מדיד. יהי M אוסף כל המידות המרוכבות עליו. עבור $\mu,\nu\in M$ נגדיר $\mu+\nu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ ע"י $(\mu+\nu)(A)=\mu(A)+\nu(A)$. הראו כי $\mu+\nu\in M$. הגדירו באופן דומה כפל בסקלר והראו כי M מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ בהגדרות הללו.

(4) (א) תהי I קבוצת אינדקסים ולכל i יהי $0\le\alpha_i\in\mathbb{R}$. נגדיר את הסכום $\sum_{i\in I}\alpha_i$ ע"י $\sum_{i\in I}\alpha_i=\sup\{\sum_{j\in J}\alpha_j : J\subseteq I, |J|<\infty\}$ ($|J|$ מציין העוצמה של J). הוכיחו כי אם $\sum_{i\in I}\alpha_i<\infty$ אז $\alpha_i=0$ פרט אולי לתת קבוצה בת מניה של I.

(ב) X קבוצה לא ריקה, $F: X\to[0,\infty]$ פונקציה כלשהי. לכל $A\subseteq X$ נגדיר $\mu(A)=\sum_{a\in A}F(a)$. הראו כי μ מידה על $\mathcal{P}(X)$ (כאשר $\mathcal{P}(X)$ אוסף כל תתי קבוצות של X).

(ג) X קבוצה לא בת מניה. $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אוסף תתי קבוצות שהן בנות מניה או קו-בנות מניה (הראו ש- $\mathcal{M}$ σ-אלגברה). עבור $E\in\mathcal{M}$ נגדיר $\mu(E)=0$ אם E בת מניה ו- $\mu(E)=\infty$ אם E קו-בת מניה. הראו כי μ מידה על $\mathcal{M}$.

(ד) X קבוצה אינסופית. עבור $E\subseteq X$ נגדיר $\mu(E)=\begin{cases}0 & \text{סופית } E\\ \infty & \text{אינסופית } E\end{cases}$. האם μ מידה על $\mathcal{P}(X)$?

(ה) יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה ו- $(Y,\tilde{\mathcal{M}})$ מרחב מדיד. $F: X\to Y$ מקיימת שמקור של קבוצה מדידה הוא מדיד. נגדיר $\nu:\tilde{\mathcal{M}}\to[0,\infty]$ ע"י $\nu(A)=\mu(F^{-1}(A))$. האם ν מידה על $\tilde{\mathcal{M}}$?

(5) יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה, μ מידה ממשית אי שלילית. נאמר ש- μ מידה לא אטומית אם לכל $A\in\mathcal{M}$ עם $\mu(A)>0$ יש תת קבוצה מדידה $A_0\subseteq A$ עם $0<\mu(A_0)<\mu(A)$. הוכיחו שאם μ מידה לא אטומית, אז לכל $A\in\mathcal{M}$ ולכל מספר $0<t<\mu(A)$ יש קבוצה מדידה $A_t\subseteq A$ עם $\mu(A_t)=t$.

הדרכה: הגדירו באינדוקציה סדרה יורדת של קבוצות מדידות $A=B_1\supseteq\dots\supseteq B_n\supseteq B_{n+1}$ כך ש- B_{n+1} מקיימת $\mu(B_{n+1})<\inf\{\mu(C): C\subseteq B_n, C\in\mathcal{M}, \mu(C)\ge t\}+\frac{1}{n}$ ותהי $B=\cap B_n$. הוכיחו כי $\mu(B)\ge t$ ושאין $C\subseteq B$ מדידה ומקיימת $\mu(C)\ge t$ אלא $\mu(C)=\mu(B)$. כעת השתמשו בהנחה שוב, כדי למצוא

קבוצה מרבית $C\subseteq B$ עם $\mu(C)\leq t$ וכך שאם $\mathcal{D}\subseteq C$ מרבית ;מקיימת

$\mu(\mathcal{D})\leq t$ אז $\mu(\mathcal{D})=\mu(C)$. השתמשו בעובדה ש μ אינה אטומית כד'

להסיק ש: $\mu(B)=\mu(C)=t$

פתרון תרגיל 3.

(1) (X, m) מרחב מדיד, $f,g: X \to [-\infty,\infty]$ פונקציות מדידות. הראו כי $\{x: f(x) < g(x)\}$ ו $\{x: f(x) = g(x)\}$ הן קבוצות מדידות.

אם $\alpha,\beta \in [-\infty,\infty]$ אז $\alpha<\beta \Leftarrow$ קיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש $\alpha<r<\beta$

$$\{x: f(x)<g(x)\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x: f(x)<r<g(x)\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(f^{-1}([-\infty,r)) \cap g^{-1}((r,\infty])\right) \Leftarrow$$

אגף ימין הוא איחוד בן מניה של קבוצות מדידות (כי f, g מדידות) $\Leftarrow$ סיימנו.

$\{x: f(x)=g(x)\}$ מדידה כי היא המשלים של $\{x: f(x)>g(x)\} \cup \{x: f(x)<g(x)\}$

ושתי הקבוצות אלה הן מדידות.

(2) (X, m) מרחב מדיד ו $f_n: X \to [-\infty,\infty]$ מדידות. הראו כי

$\{x:$ $\inf_n f_n(x)$ קיים וסופי$\}$ היא קבוצה מדידה.

הוכחה: הראינו כי $\liminf f_n$ ו $\limsup f_n$ פונקציות מדידות. כעת:

$$\{x: \inf_n f_n(x) \text{ קיים וסופי}\} = \{x: \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)\}^{(1)} \cap$$
$$\{x: \limsup f_n(x) < \infty\}^{(2)} \cap$$
$$\{x: \liminf f_n(x) > \infty\}^{(3)}$$

(1) מדידה על סמך שאלה קודמת; $(2) \equiv (\limsup f_n)^{-1}([-\infty,\infty)) \Leftarrow$ מדידה

(3) מדידה באותו האופן.

לכן סיימנו.

(3) יהי (X, m) מרחב מדיד. M אוסף כל המידות המרוכבות עליו.

עבור $\mu,\nu \in M$ נגדיר $\mu+\nu: m \to \mathbb{C}$ ע"י $(\mu+\nu)(A) = \mu(A)+\nu(A)$.

הראו כי $\mu+\nu \in M$. הגדירו באופן דומה כפל בסקלר. והראו כי M

מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ תחת הפעולות האלה.

הוכחה: אם $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ ו $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ טורים מתכנסים של מספרים מרוכבים ל a, b

אז $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i+b_i)$ גם טור מתכנס וסכומו שווה ל $(a+b)$

$\Leftarrow$ אם $\mu,\nu \in M \Leftarrow \mu+\nu \in M$.

נגדיר כפל בסקלר ע"י $(c\mu)(A) = c(\mu(A))$ עבור $c \in \mathbb{C}$, $\mu \in M$

$A \in m$. מעובדה של טורים מרוכבים: אם $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a \Leftarrow \sum_{i=1}^{\infty} c a_i = ca$

$\Leftarrow c\mu \in M$. קל לראות כי M מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ תחת הפעולות אלה.

(4) (א) נסמן $I_n=\{i\in I:\alpha_i\geq\frac{1}{n}\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. אם קיימת I_n אינסופית, אזי

לכל $k\in\mathbb{N}$ ניתן למצוא $J\subseteq I_n$ כך ש $|J|\geq kn$ ונקבל

$\sum'_{i\in J}\alpha_i\geq kn\frac{1}{n}=k$ $\Leftarrow$ הסכום הוא אינסופי

אם הסכום הוא סופי אז לכל n I_n חייבת להיות סופית וקיים

$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=\{i\in I:\alpha_i>0\}$ $\Leftarrow$ זו קבוצה בת מנ"ה.

(ב) ראשית $\mu(\emptyset)=0$. σ-אדטיביות: ניתן להרחיב לטענה

הבאה: נתונה קבוצה אינדקסים J ופירוק שלה לאיחוד בן

מנ"ה זר. לכל $i\in J$ נתון $0\leq\alpha_i\leq\infty$ וצ"ל: $\sum_{i\in J}\alpha_i=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\sum_{i\in J_n}{}'\alpha_i\right)$

אם $J_0\subseteq J$ סופית אז $\sum'_{J_0}\alpha_i=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\sum_{J_0\cap J_n}\alpha_i\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\sum'_{J_n}\alpha_i\right)$

מההגדרה $\sum'_J\alpha_i$ כסופרימום על כל ה-J_0 הסופיות קיבלנו את

הכיוון הראשון $\leq$. כדי להראות $\geq$ מספיק להראות עבור סכום

כי $\sum'_J\alpha_i\geq\sum_{n=1}^{N}{}'\left(\sum'_{J_n}\alpha_i\right)$. יהי $J_n^0\subseteq J_n$ תת קבוצה סופית לכל $1\leq n\leq N$

$\Leftarrow$ $\sum'_J\alpha_i\underset{\text{מההגדרה}}{\geq}\sum\alpha_i=\sum_{n=1}^{N}{}'\left(\sum'_{J_n^0}\alpha_i\right)$. נקח סופרימום על J_1^0

ונקבל $\sum'_J\alpha_i\geq\sum_{J_1^0}\alpha_i+\sum_{n=2}^{N}\sum_{J_n^0}\alpha_i$ $\sum\alpha_i$ של. עכשיו נקח סופרימום על J_2^0, אחר כך

על J_3^0 וכך הלאה. לכן נקבל את הנדרש.

(ג) יהיו $A_i\in\mathfrak{M}$ כולן בנות מנ"ה $i=1,2,\ldots$ $\Leftarrow$ גם $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ בת מנ"ה.

אם קיים j כך ש A_j^c בת מנ"ה אז $A^c\subset A_j^c$ $\Leftarrow$ A^c בת מנ"ה.

בכל מקרה $A\in\mathfrak{M}$ כמובן ש $X\in\mathfrak{M}$ וברור כי $\mathfrak{M}$ סגורה למשלים

מההגדרה, $\Leftarrow$ $\mathfrak{M}$ σ-אלגברה. μ מוגדרת היטב כי $\aleph_0<|X|$.

ברור כי $\mu(\emptyset)=0$ וכי μ σ-אדטיבית.

(ד) לא! μ אינה מידה על $\mathcal{P}(X)$: נציג את קבוצה בת מנ"ה כאיחוד בן מנ"ה

של יחידונים! $\sum_{i=1}^{\infty}{}'0\neq\infty$

(ה) $(X,\mathfrak{M},\mu)$ מרחב מידה, $(Y,\tilde{\mathfrak{M}})$ מרחב מדיד. $F:X\to Y$ מקיימת שמקור

של מדידה הוא קבוצה מדידה. נגדיר $\nu:\tilde{\mathfrak{M}}\to[0,\infty]$ ע"י $\nu(A)=\mu(F^{-1}(A))$

האם ν מידה על $\tilde{\mathfrak{M}}$?

פתרון: כן, אם $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ איחוד בן מנ"ה זר של איברי $\tilde{\mathfrak{M}}$, אז

$F^{-1}(A)=\bigcup_{i=1}^{\infty}F^{-1}(A_i)$ הוא איחוד בן מנ"ה זר של איברי $\mathfrak{M}$. כמו כן

$\nu(\emptyset)=\mu(F^{-1}(\emptyset))=\mu(\emptyset)=0$.

(5) יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה, μ מידה ממשית אי שלילית. נאמר ש μ
מידה לא אטומית אם לכל $A\in\mathcal{M}$ עם $\mu(A)>0$ יש תת קבוצה $A_0\subseteq A$
מדידה עם $0<\mu(A_0)<\mu(A)$. הוכיחו שאם μ מידה לא אטומית
אז לכל $A\in\mathcal{M}$ ולכל מספר $0<t<\mu(A)$ יש קבוצה מדידה $A_t\subseteq A$ עם
$\mu(A_t)=t$.

הוכחה: יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה, μ מידה לא אטומית אי שלילית; $A\in\mathcal{M}$
עם $0<\mu(A)<\infty$. יהי $0<t<\mu(A)$. נגדיר $B_1=A$.
נניח הגדרנו את B_n עם $\mu(B_n)\ge t$ ויהי

$$t_n=\inf\{\mu(C): C\subseteq B_n,\ C\in\mathcal{M},\ \mu(C)\ge t\}$$

הקבוצה ה $\inf$ אינה ריקה כי היא מכילה את $\mu(B_n)$ והיא מכילה רק
מספרים $\ge t$ ולכן החסם התחתון מוגדר ומקיים $t_n\ge t$. לכן
(מהגדרת ה $\inf$) יש $C\subseteq B_n$ מדידה כך ש $\mu(C)\le t_n+\frac{1}{n}$. נגדיר
את B_{n+1} להיות קבוצה C כזו.
תהי $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ $\Leftarrow$ $\mu(B)=\lim\mu(B_n)=\lim t_n$ (לפי רציפות המידה
והעובדה כי $\mu(B_1)<\infty$ כי μ מידה ממשית) היות ו $t_n\ge t$ $\Leftarrow$
$\mu(B)\ge t$. נניח שיש קבוצה מדידה $C\subseteq B$ עם $t\le\mu(C)\le\mu(B)$
אז $C\subseteq B_n$ לכל n $\Leftarrow$ לכל n $\mu(C)\ge t_n$, ולכן $\mu(B_n)\le\mu(C)+\frac{1}{n}$
ועבור $n\to\infty$, נקבל $\mu(B)\le\mu(C)$ $\Leftarrow$ $\mu(B)=\mu(C)$,
לכן, קיבלנו שאם $C\subseteq B$ מדידה ו $t\le\mu(C)\le\mu(B)$ אז $\mu(C)=\mu(B)$.
נגדיר כעת: $C_1=\emptyset$. נניח הגדרנו את C_n באופן ש $\mu(C_n)\le t$, נגדיר

$$s_n=\sup\{\mu(D): C_n\subseteq D\subseteq B,\ D\in\mathcal{M},\ \mu(D)\le t\}$$

וכמו קודם: יש $D\in\mathcal{M}$ כך ש $C_n\subseteq D\subseteq B$ ו $\mu(D)\ge s_n-\frac{1}{n}$. נגדיר
$C_{n+1}=D$. תהי $C=\bigcup_n C_n$ $\Leftarrow$ $\mu(C)=\lim s_n\le t$. הוכחה דומה לקודמת
מראה שאם D מדידה, מקיימת $C\subseteq D\subseteq B$ ו $\mu(C)\le\mu(D)\le t$ אז
$\mu(D)=\mu(C)$.
נראה כי $\mu(C)=\mu(B)=t$; עד כה לא השתמשנו בכך ש μ לא אטומית.
אנו יודעים כי $\mu(C)\le t\le\mu(B)$ וכי $C\subseteq B$. מספיק להראות ש
$\mu(B\setminus C)=0$. אחרת, היות ו μ מידה אינה אטומית $\Leftarrow$ יש קבוצה $U\subseteq B\setminus C$

מציג כך ש $0<\mu(U)<\mu(B\setminus C)$. אז מתקיים

$$\mu(C)<\mu(C)+\mu(U)=\mu(C\cup U)<\mu(C)+\mu(B\setminus C)=\mu(B)$$

(השוויונות נובעים מאדיטיביות של μ ומהעובדה ש U ו $B\setminus C$ זרות ל C)

אבל, מהגדרות של B,C לא יתכן $\mu(C\cup U)\geq t$ (כי אז נקבל $\mu(C\cup U)=\mu(B)$, סתירה) וגם לא יתכן $\mu(C\cup U)\leq t$, כי אז $\mu(C)=\mu(C\cup U)$ ושוב סתירה. לכן $\mu(B\setminus C)=0$ ולכן

$$t\leq\mu(B)=\mu(C)+\mu(B\setminus C)=\mu(C)\leq t$$

ולכן $\mu(B)=\mu(C)=t$ כנדרש.

(1) יהיו $f,g: X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות. הוכיחו:

(א) $f+g$ פונקציה מדידה

(ב) יהי $\alpha\geq 0$. הוכיחו כי αf פונקציה מדידה.

(2) השתמשו במשפט ההתכנסות המונוטונית כדי להראות שאם לכל $i\in\mathbb{N}$ $\{a_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של ממשיים, אז

$$\lim_{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n} a_{n,i}$$

(3) תנו דוגמה לסדרה של פונקציות אי שליליות מדידות על מרחב מידה כלשהו שמתכנסות נקודתית ל-0 אבל לכל n $\int f_n\,d\mu=1$

(4) יהיו $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ פונקציות מדידות אי שליליות! נניח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת ל-f נקודתית, כלומר לכל n $f_{n+1}\leq f_n$ ו-$f_n\to f$ נקודתית. נניח כי $\int f_1\,d\mu<\infty$. הוכיחו כי

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

(5) יהיו $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ פונקציות מדידות אי שליליות. נניח כי $f_n\to f$ נקודתית וקיים גבול: $\lim\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu<\infty$. הוכיחו כי לכל E מדידה $\int_E f_n\,d\mu\xrightarrow[n]{}\int_E f\,d\mu$

(6) הראו כי בשאלה קודמת התנאי $\int f\,d\mu<\infty$ הכרחי ע"י דוגמה נגדית.

(7) יהיו $\{[a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ קטעים זרים בזוגות על הישר (לכל i $-\infty<a_i<b_i<\infty$) כך ש: $\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)=[a,b)$ עבור $-\infty<a<b<\infty$. הוכיחו: $\sum_{i=1}^{\infty} b_i-a_i=b-a$

רמז: קל להראות $\leq$. לכיוון ההפוך השתמשו בכך ש-$[a,b-\varepsilon]$ קומפקטי.

(2) צריך להוכיח כי $a_{n,i}\ge 0$. המרחב שנעבוד הוא $\left(\mathbb{N}, \left(\begin{smallmatrix}\text{אוסף תת}\\ \text{קבוצות}\\ \text{של } \mathbb{N}\end{smallmatrix}\right), \mu\right)$ כאשר μ היא מידת המנייה. נגדיר $f_n:\mathbb{N}\to[0,\infty)$ ע"י $f_n(i)=a_{n,i}$

⇐ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה עולה נקודתית של פ' אי שליליות ומדידות כמובן!

σ-אלגברה כנתונה. ⇐

$$\sum_{i=1}^\infty \lim_{n\to\infty} a_{n,i} = \sum_{i=1}^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(i) = \int_{\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu \underset{\text{MCT}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^\infty f_n(i)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^\infty a_{n,i}$$

(3) מרחב שנעבוד הוא $\left(\mathbb{N}, \left(\begin{smallmatrix}\text{אוסף כל תת}\\ \text{קבוצות של } \mathbb{N}\end{smallmatrix}\right), \mu(n)=\frac{1}{n^2}\right)$ כזו מרחב מידה. סופי כי $\sum_n \frac{1}{n^2}<\infty$. נגדיר $f_n=n^2\chi_{\{n\}}$, $\chi_{\{n\}}$ פונקציית אופיינית של $\{n\}$. ברור כי $f_n\to 0$ נקודתית, אבל $\int f_n d\mu=\int n^2\chi_{\{n\}}d\mu = n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$

(4) נגדיר $g_n=f_1-f_n$, g_n מדידה כי f_n,f_1 מדידות. g_n אי שלילית כי $f_n(x)\le f_1(x)$ לכל x. $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ עולה נקודתית כי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ יורדת נקודתית. לכל x $g_n(x)\nearrow_{n\to\infty} f_1(x)-f(x)$. g_n,f_n מדידות, אי שליליות!

$f_1=g_n+f_n$ ⇐ $\int f_1 d\mu = \int g_n d\mu + \int f_n d\mu$

צ' כל האיברים סופיים!!!

⇐ $\int g_n d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_n d\mu$. באותו האופן, אם נסמן $g=f_1-f$ ⇐ $\int g d\mu = \int f_1 d\mu - \int f d\mu$ וע"פ MCT נקבל:

$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\mu = \int g d\mu$ ⇐ $\lim_{n\to\infty}\left(\int f_1 d\mu - \int f_n d\mu\right) = \int f_1 d\mu - \int f d\mu$

והיות ! $\int f_1 d\mu<\infty$ מ.ש.ל.

(5) שלב I:

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu = \int_E \liminf f_n d\mu + \int_{E^c}\liminf f_n d\mu$$

$$\underset{\text{Fatou}}{\le} \liminf \int_E f_n d\mu + \liminf\int_{E^c} f_n d\mu \underset{\text{אינפ' ב'}}{\le} \liminf\left(\int_E f_n d\mu + \int_{E^c} f_n d\mu\right)$$

$$= \liminf \int_X f_n d\mu \underset{\text{נתון}}{=} \int_X f d\mu$$

⇐ בכל מקום יש שוויון.

⇐ (1) $\int_E f d\mu + \int_{E^c} f d\mu = \liminf\int_E f_n d\mu + \liminf\int_{E^c} f_n d\mu$

(2) $\int_E f d\mu \underset{\text{Fatou}}{\le} \liminf\int_E f_n d\mu \underset{\text{נתון}}{<} \infty$

(3) $\int_{E^c} f d\mu \le \liminf\int_{E^c} f_n d\mu < \infty$

(1), (2), (3) נובע $\int_E f d\mu = \liminf \int_E f_n d\mu$

ב ≥ II: תהי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה של טבעיים אז $\{f_{n_k}\}$ מקיימת

אי שליליות מתכנסות נקודתית ל f וקיים: $\lim_k \int f_{n_k} d\mu = \int f d\mu < \infty$

$\Rightarrow$ משלב I $\int_E f d\mu = \liminf_k \int_E f_{n_k} d\mu$

למה: אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ מקיימת שקיים a כך שלכל תת סדרה $\{a_{n_k}\}$

קיים $\liminf_k a_{n_k} = a$ $\Rightarrow$ $\lim_n a_n = a$ (הוכחה ברורה)

$\Rightarrow$ $\lim_n \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

(6) יהי מרחב $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ וσ-אלגברה של כל תתי הקבוצות, μ- מידת המנייה

לבנות $f_n : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ ע"י $f_n(x) = \begin{cases} n & x \text{ מחלק את } n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $f_n \to f = \begin{cases} \infty & x=0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$. ברור כי $f_n(0)=n$ לכל n $\Rightarrow$

$f_n(0) \to \infty$. לכל $0<x$ עבור $x=N$ לכל $n>N$ $f_n(x)=0$

$\Rightarrow$ $f_n(x) \to 0$ לכל n, $\int_X f_n d\mu = \infty$! $\int_X f d\mu = \infty$

אבל עבור $E = X \setminus \{0\}$ $\int_E f_n d\mu = \infty$ כי "∞" מופיע פעמ"ים

אבל $\int_E f d\mu = 0$ כי שם $f \equiv 0$.

(7) כיוון קל: נקבע $0<<N$. נקח $\{n_1,\dots,n_N\}$ סידור מחדש של $\{1,\dots,N\}$

כך שלכל $1 \le i < N$ $b_{n_i} \le a_{n_{i+1}}$, כלומר סידרנו קטעים $\{[a_i,b_i)\}_{i=1}^{N}$ בסדר עולה.

$$\sum_{i=1}^{N} b_i - a_i = \sum_{i=1}^{N} b_{n_i} - a_{n_i} \le \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} (a_{n_{i+1}} - a_{n_i})}_{a_{n_N} - a_{n_1}} + b_{n_N} - a_{n_N} = b_{n_N} - a_{n_1} \le b-a$$

ולכן, במעבר לגבול נקבל $\sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i \le b-a$

כעת: יהי $\varepsilon>0$: הקטעים הפתוחים $(a_i - 2^{-i}\varepsilon, b_i)$ מכסים את הקטע

הקומפקטי $[a, b-\varepsilon]$ $\Rightarrow$ קיים תת כיסוי סופי, כלומר קיים N כך ש

$$[a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (a_i - 2^{-i}\varepsilon, b_i)$$

למה: $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i) \Rightarrow b-a \le \sum_{i=1}^{N} b_i - a_i$

הוכחה: יהי n_1 כך ש $a \in (a_{n_1}, b_{n_1})$. אם $b \in (a_{n_1}, b_{n_1})$ סיימנו, אחרת יהי n_2

כך ש $b_{n_1} \in (a_{n_2}, b_{n_2})$. נמשיך כך עד שלפעם הראשונה נקבל $b \in (a_{n_m}, b_{n_m})$

קיבלנו $n_1,\dots,n_m$ תת קבוצה של $\{1,\dots,N\}$ כך שלכל $1 \le i < m$ $a_{n_{i+1}} < b_{n_i}$

(כי $b_{n_i} \in (a_{n_{i+1}}, b_{n_{i+1}})$! $a_{n_1} < a$! וגם $a_{n_m} < b < b_{n_m}$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i - a_i \ge \sum_{i=1}^{m} b_{n_i} - a_{n_i} \ge \sum_{i=1}^{m-1} (a_{n_{i+1}} - a_{n_i}) + (b_{n_m} - a_{n_m}) = b_{n_m} - a_{n_1} \ge b-a$$

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{N} (b_i - (a_i - 2^{-i}\varepsilon)) \ge b-\varepsilon-a$ $\Rightarrow$ $b-a-\varepsilon \le \sum_{i=1}^{N} b_i - a_i + \sum_{i=1}^{N} 2^{-i}\varepsilon \le \sum_{i=1}^{\infty} b_i - a_i + \varepsilon$ ולכן סיימנו.

תורת המידה. תרגיל 5.

הגדרה: X קבוצה. פונקציה $\mu^*: \{\text{אוסף כל התת קבוצות של } X\} \to [0,\infty]$ נקראת מידה חיצונית אם:

(1) $\mu^*(\emptyset)=0$ (2) μ^* תת אדיטיבית, כלומר לכל סדרת קבוצות $A_n\subseteq X$ של קבוצות זרות בזוגות קיים: $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

הערה: שימו לב להבדלים בין ההגדרה של מידה חיצונית להגדרה של מידה: דורשים ממידה חיצונית שתהיה רק תת אדיטיבית במקום σ-אדיטיבית, בתמורה היא מוגדרת על כל תת קבוצות של X.

(I) יהי X קבוצה, $\mathcal{U} \subseteq \{\text{אוסף כל התת קבוצות של } X\}$ אוסף של קבוצות המכיל את X, $\emptyset$. ויהי $f: \mathcal{U} \to [0,\infty]$ פונקציה המקיימת $f(\emptyset)=0$ ונגדיר

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} f(U_n) : U_n\in\mathcal{U},\ A\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right\}$$

הוכיחו ש μ^* מידה חיצונית.

(II) נניח μ מידה חיצונית על X.

נגדיר: $\mathcal{M}_\mu = \{A\subset X : \mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c) \quad \text{לכל } E\subset X\}$

שימו לב, מההגדרה של מידה חיצונית על מנת להראות ש $A\in\mathcal{M}_\mu$ מספיק להראות שלכל E: $\mu(E)\ge \mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)$

(א) הראו כי $\mathcal{M}_\mu$ סגורה לאיחוד סופי ($A,B\in \mathcal{M}_\mu \Rightarrow A\cup B\in\mathcal{M}_\mu$)

(ב) נניח $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{M}_\mu$ זרות בזוגות! $E\subset X$. הראו כי מתקיים:

$$\mu\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E\cap A_i)$$

(ג) נניח $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subset \mathcal{M}_\mu$ זרות בזוגות. נסמן $B_n=\bigcup_{i=1}^n A_i$, $B=\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ ונניח $E\subset X$

(ג.1) הראו כי לכל n: $\mu(E)=\mu(E\cap B_n)+\mu(E\setminus B_n)\ge \sum_{i=1}^n\mu(E\cap A_i)+\mu(E\setminus B)$

(ג.2) הראו כי $\mu(E)\ge\sum_{i=1}^\infty \mu(E\cap A_i)+\mu(E\setminus B)\ge \mu(E\cap B)+\mu(E\setminus B)$

(ד) הסיקו כי $\mathcal{M}_\mu$ היא σ-אלגברה! ש μ (מצומצם ל $\mathcal{M}_\mu$) היא מידה על $\mathcal{M}_\mu$.

(III) תהא $\tilde{\mathcal{M}}\subseteq\{\text{אוסף כל התת קבוצות של } X\}$ אלגברה על X. נגדיר כי $\nu: \tilde{\mathcal{M}}\to[0,\infty]$ היא מידה על $\tilde{\mathcal{M}}$ אם: (1) $\nu(\emptyset)=0$ (2) אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\tilde{\mathcal{M}}$ זרות בזוגות וגם $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\tilde{\mathcal{M}}$ אז $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i)$.

נניח ν מידה על $\tilde{\mathcal{M}}$ ונגדיר $\mu(A)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) : B_i\in\tilde{\mathcal{M}} \text{ וגם } A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\}$

(א) הוכיחו: $\mu(A)=\nu(A)$

(ב) הוכיחו כי μ היא מידה חיצונית על X! $\tilde{\mathcal{M}}\subseteq\mathcal{M}_\mu$.

הגדרה: $S \subseteq \{$קבוצות של $X\}$ (אוסף כל הרשת) נקראת סמי-אלגברה אם $\emptyset \in S$, לכל $A,B\in S$ וגם $A\cap B\in S$ ולכל $A\in S$ יש $A_1,\dots,A_n\in S$ זרים בזוגות כך ש: $A^c=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

הגדרה: מידה על סמי-אלגברה S זהו פונקציה $\gamma: S\to[0,\infty]$ כך ש: $\gamma(\emptyset)=0$ וכן שאם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S$ זרות בזוגות וגם $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in S$, אזי $\gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma(A_i)$.

(IV) S סמי אלגברה על X ונניח γ מידה על S. תהא $\tilde{m}$ האלגברה הנוצרת ע"י S

(תרגיל 2) הראו כי קיימת מידה ν על $\tilde{m}$ כך ש: $\nu|_S=\gamma$

[יש להגדיר את ν, לוודא שההגדרה היא טובה ואז לוודא שזו מידה]

(V) נגדיר: $S=\{[a,b): -\infty<a<b\le\infty\}\cup\{(-\infty,b): -\infty<b\le\infty\}\cup\{\emptyset\}$

נגדיר $\gamma: S\to[0,\infty]$ ע"י שניתן לקטע את אורכו

(א) הוכח ש-S היא סמי-אלגברה! γ מידה על S

(ב) הסיקו שקיימת מידה m על σ-אלגברה בורל של הישר $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ שנותנת לקטע את אורכו.

I. לכל $A\subseteq X$ יהי $\mathcal{U}_A=\{(U_n)_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{U};\ A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n\}$ אוסף הכיסויים

הבני מנייה של A ע"י קבוצות מ $\mathcal{U}$. היות ! $X\in\mathcal{U}$ $\Leftarrow$ $\mathcal{U}_A\neq\emptyset$ לכל

$A\subseteq X$. היות ! f אי שליליות, אם $(U_n)\in\mathcal{U}_A$ אז $\sum' f(U_n)\geq 0$

לכן הקבוצה $M_A=\{\sum f(U_n):(U_n)\in\mathcal{U}_A\}$ לא ריקה וחסומה מלרע ע"י 0.

היות ! $\mu^*(A)=\inf M_A$ $\Leftarrow$ μ^* מוגדרת היטב ! $\mu^*(A)\geq 0$ לכל

$A\subseteq X$. היות והסדרה $U_n=\emptyset$ שייכת ל $\mathcal{U}_\emptyset$! $0=\sum f(\emptyset)\in M_\emptyset$

ולכן $\mu^*(\emptyset)\leq 0$ ומאידך כאמור $\mu^*(\emptyset)\geq 0$ $\Leftarrow$ $\mu^*(\emptyset)=0$.

אם $A\subseteq B\subseteq X$ אז כל כיסוי (U_n) של B ע"י הוא כיסוי של A

$\Leftarrow$ $\mathcal{U}_B\subseteq\mathcal{U}_A$ $\Leftarrow$ $M_B\subseteq M_A$ $\Leftarrow$

$$\mu^*(A)=\inf M_A\leq\inf M_B=\mu^*(B)$$

$\Leftarrow$ μ^* מונוטונית.

יהיו $A_n\subseteq X$ סדרת קבוצות עם $\mu^*(A_n)=r_n\in[0,\infty]$ ויהי $A=\bigcup_n A_n$

צ"ל: $\mu^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}r_n$ אם $r_n=\infty$ ל n כלשהו אז ברור שכן

נכון ולכן ניתן להניח כי $r_n<\infty$ לכל n. מספיק להראות כי לכל $\varepsilon>0$

קיים $\mu^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}r_n+\varepsilon$. לכן, מספיק להראות שקיים אוסף בן מנייה

$\{U_i\}_{i\in I}$ של קבוצות מ $\mathcal{U}$ שמכסות את A וכך ש $\sum'_{i\in I}f(U_i)\leq\sum_{n=1}^{\infty}r_n+\varepsilon$

יהי $\varepsilon>0$. לכל n קיים אוסף $\{U_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ של קבוצות מ $\mathcal{U}$ כך ש $A_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_{n,i}$

! $\mu^*(A_n)\leq\sum_{i=1}^{\infty}f(U_{n,i})+2^{-n}\varepsilon$

לכן, אוסף $\{U_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}$ הוא אוסף קבוצות מ $\mathcal{U}$ המכסות את A ומקיימות

$$\sum'_{i,n}f(U_{n,i})\leq\sum_{n=1}^{\infty}r_n+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\varepsilon=\sum_{n=1}^{\infty}r_n+\varepsilon$$

(II) (א) נניח $A,B\in\mathfrak{M}_\mu$ ויהי $E\subseteq X$. צ"ל, היות ! $A\in\mathfrak{M}_\mu$

$$\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)\ ;$$

היות ! $B\in\mathfrak{M}_\mu$ מתקיים: $\mu(E\cap A)=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap A\cap B^c)$

! $\mu(E\cap A^c)=\mu(E\cap A^c\cap B)+\mu(E\cap A^c\cap B^c)$ ולכן, נקבל:

$$\mu(E)=\underbrace{\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap A\cap B^c)+\mu(E\cap A^c\cap B)}_{\circledast}+\mu(E\cap A^c\cap B^c)$$

$\circledast\geq\mu(E\cap(A\cup B))$; $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$

$E\cap A^c\cap B^c=E\cap(A\cup B)^c$ ולכן, לפי ההערה נובע כי $A\cup B\in\mathfrak{M}_\mu$.

(ג) $\mu(E\cap(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)) \underset{A_{n+1}\in \mathcal{M}_\mu}{=} \mu(E\cap\underbrace{(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)\cap A_{n+1}}_{A_{n+1}})$

$+\mu(E\cap\underbrace{(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)\cap A_{n+1}^c}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}) = \mu(E\cap A_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}\mu(E\cap A_i) = \sum_{i=1}^{n+1}\mu(E\cap A_i)$

(ד-1) השוויון השמאלי נכון כי $B_n\in\mathcal{M}_\mu$ ע"פ סעיף א'. אי שוויון הימני
נובע מכך ש $\mu(B_n\cap E)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E\cap A_i)$ ע"פ סעיף ב' ומכך ש
$\mu(E\setminus B_n)\geq\mu(E\setminus B)$ כי $(E\setminus B_n)\supseteq(E\setminus B)$ ו μ מידה חיצונית.

(ד-2) אי שוויון שמאלי נכון כי סעיף (ד-1) נכון לכל n ואי שוויון נשאר
בגבול. אי שוויון הימני נובע מ תת אדיטיביות של המידה החיצונית כי
$E\cap B=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap A_i)$

(ה) מסעיף (ד-2) נובע $B\in\mathcal{M}_\mu$ על סמך ההערה בשאלה, כלומר $\mathcal{M}_\mu$ סגורה לאיחוד בן
מנה זר. כמו כן $\mathcal{M}_\mu$ סגורה לאיחוד סופי, נשים לב כי $\mathcal{M}_\mu$ סגורה
למשלים - מסימטריות ההגדרה, וכי $X\in\mathcal{M}_\mu \Rightarrow \mathcal{M}_\mu$ σ-אלגברה.
כמו כן נובע מסעיף (ד-2) יש שוויונות. נפעיל את הסעיף (ד-2) (עם
שוויונות) עבור הקבוצה $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ (הן אלה התנאות בתחילת סעיף ג')
ונקבל $\mu(\bigcup_{1}^{\infty}A_i)=\sum_{1}^{\infty}\mu(A_i)$ (כי $E\setminus B=\emptyset$ ו $\mu(\emptyset)=0$)
$\Rightarrow$ μ מידה על $\mathcal{M}_\mu$.

(III) (א) יהי $A\in\tilde{\mathcal{M}}$. נקח $E_1=A$ ו $E_i=\emptyset$ לכל $2\leq i$ ונקבל
כי $\mu(A)\leq\nu(A)$. מצד שני, יהיו $E_i\in\tilde{\mathcal{M}}$ כך ש $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$
נגדיר $B_i=A\cap(E_i\setminus(E_1\cup..\cup E_{i-1}))$ ל $2\leq i$ ו $B_1=A\cap E_1$.
אז $B_i\in\tilde{\mathcal{M}}$ ו $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ ולכן מתקיים $\nu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(B_i)\underset{B_i\subseteq E_i}{\leq}\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)$
ולכן, מהגדרת $\mu(A)$ $\nu(A)\leq\mu(A)$

(ב) μ מידה חיצונית על X על סמך שאלה 1. נקח $A\in\tilde{\mathcal{M}}$ ונראה: $A\in\mathcal{M}$
יהי $E\subseteq X$. צ"ל: $\mu(E)\geq\mu(E\cap A)+\mu(E\setminus A)$. מהגדרת $\mu(E)$,
מספיק להראות שאם $E_i\in\tilde{\mathcal{M}}$ ו $E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ אז $\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i\cap A)\geq\mu(E\cap A)+\mu(E\setminus A)$
ואכן: $\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i\cap A)+\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i\setminus A)$; $\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i\cap A)\geq\mu(E\cap A)$
מהגדרת $\mu(E\cap A)$ (כי לכל i $E_i\cap A\in\tilde{\mathcal{M}}$ ו $E\cap A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\cap A$)
באותו האופן $\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i\setminus A)\geq\mu(E\setminus A)$

(IV) כמו שראינו בתרגילים קודמים $\tilde{m}$ היא אוסף קבוצות שניתנות להצגה כאיחוד סופי זר של אברי S. עבור $A\in\tilde{m}$ יש $A_1,\dots,A_n$ ב-S זרות כך ש- $A=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i$. נגדיר $\nu(A)=\sum_{i=1}^{n}\gamma(A_i)$ [יש לוודא שהגדרה זו טובה: נניח $A=\dot{\bigcup}_{j=1}^{m} B_j$, $B_j\in S$ זרות בזוגות. לכל i $A_i=\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}(A_i\cap B_j) \Rightarrow \gamma(A_i)=\sum_{j=1}^{m}\gamma(A_i\cap B_j)$. באותו האופן נקבל כי לכל j $\gamma(B_j)=\sum_{i=1}^{n}\gamma(A_i\cap B_j)$: השתמשנו בכך ש-$S$ סגורה לחיתוך וכי γ אדטיבית. עכשיו נקבל $\sum_{i=1}^{n}\gamma(A_i)=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}\gamma(A_i\cap B_j)=\sum_{j=1}^{m}\gamma(B_j)$ ולכן ההגדרה היא טובה]. נקבל מיד כי $\nu|_S=\gamma$.

נשאר לוודא ש-ν היא σ-אדטיבית על $\tilde{m}$. יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\tilde{m}$ זרות בזוגות כך ש- $B=\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty}A_i\in\tilde{m}$. לכל i יש לנו הצגה $A_i=\dot{\bigcup}_{j=1}^{n_i}A_{ij}$ עם $\{A_{ij}\}_{j=1}^{n_i}\subset S$ זרות בזוגות. יש גם $B_1,\dots,B_m$ ב-S זרות בזוגות כך ש- $B=\dot{\bigcup}_{k}^{m}B_k$. אז:

$$\nu(B)\underset{\text{הגדרת }\nu}{=}\sum_{k=1}^{m}\gamma(B_k)\underset{\sigma\text{-אדטיביות על }S}{=}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma(B_k\cap A_{ij})\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m}\gamma(B_k\cap A_{ij})\right)}_{=\gamma(A_{ij})}$$

$$\underset{\text{הגדרת }\nu}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i)$$

(V) (א) הבדיקה ש-S היא סמי-אלגברה היא מיידית. באחד התרגילים הקודמים (תרגיל 4 שאלה 7) הוכחנו כי γ מידה על S.

(ב) ע"פ שאלה 4 ניתן להרחיב את γ למידה ν שמוגדרת על $\tilde{m}$ האלגברה הנוצרת ע"י S. עכשיו נגדיר את μ כמו בשאלה 3. אז μ היא מידה חיצונית ע"פ (3ב) וגם, ע"פ שאלה 2 m_μ היא σ-אלגברה. μ מידה על m_μ! ע"פ (3ב) $\tilde{m}\subseteq m_\mu$ וע"פ (3א) μ מרחיבה את ν.

סיכום: מצאנו σ-אלגברה m_μ המכילה את S ומידה μ על m_μ שמרחיבה את γ. מהגדרת S נקבל מיד כי $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subset m_\mu$ σ-אלגברה בורל על הישר. μ נותנת לקטע את אורכו כי היא הרחבה של γ.

הערה: שימו לב שמהבנייה נקבל שלכל קבוצת בורל A:

$$\mu(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i):\ A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)\right\}$$

תורת המידה. תרגיל 6.

(1) (א) נניח $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{L}^1(X,\mu)$, $f_n\to f$ במידה שווה ! $\mu(X)<\infty$.
הראו כי $f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$ וכי $\int f_n\,d\mu\to\int f\,d\mu$

(ב) תנו דוגמא ל $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{L}^1$, $f_n\to f$ במידה שווה, אבל ל $\{\int f_n\,d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ אין גבול [כלומר תנו דוגמא למרחב, σ-אלגברה ומידה מתאימה ; סדרה של $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{L}^1$]

(2) נניח $f_n,g_n,f,g\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$, $0\le g_n$, $f_n\to f$, $g_n\to g$ נקודתית ואם $|f_n|\le g_n$ ו- $\int g_n\,d\mu\to\int g\,d\mu$. הראו כי $\int f_n\,d\mu\to\int f\,d\mu$

(3) נניח $f_n,f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$, $f_n\to f$ נקודתית ; $\int|f_n|\,d\mu\to\int|f|\,d\mu$.
הראו כי $\int|f_n-f|\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ [רמז: היעזרו בשאלה קודמת]

הגדרה: נאמר כי $f_n\to f$ במידה [f_n,f מדידות] אם לכל $\varepsilon>0$

$$\mu\left(\{x:|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

(4) (א) הראו שאם $\int|f_n-f|\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אז $f_n\to f$ במידה.
(ב) הראו שההפך אינו נכון בדרך כלל: תנו דוגמא לפונקציות מדידות על מרחב מידה כלשהו ; f_n,f כך ש $f_n\to f$ במידה, אבל

$$\int|f_n-f|\,d\mu\;\not\xrightarrow[n\to\infty]{}\;0$$

(5) תנו דוגמא לאי שיוון חזק בלמה של Fatou.

פתרון תרגיל 6.

(1) (א) קיים n_0 טבעי כך שלכל x $|f_{n_0}(x)-f(x)|\le 1$ (כי $f_n\to f$ במ"ש)

$\Leftarrow$ $|f(x)|\le |f_{n_0}(x)|+1$ $\Leftarrow$ $\int|f|d\mu \le \int(|f_{n_0}|+1)d\mu = \int|f_{n_0}|d\mu + \mu(X) \underset{\circledast}{<} \infty$

$\circledast$: $\int|f_{n_0}|d\mu<\infty$ כי $f_{n_0}\in\mathcal{L}^1$ ו- $\mu(X)<\infty$ מהנתון. $\Leftarrow$ $f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$

יהי $0<\varepsilon$: קיים N_ε כך שלכל $N_\varepsilon\le n$ ולכל x $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\Leftarrow$

$|\int f_n d\mu - \int f d\mu| \le \int |f_n-f|d\mu \le \varepsilon\mu(X)$ והיות ו- ε היה שרירותי ו- $\mu(X)<\infty$

נסיק כי $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

(ב) נסתכל ב- $\left(\mathbb{N}, \left(\text{אוסף כל הקבוצות של } \mathbb{N}\right), \mu = \text{מידת המניה}\right)$: יהי $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ סדרת מספרים ממשיים כך ש- $\alpha_k\to0$ וכך שלטור $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k$ אין גבול ב- $[-\infty,\infty]$.

נגדיר $f_n=\sum_{k=1}^n \alpha_k\cdot\chi_{\{k\}}$ ונגדיר $f(n)=\alpha_n$ לכל n. $\Leftarrow$ $f_n\to f$ במ"ש

כי: $\sup_{k\in\mathbb{N}}|f_n(k)-f(k)| = \sup\{|\alpha_k| : k>n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (כי $\alpha_n\to0$)

כמו כן $f_n\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$ לכל n כי $\int|f_n|d\mu = \sum_{i=1}^n|\alpha_i|<\infty$ אבל f

$\int f_n d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ אין גבול על סמך הנ"ל.

(2) לכל x קיים: $|f(x)-f_n(x)|\le|f(x)|+|f_n(x)|\le g(x)+g_n(x)$ ולכן

$\mathcal{L}^1(X,\mu)\ni h_n = g+g_n-|f-f_n|$

$$\int 2g\, d\mu = \int\lim_{n\to\infty} h_n d\mu = \int\liminf_{n\to\infty} h_n d\mu \overset{\text{Fatou}}{\le} \liminf_n\int h_n d\mu$$
$$= \liminf_n\Big(\underbrace{\int g\, d\mu+\int g_n d\mu}_{\to\int 2g\,d\mu} - \int|f-f_n|d\mu\Big) = 2\int g\, d\mu - \limsup\int|f-f_n|d\mu$$

והיות ו- $\int g\, d\mu<\infty$ $\Leftarrow$ $\int|f-f_n|d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\Leftarrow$ $\int f_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f d\mu$

(3) נגדיר $F_n=|f_n-f|$, $F=0$, $G_n=|f_n|+|f|$, $G=2|f|$. אז

$F,F_n,G_n,G\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$, $0\le G_n$, $F_n\to F$ נקודתית, $G_n\to G$ נקודתית, $|F_n|\le G_n$

וגם $\int G_n d\mu = \underbrace{\int|f_n|d\mu}_{\to \int|f| \text{ (מהנתון)}} + \int|f|d\mu \to 2\int|f|d\mu=\int G\, d\mu$, ולכן, לפי שאלה קודמת: $\int|f_n-f|d\mu=\int F_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int F d\mu = 0$

(4) (א) יהי $0<\varepsilon$. נסמן $A_n=\{x:|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\}$

$\int|f-f_n|d\mu \ge \int_{A_n}|f-f_n|d\mu \ge \varepsilon\mu(A_n) \Rightarrow \mu(A_n)\le\frac{1}{\varepsilon}\int|f_n-f|d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\Leftarrow$ $f_n\to f$ במידה.

(ב) נקח מרחב $[0,1]$ עם σ-אלגברת בורל ומידת לבג: $n\chi_{(0,\frac1n)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ במידה

אבל $\int n\chi_{(0,\frac1n)}d\mu \not\to 0$

(5) יהי $X=\{a,b\}$, σ-אלגברה של כל תתי הקבוצות; $\mu=\delta_a+\delta_b$. נגדיר

סדרת פונקציות ע"י $f_{2n}=\chi_{\{a\}}$, $f_{2n+1}=\chi_{\{b\}}$, אז

[illegible] n לכל $\int f_n d\mu = 1$ אבל, $\liminf f_n \equiv 0$

$\int \liminf f_n d\mu = 0 < 1 = \liminf \int f_n d\mu$

תורת המידה תרגיל 7

(1) (א) נניח ν, μ מידות על מרחב מדיד $(X, \mathcal{M})$, $\nu(X)<\infty$. לכל E מדידה מתקיים שאם $\mu(E)=0$ אז $\nu(E)=0$. הוכיחו כי לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E \in \mathcal{M}$ אם $\mu(E)<\delta$ אז $\nu(E)<\epsilon$.

(ב) נניח $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^1(X,\mu)$ פונקציות מדידות המקיימות $\int |f_n - f_m| d\mu \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

הוכיחו: לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל E מדידה שעבורה $\mu(E)<\delta$ קיים: $\int_E |f_n| d\mu < \epsilon$ לכל n.

(2) נניח $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה סופי ($\mu(X)<\infty$). נניח f מדידה אי שלילית. נסמן $E_n = \{x : f(x) \geq n\}$. הוכיחו: $\int f d\mu < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$

(3) נניח μ מידת בורל סופית ורגולרית על מרחב מטרי קומפקטי X. הוכיחו: קיימת $K \subseteq X$ קומפקטית עם $\mu(K)=\mu(X)$ וכך שאם $\tilde{K} \subsetneq K$ קומפקטית, אז $\mu(\tilde{K}) < \mu(X)$.

(4) חשבו את: (א) $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} dx\right)$

(ב) $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx\right)$

(5) הוכיחו את המשפט הבא:

קיימת מידה חיובית שלמה m המוגדרת על σ-אלגברה $\mathcal{M}$ ב-$\mathbb{R}^k$ בעלת התכונות הבאות:

(א) $m(W) = vol(W)$ לכל $W = \{x \in \mathbb{R}^k : \alpha_i < x_i < \beta_i,\ 1 \leq i \leq k\}$ כאשר $vol(W) = \prod_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i)$ ו- $\mathbb{R}^k \ni x = (x_1, \dots, x_k)$.

(ב) $\mathcal{M}$ מכילה כל הקבוצות בורל ב-$\mathbb{R}^k$: כלומר: $E \in \mathcal{M} \iff$ קיימות קבוצות A ו-$B \subset \mathbb{R}^k$ כך ש-$A \subset E \subset B$, A היא F_σ, B היא G_δ ו-$m(B-A)=0$. בנוסף m רגולרית.

(ג) m אינווריאנטית להזזות: $m(E+x) = m(E)$ לכל $E \in \mathcal{M}$ ולכל $x \in \mathbb{R}^k$.

(ד) אם μ מידת בורל חיובית אינווריאנטית להזזות על $\mathbb{R}^k$ כך ש $\mu(K)<\infty$ לכל K קומפקטית, אז קיים קבוע c כך ש $\mu(E) = c\,m(E)$ לכל קבוצת בורל $E \subseteq \mathbb{R}^k$.

פתרון תרגיל 7.

(1) (א) נניח בשלילה שקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ יש E מדיד עם $\mu(E)<\delta$ ו $\nu(E)\geq\varepsilon$. בפרט, לכל i יש E_i מדיד עם $\mu(E_i)<2^{-i}$ ו $\nu(E_i)\geq\varepsilon$

$\sum\mu(E_i)<\infty \Leftarrow \mu(\limsup E_i)=0$ (כי $\mu(\limsup E_i)\leq\mu(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i)\leq\underbrace{\sum_{i=n}^{\infty}\mu(E_i)}_{0 \xleftarrow[\infty \leftarrow n]{}}$)

אבל $\nu(\limsup E_i)\geq\varepsilon$ כי $\nu(\limsup E_i)=\lim_{n\to\infty}\nu(\bigcup E_i)$ כי ν סופית.

(ב) נסמן $\nu_n(E)=\int_E|f_n|d\mu$. יהי $\varepsilon>0$. יש N כך שלכל $N\leq n,m$

$\int|f_n-f_m|d\mu<\varepsilon \Leftarrow$ לכל E מדיד ו $N\leq n,m$ $|\nu_n(E)-\nu_m(E)|<\varepsilon$

(כי $\left|\int_E |f_n|-|f_m|d\mu\right|\leq\int_E\big||f_n|-|f_m|\big|d\mu\leq\int_E|f_n-f_m|d\mu\leq\int|f_n-f_m|d\mu$)

עבור i קבוע ν_i,μ עומדים בתנאי סעיף א $\Leftarrow$ יש $\delta_i>0$ כך שאם $\mu(E)<\delta_i \Leftarrow \nu_i(E)<\varepsilon$. נקח $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_N\}$ ואז לכל n $\mu(E)<\delta$ $\Leftarrow \nu_n(E)<2\varepsilon$ כי אם $1\leq n\leq N \Leftarrow \nu_n(E)<\varepsilon$ ואחרת:

$$\nu_n(E)\leq\nu_N(E)+|\nu_N(E)-\nu_n(E)|<2\varepsilon$$

(2) נסמן $\mu(E_n)=e_n$. לכל $x\in E_n\setminus E_{n+1}$ $n\leq f(x)\leq n+1$ ולכן

~~[illegible]~~ $n(e_n-e_{n+1})\leq\int_{E_n\setminus E_{n+1}}f\leq(n+1)(e_n-e_{n+1})$

(לשים לב כי $X=E_0\supseteq E_1\supseteq E_2\supseteq\dots$). נניח $\int f<\infty$ אז לכל n

$\sum_{i=1}^{n}e_i=\sum_{i=0}^{n}i(e_i-e_{i+1})+ne_{n+1}\leq2\int f$ (לשים לב כי $ne_n\leq\int f$) ולכן

$\sum_{i=1}^{\infty}e_i<\infty$. נניח כי $\sum_{i=1}^{\infty}e_i<\infty$: בפרט $e_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Leftarrow f$ סופית

כ"ת $\Leftarrow \int f=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{E_i\setminus E_{i+1}}f$. לכל n מקיים:

$\sum_{i=0}^{n}\int_{E_i\setminus E_{i+1}}f\leq\sum_{i=0}^{n}(i+1)(e_i-e_{i+1})=\sum_{i=0}^{n}e_i-(n+1)e_{n+1}\leq\sum_{i=0}^{\infty}e_i<\infty \Leftarrow \int f<\infty$.

(3) יהי $\{K_\alpha\}$ אוסף הקבוצות שהן קומפקטיות ו כך ש $\mu(X)=\mu(K_\alpha)$. נגדיר

$K=\bigcap_\alpha K_\alpha$ (אוסף לא ריק כי X בו) K קומפקטית, מספיק שנראה

$\mu(K)=\mu(X)$ נניח בשלילה $\mu(K)<\mu(X)$. מרגולריות (חיצונית) של μ נובע שיש

פתוחה $K\subseteq U$ כך ש $\mu(U)<\mu(X)$. מקומפקטיות יש $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש

$\bigcap_{i=1}^{n}K_{\alpha_i}\subseteq U$ (K_α ס"ג ו U^c בן משפחה של סגורות עם חיתוך ריק)

אבל $\mu((\bigcap_1^n K_{\alpha_i})^c)=\mu(\bigcup_1^n K_{\alpha_i}^c)\leq\sum_1^n\mu(K_{\alpha_i})=0 \Leftarrow \mu(\bigcap_1^n K_{\alpha_i})=\mu(X)$

בסתירה לכך ש $\bigcap_1^n K_{\alpha_i}\subset U$ ו $\mu(U)<\mu(X)$

(4) (א) נסמן $g_n=\chi_{(0,n)}(1-\frac{x}{n})^n e^{-\frac{x}{2}}$, $g_n\to e^{-\frac{3}{2}x}$ נקודתית. כמו כן,

לכל x $0\leq g_n(x)\leq e^{-\frac{3}{2}x}$ (כי לכל $t\in\mathbb{R}$ $1+t\leq e^t \Leftarrow 1-\frac{x}{n}\leq e^{-\frac{x}{n}}$

$\Leftarrow$ עבור $0\leq x\leq n$ $\left((1-\frac{x}{n})^n\leq e^{-x}\right)$ וגם $L^1(0,\infty)\ni e^{-\frac{3}{2}x}$.

ולכן, לפי DCT $\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{-\frac{x}{2}}dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}x}dx = \frac{2}{3}$

(ג) בדיוק באותו האופן

(5) ספר של כוזין.

תרגיל 8. תורת המידה.

(1) הוכח כי קיימת $G\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה וצפופה עם מידת לבג $<\varepsilon$ עבור $\varepsilon>0$ נתון.

(2) (א) הוכיחו שקיימת קבוצה $A\subseteq[0,1)$ סגורה, בעלת מידת לבג חיובית ובעלת פנים ריק (לא מכילה אף קטע).

(ב) הוכיחו שאם A,B קבוצות סגורות על הישר ובעלות פנים ריק אז $A\cup B$ סגורה ובעלת פנים ריק.

(ג) יהיו $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ כל הקטעים הפתוחים ב $\mathbb{R}$ עם קצוות רציונליים. קבוצה מן הצורה $cA+x$ ($c>0$, $x\in\mathbb{R}$) תיקרא "העתק של A". הוכיחו שקיימות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ העתקות של A מסעיף א' זרות זו לזו כך שלכל n $A_n\subseteq I_n$.

(ד) הוכיחו שקיימת סדרת מספרים $0=r_0<r_1<r_2<\dots<1$ כך שלכל $i\geq 0$ מידת לבג של $A\cap[r_i,r_{i+1})$ היא חיובית ממש.

(ה) תבנו סדרה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ של קבוצות מדידות, זרות זו לזו, כך שלכל i ולכל קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ מידת לבג של $I\cap B_i$ חיובית ממש.

(3) הוכיחו שקיימת פונקציה מדידה אי שלילית וסופית על הישר כך שלכל קטע I $\int_I f\,dm=\infty$ (אינטגרל ביחס למידת לבג) [רמז: היעזרו בשאלה (2ה)]

(4) (א) נניח $G\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה. הראו ש G היא איחוד בן מניה (או סופי) של קטעים פתוחים זרים זה לזה.

(ב) נניח $E\subset\mathbb{R}$ מדידה (בורל), עם $0<\mu(E)<\infty$ ויהי $0<\alpha<1$. הוכיחו שקיים קטע פתוח I כך ש $\alpha\mu(I)<\mu(E\cap I)$ [הדרכה: נניח שלא. הראו שלכל U פתוחה כך ש $E\subset U$ קיים $\mu(E)\leq\alpha\mu(U)$ וקבלו סתירה]

(5) (א) נניח I קטע פתוח, $E\subseteq I$ מדידה כך ש $\mu(E)>\frac{3}{4}\mu(I)$
הוכיחו $\left(-\frac{1}{2}\mu(I),\frac{1}{2}\mu(I)\right)\subset E-E$ הדרכה: כאשר הראו שלכל x,
$x\in E-E \iff E\cap(E+x)\neq\emptyset$. כעת השתמשו בכך ש $E\cup(E+x)\subset I\cup(I+x)$

(ב) יהי $E\subseteq\mathbb{R}$ מדידה עם מידה >0. הוכיחו ש $E-E$ מכילה קטע סביב אפס.

(6) תהי $E\subset\mathbb{R}$ מערכת נציגים ל $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, כלומר $\{\mathbb{Q}+e\}_{e\in E}$ זרות זו לזו ואיחודן שווה $\mathbb{R}$. הראו ש E אינה מדידה לבג. הדרכה: הניחו ש E מדידה והסיקו ש $0<\mu(E)$ ונסו להשתמש ב 5ב.

(7) יהיו $0<p<q<r\leq\infty$

(א) הוכיחו ש $L^q\subset L^p+L^r$ (ב) הוכיחו ש $L^p\cap L^r\subset L^q$

רמז: לפונקציה מדידה $f:X\to\mathbb{C}$ הסתכלו על $\{x:|f(x)|\leq 1\}$ ועל משלימתה.

פתרון תרגיל 8.

(1) נניח $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ מנייה של הרציונלים ונגדיר $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}(r_i-2^{-i}\varepsilon, r_i+2^{-i}\varepsilon)$. G פתוחה, $\mathbb{Q}\subset G$ ו-

$\mu(G)\le \sum_{i=1}^{\infty} 2\cdot 2^{-i}\varepsilon = 2\varepsilon$!

(2)(א) נקח $A=[0,1]\setminus G$. A סגורה (חיתוך של סגורות), A לא מכילה אף קטע כי $A\cap\mathbb{Q}=\emptyset$. $\mu(A)\ge 1-\mu(G)\ge 1-2\varepsilon$ <= עבור ε קטן $0<\mu(A)$.

(ב) נניח בשלילה $A\cup B$ מכיל קטע פתוח I. $\text{int}A=\emptyset$ <= $I\not\subset A$ <= קיים $x\in I\setminus A$. A סגורה <= יש קטע פתוח J עם $x\in J\subseteq I$ וגם $J\cap A=\emptyset$ <= $J\subset B$ בסתירה לכך ש- $\text{int}B=\emptyset$. באינדוקציה נובע כי איחוד של מספר סופי של סגורות בעלות פנים ריק הוא קבוצה סגורה בעלת פנים ריק. [ניתן להראות גם לאיחוד בן מנייה (ב-$\mathbb{R}$) משפט Baire]

(ג) למה: אם J קטע פתוח אז קיימת "הכצה" $cA+x$ שמוכלת ב-J:

הוכחה: יש $a\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon$ כך ש- $[a,a+\varepsilon]\subset J$ <= $\varepsilon A+a\subset \varepsilon[0,1]+a=[a,a+\varepsilon]\subseteq J$

כעת: נניח בחרנו $A_1,\dots,A_n$ זרות זו לזו כאלו ש- $A_i\subseteq I_i$ עבור $i\le n$. הפנים של $\bigcup_1^n A_i$ ריק <= $I_{n+1}\not\subset\bigcup_{i=1}^n A_i$ <= $I_{n+1}\setminus\bigcup_{i=1}^n A_i$ פתוחה לא ריקה ולכן מכילה קטע J. נקח "הכצה" של A שנכנסת ל-J ונקרא לה A_{n+1}.

הערה: השתמשנו בכך ש"הכצה" היא גם סגורה עם פנים ריק וזה נובע מכך ש- $t\to ct+x$ הוא הומיאומורפיזם $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($0<c$, $x\in\mathbb{R}$)

(ד) נגדיר $F(x)=\mu(A\cap[0,x))$, $0\le x\le 1$. אז F רציפה על $[0,1]$ ועולה במובן החלש $F(0)=0$, $F(1)=\mu(A)>0$ וכעת ברור שיש סדרת מספרים $0=r_0<r_1<\dots<1$ כך ש- $0=F(0)<F(r_1)<\dots$. רציפות של F: נשים לב כי $F(x)=\mu(A\cap[0,x])$ כי המידה של נקודה היא 0. אם $x_n\nearrow x$ אז $A\cap[0,x_n)\nearrow A\cap[0,x)$ ולכן, מרציפות של מידה מלמטה $F(x_n)\to F(x)$. אם $x_n\searrow x$ <= $A\cap[0,x_n)\searrow A\cap[0,x)$ ולכן $F(x_n)\to F(x)$ מרציפות מידה מלמעלה. היות ואלו קבוצות סופיות <= $F(x_n)\to F(x)$

(ה) יהיו קבוצות מסעיף (ג) $A_n=c_nA+x_n$ ($0<c_n$, $\mathbb{R}\ni x_n$) נסמן לכל $0\le i$ $A_n^i=c_n(A\cap[r_i,r_{i+1}))+x_n$ (r_i מסעיף ד) <= A_n^i זרות זו לזו ($A_n^i\cap A_m^j\ne\emptyset$ <= $n=m$ ו- $i=j$) וגם A_n^i מ"מ חיובית (כהעתקה של $A\cap[r_i,r_{i+1})$) ולכל i,n $A_n^i\subseteq I_n$. נקח $B_i=\bigcup_n A_n^i$ <= $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ זרות זו לזו, מדידות, ולכל n $A_n^i\subseteq B_i\cap I_n$ <= $0<\mu(B_i\cap I_n)$

לכל קטע I לא ריק יש n כך ש $I_n \subseteq I$ $\Leftarrow$ $0<\mu(B_i\cap I)$.

(3) מספיק להראות לכל n ש $\int_{I_n} f=\infty$ ($\{I_n\}$ משאלה 2). נבחר מספרים $0<\alpha_n<\infty$ ונגדיר $f=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\chi_{B_n}$: B_n חותכת את $I_1,\dots,I_n$ במידה חיובית. נבחר את α_n גדול מספיק כך שלכל $1\le j\le n$ $\alpha_n\mu(B_n\cap I_j)>n$. לכל $n<m$: $\int_{I_n} f\ge\int_{I_n}\alpha_m\chi_{B_m}=\alpha_m\mu(I_n\cap B_m)>m$

$\Leftarrow \int_{I_n} f=\infty$

(4) (א) למה: איחוד כלשהו של קטעים פתוחים שמכילים נקודה משותפת הוא קטע פתוח (הוכחה קלה). לכל $x\in G$ נגדיר I_x איחוד כל הקטעים הפתוחים המכילים את x ומוכלים ב G (יש כאלה כי G פתוחה) $\Leftarrow$ I_x קטע פתוח לפי הלמה.

ו $I_x\subseteq G$. נניח I_x ו I_y נחתכים עבור $x,y\in G$ $\Leftarrow$ $I_x\cup I_y$ קטע פתוח, מוכל ב G ומכיל את x $\Leftarrow$ $I_x\supseteq I_x\cup I_y$ מהגדרת I_x. באותו האופן $I_x\supseteq I_y$ ו $I_y\supseteq I_x$. $\Leftarrow$ $G=\bigcup_{x\in G} I_x$ איחוד זר (עם חזרות) נבחר מכל קטע שמופיע כאן מספר רציונלי ונסיק שזהו איחוד בן מניה.

(ב) נניח שלכל I $\alpha\mu(I)\ge\mu(E\cap I)$. נניח $\mathcal{U}\supset E$ פתוחה. $\Leftarrow$ $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$ איחוד זר של קטעים פתוחים (אולי סופי)

$$\alpha\mu(\mathcal{U})=\alpha\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha\mu(I_i)\ge\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E\cap I_i)=\mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}}(E\cap I_i)\Big)=\mu(E)$$

$\Leftarrow$ $\mu(\mathcal{U})\ge\alpha^{-1}\mu(E)$. $1<\alpha^{-1}$, $0<\mu(E)$ סופית ולכן יש $\varepsilon>0$ כך ש $\alpha^{-1}\mu(E)>\mu(E)+\varepsilon$ ומהרגולריות של μ יש $E\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה עם $\mu(E)+\varepsilon>\mu(\mathcal{U})$, סתירה.

(5)(א) $x\in E-E \Leftrightarrow$ יש $y_1,y_2\in E$ כך ש $x=y_1-y_2 \Leftrightarrow y_2+x=y_1 \Leftrightarrow$ E ו $E+x$ נחתכות. נקח x עם $|x|<\frac{1}{2}\mu(I)$. צ"ל: $x\in E-E$: נניח שלא, אז E ו $E+x$ זרות ולכן $\mu(E\cup(E+x))=2\mu(E)>\frac{3}{2}\mu(I)$, אבל $E\cup(E+x)\subseteq I\cup(I+x)$ ו $\mu(I\cup(I+x))<\frac{3}{2}\mu(I)$, סתירה.

(ב) אפשר להניח כי $\mu(E)$ סופית כי אחרת נחליף את E ב $E'\subset E$ עם מידה חיובית סופית ו $E'-E'\subset E-E$. ניתן למצוא E' כזה כי $E\cap(-n,n)\nearrow E$ ולכן, עפ"י (4ב) יש קטע פתוח I כך ש $\frac{3}{4}\mu(I)<\mu(E\cap I)$ כעת נובע מ (5א) ש $E-E$ מכילה קטע סביב הראשית.

(6) נניח כי $\mathbb{R} = \biguplus_{r\in\mathbb{Q}} E+r$ ולכן $\infty = \mu(\mathbb{R}) = \sum'_{r\in\mathbb{Q}} \mu(E+r) = \aleph_0\, \mu(E)$

(μ אינווריאנטית להזזות) ולכן $0<\mu(E)$ [שכחתי: נניח כי E מדידה]

ולכן, עפ"י (5ב) $E-E$ מכילה קטע סביב הראשית, אבל

$\mathbb{Q}\cap(E-E)=\{0\}$, סתירה, [אם $r\in\mathbb{Q}\cap(E-E)$ אז $r=e_1-e_2$ עבור

$e_1,e_2\in E$ $\Leftarrow$ $e_1=e_2+r \in (E+0)\cap(E+r)$ ולכן נמנע כי $r=0$].

(7) (א) יהא $f\in L^q$ ונסמן $A=\{x:|f(x)|\ge 1\}$

$$\int|\chi_A f|^p = \int_A |f|^p \underset{p<q}{\le} \int_A |f|^q \le \int |f|^q < \infty$$

אם $r<\infty$:
$$\int|\chi_{A^c} f|^r = \int_{A^c}|f|^r \underset{q<r}{\le} \int_{A^c} |f|^q \le \int |f|^q < \infty$$

ברור ש $\|\chi_{A^c} f\|_\infty \le 1$. בכל מקרה $\chi_A f\in L^p$! $\chi_{A^c} f\in L^r$ וסכומן שווה ל f.

(ב) יהא $f\in L^p\cap L^r$ ונסמן A כנ"ל אז

$$\int_{A^c}|f|^q \le \int_{A^c}|f|^p \le \int|f|^p<\infty$$

אם $r<\infty$: $\int_A|f|^q\le\int_A|f|^r\le\int|f|^r<\infty$ ולכן מתקיים:

$$\mu(A)\le\int_A|f|^p\le\int|f|^p<\infty$$

אם $r=\infty$ אז $\int_A|f|^q\le\|f\|_\infty\,\mu(A)<\infty$. בכל מקרה $\int|f|^q=\int_{A^c}+\int_A<\infty$

תרגיל 9.

(1) הראו כי במשפט אגורוף דרישה שהמרחב יהיה ממידה סופית היא הכרחית.

(2) נניח X מרחב מידה σ-סופי. $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מרוכבות מדידות על X. נניח $f_n \to f$ נקודתית. הראו שיש קבוצות מדידות $E_i \subseteq X$ עם $\mu(X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)=0$ וכך שלכל i $f_n \to f$ במידה שווה על E_i.

רמז: כדאי שימוש מיידי במשפט אגורוף.

(3) (א) הראו שעבור $0 \le a,b$ $(a+b)^p \le 2(a^p+b^p)$ עבור $0<p<\infty$. הסיקו שלכל p כזה $\mathcal{L}^p$ מרחב וקטורי.

(ב) נניח $f_n, f \in L^p$, $f_n \to f$ נקודתית, ו- $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. הראו כי $\|f_n - f\|_p \to 0$.

(4) נניח $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מקיימת $F(x+y)=F(x)+F(y)$ לכל $x,y \in \mathbb{R}$.

(א) הראו שאם F רציפה אז קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ $F(x)=\alpha x$.

הדרכה: הוכיחו ראשית שלכל $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ $F(rx)=rx$.

(ב) הראו שאם F מדידה אז היא גם רציפה.

הדרכה: התבוננו ב- $A_n = F^{-1}([-n,n])$ והסיקו על מידת A_n. השתמשו בכך שלכל $E \subseteq \mathbb{R}$ מדידה בעלת מידה חיובית $E-E$ מכילה קטע סביב הראשית. הוכיחו טענה הבאה: אם קיים $\varepsilon>0$ ו- $M>0$ כך שלכל $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ מתקיים $|F(x)|<M$ אז F רציפה.

הסיקו מהטענה הנ"ל את הנדרש.

(5) נניח X מרחב מידה ממידה 1. נניח $f,g: X \to (0,\infty)$ מדידות ו- $fg \ge 1$. הראו כי $\left(\int f d\mu\right)\left(\int g d\mu\right) \ge 1$

(6) אם μ מידה מרוכבת על X אז $|\mu|(X) < \infty$

פתרון תרגיל 9.

(1) נסתכל על $\mathbb{N}$ עם מידת המניה ונגדיר $f_n=\chi_{\{1,2,\dots,n\}}$. אז $f_n\to 1$
נקודתית, אבל $f_n\to 1$ במידה שווה רק על תתי קבוצות סופיות.

(2) נציג את המרחב כאיחוד בן מניה של קבוצות מדידות ממידה סופית $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$
$\bigcup_{i=1}^{n}X_i$ ממידה סופית ולכן, עפ"י משפט איגורוף יש $E_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}X_i$ כך ש:
$f_j\to f$ במ"ש על E_n וגם
$\mu(\bigcup_{i=1}^{n}X_i\setminus E_n)<\frac{1}{n}$. נסיים אם נראה כי $\mu(X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=0$.

$$X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(X_i\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$$

נקבע i: לכל $i<m$ $X_i\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subseteq X_i\setminus E_m\subset\bigcup_{i=1}^{m}X_i\setminus E_m$

! $\mu(\bigcup_{i=1}^{m}X_i\setminus E_m)<\frac{1}{m}$ ולכן $\mu(X_i\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=0$

(3) $(a+b)^p\le(2\max\{a,b\})^p=2^p(\max\{a,b\})^p=2^p\max\{a^p,b^p\}\le 2^p(a^p+b^p)$ (א)

$\Leftarrow \int|f+g|^p\le\int(|f|+|g|)^p\le 2^p\left(\int|f|^p+\int|g|^p\right) \Leftarrow \mathcal{L}^p$ סגור
לחיבור לכל $0<p<\infty$.

(ב) נסמן $F_n=|f-f_n|^p \Leftarrow 0\le F_n\le(|f|+|f_n|)^p\le 2^p(|f|^p+|f_n|^p)$

נסמן $G_n=2^p(|f|^p+|f_n|^p) \Leftarrow 0\le F_n\le G_n$ לכל n. כמו כן

$F_n\to 0$ נקודתית ! $G_n\to 2^{p+1}|f|^p\equiv G$ נקודתית. נשים לב כי

$G_n,G\in L^1$ וכי $\int G_n\to\int G$: כיון ש $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$, אז עפ"י רציפות

העלאה בחזקת p (כפונ' $t\to t^p$) נקבל $\int|f_n|^p\to\int|f|^p$

כעת עפ"י DCT מוכלל (תרגיל 6) נובע $\int F_n\to 0$ ולכן

$$\|f-f_n\|_p=\left(\int F_n\right)^{1/p}\to 0$$

(4) ראשית $F(0)=F(0+0)=F(0)+F(0) \Leftarrow F(0)=0$. כמו כן, לכל x

$0=F(x+(-x))=F(x)+F(-x) \Leftarrow F(-x)=-F(x)$. באינדוקציה על

n נקבל שלכל $1\le n$ ש $F(nx)=nF(x)$. כעת, עבור $n\neq 0$ שלם

$F(x)=F(n\frac{x}{n})=nF(\frac{x}{n}) \Leftarrow F(\frac{x}{n})=\frac{F(x)}{n} \Leftarrow$ לכל a,b שלמים

$b\neq 0$ קיים $F(\frac{a}{b}x)=aF(\frac{1}{b}x)=\frac{a}{b}F(x) \Leftarrow F$ מכבדת כפל בסקלר

רציונלי. נסמן $\alpha=F(1) \Leftarrow$ לכל $r\in\mathbb{Q}$: $F(r)=F(r\cdot 1)=r\cdot F(1)=r\cdot\alpha$

אם נראה ש F רציפה נקבל מיד ש $F(x)=x\alpha$ לכל x (כי $x\to F(x)-x\alpha$

רציפה, מתאפסת על הרציונלים ולכן זהותית שווה 0)

טענה: אם קיים $0<\varepsilon$ ו $0<M$ כך שלכל $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ $|F(x)|<M$

אז F רציפה..

הוכחת הטענה: נניח $|y|<\frac{\varepsilon}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $|ny|<\varepsilon$ ולכן

$n|F(y)|=|F(ny)|<M$ כלומר $|y|<\frac{\varepsilon}{n}$ $\Leftarrow$ $|F(y)|<\frac{M}{n}$

$\Leftarrow$ F רציפה ב- 0. מכאן נובעת רציפות של F בכל x כי אם y קרוב ל- x אז $x-y$ קרוב ל- 0 ו- $F(x)-F(y)=F(x-y)$.

נניח F מדידה: נסמן $A_n=F^{-1}([-n,n])$ $\Leftarrow$ $A_n\nearrow\mathbb{R}$ ולכן עבור n מספיק גדול $0<\mu(A_n)$ לכן, ע"פ שאלה באחד התרגילים הקודמים, A_n-A_n מכילה קטע I סביב הראשית.. מהגדרת A_n: F חסומה על A_n. ולכן F חסומה על A_n-A_n כי $F(A_n-A_n)=F(A_n)-F(A_n)$ ולכן, לכל $x\in I$ $|F(x)|\le 2n$ מהטענה F רציפה..

(5) אפשר להניח כי $f,g\in L^1$, כי אחרת אגף שמאל $=\infty$] מכיוון ש $0<f$;
ונניח $\Leftarrow$ $\int f>0$ וכנ"ל g] $\Leftarrow$ $\sqrt{f},\sqrt{g}\in L^2$ $\Leftarrow$ $\sqrt{f}\sqrt{g}\in L^1$

ומקיים: $\|\sqrt{fg}\|_1\le\|\sqrt{f}\|_2\|\sqrt{g}\|_2$ (ממה שראינו בכיתה) כלומר

$\int\sqrt{fg}\le\sqrt{\int f}\cdot\sqrt{\int g}$ ולכן $\left(\int\sqrt{1}\right)^2=1\le\left(\int\sqrt{fg}\right)^2\le\left(\int f\right)\left(\int g\right)$

(6) משפט הזה נמצא בספר של Rudin עמוד 119.

תורת המידה. תרגיל 10.

(1) נניח μ מידה מרוכבת על $(X, \mathcal{M})$ כך ש- $\mu(X)=|\mu|(X)$. הוכח: $|\mu|=\mu$

(2) נניח ν מידה מרוכבת על $(X, \mathcal{M})$. נגדיר לכל $E\in\mathcal{M}$:

$\mu(E)=\sup\{\sum_{i=1}^{n}|\nu(E_i)| : E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i,\ E_i\in\mathcal{M},\ 1\le i\le n\}$. האם $\mu=|\nu|$?

(3) נניח μ מידה סופית חיובית על $(X, \mathcal{M})$ ונניח $F\in L^1(\mu)$

(א) הוכח כי $\nu(E)\overset{def}{=}\int_E F\,d\mu$ מידה מרוכבת על $(X, \mathcal{M})$

(ב) נגדיר $\lambda(E)=\int_E |F|\,d\mu$. הוכח: $|\nu|=\lambda$

רמז: קל להראות ש- $|\nu|\le\lambda$ עבור כיוון השני השתמשו בכך שהפונקציות הפשוטות הן צפופות ב- L^1.

(4) נניח μ מידה חיובית ; ν,ν_1,ν_2 מידות מרוכבות על מרחב מדיד $(X, \mathcal{M})$

הוכיחו:

(א) אם ν מרוכזת על קבוצה $A\in\mathcal{M}$ אז כך גם $|\nu|$

(ב) אם $\nu_1\perp\nu_2$ אז גם $|\nu_1|\perp|\nu_2|$

(ג) אם $\nu_i\perp\mu$ עבור $i=1,2$ אז $\nu_1+\nu_2\perp\mu$

(ד) אם $\nu_i\ll\mu$ עבור $i=1,2$ אז $\nu_1+\nu_2\ll\mu$

(ה) אם $\nu\ll\mu$ אז $|\nu|\ll\mu$

(ו) אם $\nu_1\ll\mu$; $\nu_2\perp\mu$ אז $\nu_1\perp\nu_2$

(ז) אם $\nu\ll\mu$ וגם $\nu\perp\mu$ אז $\nu\equiv 0$.

(5) נניח μ מידה ממשית על מרחב מדיד $(X, \mathcal{M})$. קבוצה $A\in\mathcal{M}$ נקראת חיובית אם $\mu(E)\ge 0$ לכל $E\subseteq A$ מדידה ונקראת שלילית אם $\mu(E)\le 0$ לכל $E\subseteq A$ מדידה. הוכיחו שיש קבוצות זרות $A,B\in\mathcal{M}$ כך ש: $A\cup B=X$; A חיובית ; B שלילית.

רמז: השתמשו בשאלה קודמת ובמשפט רדון ניקודים כדי לקבל $f\in L^1(|\mu|)$ הראו ש f ממשית כ.ת. $|\mu|$. הגדירו את הקבוצות הנדרשות בעזרתה.

תורת המידה. תרגיל 11. (אחרון! קצת מבצה)

(1) יהיו $1<p,q<\infty$ עם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. עבור $g\in L^q$ נסמן ב-Φ_g את הפונקציונל על L^p שמוגדר $\Phi_g(f)=\int fg$.

(א) הראו ש-Φ_g חסום וש-$\|\Phi_g\|\le\|g\|_q$

(ב) הראו כי $\|\Phi_g\|=\|g\|_q$ [הדרכה: כתבו $g=h\cdot|g|$ והשתמשו ב-$f=\bar{h}|g|^{q-1}$; $q-1=\frac{q}{p}$]

(ג) הסיקו כי $\Phi:L^q\to(L^p)^*$ העתקה לינארית (מעל $\mathbb{C}$) חח"ע שומרת נורמה.

(2) נניח $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה סופי, $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, יהי $\varphi\in(L^p)^*$. נראה שקיים $g\in L^q$ עם $\varphi=\Phi_g$. נגדיר לכל $E\in\mathcal{M}$ $\nu(E)=\varphi(\chi_E)$

(א) הראו ש-ν מידה מרוכבת

(ב) הראו ש-$\nu\ll\mu$ והסיקו שקיים $g\in L^1(\mu)$ עם $d\nu=g\,d\mu$

(ג) הראו שלכל פונקציה פשוטה s $\int g\cdot s\,d\mu=\varphi(s)$

[הראו קודם כי φ ו-Φ_g מתלכדות על פונקציות מציינות]

(ד) אנו יודעים ש-$g\in L^1$ ולכן Φ_g פונקציונל רציף על L^∞ [סעיף א' בשאלה קודמת עובד גם עבור $q=1$ ו-$p=\infty$] ידוע גם ש-$L^\infty\subseteq L^p$. הראו שעבור $f\in L^\infty$ קיים $\|f\|_p\le\|f\|_\infty[\mu(X)]^{1/p}$ והסיקו כי צמצום של φ ל-L^∞ רציף (חסום) על L^∞. הסיקו ש-Φ_g ו-φ מתלכדים על L^∞ [ע"ס (ג) כי ....]

(ה) כעת נוכל להראות ש-$g\in L^q$: נסמן $E_n=\{x:|g(x)|\le n\}$ ונכתוב $g=h|g|$ כאשר $|h|\equiv 1$. נסמן $f_n=\chi_{E_n}\bar{h}\cdot|g|^{q-1}$

שימו לב כי $f_n\in L^\infty$ וקבלו: $\int_{E_n}|g|^q\le\|\varphi\|\left(\int_{E_n}|g|^q\right)^{1/p}$

מכאן קבלו ש-$\int_{E_n}|g|^q\le\|\varphi\|^q$ ולכן, ע"ס .... (?) $g\in L^q$

(ו) כעת אנו יודעים (ע"ס (א 1)) ש-Φ_g פונקציונל חסום על L^∞.

השתמשו שוב ב-(ג) על מנת לקבל כי $\Phi_g=\varphi$.

(3) נניח $f_n,f\in L^p$ ו-$\|f_n-f\|_p\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. הוכיחו כי יש תת-סדרה מתכנסת נקודתית כ"ת.

[תוכלו להניח כי $f\equiv 0$ (למה?). התבוננו ב-$A_n(\varepsilon)=\{|f-f_n|>\varepsilon\}$ וב-$\{x:f_n(x)\not\to 0\}$. תזכרו כי $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)<\infty\Rightarrow 0=\mu(\limsup E_i)$]