① 21.1.08
תורת
המידה

המרצה: יורם לסט ylast@math.huji.ac.il

תורת המידה זה תחום שברמה הבסיסית שלו עוסק בגודל פשוט אבל
של קבוצות נבנית תורה מתמטית שמתעסקת בזה.
ממש במקרה של קבוצות סופיות הגיוני לשייך לקבוצה גודל שהוא מספר
האיברים בה. אבל יש קבוצות אינסופיות שבהם מאוד הגיוני לתת
להן גודל סופי - ממש, מאוד טבעי לומר שהגודל של הקטע $[0,1]$
הוא 1 למרות שבקטע יש אינסוף איברים.
אבל זה רק הדבר הכי בסיסי וראשוני. השימוש של זה הוא בתורת
האינטגרלים. מבחינה זו אולי ראוי לקרוא לקורס תורת הסכימה.
הספר הכי קרוב לקורס הוא

Rudin, Real and Complex Analysis

זה מין תנ"ך של יסודות האנליזה.
בכל אופן יורם ישתדל ללמד רק מה שלא נדבק לספר. החומר שנלמד בקורס
הוא חלק מאוד קטן מהספר.
אזהרה: זה קורס ברמה גבוהה! בהרבה מקומות בארץ ובעולם לא מלמדים
תורת המידה בתואר ראשון ברמה שלומדים כאן.
כדי להצליח צריך יהיה לעבור על החומר בבית!
הטענה שכן ללמוד אצל יורם נכונה לגבי מד"ר אבל לא לגבי מידה.
בירוקרטיה - עדיין לא ידוע טוב. יורם ילמד עוד סמסטר. אם היו
יהיה קצר יהיה פחות חומר. אנחנו לא הולכים לרוץ בחומר.

הגדרה: מרחב טופולוגי הוא זוג (X,τ) כאשר X קבוצה
ו-τ אוסף את קבוצות של X (שייקראו קבוצות פתוחות) המקיים:

א. $X\in\tau$, $\emptyset\in\tau$

ב. אם $V_1,\dots,V_n\in\tau$ אז $\bigcap_{i=1}^{n} V_i\in\tau$

ג. אם $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה כלשהי של קבוצות ב-τ אז $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\in\tau$.

הערה: אם (X,τ) מרחב טופולוגי נדבר על X כמרחב טופולוגי בלי לציין במפורש את τ. (זה כשמובן מה הטופולוגיה)

הגדרה: אם X, Y מרחבים טופולוגיים אז פונקציה $f: X\to Y$ נקראת רציפה אם לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq Y$ גם המקור $f^{-1}(V)$ קבוצה פתוחה ב-X. ($f^{-1}(V)=\{x\in X : f(x)\in V\}$)

דוגמה: הקטע $[0,\infty] = [0,\infty)\cup\{\infty\}$ עם הטופולוגיה הבאה: קבוצות פתוחות הן איחוד קטעים מהצורה (a,b), $(a,\infty]$ ו- $[0,a)$.

למה הקטע הזה חשוב? כי מתברר מבחינה פרקטית שזה נוח.
למשל הפונקציה $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ המוגדרת ע"י

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x>0\\ \infty & x=0\end{cases}$$

היא רציפה! זה בניגוד למה שלמדנו באינפי 1 - שם הפונקציה קיבלה רק ערכים ממשיים ב- $[0,\infty)$.
(נראה לי נוח כשמגבילים את ערכי הפונקציות ל- $\mathbb{R}$ ומונעים מהן לקבל את הערך ∞)

הגדרה: תהי X קבוצה. אוסף $\mathfrak{M}$ של תת קבוצות של X ייקרא σ-אלגברה (סיגמה-אלגברה) ב-X אם ישנן את התכונות הבאות:

א. $X\in\mathfrak{M}$

ב. לכל $A\in\mathfrak{M}$ גם $X\setminus A = A^c\in\mathfrak{M}$

ג. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ אוסף קבוצות ב-$\mathfrak{M}$ אז $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{M}$

מהתכונות האלה נובע בקלות שגם $\emptyset\in\mathfrak{M}$ ושה-$\mathfrak{M}$ סגורה גם לחיתוך בן מניה (זה מכללי דה-מורגן).

דוגמאות: לכל קבוצה X נסתכל על $\mathfrak{M}=\{\emptyset, X\}$. קל לראות ש-$\mathfrak{M}$ זה σ-אלגברה.

אם $\mathcal{M}$ = אוסף כל הקבוצות של X זו σ-אלגברה

<u>הגדרה:</u> מרחב מדיד הוא זוג $(X,\mathcal{M})$ כאשר X קבוצה כלשהי ו-$\mathcal{M}$ σ-אלגברה ב-X. בד"כ נדבר פשוט על X כמרחב מדיד. איברי $\mathcal{M}$ נקראים קבוצות מדידות ב-X.

למה לא תמיד לוקחים את ה-σ-אלגברה להיות כל הקבוצות? - אנחנו נרצה להגדיר גודל שנקרא מידה ונרצה שהוא יקיים מיני תכונות בסיסיות של גדלים. וזה לא תמיד אפשרי אם לוקחים בחשבון את כל הקבוצות החלקיות כולן.

<u>הגדרה:</u> יהי X מרחב מדיד ו-Y מרחב טופולוגי. פונקציה $f: X \to Y$ תיקרא פונקציה מדידה אם לכל קבוצה פתוחה $V \subseteq Y$ המקור $f^{-1}(V)$ הוא קבוצה מדידה ב-X.

<u>טענה:</u> תהי $\mathcal{M}$ σ-אלגברה ב-X. אזי:

א) $\emptyset \in \mathcal{M}$

ב) אם $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$

ג) אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות ב-$\mathcal{M}$ אז $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

ד) אם $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{M}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$

ה) אם $A,B \in \mathcal{M}$ אז $A \setminus B \in \mathcal{M}$

<u>הוכחה:</u>

א) נובע מכך ש- $X^c = \emptyset$.

ב) נובע מלקיחת $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$ ואז יש סגירות לאיחוד בן מניה
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad !$$

ג) נובע מהשוויון $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$ (דה-מורגן)

ד) בדומה ל-(ג) או דה-מורגן על (ב)

ה) נובע מהשוויון $A \setminus B = A \cap B^c$

$\boxed{☺}$

<u>משפט:</u> יהיו Y, Z מרחבים טופולוגיים ותהי $g: Y\to Z$ פונקציה רציפה.

אזי:

(א) אם X מ"ט ו- $f: X\to Y$ רציפה אז ההרכבה $h=g\circ f$ רציפה.

(ב) אם X מרחב מדיד, $f: X\to Y$ פונקציה מדידה ו- $h=g\circ f$
אזי $h: X\to Z$ מדידה.

<u>הוכחה:</u>

(א) אם V פתוחה ב-Z אזי $g^{-1}(V)$ פתוחה ב-Y. לכן
$h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$ פתוחה ב-X.

(ב) באופן דומה: רק ש-f מדידה אז שוב $g^{-1}(V)$ פתוחה
ב-Y. ולכן $h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$ מדידה.

$\boxed{\ddot\smile}$

<u>משפט:</u> יהיו u,v פונקציות מדידות <u>ממשיות</u> על מרחב מדיד X.
ותהי $\Phi:\mathbb{R}^2\to Y$ כאשר Y מ"ט ו- Φ רציפה. נגדיר
$h: X\to Y$ ע"י $h(x)=\Phi(u(x),v(x))$. אזי h מדידה.

<u>הוכחה:</u> נגדיר $f(x)=(u(x),v(x))$ אזי f פונקציה מ-X ל-$\mathbb{R}^2$
ו- $h=\Phi\circ f$. לכן מהמשפט הקודם מספיק להראות ש-f מדידה.
ואכן, אם R מלבן פתוח במישור בעל צלעות מקבילות לצירים
אזי R הוא מהצורה $R=I_1\times I_2$ עבור קטעים פתוחים
$I_1, I_2\subseteq\mathbb{R}$ ו- $f^{-1}(R)=u^{-1}(I_1)\cap v^{-1}(I_2)$. לכן $f^{-1}(R)$
מדידה, כי היא חיתוך של שתי קבוצות מדידות.
עבור קבוצה פתוחה כלשהי $V\subseteq\mathbb{R}^2$ ידוע שניתן איחוד בן מניה
של מלבנים כנ"ל - $V=\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ והיות ש- $f^{-1}(V)=\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(R_i)$
מתקבלת הטענה.

$\boxed{\ddot\smile}$

<u>מסקנה:</u> יהי X מרחב מדיד. אזי:

1) אם $f=u+iv$ כאשר u,v פונקציות ממשיות מדידות על X,
אזי f פונקציה מרוכבת מדידה על X

2) אם $f=u+iv$ פונקציה מרוכבת מדידה על X אזי גם u,v
ו- $|f|$ הן פונקציות ממשיות מדידות על X.

3) אם f,g פונקציות מרוכבות מדידות על X אז $f+g, fg$ מדידות על X

(3) אם E קבוצה מדידה ב- X !

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז χ_E מדידה

(ד) אם f פונקציה מרוכבת מדידה על X אזי קיימת פונקציה מרוכבת מדידה α על X כך ש- $|\alpha| = 1$ -ו $f = \alpha|f|$. ל-α כו קוראים הפאזה. !

(4) 23.1.08
מידה

אם באולם של יום שני ישתנה תינתן הודעה במייל.
שעת קבלה: יום ב' 13:00-14:00 ליד חדר השיעור

(*) <u>משפט:</u> Y,Z מ"ט ; $g: Y \to Z$ רציפה.

(א) אם X מ"ט ; $f: X \to Y$ רציפה אזי $g \circ f$ רציפה.

(ב) אם X מרחב מדיד ; $f: X \to Y$ מדידה אזי $g \circ f$ מדידה

(**) <u>משפט:</u> X מרחב מדיד ו- Y מ"ט. $u, v : X \to \mathbb{R}$ מדידות ; $\Phi : \mathbb{R}^2 \to Y$ רציפה. אזי $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ מדידה

<u>מסקנה:</u> X מרחב מדיד ; $f(x) = u(x) + i v(x)$ כאשר u, v פונקציות ממשיות על X

(א) u, v מדידות ⇐ f מדידה

(ב) f מדידה ⇐ $u, v, |f|$ מדידות

(ג) f, g מרוכבות מדידות ⇐ $f+g$, $f \cdot g$ מדידות

(ד) אם $E \subseteq X$ מדידה אזי $\chi_E(x)$ הפונקציה האופיינית מדידה

(ה) f מרוכבת מדידה ⇐ קיימת α מדידה כך ש- $|\alpha| = 1$; $f = \alpha |f|$.
כלומר קיימת פונקציית פאזה מדידה.

<u>הוכחה:</u>

(א) נובע ממשפט (**) עם $\Phi(z) = z$ או יותר פורמלית
$\Phi(x,y) = x + iy$

(ב) נובע ממשפט (*) עם $g(z) = \mathrm{Re}\, z$ או $g(z) = \mathrm{Im}\, z$ או $g(z) = |z|$
אלה פונקציות רציפות מ- $\mathbb{C}$ ל- $\mathbb{R}$ ולכן אפשר להשתמש במשפט

(ג) ל- f ו- g ממשיות זה נובע ממשפט (**) עם $\Phi(s,t) = s+t$
או $\Phi(s,t) = st$. ואם הן מרוכבות נכתוב אותן כסכום של
החלק הממשי עם החלק המדומה ואז נשתמש בסעיפים (א) ו-(ב)
(כל חלק יהיה מדיד כי הוא מורכב מסכומים ומכפלות של פונקציות
ממשיות מדידות)

(ד) ממשפט זה ברור כי מקור של כל קבוצה הוא או $\emptyset$ או E או E^c או X. בכל מקרה המקור הוא קבוצה מדידה. בפרט מקור של
קבוצה פתוחה הוא מדיד. אבל זה בכלל לא משנה מהי הקבוצה. המקור
תמיד מדיד.

(ה) תהי $E=\{x: f(x)=0\}$ ויהי $Y=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. נגדיר $\varphi: Y\to\mathbb{C}$

ע"י $\varphi(z)=\frac{z}{|z|}$ (זה לא מוגדר ב-0 אבל היינו צריכים אישור

ארוכה). נגדיר $\alpha(x)=\varphi(f(x)+\chi_E(x))$ לכל $x\in X$.

אם $x\in E$ אז $\alpha(x)=1$ ואם $x\notin E$ אז $\alpha(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}$

ו-$f(x)\neq 0$ אבל זה מספר. בכל אופן $|\alpha(x)|=1$ ומתקיים

$f(x)=\alpha(x)|f(x)|$.

נותר להראות ש-α כן מדידה. היות ש-φ רציפה על Y והיות ש-E

מדידה (תרגיל) - $E=f^{-1}(\{0\})$ אם $\{0\}$ הייתה פתוחה

זה היה נכון. אבל זה לא נכון. מה שנכון הוא שזאת סגורה אבל

המקור של סגור. לכן המשלים של המקור פתוח אבל E^c מדידה.

אבל מתכונת σ-אלגברה $(E^c)^c=E$ מדידה) המדידות

של α נובעת מ-(ג), (ב) והמשפט (*).

<u>משפט</u>: אם F אוסף כלשהו של תת קבוצות של X (X קבוצה כלשהי)

אזי קיימת σ-אלגברה $\mathcal{M}^*$ ב-X שהיא ה-σ-אלגברה הקטנה

ביותר המכילה את F. $\mathcal{M}^*$ הנ"ל נקראת ה-σ-אלגברה הנוצרת ע"י F.

<u>הוכחה</u>: תהי Ω משפחת כל ה-σ-אלגבראות ב-X המכילות את F.

Ω לא ריקה כי לפחות ה-σ-אלגברה המכילה את כל תת הקבוצות

של X נמצאת ב-Ω. תהי $\mathcal{M}^*$ החיתוך של כל איברי Ω.

החיתוך לא ריק כי כולם לפחות מכילים את F. יותר דיוק $\mathcal{M}^*=\bigcap_{\mathcal{M}\in\Omega}\mathcal{M}$

ברור ש-$F\subseteq\mathcal{M}^*$ ו-$\mathcal{M}^*$ מוכל בכל σ-אלגברה המכילה את F.

נותר להראות ש-$\mathcal{M}^*$ הנ"ל היא σ-אלגברה. זה עניין טכני פשוט:

אם $A_n\in\mathcal{M}^*$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ואם $\mathcal{M}\in\Omega$ אז מהגדרת $\mathcal{M}^*$ נובע

ש-$A_n\in\mathcal{M}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. אבל $\mathcal{M}$ σ-אלגברה $\Leftarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{M}$ וזה

נכון לכל $\mathcal{M}\in\Omega$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\bigcap_{\mathcal{M}\in\Omega}\mathcal{M}=\mathcal{M}^*$. באותו אופן אם $A\in\mathcal{M}^*$

אז $A^c\in\mathcal{M}^*$ וגם $X,\phi\in\mathcal{M}^*$

(5) 28.1.08
מידה

נקבעו שני שיעורים נוספים: יום ו' 29/2, יום ו' 7/3 } 10-13

המיקום יפורסם בהמשך.

<u>הגדרה:</u> יהי X מ"ט. קבוצות בורל (Borel) הן איברי ה-σ-אלגברה הנוצרת ע"י הקבוצות הפתוחות ב-X. (כלומר הקבוצות שאפשר לבנות מהפתוחות ע"י איחודים בני מניה והשלמה)

קבוצה נקראת G_δ אם היא חיתוך בן-מניה של קבוצות פתוחות.

קבוצה נקראת F_σ אם היא איחוד בן-מניה של קבוצות סגורות.

(באופן כללי G מסמן קבוצות פתוחות, F - סגורות. δ מסמן חיתוך, σ - איחוד. אז G_σ זה איחוד של פתוחות אבל זה לא שווה הרבה כי הן פשוט פתוחות.
$G_{\delta\sigma}$ זה איחוד בן מניה של קבוצות G_δ וככה אפשר להמשיך הלאה כמה שרוצים).

<u>דוגמאות:</u>
$$[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\tfrac{1}{n}, b\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a, b-\tfrac{1}{n}\right]$$
אז $[a,b)$ גם G_δ וגם F_σ.

נקודה בודדת $\{a\}$ על הישר הממשי גם G_δ וגם F_σ.

<u>הגדרה:</u> אם X, Y מרחבים טופולוגיים אז $f: X \to Y$ נקראת מדידה-בורל (או פונקציית בורל) אם היא מדידה ביחס ל-σ-אלגברה של קבוצות בורל ב-X (כלומר אם המקור של כל קבוצה פתוחה הוא קבוצת בורל).

כל פונקציה רציפה היא פונקציית בורל, אך פונקציות בורל זו הרחבה של פונקציות רציפות.

<u>משפט:</u> יהיו $(X,\mathcal{M})$ מרחב מדיד, Y מ"ט, $f: X \to Y$ פונקציה. אזי:

(א) $\Omega = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ היא σ-אלגברה ב-Y.

(ב) אם f מדידה ו-E קבוצת בורל ב-Y אזי $f^{-1}(E)\in\mathcal{M}$

(ג) אם $Y=[-\infty,\infty]$ (=הישר הממשי שמוסיפים לו שתי נקודות והקבוצות הפתוחות נוצרות ע"י (a,b), $(a,\infty]$ ו- $[-\infty,a)$) ו- $f^{-1}((a,\infty])\in\mathcal{M}$ לכל $a\in\mathbb{R}$ אזי f מדידה.

(ד) אם f מדידה, Z מ"ט ו- $g:Y\to Z$ פונקציית בורל ו- $h=g\circ f$ אזי $h:X\to Z$ היא מדידה.

<u>הוכחה:</u>

(א) נובע מידית מכך ש-

$$f^{-1}(Y)=X$$
$$f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$$
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(A_i)$$

(ב) יהי Ω כמו ב-(א). ממדידות f נובע ש-Ω מכילה את τ הקבוצות הפתוחות ב-Y ומכך היות ש-Ω היא σ-אלגברה, נובע שהיא מכילה את כל קבוצות בורל ב-Y.

(ג) נסמן $\Omega=\{E\subseteq[-\infty,\infty]:f^{-1}(E)\in\mathcal{M}\}$. לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$[-\infty,a)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-\infty,a-\tfrac{1}{n}]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a-\tfrac{1}{n},\infty]^c$$

מכיוון ש-Ω היא σ-אלגברה (ע"פ א) ומכך $[-\infty,a)\in\Omega$ לכל $a\in\mathbb{R}$. מכאן גם ש- $(a,b)=[-\infty,b)\cap(a,\infty]\in\Omega$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $-\infty<a<b<\infty$. היות שכל קבוצה פתוחה ב- $[-\infty,\infty]$ היא איחוד בן מניה של קטעים מהצורה $[-\infty,a)$, (a,b) ו- $(a,\infty]$ נובע שכל קבוצה פתוחה היא ב-Ω ומכאן ש-f מדידה.

(ד) תהי $V\subseteq Z$ פתוחה. אזי $g^{-1}(V)$ היא קבוצת בורל ב-Y. והיות ש- $h^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$ נובע מ-(ב) ש- $h^{-1}(V)$ מדידה ולכן h מדידה.

<u>הגדרה:</u> תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ממשיות מורחבות על קבוצה X, כלומר $f_n:X\to[-\infty,\infty]$ (הקטע $[-\infty,\infty]$ נקרא לפעמים הישר המורחב Extended Reals). נגדיר את הפונקציות

$$(\sup_n f_n)(x)=\sup_n(f_n(x))$$

(6)

$$(\inf_n f_n)(x) = \inf_n(f_n(x))$$
$$(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty}(f_n(x))$$
$$(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) = \liminf_{n\to\infty}(f_n(x))$$

(בגלל שאנחנו מתעסקים עם פונקציות מורחבות אנחנו מרוויחים סגירות – הגבולות יוצאים באותה משפחה)

אם בכל נקודה $x\in X$ קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}(f_n(x))$ אזי מגדירים גם הגבול הנקודתי $(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x))$

במקרה כזה אומרים ש- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לגבול $\lim_{n\to\infty} f_n$

ונובע שהגבול מקיים $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$

<u>הערה</u>: את גבול נקודתי ניתן לעשות גם עבור פונקציות מרוכבות ואז קיים הגבול הנקודתי שכן קיים בנפרד של שני הגבולות הנקודתיים של החלק הממשי והחלק המדומה כגבולות <u>סופיים</u>

<u>הערה</u>:
$$\left.\begin{aligned} \inf f_n &= -(\sup(-f_n)) \\ \liminf_{n\to\infty} f_n &= -(\limsup_{n\to\infty}(-f_n)) \end{aligned}\right\}$$
כי זה נכון לכל סדרה של מספרים

לכן לרוב נסתפק לדבר על sup ו- limsup

<u>משפט</u>: אם $f_n: X\to[-\infty,\infty]$ לכל $n\in\mathbb{N}$ פונקציה מדידה אזי $\sup_n f_n$ ו- $\limsup_{n\to\infty} f_n$ פונקציות מדידות (ונובע מכאן שכך גם $\inf_n f_n$ ו- $\liminf_{n\to\infty} f_n$).

<u>הוכחה</u>: לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $(\sup f_n)^{-1}((\alpha,\infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((\alpha,\infty])$ (קל להשתכנע שזה נכון) ומסעיף (ג) של המשפט הקודם נובע ש- $\sup_n f_n$ מדידה (לכן גם ברור ש- $\inf_n f_n$ מדידה).

היות ש- $\limsup f_n = \inf_n(\sup_{k\ge n} f_k)$ נובע שגם $\limsup_{n\to\infty} f_n$ פונקציה מדידה (לכן גם $\liminf_{n\to\infty} f_n$).

<u>מסקנה</u>: אם סדרת פונקציות מדידות מתכנסת נקודתית אז הגבול מדיד.

<u>הגדרות</u>: בהינתן $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ נגדיר
$$(\max\{f,g\})(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$(\min\{f,g\})(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

כמו כן, עבור $f: X\to[-\infty,\infty]$ נגדיר

$f^+ = \max\{f,0\}$ החלק החיובי

$f^- = -\min\{f,0\}$ החלק השלילי

אז f^+, f^- הן פונקציות אי-שליליות (מקבלות ערכים בקטע $[0,\infty]$)
ומתקיים $f=f^+-f^-$ ו- $|f| = f^+ + f^-$.

<u>טענה:</u> אם $f=g-h$ כאשר $g,h\ge 0$ אזי $f^+\le g$, $f^-\le h$
(אז ההצגה $f=f^+-f^-$ מיוחדת בכך ש- f^+,f^- הן הקטנות ביותר שיכולות בכלל לקיים דבר כזה).

<u>הוכחה:</u> $f\le g$ ו- $g\ge 0$ $\Leftarrow$ $\max\{f,0\}\le g$

באופן דומה עבור h.

<u>מסקנות:</u>

(א) תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מרוכבות מדידות המתכנסת לגבול נקודתית,
אזי הגבול הנ"ל הוא פונקציה מרוכבת מדידה.

(ב) אם $f,g: X\to[-\infty,\infty]$ מדידות אזי גם $\max\{f,g\}$,
$\min\{f,g\}$, f^+, f^- מדידות.

<u>הוכחה:</u>

(א) עבור פונקציות ממשיות המדידות נובעת מכך ש- $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$
לכן עבור פונקציות מרוכבות החלק הממשי והחלק המדומה של פונקציות (הגבול) הן פונקציות מדידות (כי הן ממשיות) לכן הפונקציה המרוכבת כולה מדידה.

(ב) ניקח $f_1=f$, $f_2=g$ ו- $f_3=f_4=\dots=-\infty$. אזי
$\max\{g,f\} = \max f_n = \sup f_n$

והשאר ברור...

<u>הגדרה:</u> פונקציה מרוכבת s על מרחב מדיד X נקראת <u>פונקציה פשוטה</u> (simple)
אם הטווח שלה כולו מספר סופי של נקודות.

<u>הערה:</u> אם $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ הם אוסף הערכים של פונקציה פשוטה s ונגדיר

$$A_i = \{x \; ; \; s(x) = \alpha_i\} = s^{-1}(\{\alpha_i\})$$

אזי $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, כלומר s קומבינציה ליניארית סופית של פונקציות אופייניות של קבוצות זרות.

קל לראות שפונקציה פשוטה s מדידה אמ"מ הקבוצות $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ הן מדידות.

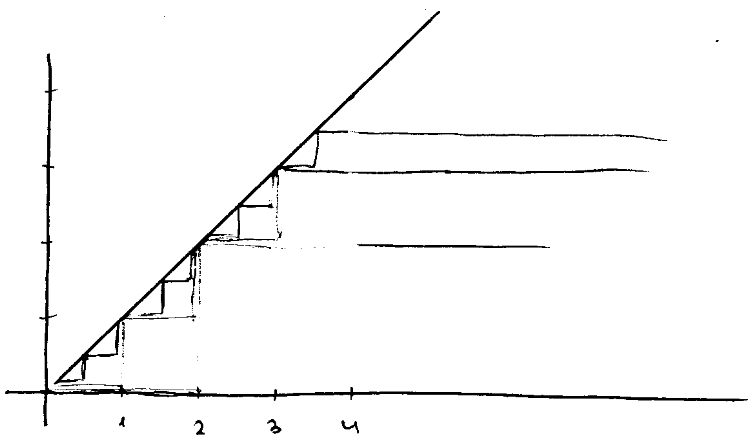
משפט: תהי $f: X \to [0,\infty]$ מדידה. אזי קיימת סדרת פונקציות פשוטות $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ על X כך ש-

(א) $0 \le s_1 \le s_2 \le \dots \le f$

(ב) $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ (גבול נקודתי).

הוכחה: נגדיר $\delta_n = 2^{-n}$. לכל $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ קיים $K = K_n(t) \in \mathbb{N}$ יחיד כך ש- $K\delta_n < t \le (K+1)\delta_n$. נגדיר

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} K_n(t)\,\delta_n & 0 \le t < n \\ n & n \le t \le \infty \end{cases}$$



אזי φ_n היא פונקציה בורל על $[0,\infty]$ ומתקיים

$$t - \delta_n \le \varphi_n(t) \le t$$

$$0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots \le t$$

$$\forall t \in [0,\infty] \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = t$$

נגדיר כעת $s_n = \varphi_n \circ f$. אזי הפונקציות s_n מקיימות את (א) ; (ב) - וע"פ משפט שראינו הן מדידות.

(8) 4.2.08
מידה

<u>הגדרה:</u> <u>מידה חיובית</u> (positive measure) של σ-אלגברה $\mathcal{M}$ היא פונקציה $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ שיש לה את התכונה הבאה (הנקראת σ-אדיטיביות): לכל משפחה בת מניה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ של קבוצות זרות בזוגות ($m \neq n \Rightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$) מתקיים

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

בנוסף, מניחים שקיימת $A \in \mathcal{M}$ שעבורה $\mu(A) < \infty$.
(זאת הנחה חשובה שנוטים לשכוח אותה. זאת דרישה מינימלית כדי שיהיה מעניין. בעתיד נראה שהדרישה הזאת שקולה לכך ש- $\mu(\emptyset) = 0$).

<u>מרחב מידה</u> (measure space) הוא מרחב מדיד יחד עם מידה חיובית המוגדרת של ה-σ-אלגברה המתאימה. מציינים כשלשה $(X, \mathcal{M}, \mu)$ כאשר X קבוצה
$\mathcal{M}$ σ-אלגברה ב-X
μ מידה חיובית של $\mathcal{M}$

<u>מידה מרוכבת</u> (complex measure) היא פונקציה $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ שיש לה את תכונת ה-σ-אדיטיביות כמו למידה חיובית (חשוב לשים לב שפה μ לא יכולה לקבל ערך ∞).
באופן דומה מוגדרת גם <u>מידה ממשית</u> (real measure או signed measure).
זה מקרה פרטי של מידה מרוכבת שמקבלת ערכים רק ב- $\mathbb{R}$
(חשוב לא להתבלבל: מידה ממשית היא לא מקרה פרטי של מידה חיובית ולהפך).

<u>הערה:</u> רק מידה חיובית יכולה לקבל את הערך ∞. כשאומרים "מידה" מתכוונים בד"כ למידה חיובית. בקורס הזה כשנאמר מידה תמיד נתכוון למידה חיובית (וזה נכון גם לרוב הספרות).
חשוב לשים לב שבמרחב מידה חייבת להיות מידה חיובית.

<u>משפט:</u> תהי μ מידה חיובית של σ-אלגברה $\mathcal{M}$. אזי:
(א) $\mu(\emptyset) = 0$
(ב) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ כאשר $A_1, \ldots, A_n$ זרות בזוגות.

ג) $A,B\in\mathcal{M}$ רק ש- $A\subseteq B$. אזי $\mu(A)\le\mu(B)$

ד) אם $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots$, $A_n\in\mathcal{M}$ ו $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ אזי

$$\mu(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(A)$$

(הטענה הזו היא למעשה טענה של רציפות של μ - מלמטה (A הוא גבול של (A_n)).

ה) אם $A_1\supseteq A_2\supseteq\dots$, $A_n\in\mathcal{M}$ ו- $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ ו- $\mu(A_1)<\infty$ אזי

$$\mu(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(A)$$

(כמו קודם, זה סוג של רציפות של μ - מלמעלה (A הוא גבולו של (A_n)).

<u>הערה</u>: - חוץ מתכונה (ג) כל התכונות נכונות גם למידות מרוכבות

- תכונה (ב) נקראת אדיטיביות סופית (או סתם אדיטיביות)
- תכונה (ג) נקראת מונוטוניות

<u>הוכחה</u>:

א) ניקח $A_1=A,\ A_2=A_3=\dots=\emptyset$ כאשר A קבוצה שעבורה $\mu(A)<\infty$. אז $\mu(A)=\mu(A)+\sum_{n=2}^{\infty}\mu(\emptyset)\Leftarrow$ $\mu(\emptyset)=0$

ב) ניקח $A_{n+1}=A_{n+2}=\dots=\emptyset$. אז σ-אדיטיביות נותנת ש-

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$$

ג) $B=A\cup(B\setminus A)$ ו- $A\cap(B\setminus A)=\emptyset$. לכן נותן

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)\ge\mu(A)$$

ד) נסמן $B_1=A_1$, $B_n=A_n\setminus A_{n-1}$ עבור $n=2,3,\dots$

אזי $B_n\in\mathcal{M}$ ו- $B_n\cap B_m=\emptyset$ עבור $n\ne m$. כמו כן $A_n=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ ולכן $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$. אז σ-אדיטיביות

$$\mu(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)\qquad \mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)$$

יש פה סכום אינסופי של מספרים חיוביים ומשמעותו גבול הסכומים החלקיים. מאחר שהסכומים החלקיים הם סדרה מונוטונית עולה הגבול תמיד קיים (אולי ∞) ולכן

$$\mu(A_n)\longrightarrow\mu(A)$$

(9)

(ה) נסמן $C_n = A_1 \setminus A_n$ ואז $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$

קל לראות ש- $\mu(C_n)=\mu(A_1)-\mu(A_n)$! כמו כן $A_1 \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

לכן מהסעיף הקודם

$$\mu(A_1)-\mu(A) = \mu(A_1\setminus A) = \lim_{n\to\infty}\mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

$$\Leftarrow \quad \mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

כמובן השתמשנו כאן בכך ש- $\mu(A_1)<\infty$ כי אחרת לא יכולנו להסיק את המסקנה.

(11)

<u>דוגמאות:</u>

(א) לכל קבוצה X ולכל σ-אלגברה ב-X נגדיר לכל $E\in\mathcal{M}$

$\mu(E) =$ מספר הנקודות בקבוצה E $\in [0,\infty]$

μ כזאת נקראת <u>מידת המניה</u> של X (The counting measure)

(ב) לכל קבוצה X ולכל σ-אלגברה ב-X תהי $x_0\in X$ ונגדיר

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & x_0\in E \\ 0 & x_0\notin E \end{cases}$$

מידה כזו נקראת <u>מידה אטומית</u> ב-x_0 או <u>מידת דירק</u> ב-x_0 ((unit) point mass measure). זו מידה שנותנת את כל המשקל לנקודה x_0.

<u>הגדרת אינטגרל לבג:</u> תהי μ מידה חיובית (על σ-אלגברה $\mathcal{M}$ ב-X)

עבור פונקציה מדידה פשוטה $s: X \to [0,\infty)$ מהצורה $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \chi_{A_i}$

מגדירים לכל $E\in\mathcal{M}$ $\quad \int_E s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mu(A_i\cap E)$

<u>פעולות חשבון ב- $[0,\infty]$</u>: נניח ש- $\infty > c\in\mathbb{R}$. אז

מגדירים: $c\cdot\infty=\infty$ (אם $c\neq 0$) $\quad \infty - c = \infty \quad c+\infty = \infty$

$0\cdot\infty = 0 \quad \infty-\infty =$ לא מוגדר $\quad \infty+\infty=\infty$

ההגדרות האלה חשובות כי בהגדרת האינטגרל ייתכן $\alpha_i=0$! $\mu(A_i\cap E)=\infty$.

עבור $f: X\to[0,\infty]$ מדידה ו $E\in\mathcal{M}$ מגדירים

$$\int_E f\,d\mu = \sup \int_E s\,d\mu$$

ראשית הגבול השוויון ניקח את כל הפונקציות המדידות הפשוטות המקיימות $0 \le s \le f$. נקרא אינטגרל לבג של f על E ביחס למידה μ.

<u>הערה</u>: תחום האינטגרל מוגדר רק על פונקציות חיוביות ומאחר שאנחנו מרשים לעבוד עם הערך ∞ האינטגרל תמיד קיים. במקרים נדבר גם על פונקציות ממשיות כלשהן. נזכור שתמיד אפשר לרשום $f = f^+ - f^-$ ואז האינטגרל יהיה מוגדר באופן טבעי כהפרש $\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$ אלא שכאן יש בעיה כי ההפרש הזה לא תמיד מוגדר...

<u>הערה נוספת</u>: קיימת מידה על $\mathbb{R}$ שעבורה לכל קטע (α,β) מתקיים

$$\mu((\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$$

אלא שלא קל להוכיח את זה.

<u>תכונות שקל לבדוק</u> (תרגיל):

א. $0 \le f \le g \Rightarrow \int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$

ב. $0 \le f$, $A \subseteq B \Rightarrow \int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu$

ג. $0 \le f$, $0 \le c < \infty \Rightarrow \int_E (cf)\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$

ד. $f|_E \equiv 0 \Rightarrow \int_E f\,d\mu = 0$ (אפילו אם $\mu(E)=0$)

ה. $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f\,d\mu = 0$ (אפילו אם $f(x) = \infty$ לכל $x \in E$)

ו. $0 \le f \Rightarrow \int_E f\,d\mu = \int_X \chi f\,d\mu$

ט 6.2.08

מידה

<u>טענה:</u> יהיו s ו- t פונקציות פשוטות מדידות אי-שליליות על X.
נגדיר לכל $E\in\mathfrak{M}$: $\varphi(E)=\int_E s\,d\mu$. אזי $\varphi(\cdot)$ היא מידה על $\mathfrak{M}$. כמו כן,

$$\int_X (s+t)\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu \qquad (*)$$

<u>הוכחה:</u> s מהצורה $s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}$ אם $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathfrak{M}$ זרות בזוגות ו- $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$ אזי

$$\varphi(E)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mu(A_i\cap E)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{r=1}^{\infty}\mu(A_i\cap E_r)=$$
$$=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\mu(A_i\cap E_r)=\sum_{r=1}^{\infty}\varphi(E_r)$$

חילוף סדר סכימה כי סכום איברים חיוביים אף פעם לא תלוי בסדר

כמו כן ברור ש- $\varphi(\emptyset)=0<\infty$ ונובע ש- φ מידה.

תהי כעת $t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{B_j}$ ונגדיר $E_{ij}=A_i\cap B_j$. קל לראות ש-

$$\int_{E_{ij}}(s+t)\,d\mu = (\alpha_i+\beta_j)\cdot\mu(E_{ij})$$

כי על E_{ij} $s\equiv\alpha_i$ ו- $t\equiv\beta_j$ ומכאן

$$\int_{E_{ij}}s\,d\mu+\int_{E_{ij}}t\,d\mu=\alpha_i\,\mu(E_{ij})+\beta_j\,\mu(E_{ij})=$$
$$=(\alpha_i+\beta_j)\,\mu(E_{ij})=\int_{E_{ij}}(s+t)\,d\mu$$

כלומר (*) מתקיים עם E_{ij} במקום X.
היות ש- X ניתן איחוד מהצורה $X=\bigcup_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}E_{ij}$ וה- E_{ij}-ים קבוצות זרות התוצאה (*) נובעת מהחלק הראשון, שכן

$$\int_X(s+t)\,d\mu=\varphi(X)=\varphi\left(\bigcup E_{ij}\right)=\sum\varphi(E_{ij})=\sum\int_{E_{ij}}(s+t)\,d\mu=$$
$$=\sum\left(\int_{E_{ij}}s\,d\mu+\int_{E_{ij}}t\,d\mu\right)=\sum\int_{E_{ij}}s\,d\mu+\sum\int_{E_{ij}}t\,d\mu=$$
$$=\sum\varphi_s(E_{ij})+\sum\varphi_t(E_{ij})=\varphi_s\left(\bigcup E_{ij}\right)+\varphi_t\left(\bigcup E_{ij}\right)=$$
$$=\varphi_s(X)+\varphi_t(X)=\int_X s\,d\mu+\int_X t\,d\mu$$

<u>משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג:</u> תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות $f_n:X\to[0,\infty]$ ונניח ש-

א) $0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\dots\le\infty$ לכל $x\in X$

ב) $f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$ לכל $x\in X$

אזי f מדידה ו- $\int_X f_n\,d\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_X f\,d\mu$

הוכחה: היות ש- $\int_X f_n d\mu \le \int_X f_{n+1} d\mu$ יש $\alpha\in[0,\infty]$ כך ש-
$\int_X f_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ (כי סדרה מונוטונית מתכנסת, אולי ל- ∞).
לפי משפט קודם f מדידה והיות ש- $f_n\le f$ לכל n נובע ש-
$\int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu$ לכל n. $\Leftarrow$ $\alpha\le\int_X f d\mu$

תהי כעת s פונקציה מדידה פשוטה כך ש- $0\le s\le f$ ויהי c קבוע
$0<c<1$. נגדיר $E_n=\{x: f_n(x)\ge cs(x)\}$. אזי $E_n\in\mathcal{M}$ כי
$E_n=[\underbrace{f_n-cs(x)}_{\text{מדידה}}]^{-1}([0,\infty])$ ומתקיים $E_1\subseteq E_2\subseteq\dots$
ו- $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$: אם $f(x)=0$ אזי $cs(x)=0$ ו- $f_n(x)=0$ ולכן $x\in E_1$
אם $f(x)>0$ אזי $cs(x)<f(x)$ ולכן ל- n מספיק גדול $f_n(x)>cs(x)$
ולכן $x\in E_n$.

מתקיים $\int_X f_n d\mu \ge \int_{E_n} f_n d\mu \ge c\int_{E_n} s\, d\mu$ לכל n ולכן מהטענה
וממשפט קודם נובע ש- $\alpha\ge c\int_X s\, d\mu$.
היות שזה נכון לכל $c<1$ נובע ש- $\alpha\ge\int_X s\, d\mu$. היות שזה נכון לכל s כנ"ל
נובע $\alpha\ge\int_X f d\mu$ $\Leftarrow$ $\alpha=\int_X f d\mu$ וזה מה שרצינו. ☺

משפט: אם $f_n: X\to[0,\infty]$ פונקציות מדידות ואם $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ (הטור מתכנס) ב- X כי סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה) אזי $\int_X f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n d\mu$

מה שיש כאן זה לאפשר היפוך סדר גבולות ואם ניקח חלק מהפונקציות זהות לאפס אז נקבל שזה נכון גם לסכום סופי.

מסקנה: אם $a_{ij}\ge 0$ ל- $i,j\in\mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$
הוכחה: נגדיר פונקציות $f_i:\mathbb{N}\to[0,\infty]$ ע"י $f_i(j)=a_{ij}$ ותהי μ מידת המניה על הטבעיים (עם ה- σ-אלגברה $2^{\mathbb{N}}$). אזי

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}f_i(j)\Big)=\int_{\mathbb{N}}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}f_i\Big)d\mu=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{N}}f_i\, d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f_i(j)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$$

☺

* סכום הוא פשוט אינטגרל של האינדקסים עם מידת המניה.

(11) 11.02.08

מידה

<u>משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג</u>: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות רק
כך ש $x \in X$ לכל $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \le \infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ אזי

$$\lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

<u>משפט</u>: אם $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידות ל- $n \in \mathbb{N}$ ואם $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
לכל $x \in X$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

<u>הערה</u>: ראינו שלכל $f : [\longrightarrow [0,\infty]$ מדידה קיימת סדרת פונקציות פשוטות
$0 \le s_1(x) \le s_2(x) \le \dots < \infty$ רק ש- $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ לכל $x \in X$
ממשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג נובע ש $\int f d\mu$ זה הגבול
של האינטגרלים של s_n.

<u>הוכחת המשפט</u>: נראה תחילה לסכום סופי. יהיו $\{s_i'\}$; $\{s_i''\}$ סדרות
מונוטוניות של פונקציות מדידות פשוטות רק ש- $s_i' \to f_1$; $s_i'' \to f_2$. נגדיר $s_i = s_i' + s_i''$. אז $s_i \to f_1 + f_2$. עפ"י משפט
קודם $\int_X s_i d\mu = \int_X s_i' d\mu + \int_X s_i'' d\mu$ ולכן עפ"י משפט ההתכנסות
המונוטוני נובע ש-

$$\int_X s_i d\mu \longrightarrow \int_X (f_1+f_2) d\mu$$
$$\int_X s_i' d\mu \longrightarrow \int_X f_1 d\mu$$
$$\int_X s_i'' d\mu \longrightarrow \int_X f_2 d\mu$$

ולכן נובע ש- $\int_X (f_1+f_2) d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$.

נגדיר $g_N = f_1 + f_2 + \dots + f_N$ ע"י הפעלת אינדוקציה עם מה שעשינו,
נובע $\int_X g_N d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu$. הסדרה $\{g_N\}_{N=1}^{\infty}$ מתכנסת
מונוטונית ל- f ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_X g_N d\mu \underset{\text{משפט ההתכנסות המונוטוני}}{=} \int_X f d\mu$$

הלמה של Fatou: יהיו $f_n: X \to [0,\infty]$ $n\in\mathbb{N}$ פונקציות מדידות.

אזי $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$

הוכחה: נגדיר $g_k(x)=\inf_{i\ge k} f_i(x)$ עבור $k=1,2,\dots$ ולכל $x\in X$.

אזי $g_k \le f_k$ ולכן $\int_X g_k \, d\mu \le \int_X f_k \, d\mu$ (*) לכל k.

אבל $0\le g_1(x)\le g_2(x)\le\dots\le\infty$ וגם g_k מדידה ו- $g_k(x)\xrightarrow[k\to\infty]{}\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$.

עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית $\int_X g_k \, d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$. ולכן הטענה נובעת מ-(*).

משפט: נניח ש- $f: X\to[0,\infty]$ פונקציה מדידה ; $E\in\mathfrak{M}$ קבוצה מדידה. נגדיר $\varphi(E)=\int_E f \, d\mu$. אזי φ מידה על $\mathfrak{M}$ ולכל פונקציה מדידה $g: X\to[0,\infty]$ מתקיים

$$\int_X g \, d\varphi = \int_X (gf) \, d\mu$$

מכפלה.

הערה: "באופן פורמלי" ניתן לכתוב את מסקנת המשפט באופן הבא:

$$d\varphi = f \, d\mu$$

הוכחה: יהיו $E_1,E_2,\dots$ קבוצות זרות ב- $\mathfrak{M}$ שאיחודן הוא E. מתקיים $\chi_E f=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j} f$ וכן $\varphi(E)=\int_X \chi_E f \, d\mu$! $\varphi(E_j)=\int_X \chi_{E_j} f \, d\mu$ ולכן נובע מהמשפט הקודם (על החלפת סדר סכימה ואינטגרציה) ש- $\varphi(E)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(E_j)$. הוא שגם $\varphi(\emptyset)=\emptyset$ נובע ש- φ מידה.

היות ש- $\varphi(E)=\int_E f \, d\mu=\int_X \chi_E f \, d\mu$ נובע ש- $\int_X g \, d\varphi=\int_X (gf) \, d\mu$ עבור $g=\chi_E$ ל- $E\in\mathfrak{M}$. מכאן מיד שזה נכון גם לכל g שהיא פונקציה מדידה פשוטה. המקרה הכללי נובע לכן ממשפט ההתכנסות המונוטונית מכך ש- g הוא גבול של סדרה מונוטונית עולה של פונקציות מדידות פשוטות.

הגדרה: בהינתן מידה חיובית μ על מרחב מדיד X, נסמן ב- $\mathcal{L}^1(\mu)$ (או גם $\mathcal{L}^1(X,d\mu)$ או $\mathcal{L}^1(X,\mu)$) את אוסף כל הפונקציות המרוכבות המדידות f על X שעבורן $\int_X |f| \, d\mu < \infty$

אוסף $\mathcal{L}^1(\mu)$ נקראים פונקציות אינטגרביליות (או
אינטגרביליות לבג) ביחס למידה μ.
(ב- Rudin מסמנים את זה ב- $L^1(\mu)$)

<u>הגדרה</u>: אם $f=u+iV$ וכך ש- u,V פונקציות מדידות ב- X
ואם $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$, אז לכל $E\in\mathfrak{M}$ נגדיר
$$\int_E f\,d\mu=\int_E u^+d\mu-\int_E u^-d\mu+i\int_E V^+d\mu-i\int_E V^-d\mu$$
(כאשר $u=u^+-u^-$ $V=V^+-V^-$).

היות ש- $0\le u^\pm\le|u|\le|f|$ ו- $0\le V^\pm\le|V|\le|f|$
נובע שכל ארבעת האינטגרלים בהגדרה הם מוגדרים היטב והם
מספרים אי שליליים סופיים. לכן $\int_E f\,d\mu$ מוגדר היטב והוא מספר
מרוכב.

<u>הגדרה</u>: לפעמים מגדירים גם אינטגרלים עבור $f:X\to[-\infty,\infty]$ ע"י
$$\int_E f\,d\mu=\int_E f^+d\mu-\int_E f^-d\mu$$
ואם יוצא $\infty-\infty$ אומרים שהאינטגרל לא מוגדר. אם הוא מוגדר
אז הוא יכול לקבל ערכים ב- $[-\infty,\infty]$.

<u>משפט</u>: יהיו $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. אזי
$\alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ו- $\int_X(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu$

<u>הערה</u>: זה אומר ש- $\mathcal{L}^1(\mu)$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ והאינטגרל
הוא פונקציונל לינארי.

(13) 13.2.08
איבר

משפט: יהיו $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu)$; $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ אזי $\alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ומתקיים

$$(*)\quad \int_X(\alpha f+\beta g)\,d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu+\beta\int_X g\,d\mu$$

הוכחה: ראינו ש- $\alpha f+\beta g$ מדידה.

$$\int_X|\alpha f+\beta g|\,d\mu\le\int_X|\alpha||f|+|\beta||g|\,d\mu=$$

$$=|\alpha|\int_X|f|\,d\mu+|\beta|\int_X|g|\,d\mu<\infty$$

$$\Rightarrow \alpha f+\beta g\in\mathcal{L}^1(\mu)$$

להוכחת (*) די להראות בנפרד $(**)\ \int_X(f+g)\,d\mu=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,d\mu$

ו- $(***)\ \int_X\alpha f\,d\mu=\alpha\int_X f\,d\mu$. כדי להראות את (**) רק להראותו ל- f ו- g ממשיות. נסמן $h=f+g$. אזי

$$h=h^+-h^-=f^+-f^-+g^+-g^-$$

פונק' חיוביות

אבל $h^++f^-+g^-=f^++g^++h^-$ ⇐ ע"פ משפט שהוכחנו סדר סכימה ואינטגרציה

$$\int_X h^+d\mu+\int_X f^-d\mu+\int_X g^-d\mu=\int_X f^+d\mu+\int_X g^+d\mu+\int_X h^-d\mu$$

ע"י העברת אגפים נקבל ש-

$$\int_X h\,d\mu=\int_X h^+d\mu-\int_X h^-d\mu=\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu+\int g^+d\mu-\int g^-d\mu=$$

$$=\int_X f\,d\mu+\int_X g\,d\mu$$

לגבי (***) : ל- $\alpha\ge0$ זה נובע ישירות מ- (**) וממשפט קודם (כפל מסקלר חיובי של פונקציה חיובית) וע"י השימוש אחרים $u^-=(-u)^+$ קל לראות גם את המקרה $\alpha=-1$. עבור $\alpha=i$ נכתוב $f=u+iv$

$$\Rightarrow \int_X if\,d\mu=\int_X(iu-v)\,d\mu\underset{\text{הגדרה}}{=}\int_X(-v)+i\int_X u=-\int_X v+i\int_X u=$$

$$=i\left(\int_X u\,d\mu+i\int_X v\,d\mu\right)=i\int_X f\,d\mu$$

רק ע"י חיבור המקרים $\alpha=-1$, $\alpha\ge0$, $\alpha=i$ עם (**) נובע (***) לכל $\alpha\in\mathbb{C}$.

(!)

<u>משפט</u>: אם $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu$

<u>הוכחה</u>: נגדיר $z=\int_X f\,d\mu$. קיים $\alpha\in\mathbb{C}$ שעבורו $|\alpha|=1$!

$|z|=\alpha z$. נסמן $u=Re(\alpha f)$. אזי $u\le|\alpha f|=|f|$. לכן

$$\mathbb{R}\ni\left|\int_X f\,d\mu\right| = |z| = \alpha z = \alpha\int_X f\,d\mu = \int_X \alpha f\,d\mu =$$

$$= \int_X u\,d\mu \le \int_X |f|\,d\mu$$

כי התחלנו המשוואה חייב להתאפס

☺

<u>משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג</u> (Dominated convergence)

תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות מרוכבות על X כך ש- לכל $x\in X$ קיים הגבול $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. נניח שקיימת $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ כך ש- $|f_n(x)|\le g(x)$ לכל $x\in X$ לכל $n\in\mathbb{N}$

אזי $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|\,d\mu=0$ וכן

$$\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f\,d\mu$$

<u>הוכחה</u>: היות שברור ש- f מדידה וש- $|f|\le g$ ונתון ש- $\int|f|\,d\mu\le\int g\,d\mu\in\mathbb{C}$

⇐ $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$. היות ש- $|f_n-f|\le 2g$ נוכל להפעיל את הלמה של Fatou על הפונקציות החיוביות $2g-|f_n-f|$ ונקבל

$$\int_X 2g\,d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty}(2g-|f_n-f|)\,d\mu \le$$

הגבול של $2g-|f_n-f|$

$$\le \liminf_{n\to\infty}\int_X(2g-|f_n-f|)\,d\mu =$$

$$= \int_X 2g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_X|f_n-f|\,d\mu\right) =$$

$$= \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|\,d\mu$$

⇐ היות ש- $\int_X 2g\,d\mu$ סופי נוכל לחסר משני האגפים ונקבל

$0\le-\limsup\int_X|f_n-f|\,d\mu$ ⇐ $0\le\limsup\int_X|f_n-f|\,d\mu\le 0$ ⇐ $\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|\,d\mu=0$

וע״ז המשפט הוכח

$$\left|\int_X f_n\,d\mu-\int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X(f_n-f)\,d\mu\right| \le \int_X|f_n-f|\,d\mu \longrightarrow 0$$

☺

(14) 18.2.08
תורת המידה

קבוצות בעלות מידה אפס

הגדרה: תהי P תכונה או עובדה שעשויה להתקיים או לא להתקיים בנקודה $x\in X$. אם μ מידה על σ-אלגברה $\mathcal{M}$ ב- X ואם קיימת $N\in\mathcal{M}$ כך ש- $\mu(N)=0$ וכך ש- P מתקיימת לכל $x\in X\setminus N$ נאמר ש-P מתקיימת "כמעט בכל מקום ביחס ל-μ" או "כב"מ $[\mu]$" [באנגלית "Almost everywhere with respect to μ" או "a.e w.r.t. μ" או "a.e. $[\mu]$"]
במידה שברור מהי μ נאמר פשוט ש-P מתקיימת כב"מ [a.e].
עבור $E\in\mathcal{M}$ ניתן גם לדבר על כך ש-"P מתקיימת כמעט בכל מקום על E ביחס ל-μ" אם P מתקיימת לכל $x\in E\setminus N$.

דוגמה: אם f,g פונקציות מדידות ואם $\mu(\{x: f(x)\neq g(x)\})=0$ נאמר ש- $f=g$ כב"מ $[\mu]$. במקרה כזה נרשום $f\sim g$.
קל לראות ש- $\sim$ כאן הוא יחס שקילות (רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי). אם $f\sim g$ אז לכל $E\in\mathcal{M}$ $\int_E f d\mu=\int_E g d\mu$

ניתן להרחיב את המושג של קבוצות בעלות מידה אפס גם לקבוצות מחוץ ל-$\mathcal{M}$ ולומר ש- $\mu(N)=0$ (טוב להגדיר זאת רק) אם $N\subseteq E\in\mathcal{M}$ ו- $\mu(E)=0$.

הגדרה: מידה μ נקראת שלמה (Complete) אם לכל N כך ש- $\mu(N)=0$ נובע $N\in\mathcal{M}$, כלומר ה-σ-אלגברה מכילה את כל הקבוצות שמידתן אפס במובן המורחב.

משפט: יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה ותהי $\mathcal{M}^*$ אוסף כל תת הקבוצות E של X שעבורן קיימות קבוצות $A,B\in\mathcal{M}$ כך ש- $A\subseteq E\subseteq B$ ו- $\mu(B\setminus A)=0$. נגדיר $\mu(E)=\mu(A)$ במצב הזה.
אזי $\mathcal{M}^*$ היא σ-אלגברה ו- μ היא מידה על $\mathcal{M}^*$.
הערה: המידה μ על $\mathcal{M}^*$ המתקבלת בדרך זו היא שלמה. $\mathcal{M}^*$

נקרא השלמת-μ (μ-Completion) של $\mathcal{M}$ ו-μ

$\mathcal{M}^*$ נקראת השלמת μ.

<u>הוכחה:</u> נבדוק תחילה ש-μ מוגדרת היטב. בהינתן $E \in \mathcal{M}^*$

נניח ש- $A \subseteq E \subseteq B$ ו- $A_1 \subseteq E \subseteq B_1$ ו-

$\mu(B \setminus A) = \mu(B_1 \setminus A_1) = 0$ עבור $A, B, A_1, B_1 \in \mathcal{M}$.

לכן רואים ש- $A \setminus A_1 \subseteq E \setminus A_1 \subseteq B_1 \setminus A_1$. $\Leftarrow$ $\mu(A \setminus A_1) = 0$

באופן דומה $\mu(A_1 \setminus A) = 0$. לכן $\mu(A) = \mu(A_1)$

לכן μ מוגדרת היטב על $\mathcal{M}^*$.

נבדוק ש-$\mathcal{M}^*$ σ-אלגברה:

- $X \in \mathcal{M}^*$ כי $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^*$

- אם $A \subseteq E \subseteq B$ אז $B^c \subseteq E^c \subseteq A^c$. היות

שגם $A^c, B^c \in \mathcal{M}$ וכן $A^c \setminus B^c = A^c \cap B = B \setminus A$ -

נובע ש- $\mu(B \setminus A) = \mu(A^c \setminus B^c) = 0$ ו- $E^c \in \mathcal{M}$.

- נניח $A_n \subseteq E_n \subseteq B_n$ $\Leftarrow$ $\cup A_n \subseteq \cup E_n \subseteq \cup B_n$ ומתקיים

$\cup A_n, \cup B_n \in \mathcal{M}$. נחשב:

$$\mu(\cup A_n \setminus \cup B_n) = \mu(\cup(B_n \setminus (\cup A_n))) \leq \mu(\cup(B_n \setminus A_n)) =$$
$$= \sum \mu(B_n \setminus A_n) = 0$$

$\Leftarrow$ $\cup E_n \in \mathcal{M}^*$.

נותר להראות ש- μ מידה על $\mathcal{M}^*$. בוודאי $\mu(\emptyset) = 0$

לכן יש להראות ש- μ היא σ-אדיטיבית על $\mathcal{M}^*$. ויהיו $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}^*$

זרות בזוגות. אזי גם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המתאימות זרות. לכן

$$\mu(E) \underset{\text{הגדרת } \mu(E)}{=} \mu(A) \underset{\sigma\text{-אדיטיביות של } \mathcal{M}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \underset{\text{הגדרת } \mu(E_i)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

☺

<u>הגדרה:</u> בהינתן מרחב מידה $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ו- $E \in \mathcal{M}$ שעבורה

$\mu(E^c) = 0$ נאמר ש- $f: E \to Y$ "היא מדידה על X" אם

$f^{-1}(V) \cap E$ קבוצה מדידה לכל V פתוחה.

<u>הסבר:</u> מה לה $f^{-1}(V) \cap E$? הרי בלאו הכי המקור ב-E. הכוונה היא שאולי

f מוגדרת גם איפשהו מחוץ ל- E.

פברואר	29	10-13	מתמטיקה	110
מרץ	7	10-13	לוין	8

בפרט, ניתן לדבר על "פונקציה מדידה שמוגדרת כמעט [μ] על X". עבור פונקציה כזו נאמר שהיא ב- $\mathcal{L}^1(\mu)$ אם $\int_E |f|\, d\mu < \infty$ ונגדיר $\int_X f\,d\mu = \int_E f\,d\mu$.

<u>משפט</u>: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מרוכבות מדידות המוגדרות כ.ב.מ. [μ] על X רק ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu < \infty$. אזי הטור $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס כ.ב.מ. [μ], $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ומתקיים
$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

* נשים לב שאפריורי כלל לא ברור ש- $f(x)$ מוגדרת היטב כי הרי לא מדובר בסכום של מספרים חיוביים. התנאי $\sum \int |f_n|\,d\mu < \infty$ נותן לנו גם את ההתכנסות של f.

<u>הערה</u>: גם אם $\{f_n\}$ מוגדרות על X, ההתכנסות הטור, ולכן גם מוגדרות $f(x)$, מובטחים רק כ.ב.מ. [μ].

<u>הוכחה</u>: תהי S_n הקבוצה שעליה f_n מוגדרת - רק ש- $\mu(S_n^c) = 0$. נגדיר $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ לכל $S \equiv \bigcap S_n \ni x$. אז $\mu(S^c) = 0$.
עפ"י המשפט על החלפת סדר סכימה ואינטגרציה לפונקציות חיוביות מתקיים $\int_S \varphi\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|\,d\mu < \infty$. $\Leftarrow$ אם נגדיר $E = \{x \in S : \varphi(x) < \infty\}$ נובע ש- $\mu(E^c) = 0$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס בהחלט לכל $x \in E$ ולכן לכל $x \in E$ $f(x)$ מוגדרת היטב ומתקיים $|f(x)| \le \varphi(x)$. לכן $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. עבור $g_n = f_1 + \dots + f_n$ מתקיים $|g_n| \le \varphi$ ולכל $x \in E$ $g_n(x) \to f(x)$ לכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת נקבל:
$$\int_E f\,d\mu \underset{\text{התכנסות נשלטת}}{=} \lim_{N\to\infty}\int_E g_N\,d\mu \underset{\text{החלפת סדר סכימה ואינטגרציה לסכום סופי}}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int f_n\,d\mu \underset{\text{הגדרה}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\,d\mu$$

היות ש- $\mu(E^c) = 0$ ניתן בכל מקום להחליף את E ב- X.

משפטים:

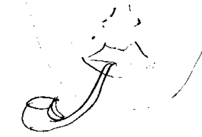
(א) אם $f: X \to [0,\infty]$ מדידה ו- $E\in\mathcal{M}$ כך ש- $\int_E f\,d\mu=0$ אז $f(x)=0$ כ.ב.מ $[\mu]$ על E.

(ב) אם $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ ואם $\int_E f\,d\mu=0$ לכל $E\in\mathcal{M}$ אזי $f(x)=0$ כ.ב.מ $[\mu]$ על X.

(ג) ~~משפט~~ אם $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ וגם $\left|\int_X f\,d\mu\right|=\int|f|\,d\mu$ אזי קיים קבוע α כך ש- $\alpha f=|f|$ כב"מ $[\mu]$.

(16) 20.2.08

מידה



משפט:

א) אם $f: X \to [0,\infty]$ מדידה, $E \in \mathfrak{M}$; $\int_E f\,d\mu = 0$ אז $f(x)=0$ כ.ב.מ. $[\mu]$ על E.

ב) אם $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ואם $\int_E f\,d\mu = 0$ לכל $E \in \mathfrak{M}$ אזי $f(x)=0$ כב"מ $[\mu]$ על E.

ג) אם $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ואם $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \int_X |f|\,d\mu$ אזי קיים קבוע α רק ש- $|f| = \alpha f$ כב"מ $[\mu]$ על E.

הוכחה:

א) נגדיר $A_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$ $n \in \mathbb{N}$. אזי $\frac{1}{n}\mu(A_n) \le \int_{A_n} f\,d\mu \le \int_E f\,d\mu = 0 \Leftarrow \mu(A_n) = 0$.

היות ש- $\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ נובע ש- $\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$..

ב) נסמן $f = u + iv$, $E = \{x : u(x) \ge 0\}$. החלק הממשי של $\int_E f\,d\mu$ הוא $\int_E u^+ d\mu$.
לכן $\int_E u^+ d\mu = 0$. לפי סעיף הקודם $u^+(x)=0$ כב"מ $[\mu]$ על E. ואותו שלב על E^c u^+
שלא הכי מתאפס, נובע ש- $u^+(x)=0$ כב"מ $[\mu]$ על X. באותו אופן מראים ש-
$u^- = v^+ = v^- = 0$ כב"מ $[\mu]$ על X.

ג) נגדיר את α, עם $|\alpha| = 1$ והגדרה שהבורר $|z| = \alpha z$ עבור $z = \int_X f\,d\mu$ ויהי $u = Re(\alpha f)$
כפי שראינו: $\left|\int_X f\,d\mu\right| = \alpha \int_X f\,d\mu = \int_X \alpha f\,d\mu = \int_X u\,d\mu$
כי החלק המדומה חייב להתאפס.

לכן נובע $\int_X u\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu \Leftarrow \int_X (|f| - u)\,d\mu = 0$ היות ש- $|f| - u \ge 0$ נובע מ-(א)
ש- $u = |f|$ כב"מ $[\mu]$ על X לכן גם $|f| = R(\alpha f)$ כב"מ $[\mu]$ על X ומכאן
$|f| = |\alpha f| = \alpha f$ כב"מ $[\mu]$ על X.

משפט: נניח ש- $\mu(X) < \infty$; $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. $S \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה סגורה ; $A_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu$
שייך ל-S לכל $E \in \mathfrak{M}$ כך ש- $\mu(E) > 0$. אזי $f(x) \in S$ כב"מ $[\mu]$.

הוכחה: יהי Δ עיגול סגור במרכז α ורדיוס $r>0$ במשלים של S. היות ש- S^c הוא
איחוד בן מניה של עיגולים כאלה די להראות ש- $\mu(E) = 0$ לכל $E \in f^{-1}(\Delta)$
נניח בשלילה ש- $\mu(E) > 0$. אזי $|A_E(f) - \alpha| = \left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu - \frac{1}{\mu(E)}\int_E \alpha\,d\mu\right| = \frac{1}{\mu(E)}\left|\int_E (f-\alpha)\,d\mu\right|$
$\le \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - \alpha|\,d\mu \le \frac{1}{\mu(E)} \int_E r\,d\mu = r$

הדבר ימנע כי $A_E(f) \in S$ לכן לא יכול להיות בעיגול הזה שבמשלים של S. לכן $\mu(E) = 0$

משפט: תהי $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות ב-X, שעבורה $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$ אזי כמעט כל
$x \in X$ ביחס ל-μ נמצא לכל היותר במספר סופי מתוך $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$.

הוכחה: תהי A קבוצת ה-x-ים שנמצאים באינסוף קבוצות מתוך $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$. (נראה ש-
$\mu(A) = 0$. נגדיר $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)$ לכל $x \in X$. אזי $x \in A$ אמ"מ $g(x) = \infty$. אבל
$\int_X g\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \chi_{E_k}\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$ לכן $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ומכאן ש- $g(x) < \infty$ כב"מ $[\mu]$.
$\Leftarrow \mu(A) = 0$.

הערות:

(ג) אם $\mu(X)<\infty$ אזי קיים גם כיוון שני למשפט, כלומר $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)<\infty$ אמ"מ A שהגדרנו מקיימת ש- $\mu(A)=0$. במקרה הזה המשפט נקרא הלמה של Borel-Cantelli.

(ד) את A ניתן לבטא כ- $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k = \limsup_{k\to\infty} E_k$.

קיים גם המושג של גבול תחתון - $\liminf_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k$ - זו הקבוצה של נקודות שנמצאות בכל ה- E_k פרט אולי למספר סופי מהם.

(17) 25.02.08
תורת המידה

<u>תיקון תרגול</u>: מהגדרת מידה חיצונית יש להוסיף את הדרישה $A\subseteq B \Rightarrow \mu(A)\le\mu(B)$ (מונוטוניות)

הגדרות טופולוגיות

כיוון שזה אינו קורס בטופולוגיה. נזכיר כאן הגדרות ונטען כאן טענות בלי להוכיח אותן...

<u>הגדרה</u>: יהי Y מרחב טופולוגי.

(א) $E\subseteq Y$ נקראת סגורה אם E^c פתוחה.

(ב) הסגור של E שנסמנו ב-$\bar{E}$ הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את E.

(ג) $K\subseteq Y$ נקראת קומפקטית אם מכל כיסוי פתוח של K ניתן להוציא תת-כיסוי סופי.
בפרט אם Y קומפקטית אז Y מרחב טופולוגי קומפקטי.

(ד) סביבה של נקודה $p\in Y$ היא קבוצה פתוחה שמכילה את p.

(ה) Y נקרא מרחב האוסדורף אם לכל $p,q\in Y$ שונות יש סביבות U,V כך ש- $p\in U$, $q\in V$ ו- $U\cap V=\emptyset$.

(ו) Y נקרא קומפקטי מקומית (locally compact) אם לכל נקודה $p\in Y$ יש סביבה בעלת סגור קומפקטי.

(ז) Y נקרא σ-קומפקטי (σ-compact) אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות קומפקטיות.

(ח) פונקציה $f:Y\to\mathbb{C}$ נקראת בעלת תומך קומפקטי אם יש $K\subseteq Y$ קומפקטית כך ש- $f(x)=0$ ל- $x\notin K$. באופן שקול: הסגור של $\{x: f(x)\neq 0\}$ נקרא התומך של f. ולמעשה לומר שהיא בעלת תומך קומפקטי זה שקול לכך שהתומך שלה קומפקטי.
נסמן ב- $C_c(Y)$ את אוסף הפונקציות המרוכבות הרציפות על Y שהן בעלות תומך קומפקטי.

<u>הערות</u>:

(1) מ"ט קומפקטי הוא קומפקטי מקומית.

(2) ב- $\mathbb{R}^n$ הקבוצות הקומפקטיות הן בדיוק אלה שהן סגורות וחסומות (זה נובע ממשפט היינה-בורל)

<u>דוגמה</u>: $\ell^2(\mathbb{N})$ - מרחב הסדרות של מספרים מרוכבים כך ש- $\sum|\alpha_n|^2<\infty$. לכל $(\alpha_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$ אומרים שהנורמה של α היא $\|\alpha\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$
במרחב הזה כדור היחידה הסגור הוא לא קומפקטי.

(3) $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית וגם σ-קומפקטי.

(4) ברור שכל מרחב מטרי הוא מרחב האוסדורף.

משפט ההצגה של Riesz במרחב σ-קומפקטי

יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ו-σ-קומפקטי. ויהי Λ פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$. אזי קיימת מידת בורל רגולרית יחידה μ על X כך שלכל $f\in C_c(X)$ $\Lambda f=\int_X f\,d\mu$.

הערות:

1) פונקציונל לינארי Λ נקרא חיובי אם ($f\geq 0 \Rightarrow \Lambda f\geq 0$).
2) μ הנ"ל יש את התכונה ש- $\mu(K)<\infty$ לכל K קומפקטית.
3) ניתן להסתכל כמובן על השלמת μ. אומרים ש- μ מידת בורל רק להדגיש שהיא מוגדרת בפרט על קבוצות בורל.
4) תהי μ מידת בורל על מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית. אזי אומרים ש- μ רגולרית אם מתקיימים התנאים הבאים:
- לכל קבוצה מדידה E מתקיים: $\mu(E)=\inf\{\mu(V): E\subseteq V, V \text{ פתוחה}\}$
(זה נקרא רגולריות חיצונית)
- לכל קבוצה מדידה E מתקיים $\mu(E)=\sup\{\mu(K): K\subseteq E, K \text{ קומפקטית}\}$
(זה נקרא רגולריות פנימית)

(הרעיון הוא שרוצים לקרב מבחוץ או מבפנים ע"י קבוצות יחסית פשוטות)

משפט: אם X מ"ט, ו- $F\subseteq K\subseteq X$ כאשר K קומפקטית ו- F סגורה. אזי F קומפקטית.

מסקנה: אם $A\subseteq B$ ול- B יש סגור קומפקטי אזי גם ל- A יש סגור קומפקטי.

משפט: אם X מרחב האוסדורף, $K\subseteq X$ קומפקטית ו- $p\in K^c$ אזי יש קבוצות פתוחות $U,W\subseteq X$ כך ש- $p\in U$, $K\subseteq W$ ו- $U\cap W=\emptyset$.

תוצאות:

1) קבוצה קומפקטית במרחב האוסדורף היא סגורה.
2) במרחב האוסדורף אם F סגורה ו- K קומפקטית אזי $F\cap K$ קומפקטית.

משפט: אם $\{K_\alpha\}$ אוסף קבוצות קומפקטיות במרחב האוסדורף וגם $\bigcap K_\alpha=\emptyset$ אזי קיים גם תת אוסף סופי מתוך $\{K_\alpha\}$ שחיתוכם ריק.

משפט: אם U קבוצה פתוחה במרחב האוסדורף קומפקטי מקומית, ו- $K \subseteq U$ קומפקטית, אזי יש קבוצה פתוחה V בעלת סגור קומפקטי כך ש- $K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

הגדרות: יהי X מרחב טופולוגי ו- $f: X \to [-\infty, \infty]$. f נקראת סמי-רציפה מלרע (lower semicontinuous) אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה $\{x : f(x) > \alpha\}$ הנה פתוחה.
f סמי-רציפה מלעיל (upper semicontinuous) אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ הקבוצה $\{x : f(x) < \alpha\}$ היא פתוחה.
[קל לראות ש- f רציפה אמ"מ היא סמי-רציפה גם מלעיל וגם מלרע]

הערות:
(א) פונקציה אופיינית של קבוצה פתוחה היא סמי-רציפה מלרע
(ב) פונקציה אופיינית של קבוצה סגורה היא סמי-רציפה מלעיל
(ג) אם $\{f_\alpha\}$ משפחת פונקציות סמי-רציפות מלרע אזי $\sup_\alpha f_\alpha$ סמי-רציפה מלרע. אם $\{f_\alpha\}$ משפחת פונקציות סמי רציפות מלעיל, אזי $\inf_\alpha f_\alpha$ סמי-רציפה מלעיל.

משפט: יהיו Y, X מ"ט ; $f: X \to Y$ רציפה. אזי לכל $K \subseteq X$ קומפקטית $f(K)$ קומפקטית.

מסקנה: הטווח של $f \in C_c(X)$ הוא קבוצה קומפקטית ב- $\mathbb{C}$.

סימונים: הסימון (עבור מ"ט X) $K \prec f$ (K רפופה ל- f) משמעו ש- K קבוצה קומפקטית, f פונקציה רציפה בעלת תומך קומפקטי, $0 \le f(x) \le 1$ לכל $x \in X$, $f(x) = 1$ ל- $x \in K$.
הסימון $f \prec V$ (f רפופה ל- V) משמעו ש- V פתוחה, $f \in C_c(X)$, $0 \le f \le 1$ והתומך של f מוכל ב- V.
הסימון $K \prec f \prec V$ משמעו ששני התנאים מתקיימים.

הלמה של Urysohn: אם X מרחב האוסדורף קומפקטי-מקומית, V פתוחה, $K \subseteq V$ קומפקטית, אזי קיימת $f \in C_c(X)$ כך ש- $K \prec f \prec V$.

משפט: יהיו $V_1,\dots,V_n$ קבוצות פתוחות במרחב האוסדורף קומפקטי מקומית X ותהי $K\subseteq X$ קבוצה קומפקטית כך ש- $K\subseteq V_1\cup\dots\cup V_n$
אזי קיימות פונקציות $h_i \prec V_i$ $1\le i\le n$ כך ש-
$$h_1(x)+\dots+h_n(x)=1$$
לכל $x\in K$.

הערה: אוסף $\{h_1,\dots,h_n\}$ הנ"ל נקרא חלוקה של היחידה על K הכפופה לכיסוי $\{V_1,\dots,V_n\}$.

(19) 27.02.08
מידה

<u>משפט ההצגה של Riesz</u> (ניסוח במרחב שאיננו דווקא σ-קומפקטי)

יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית ויהי Λ פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(X)$. אזי קיימת σ-אלגברה $\mathcal{M}$ ב-X שמכילה את כל קבוצות בורל ב-X וקיימת מידה חיובית יחידה μ על $\mathcal{M}$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:

(א) $\Lambda f = \int_X f\,d\mu$ לכל $f \in C_c(X)$

(ב) $\mu(K) < \infty$ לכל $K \subseteq X$ קומפקטית

(ג) $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V \text{ פתוחה } V\}$

(ד) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ קומפקטית } K\}$ לכל $E \in \mathcal{M}$ שעבורה $\mu(E) < \infty$ ולכל E פתוחה.

(ה) אם $E \subseteq \mathcal{M}$, $A \subseteq E$, $\mu(E) = 0$ אזי $A \in \mathcal{M}$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח תחילה יחידות. דהיינו נניח שבתנאי המשפט קיימות שתי מידות μ_1, μ_2 שמקיימות (א)-(ה) ונראה ש- $\mu_1 = \mu_2$. מ-(ג) ו-(ד) נובע שמספיק להראות $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ לכל K קומפקטית (כי מ-(ד) זה מתקיים לכל קבוצה פתוחה ומ-(ג) זה מתקיים לכל קבוצה).

נקבע K קומפקטית. אזי עפ"י (ב) ו-(ג) נובע שיש $K \subseteq V$ פתוחה כך ש- $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. עפ"י הלמה של אוריסון יש $K \prec f \prec V$. ($f \in C_c(X)$)

לכן $\mu_1(K) = \int_X \chi_K\,d\mu_1 \le \int_X f\,d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f\,d\mu_2 \le \int_X \chi_V\,d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$

$\Leftarrow \mu_1(K) \le \mu_2(K)$. מאותו אופן גם $\mu_2(K) \le \mu_1(K)$ $\Leftarrow$ $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ לכל K קומפקטית. $\Leftarrow$ הוכחנו את היחידות.

(מעשה ראינו פה גם ש(א) $\Leftarrow$(ב) כי $\mu_2(K) \le \Lambda f$ והרי Λf סופי).

נבנה כעת את μ ואת $\mathcal{M}$. לכל קבוצה פתוחה $V \subseteq X$ נגדיר

$$(*)\ \mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \prec V\}$$

ולכל $E \subseteq X$ נגדיר $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V \text{ פתוחה } V\}$ $(**)$

קל לראות שההגדרות מתלכדות על הקבוצות הפתוחות.

הגדרה ש-$(*)$ מבטיח ש- $\mu(V_1) \le \mu(V_2)$ אם $V_1 \subseteq V_2$ אז ברור ש-$(**)$ מגדיר היטב את $\mu(E)$ כי הוא מתלכד עם $(*)$ ו-E פתוחה. נגדיר את $\mathcal{M}_F$ להיות אוסף תת-קבוצות E של X שמקיימות את שני התנאים:

- $\mu(E) < \infty$

- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ קומפקטית } K\}$

נגדיר את $\mathcal{M}$ להיות אוסף התת-קבוצות E של X שמקיימות $E \cap K \in \mathcal{M}_F$ לכל K קומפקטית. נותר להראות של-$\mathcal{M}$ ול-μ (על $\mathcal{M}$) יש התכונות הדרושות. ראשית, נשים לב שברור ש-μ מונוטונית. ברור גם ש- $\mu(E) = 0 \Leftarrow E \in \mathcal{M}_F \Leftarrow E \in \mathcal{M}$ ולכן (ה) מתקיים, וכן ברור ש-(ג) מתקיים עפ"י ההגדרה.

המשך ביום שישי...

(20) 29.02.08
תורת המידה

שלום עולם! חובת הגשה - משקולין 10% ו- 80%
אם הממוצע גבוה מציון המבחן משקלם 20%, אחרת משקלם 10%

נזכיר מה אנחנו צריכים להוכיח:

(א) $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$

(ב) לכל K קומפקטית $\mu(K) < \infty$

(ג) $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V$ פתוחה $V\}$

(ד) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E$ קומפ' $K\}$ אם $\mu(E) < \infty$ או E פתוחה

(ה) $E \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E$, $\mu(E) = 0$ $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{M}$

<u>הוכחה:</u> הראנו יחידות של μ שמקיימת גאת.

הגדרנו עבור V פתוחה $\mu(V) = \sup\{\Lambda f : f \prec V\}$ (*)

$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subseteq V$ פתוחה $V\}$ (**)

$\mathcal{M}_F$ זה אוסף כל הקבוצות E שמקיימות:

- $\mu(E) < \infty$
- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E$ קומפ' $K\}$

הגדרנו $\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \cap K \in \mathcal{M}_F$ לכל K קומפ'$\}$

עכשיו נמשיך להוכיח את המשפט ע"י סדרה (ארוכה) של טענות.

<u>טענה 1:</u> לכל $E_1, E_2, \ldots \subseteq X$ $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

(כלומר μ היא תת-אדיטיבית - כי ברור שהיא מונוטונית מתכונה (ג))

<u>הוכחה:</u> נראה תחילה $\mu(V_1 \cup V_2) \le \mu(V_1) + \mu(V_2)$ (*) ל- V_1, V_2 פתוחות. נבחר $g \prec V_1 \cup V_2$. אזי יש פונקציות h_1, h_2 כך ש- $h_i \prec V_i$ $i = 1,2$ ו- $h_1(x) + h_2(x) = 1$ על התומך של g.

לכן $h_i g \prec V_i$ וכן $h_1 g + h_2 g = g$ לכן

$$\Lambda g = \Lambda(h_1 g + h_2 g) = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \le \mu(V_1) + \mu(V_2)$$

היות שזה נכון לכל $g \prec V_1 \cup V_2$ אפשר לקחת סופרמום על אגף שמאל וזה בדיוק אומר ש- $\mu(V_1 \cup V_2) \le \mu(V_1) + \mu(V_2)$.

כעת, אם $\mu(E_i) = \infty$ עבור i אזי הטענה ברורה. לכן נניח ש- $\mu(E_i) < \infty$ לכל $i \in \mathbb{N}$. יהי $\varepsilon > 0$. אזי יש קבוצות פתוחות $E_i \subseteq V_i$ כך ש- $\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$. תהי $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. זו קבוצה פתוחה. נבחר $f \prec V$. היות ש- f בעלת תומך קומפקטי נובע שיש n סופי כך ש- $f \prec \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ (ה-V_i-ים הם כיסוי של התומך של f שהוא קומפקטי לכן אפשר להוציא תת כיסוי סופי).

כעת ע"י הפעלת אינדוקציה על (*) מקבלים

$$\Lambda f \le \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(V_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$$

$\mu(V_i) \le \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$

היות שזה נכון לכל $V \prec f$ והיות ש- $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq V$ נקבל ש-
$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \le \mu(V) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$
נשאיף את ε ל-0 ונקבל $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ ☺

<u>טענה ב</u>: אם K קומפקטית אזי $K \in \mathfrak{M}_F$ ומתקיים
$\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}$
ובפרט $\mu(K) < \infty$ עבור K קומפקטית! (זה מתקיים)
<u>הוכחה</u>: אם $K \prec f$; $0 < \alpha < 1$ נגדיר $V_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$
אזי V_α פתוחה (מקור של פתוחה), $K \subseteq V_\alpha$; $\alpha g \le f$
לכל $g \prec V_\alpha$. לכן $\mu(K) \le \mu(V_\alpha) = \sup\{\Lambda g : g \prec V_\alpha\} \le \alpha^{-1} \Lambda f$
ע"י לקיחת הגבול $\alpha \to 1$ נקבל ש- $\mu(K) \le \Lambda f$. לכן
בפרט $\mu(K) < \infty$, וברור גם ש- $\mu(K) = \sup\{\mu(\tilde{K}) : \tilde{K} \subseteq K$ קומ' $\tilde{K}\}$
(ניקח $\tilde{K} = K$) לכן $K \in \mathfrak{M}_F$. אם $\varepsilon > 0$ יש $K \subseteq V$
פתוחה כך ש- $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$ לכן עפ"י הלמה של אוריסון
קיימת f כך ש- $K \prec f \prec V$. לכן $\Lambda f \le \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$.
לכן $\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}$. ☺

<u>טענה 3</u>: לכל קבוצה פתוחה V מתקיים $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq V$ קומ' $K\}$
ובפרט כל קבוצה פתוחה V שעבורה $\mu(V) < \infty$ היא ב- $\mathfrak{M}_F$.
<u>הוכחה</u>: יהי $\alpha < \mu(V)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. יש $f \prec V$ כך ש- $\alpha < \Lambda f$.
נסמן $K = \operatorname{supp} f$ (התומך של f שהוא קומפקטי). אם W
קבוצה פתוחה שעבורה $K \subseteq W$ אזי $f \prec W$ ולכן $\Lambda f \le \mu(W)$
לכן $\mu(K) \ge \Lambda f > \alpha$. כלומר לכל $\alpha < \mu(V)$ יש $K \subseteq V$
קומפקטית שעבורה $\alpha \le \mu(K)$ ומכאן ברור שנובעת הטענה. ☺

<u>טענה 4</u>: נניח ש- $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ כאשר $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ קבוצות זרות מצויות ב- $\mathfrak{M}_F$. אזי $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. אם בנוסף $\mu(E) < \infty$ אז $E \in \mathfrak{M}_F$.
<u>הוכחה</u>: נראה תחילה ש- $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$ (*) עבור K_1, K_2
קומפקטיות וזרות. יהי $\varepsilon > 0$. עפ"י הלמה של אוריסון יש $f \in C_c(X)$
כך ש- $f(x) = 1$ לכל $x \in K_1$, $f(x) = 0$ לכל $x \in K_2$ ובנוסף
$0 \le f(x) \le 2$ (כי במרחב האוסדורף אפשר לעטוף קבוצות קומפקטיות זרות בקבוצות פתוחות זרות). עפ"י טענה (2) יש $g \in C_c(X)$
כך ש- $K_1 \cup K_2 \prec g$; $\Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. כמו כן, מתקיים

$K_1 \prec fg$ ובאופן דומה $K_2 \prec (1-f)g$. מהלינאריות של Λ נקבל
$$\mu(K_1)+\mu(K_2) \le \Lambda(fg)+\Lambda(g-fg) = \Lambda g \le \mu(K_1\cup K_2)+\varepsilon$$
נשאיף את ε ל-0 ונקבל $\mu(K_1)+\mu(K_2)\le\mu(K_1\cup K_2)$. יחד עם טענה (1) ונקבל $\mu(K_1)+\mu(K_2)=\mu(K_1\cup K_2)$

במקרה ש- $\mu(E)=\infty$ ברור שהטענה נכונה (מטענה (1)). לכן, נניח ש- $\mu(E)<\infty$. יהי $\varepsilon>0$. היות ש- $E_i\in\mathfrak{M}_F$ יש קבוצות קומפקטיות $H_i\subseteq E_i$ כך ש- $\mu(H_i)>\mu(E_i)-2^{-i}\varepsilon$. לכן ע"י לקיחת $K_n=\bigcup_{i=1}^{n} H_i$ ואינדוקציה נקבל
$$\mu(E)\ge\mu(K_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(H_i)>\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)-\varepsilon$$
היות שזה נכון לכל n ולכל ε נקבל $\mu(E)\ge\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ ומטענה (1)
נקבל $\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$.

נותר להראות שאם $\mu(E)<\infty$ אז $E\in\mathfrak{M}_F$. נשים לב שאם $\mu(E)<\infty$ אז לכל $\varepsilon>0$ יש $N\in\mathbb{N}$ שעבורו $\mu(E)\le\sum_{i=1}^{N}\mu(E_i)+\varepsilon$, לכן $\mu(E)\le\mu(K_N)+2\varepsilon$ ומכאן $\mu(E)=\sup\{\mu(K) : K\subseteq E$ קומפ' $K\}$
⇐ $E\in\mathfrak{M}_F$.

<u>טענה 5</u>: אם $E\in\mathfrak{M}_F$ ו- $\varepsilon>0$ אזי יש K קומפקטית ו- V פתוחה כך ש- $K\subseteq E\subseteq V$ ו- $\mu(V\setminus K)<\varepsilon$.

<u>הוכחה</u>: ברור שיש $K\subseteq E\subseteq V$ כך ש- $\mu(V)-\frac{\varepsilon}{2}<\mu(E)<\mu(K)+\frac{\varepsilon}{2}$
והיות ש- $V\setminus K$ פתוחה נקבל מטענה (3) ש- $V\setminus K\in\mathfrak{M}_F$
($\mu(V\setminus K)<\infty$ כי $\mu(V\setminus K)\le\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon<\infty$)
לכן עפ"י טענה (4) $\mu(K)+\mu(V\setminus K)=\mu(V)<\mu(K)+\varepsilon$ וסיימנו.

<u>טענה 6</u>: אם $A,B\in\mathfrak{M}_F$ אזי $A\setminus B, A\cup B, A\cap B\in\mathfrak{M}_F$.

<u>הוכחה</u>: אם $\varepsilon>0$ נקבל מטענה (5) שיש קבוצות קומפקטיות K_i ופתוחות V_i כך ש- $K_1\subseteq A\subseteq V_1$, $K_2\subseteq B\subseteq V_2$, $\mu(V_i\setminus K_i)<\varepsilon$
היות ש- $A\setminus B\subseteq V_1\setminus K_2\subseteq(V_1\setminus K_1)\cup(K_1\setminus V_2)\cup(V_2\setminus K_2)$
נקבל מטענה (1) $\mu(A\setminus B)\le\mu(K_1\setminus V_2)+2\varepsilon$. הואיל ו- $K_1\setminus V_2$ תת קבוצה קומפקטית של $A\setminus B$ נקבל ש- $A\setminus B$ מקיימת את התנאי הדרוש להיות ב- $\mathfrak{M}_F$. היות ש- $A\cup B=(A\setminus B)\cup B$ נקבל ש- $A\cup B\in\mathfrak{M}_F$. היות שגם $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$ נקבל גם $A\cap B\in\mathfrak{M}_F$.

טענה 7: $\mathcal{M}$ הינו σ-אלגברה ב-X המכילה את כל קבוצות בורל.

הוכחה: תהי K קומפקטית. אם $A\in\mathcal{M}$ אזי $A^c\cap K=K\setminus(A\cap K)$ לכן $A^c\cap K\in\mathcal{M}_F$. כלומר $A\in\mathcal{M}\Leftarrow A^c\in\mathcal{M}$.

נניח כעת $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ כאשר $A_i\in\mathcal{M}$. נגדיר
$$\begin{cases} B_1=A_1\cap K \\ B_{n+1}=(A_{n+1}\cap K)\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B_i \end{cases}$$
אזי $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות זרות ב-$\mathcal{M}_F$ (על סמך הטענה הקודמת). מתקיים $A\cap K=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$. לכן נובע מטענה (4) ש-$A\cap K\in\mathcal{M}_F$, כלומר $A\in\mathcal{M}$.

ולבסוף, אם C סגורה אזי $C\cap K$ קומפקטית ולכן $C\cap K\in\mathcal{M}_F$ ונובע ש-$C\in\mathcal{M}$. בפרט $\emptyset,X\in\mathcal{M}$.

מכאן ש-$\mathcal{M}$ σ-אלגברה המכילה את הקבוצות הסגורות ולכן גם את כל קבוצות בורל.

טענה 8: $\mathcal{M}_F$ כוללת בדיוק את איברי $\mathcal{M}$ שמידתם סופית
(נוכיח מכאן את תכונה (3) של המשפט)

הוכחה: אם $E\in\mathcal{M}_F$ אז נובע מטענות (2) ו-(6) ש-$E\cap K\in\mathcal{M}_F$ לכל K קומפקטית לכן $E\in\mathcal{M}$.

מצד שני, נניח ש-$E\in\mathcal{M}$ ו-$\mu(E)<\infty$. נרצה להראות ש-$E\in\mathcal{M}_F$.
יהי $\varepsilon>0$. יש קבוצה פתוחה $V\supseteq E$ כך ש-$\mu(V)<\infty$.
עפ"י טענה (3) ו-(5) יש קבוצה קומפקטית $K\subseteq V$ כך ש-$\mu(V\setminus K)<\varepsilon$ ומאחר ש-$E\cap K\in\mathcal{M}_F$ יש קבוצה קומפקטית $H\subseteq E\cap K$ כך ש-$\mu(E\cap K)<\mu(H)+\varepsilon$. משום ש-$E\subseteq(E\cap K)\cup(V\setminus K)$ נובע ש-
$$\mu(E)\le\mu(E\cap K)+\mu(V\setminus K)<\mu(H)+2\varepsilon$$
לכן $\mu(E)=\sup\{\mu(K):K\subseteq E \text{ קומפ' } K\}$. כלומר $E\in\mathcal{M}_F$.

טענה 9: μ היא מידה על $\mathcal{M}$.

הוכחה: למעשה נותר רק להראות את האדטיביות של $\mathcal{M}$. אבל זה נובע מיידית מטענה (4) ו-(8). כי המקרה המעניין הוא כשהמידה של הקבוצות סופית.

<u>טענה 10</u> (אחרונה): לכל $f\in C_c(X)$ $\Lambda f = \int_X f\,d\mu$

<u>הוכחה</u>: ראשית, די להראות לכל $f\in C_c(X)$ ממשית שמתקיים $\Lambda f\le \int_X f\,d\mu$ כי אז ל-f רצ' נובע גם ש-

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) = \int_X (-f)\,d\mu = -\int_X f\,d\mu$$

ולכן $\Lambda f \ge \int_X f\,d\mu$. ואם יש שוויון לכל ממשית, אז מהגדרת האינטגרל ומהלינאריות של Λ ושל האינטגרל נקבל השוויון לכל $f\in C_c(X)$ מרוכבת. לכן די להוכיח את אי השוויון $\Lambda f \le \int_X f\,d\mu$ ל-f ממשית. מעתה תהי $f\in C_c(X)$ ממשית ויהי $K=\operatorname{supp} f$ ו-$[a,b]$ קטע המכיל את התמונה של f. יהי $\varepsilon>0$ ונבחר $\{y_i\}_{i=1}^n$ כך ש- $y_i-y_{i-1}<\varepsilon$ ו- $y_0<a<y_1<y_2<\dots<y_n=b$. נגדיר $E_i=\{x : y_{i-1}<f(x)\le y_i\}\cap K$ עבור $i=1,\dots,n$. מכיוון ש-f רציפה, f מדידה בורל ולכן הקבוצות E_i הן קבוצות בורל זרות שאיחודן הוא K. לכן יש קבוצות פתוחות $E_i\subseteq V_i$ כך ש- $\mu(V_i)<\mu(E_i)+\frac{\varepsilon}{n}$ עבור $1\le i\le n$, וכך ש- $f(x)<y_i+\varepsilon$ לכל $x\in V_i$. כמו כן, יש פונקציות $h_i\prec V_i$ כך ש- $\sum h_i\equiv 1$ על K ולכן $f=\sum_{i=1}^n h_i f$. מטענה (2) נובע ש- $\mu(K)\le\Lambda(\sum h_i)=\sum\Lambda h_i$. מכיוון ש- $h_i f\le(y_i+\varepsilon)h_i$ וגם $y_i-\varepsilon<f(x)$ על E_i, נקבל

$$\begin{aligned}
\Lambda f = \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) &\le \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)\Lambda h_i \\
&= \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon)\Lambda h_i - |a|\sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\
&\le \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon)\left(\mu(E_i)+\frac{\varepsilon}{n}\right) - |a|\mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i-\varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon) \\
&\le \int_X f\,d\mu + \varepsilon\left[2\mu(K)+|a|+|b|+\varepsilon\right]
\end{aligned}$$

היות ש-ε שרירותי, נובע מה שדרוש.

☺

23 3/3/08
מידה

משפט (ריס הרחב) יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית שבו כל קבוצה פתוחה היא σ-קומפקטית, ותהי μ מידת בורל חיובית על X בעלת התכונה ש- $\mu(K)<\infty$ לכל קבוצה קומפקטית K. אזי μ רגולרית.

הערה: ל-$\mathbb{R}^n$ יש התכונה הנ"ל.

מידת Lebesgue

אינטגרל רימן $\int_{\mathbb{R}^k} f\,dx$ מוגדר היטב וסופי לכל $f\in C_c(\mathbb{R}^k)$ והוא מגדיר פונקציונל לינארי חיובי על $C_c(\mathbb{R}^k)$. ניתן להגדיר את מידת לבג ("dx", "dm" ועוד סימונים) על $\mathbb{R}^k$ בתור המידה (מידת בורל או ההשלמה שלה) המתקבלת ממשפט ההצגה של ריס עבור הפונקציונל הנ"ל.

למידת לבג על $\mathbb{R}^k$ יש התכונות הבאות:

1. $m(W)=vol(W)$ לכל תיבה ב-$\mathbb{R}^k$.
2. $m(E+x)=m(E)$ לכל קבוצה מדידה E ו-$x\in\mathbb{R}^k$, כלומר m אינווריאנטית לטרנסלציות.
3. לכל טרנספורמציה לינארית $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ מתקיים $m(TE)=\det T\cdot m(E)$

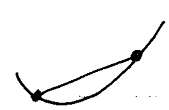
כמו כן, אם μ מידת בורל חיובית על $\mathbb{R}^k$ שהיא אינווריאנטית לטרנסלציות ומקיימת $\mu(K)<\infty$ לכל K קומפקטית, אזי קיים קבוע c כך ש- $\mu(E)=c\,m(E)$ לכל קבוצת בורל $E\subseteq\mathbb{R}^k$.

הערה: נחשוב על מידת לבג כמידה השלמה. לכל קבוצה של הישר בעלת מידת לבג חיובית יש תת קבוצה שאינה מדידת לבג.

מרחבי L^p

הגדרה: פונקציה ממשית $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ (כאשר $-\infty\le a<b\le\infty$) נקראת קמורה אם $\varphi((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$ לכל $x,y\in(a,b)$ ו-$0\le\lambda\le1$.

זה שקול לכך ש- $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\le\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ לכל $a<s<t<u<b$.



אם φ גזירה אז היא קמורה אמ"מ ($s<t \Rightarrow \varphi'(s)\le\varphi'(t)$)

משפט: אם φ קמורה על (a,b) אזי היא רציפה שם (הכרחי כאן ש- (a,b) יהיה קטע פתוח!)

משפט (אי שוויון Jensen) תהי μ מידה חיובית על מרחב מדיד Ω כך ש- $\mu(\Omega)=1$ ותהי $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mu)$ ממשית ומקיימת $a<f(x)<b$ לכל $x\in\Omega$. אם $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ קמורה על (a,b) אזי $\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right)\le\int_\Omega(\varphi\circ f)\,d\mu$

הערה: מידות שנותנות למרחב מידה 1 נקראות מידות הסתברות ואז אינטגרל על Ω זה כמו ממוצע.

הערה: המשפט נכון גם במקרים שבהם $a=-\infty$ או $b=\infty$. ייתכן גם ש- $\varphi\circ f\notin\mathcal{L}^1(\mu)$ אך מהמשפט נובע בהכרח ש- $\int_\Omega\varphi\circ f\,d\mu$ קיים במובן מורחב וערכו ∞.

הוכחת המשפט: נסמן $t=\int_\Omega f\,d\mu$. אזי $a<t<b$ (כי $\mu(\Omega)=1$). נסמן $\beta=\sup_{a<s<t}\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ (החסם העליון של השיפועים של המיתרים שנוצרים ב- φ). מתקיים $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\le\beta$ לכל $s\in(a,t)$ ולכל $u\in(t,s)$ מתקיים $\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}\ge\beta$. לכן $\varphi(s)\ge\varphi(t)+\beta(s-t)$ לכל $s\in(a,b)$. מכאן $\varphi(s)-\varphi(t)-\beta(s-t)\ge0$ וע"י הצבת $s=f(x)$ לכל $x\in\Omega$: $\varphi(f(x))-\varphi(t)-\beta(f(x)-t)\ge0$. אינטגרציה של זה על Ω נותנת $\int\varphi\circ f\,d\mu-\varphi\left(\int f\,d\mu\right)-\beta\cdot0\ge0\Rightarrow\int\varphi\circ f\,d\mu\ge\varphi\left(\int f\,d\mu\right)$

דוגמאות:

① μ מידת לבג על $[0,1]$, $\varphi(x)=x^2$, $f(x)=x$. אזי

$$\underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{=\frac{1}{3}}\ge\underbrace{\left(\int_0^1 x\,dx\right)^2}_{=\frac{1}{4}}$$

② ניקח $\varphi(x)=e^x$ אזי $e^{\int_\Omega f\,d\mu}\le\int_\Omega e^f\,d\mu$

- f ו- μ שרירותיות!

ואם, עבור $\Omega=\{p_1,\dots,p_n\}$, $\mu(p_i)=\frac{1}{n}$ לכל $1\le i\le n$ ונניח $f(p_i)=x_i$ אזי $e^{\frac{1}{n}\sum x_i}\le\dots\frac{1}{n}(e^{x_1}+\dots+e^{x_n})$. ע"י ההצבה $y_i=e^{x_i}$ נקבל $(y_1\cdots y_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}(y_1+\dots+y_n)$ אי שוויון הממוצעים

<u>הגדרה:</u> $p,q\in(0,\infty)$ נקראים אקספוננטים צמודים אם $p+q=pq$
(באופן שקול $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) ואז נובע גם $1<p<\infty$, $1<q<\infty$
מקרה חשוב מיוחד הוא $p=q=2$. אם $p\to1$ אז $q\to\infty$.
לכן נוח לדבר על אקספוננטים צמודים ב- $[1,\infty]$ ואז $p=1$ $q=\infty$
זוג אקספוננטים צמודים.

<u>משפט</u> (אי שוויון Hölder) יהיו p,q אקספוננטים צמודים, $1<p<\infty$. יהי X מרחב מידה עם מידה μ ויהיו $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות. אזי מתקיים:

$$\int_X fg\,d\mu \le \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{1/q}$$

<u>הערה:</u> Hölder למקרה $p=q=2$ נקרא Cauchy-Schwartz

<u>משפט:</u> (אי שוויון Minkowski) באותם תנאים מתקיים

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p}+\left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

<u>הוכחה:</u> נסמן $A=\left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p}$, $B=\left(\int g^q\,d\mu\right)^{1/q}$. די לדון במקרה $0<A<\infty$, $0<B<\infty$ שאחרת מתקיים $f\cdot g=0$ כב"מ $[\mu]$.
נגדיר $F=\frac{f}{A}$, $G=\frac{g}{B}$. אז $\int F^p\,d\mu=\int G^q\,d\mu=1$.
עבור $x\in X$ שעבורו $0<F(x)<\infty$, $0<G(x)<\infty$ יש מספרים ממשיים s,t כך ש- $F(x)=e^{s/p}$, $G(x)=e^{t/q}$
היות ש- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ נובע מקמירות הפונקציה האקספוננציאלית ש- $e^{s/p+t/q}\le p^{-1}e^{s}+q^{-1}e^{t}$ (אי שוויון Jensen למרחב מידה בעל שתי נקודות) ולכן $F(x)G(x)\le p^{-1}F(x)^p+q^{-1}G(x)^q$ לכל $x\in X$ (כי זה נכון אפילו כשהם לא מתאפסים לפי מה שהראנו ואם אחד מהם מתאפס אז ברור שזה נכון).

$$\Rightarrow \int FG\,d\mu \le p^{-1}+q^{-1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

אבל $\int FG\,d\mu=\frac{\int fg\,d\mu}{AB}$ $\Rightarrow$ $\int fg\,d\mu\le AB$ וזה אי שוויון הנדרש.
להוכחת אי השוויון השני, נכתוב: $(f+g)^p=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}$
ואז מהולדר נובע $\int f(f+g)^{p-1}d\mu\le\left(\int f^p\right)^{1/p}\left(\int (f+g)^{(p-1)q}d\mu\right)^{1/q}$
ואותו דבר נכון עם החלפת $f\leftrightarrow g$ וע"י חיבור אי השוויונים נובע (כי $(p-1)q=p$) ש-

$$(*)\quad \int (f+g)^p\,d\mu\le\left(\int (f+g)^p\right)^{1/q}\left[\left(\int f^p\right)^{1/p}+\left(\int g^p\right)^{1/p}\right]$$

די לדון במקרה בו אגף שמאל חיובי ואגף ימין סופי. מן הקמירות של t^p נובע $\left(\frac{f+g}{2}\right)^p\le\frac{1}{2}(f^p+g^p)$ ולכן מסופיות אגף ימין נובעת סופיות אגף שמאל וניתן לחלק את אגפי (*) ב- $\left(\int (f+g)^p\right)^{1/q}$ וזה נותן את אי שוויון מינקובסקי. כי $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$

25 5.3.08
מידה

מרחבי L^p

<u>הגדרות</u>: יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה ! $0<p<\infty$. לכל $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה נגדיר $\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ נורמת L^p של f (או נורמת p של f). נסמן ב- $\mathcal{L}^p(\mu)$ (או $\mathcal{L}^p(X,d\mu)$ או $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^k)$ אם $X=\mathbb{R}^k$ ו- μ מידת לבג) את אוסף הפונקציות המרוכבות המדידות המוגדרות על X או רק כמ"מ $[\mu]$ על X שעבורן $\|\cdot\|_p<\infty$. אם μ מידת המניה על X (בעיקר במקרים בהם X בן מניה), נסמן את $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ ב- $\ell^p(X)$.

במקרה כזה: כל איבר במרחב הוא סדרה $\xi=\{\xi_n\}_{n\in X}$! $\|\xi\|_p=\left(\sum_{n\in X}|\xi_n|^p\right)^{1/p}$.

עבור $g:X\to[0,\infty]$ מדידה נגדיר את <u>הסופרמום העיקרי</u> (essential supremum) של g באופן הבא:

נגדיר $S=\{M\in\mathbb{R}:\mu(g^{-1}((M,\infty]))=0\}$!-

$$\text{ess-sup}\, g=\begin{cases}\inf S & S\neq\emptyset\\ \infty & S=\emptyset\end{cases}$$

באופן שקול

$$\text{ess-sup}\, g=\sup\{M\in\mathbb{R}:\exists Y\subseteq X,\ \mu(Y)>0,\ x\in Y\Rightarrow f(x)\geq M\}$$

עבור $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה נסמן $\|f\|_\infty=\text{ess-sup}|f|$ (נורמת אינסוף).

[הערה: $\sup|f|$ מתלכד עם $\text{ess-sup}|f|$ אם μ מידת המניה]

נסמן ב- $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ (או $\mathcal{L}^\infty(X,d\mu)$ וכו') את מרחב הפונקציות המרוכבות המדידות שעבורן $\|f\|_\infty<\infty$. איברי $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ נקראים פונקציות מדידות חסומות עיקרית.

<u>הערות</u>: (א) $|f(x)|\leq\lambda$ כמ"מ $[\mu]$ אמ"מ $\lambda\geq\|f\|_\infty$

(ב) כמו עבור p סופי מסמנים ב- $\ell^\infty(X)$ את $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ במקרה ש- μ מידת המניה על X.

משפט: אם p, q אקספוננטים צמודים, $1 \le p \le \infty$; $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, אזי $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ומתקיים

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

הוכחה: ל- $1 < p < \infty$ מהנובע מאי שוויון הלדר עבור $|f|$; $|g|$.
אם $p = \infty$ אז מתקיים $|f(x) \cdot g(x)| \le \|f\|_\infty |g(x)|$ כמעט בכל מקום $[\mu]$
ולכן $\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu \le \|f\|_\infty \int |g| \, d\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1$
באותו אופן מראים ל- $p = 1$; $q = \infty$. ☺

משפט: אם $1 \le p \le \infty$; $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ אזי $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$
ומתקיים $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

הוכחה: ל- $1 < p < \infty$ זה נובע מאי שוויון מינקובסקי כי
$$\int |f+g|^p \, d\mu \le \int (|f| + |g|)^p \, d\mu$$
ל- $p = 1$; $p = \infty$ זה ברור. ☺

משפט: אם $1 \le p \le \infty$; $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ אזי $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mu)$
ומתקיים $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$
הוכחה: ברור!

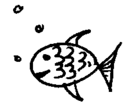
חיבור וכפל בסקלר ב- $L^p(\mu)$ מוגדרים ,
$F = \{f \in F\}$, $G = \{g \in G\}$
$\alpha F = \{\alpha f : f \in F\}$
$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\}$
$f+g$ מוגדרת על חיתוך התחומים.

מסקנה: ל- $1 \le p \le \infty$ $\mathcal{L}^p(\mu)$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$

אבל $\|\cdot\|_p$ איננה נורמה על $\mathcal{L}^p(\mu)$ כי יתכן ש- $\|f-g\|_p = 0$
לשתי פונקציות שונות (אם הן שונות על קבוצה שמידתה אפס)! ואמנם
קל לראות ש- $\|f-g\|_p = 0$ אמ"מ $f \sim g$, כלומר $f(x) = g(x)$ כ.ב.מ. $[\mu]$.
וזה לכל $1 \le p \le \infty$.

כדי "לתקן" את זה ולקבל מרחב נורמי (ואף מטרי) מגדירים:
הגדרה: $L^p(\mu)$ $(1 \le p \le \infty)$ הוא אוסף מחלקות השקילות של פונקציות ב- $\mathcal{L}^p(\mu)$ שיש ביניהן שוויון כמעט בכל מקום $[\mu]$ (אז $L^p(\mu)$ הוא מרחב מחלקות שקילות) (אז רואים שני הדברים שסומנים ב- $L^p(\mu)$ אז צריך להיזהר!)

דוגמה: איבר האפס ב- $L^p(\mu)$ הוא $\{f \in \mathcal{L}^p(\mu) : f(x) = 0 \text{ כ.ב.מ. } [\mu]\}$
איברים אחרים במרחב הם מהצורה $F = \{g \in \mathcal{L}^p(\mu) : g(x) = f(x) \text{ כ.ב.מ. } [\mu]\}$
(אפשר לראות ש- $\|F\|_p$ מוגדר היטב (דהיינו אינו תלוי בבחירת f) $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ בהינתן $F \in L^p(\mu)$ נגדיר $\|F\|_p = \|f\|_p$ ו- $f \in F$ כלשהי.



$L^p(\mu)$ - מחלקות השקילות של איברי $\mathcal{L}^p(\mu)$ תחת יחס השקילות של שוויון כב"מ $[\mu]$.

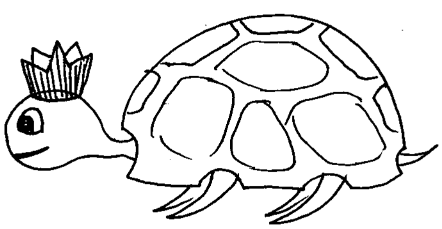
<u>טענה:</u> $L^p(\mu)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. יתר על כן, $\|\cdot\|_p$ היא נורמה על $L^p(\mu)$ ולכן $L^p(\mu)$ מרחב נורמי ובפרט מרחב מטרי עם המטריקה המושרית מהנורמה $d(F,G)=\|F-G\|_p$.

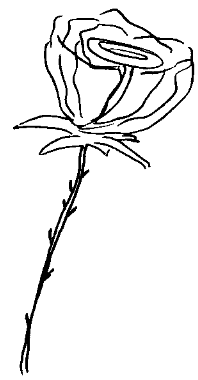
<u>הערה:</u> מקובל לדבר על איברי $L^p(\mu)$ כפונקציות ובפרט יש להבין שכשאומרים $f\in L^p(\mu)$ הכוונה למעשה $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$. מבחינה מעשית, ניתן לבחור לכל $F\in L^p(\mu)$ נציג ע"י פונקציה $f\in F$; "לעבוד" עם הפונקציות, כלומר לחשוב על איברי $L^p(\mu)$ כפונקציות אך שמציינים $f=g$ כ- $f\sim g$.

<u>משפט:</u> לכל $1\le p\le\infty$ ולכל מידה חיובית μ, $L^p(\mu)$ הוא מרחב מטרי שלם (-מרחב שבו כל סדרת קושי מתכנסת)

<u>הוכחה:</u> נדון תחילה ב- $1\le p<\infty$. תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב- $L^p(\mu)$. קיימת תת סדרה $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שעבורה $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p<2^{-k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$. נגדיר $g_N=\sum_{k=1}^{N}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|$ ו- $g=\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|$. מאי שוויון המשולש נובע שמתקיים לכל N
$\|g_N\|_p\le\sum_{k=1}^{N}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|\le\sum_{k=1}^{N}2^{-k}\le\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}=1$
לכן מהלמה של פאטו (מופעלת על g_N^p) נובע ש-

$$\begin{aligned}\left(\int|g|^p\,d\mu\right)^{\frac1p}&=\left(\int|\liminf g_N|^p\,d\mu\right)^{\frac1p}\\&=\left(\int\liminf g_N^p\,d\mu\right)^{\frac1p}\\&\le\left(\liminf\int g_N^p\,d\mu\right)^{\frac1p}\\&=\liminf\left(\int g_N^p\,d\mu\right)^{\frac1p}\\&=\liminf\|g_N\|_p\\&\le 1\end{aligned}$$





לכן $\|g\|_p\le 1$. בפרט נובע ש- $g(x)<\infty$ כב"מ $[\mu]$. לכן הטור $f(x)=f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$ מתכנס בהחלט כב"מ $[\mu]$. נסמן ב- $f(x)$ את הפונקציה המוגדרת כב"מ $[\mu]$ ע"י סכום הטור הנ"ל.

היות ש- $f_{n_N} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{N-1}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ נובע ש- $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ רב"מ $[\mu]$. נראה ש- f הנ"ל גבול ב- $L^p(\mu)$ של f_n.

יהי $\varepsilon>0$. קיים $N>0$ כך ש- לכל $m,n>N$ $\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$.

לכן לכל $m>N$ נובע מהלמה של פאטו -

$$\int|f-f_m|^p d\mu \le \liminf_{k\to\infty}\int|f_{n_k}-f_m|^p d\mu \le \varepsilon^p$$

מכאן ש- $f-f_m\in L^p(\mu)$

לכן גם $f\in L^p(\mu)$ (כי $f=(f-f_m)+f_m$). וכן $\|f-f_m\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

וזה מסיים את ההוכחה במקרה ש- $1\le p<\infty$.

נניח עבור $p=\infty$. תהי $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subseteq L^p(\mu)$ סדרת קושי. (נזכיר)

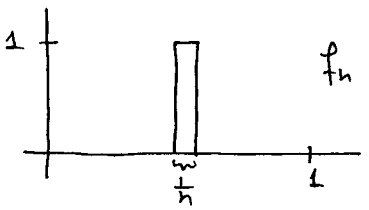
$A_k=\{x: |f_k(x)|\ge\|f_k\|_\infty\}$

$B_{m,n}=\{x: |f_n(x)-f_m(x)|\ge\|f_n-f_m\|_\infty\}$

תהי $E=\bigcup_{k,m,n}\{A_k\cup B_{m,n}\}$. זה איחוד בן מניה של קבוצות שמידתן אפס ולכן $\mu(E)=0$. ועל המשלים של E הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ"ש לפונקציה חסומה f. כעת $f\in L^\infty(\mu)$ ומתקיים $\|f_n-f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

יש להעיר ש- $\|f_n-f\|_p\to 0$ אבל $f_n \not\to f$ נקודתית

נתבונן בפונקציות שנראות ככה:



הפונקציה f_{n+1} היא מלבן ברוחב $\frac{1}{n+1}$ שמתחיל איפה שהמלבן של f_n נגמר. בגלל ש- $\sum\frac{1}{n}=\infty$ אחרי מספר סופי של צעדים אנחנו נגיע לסוף הקטע $[0,1]$ ואז נתחיל לשים את המלבנים מתחילת הקטע וכן הלאה. כעת,

$$\int|f_n|^p d\mu = \frac{1}{n}$$

(μ - מידת לבג על $[0,1]$)

אז $\|f_n-0\|_p=\|f_n\|\to 0$

אבל ברור ש- f_n לא שואפת ל-0 נקודתית

(אבל בהוכחה שלנו ראינו שתמיד יש תת סדרה שמתכנסת נקודתית...)

הערה: התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית $\underbrace{}_{}$ התכנסות ב- L^p (עבור $p=2$ אומרים בד"כ גם התכנסות בממוצע). אבל התכנסות נקודתית והתכנסות ב- L^p אין אחת שגוררת את השנייה.

ואם $\mu(X)<\infty$ אז גם

<u>מסקנה מההוכחה</u>: אם $1\le p\le\infty$ ואם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב-$L^p(\mu)$ (= סדרה מתכנסת ב-$L^p(\mu)$) לפונקציה f, אזי ל-$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת סדרה שמתכנסת נקודתית ל-f כב"מ $[\mu]$.

<u>משפט</u>: יהי S אוסף הפונקציות המרוכבות המדידות הפשוטות של X שעבורן $\mu(\{x: s(x)\ne 0\})<\infty$. אזי ל-$1\le p<\infty$, S צפופה ב-$L^p(\mu)$.

<u>הוכחה</u>: ראשית, ברור ש-$S\subseteq L^p(\mu)$. נניח ש-$0\le f\in L^p(\mu)$. ותהי $\{s_n\}$ סדרת פונקציות פשוטות המקרבת את f מלמטה כפי שאינו במשפטים הקודמים. היות ש-$0\le s_n\le f$ נובע ש-$s_n\in L^p(\mu)$ ולכן $s_n\in S$. משום ש-$|f-s_n|^p\le f^p$ נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת ש-$\|f-s_n\|_p=\left(\int|f-s_n|^p d\mu\right)^{1/p}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ולכן f בסגור של S. המקרה המרוכב נובע מיד ע"י פירוק f לצירוף ליניארי של פונקציות חיוביות.

<u>משפט</u> (שנוכיח אח"כ) אם X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית; μ מידת בורל רגולרית של X שעבורה $\mu(K)<\infty$ לכל K קומפקטית, אזי לכל $1\le p<\infty$ $C_c(X)$ צפופה ב-$L^p(\mu)$.

<u>משפט Lusin</u>: תהי μ מידת בורל רגולרית חיובית של מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית X בעלת התכונה ש-$\mu(K)<\infty$ לכל K קומפקטית. תהי f פונקציה מרוכבת מדידה של X כך ש-$f(x)=0$ ל-$x\notin A$ עבור $A\subseteq X$ כלשהי כך ש-$\mu(A)<\infty$. אזי לכל $0<\varepsilon$ יש $g\in C_c(X)$ כך ש-$\mu(\{x: f(x)\ne g(x)\})<\varepsilon$ [כמו כן, אפשר לבחור את g כך שגם יתקיים $\sup_{x\in X}|g(x)|\le\sup_{x\in X}|f(x)|$]

<u>הוכחה</u>: נניח תחילה ש-$0\le f<1$, וש-A קומפקטית. תהי $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות פשוטות המקיימות $0\le s_1\le s_2\le\ldots\le f$ כך שלכל $x\in X$ $s_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$. $s_n-s_{n-1}=2^{-n}\chi_{T_n}$ לקבוצה מדידה T_n [סדרה כנ"ל בנינו במשפט קודם]. נסמן $t_n=s_n-s_{n-1}$ ל-$n>1$ ו-$t_1=s_1$. אזי הפונקציה $2^n t_n$ היא פונקציה אופיינית של קבוצה מדידה T_n ב-X, ומתקיים $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n(x)$ לכל $x\in X$.

תהי V קבוצה פתוחה רק ש- $A\subseteq V$ ו- $\bar V$ קומפקטית. מהרגולריות של μ נובע שקיימות קבוצות קומפקטיות $\{K_n\}$ וקבוצות פתוחות $\{V_n\}$ רק ש- $K_n\subseteq T_n\subseteq V_n\subseteq V$ ורק ש- $\mu(V_n\setminus K_n)<2^{-n}\varepsilon$ (הראנו את זה בהוכחה של משפט ריס). מהלמה של אוריסון נובע שיש פונקציות h_n רק ש- $K_n\prec h_n\prec V_n$. נגדיר $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}h_n(x)$ לכל $x\in X$. אזי הטור מתכנס במידה שווה על X ולכן $g(x)$ פונקציה רציפה. כמובן, התומך של g הוא ב- $\bar V$. מאחר ש- $2^{-n}h_n(x)=t_n(x)$ חוץ מאשר על $V_n\setminus K_n$ נובע ש- $g(x)=f(x)$ מחוץ ל- $\bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n\setminus K_n)$. היות ש- $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n\setminus K_n)\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(V_n\setminus K_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\varepsilon=\varepsilon$ נובע שהוכחנו את המשפט במקרה ש- $0\le f<1$ ו- A קומפקטית.

מכאן ברור גם שהמשפט מתקיים לכל פונקציה מדידה חסומה ול- A קומפקטית (כי הנה קומבינציה לינארית של אוסף פונקציות המקיימות $0\le f<1$).

רק לעבור ל- A שאיננה דווקא קומפקטית (אך $\mu(A)<\infty$) נשים לב שיש $K\subseteq A$ קומפקטית רק ש- $\mu(A\setminus K)$ קטן כרצוננו ואז ניתן להשתמש במה שהוכחנו עבור K. אם f איננה חסומה נשים לב שעבור $B_n=\{x:|f(x)|>n\}$ מתקיים $\mu(B_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (שהרי $\mu(B_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\mu(\emptyset)=0$). מחוץ ל- B_n f שווה לפונקציה החסומה $(1-\chi_{B_n})f$ ואז מהפעלת מה שראינו על- $(1-\chi_{B_n})f$ נובע המשפט גם עבור f.

לסיום, להוכחת ההערה בסוגריים: נגדיר $R=\sup\{|f(x)|:x\in X\}$. אם $R=\infty$ אין מה להוכיח. אחרת, נגדיר $\varphi(z)=\begin{cases} z & |z|\le R\\ \frac{Rz}{|z|} & \text{אחרת}\end{cases}$ (φ משמרת פאזה של מספר מרוכב). φ פונקציה רציפה מ- $\mathbb{C}$ על הדיסקה ברדיוס R ב- $\mathbb{C}$. אם g מקיימת את המשפט ונגדיר $g_1=\varphi\circ g$. אזי g_1 מקיימת את המשפט, ואם מקיימת ש- $\sup_{x\in X}|g_1(x)|\le R=\sup_{x\in X}|f(x)|$

(28) 10.03.08

תורת המידה

<u>מסקנה</u>: בתנאי משפט Lusin קיימת עבור הפונקציה f סדרת פונקציות רציפות $g_n \in C_c(X)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ כ.ת. $[\mu]$.

<u>הוכחה</u>: לכל n יש g_n שעבורה $\mu(E_n) < 2^{-n}$ עבור $E_n = \{x : f(x) \neq g_n(x)\}$. היות ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ נובע שכמעט כל x נמצא רק במספר סופי של קבוצות E_n. לכן לכמעט כל x $f(x) = g_n(x)$ החל מ- n מסוים ובפרט נובעת הטענה. ☺

<u>משפט</u>: אם X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומי, μ מידת בורל רגולרית על X שעבורה $\mu(K) < \infty$ לכל K קומפקטית, אזי לכל $1 \le p < \infty$ $C_c(X)$ צפופה ב- $L^p(\mu)$.

<u>הוכחה</u>: תהי S אוסף הפונקציות המרוכבות ומדידות הפשוטות על X שעבורן $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$. ראינו ש- S צפופה ב- $L^p(\mu)$. אם $s \in S$ נובע ממשפט Lusin שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $g \in C_c(X)$ כך ש- $g(x) = s(x)$ פרט אולי לקבוצה שמידתה קטנה מ- ε וגם $|g| \le \|s\|_\infty$. לכן

$$\|g - s\|_p = \left(\int |g-s|^p d\mu\right)^{1/p} \le \left(\varepsilon (2\|s\|_\infty)^p\right)^{1/p} = 2\varepsilon^{1/p} \|s\|_\infty$$

היות ש- S צפופה ב- $L^p(\mu)$ נובע המשפט. ☺

<u>הערה</u>: המקרה $p = \infty$ הוא שונה. מרחב ההשלמה של $C_c(X)$ בנורמה $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ הוא מרחב של הפונקציות הרציפות על X שעבורן לכל $\varepsilon > 0$ יש K קומפקטית כך ש $|f(x)| < \varepsilon$ מחוץ ל- K. ("מרחב הפונקציות הרציפות שמתאפסות באינסוף", מסומן $C_\infty(X)$ או לפעמים $C_0(X)$). זה נכון לכל מרחב האוסדורף קומפקטי מקומי.

<u>משפט Egoroff</u>: יהי X מרחב מידה; $E \subseteq X$ קבוצה בעלת מידה סופית. אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מרוכבות

המתכנסת נקודתית כב״מ [מט] על E לפונקציה גבולית f,
אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת תת קבוצה מדידה $F\subseteq E$ כך ש-
$\mu(F)<\varepsilon$ והסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-f במ״ש על $E\setminus F$.

<u>הוכחה:</u> ניתן להניח (ע״י הוצאת תחום בעל מידה אפס מ-E) ש- $f_n(x)\to f(x)$ לכל $x\in X$. נגדיר

$$E_n^m=\bigcap_{i=n}^{\infty}\{x\in E : |f_i(x)-f(x)|<\tfrac{1}{m}\}$$

אזי $E_1^m\subseteq E_2^m\subseteq\dots$ והיות ש- $f_n\to f$ על E

לכל m
$$E=\lim_{n\to\infty}E_n^m=\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k^m}_{\liminf}=\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k^m}_{\limsup}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^m$$

לכן, היות שהתנאים האלה $\mu(E_n^m)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^m)$
נובע ש- $\mu(E\setminus E_n^m)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ (חשוב כאן ש- $\mu(E)<\infty$!)
לכן קיים $n(m)$ שעבורו $\mu(E\setminus E_{n(m)}^m)<\frac{\varepsilon}{2^m}$
($n(m)$ תלוי גם ב-ε אבל ε כאן קבוע). ניקח
$F=\bigcup_{m=1}^{\infty}(E\setminus E_{n(m)}^m)$. אזי F מדידה, $F\subseteq E$!

$$\mu(F)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\setminus E_{n(m)}^m)\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^m}=\varepsilon$$

הינה ש- $E\setminus F=E\cap\bigcap_{m=1}^{\infty}E_{n(m)}^m$ נובע שלכל $x\in E\setminus F$,
לכל $n\ge n(m)$ $x\in E_n^m$ ולכן $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$
כלומר $\{f_n\}$ מתכנסת במ״ש על $E\setminus F$ ☺

מידות מרוכבות

<u>הגדרה:</u>
יהי X מרחב מדיד, $\mathcal{M}$ σ-אלגברה ב-X. אוסף בן מניה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{M}$ נקרא <u>חלוקה</u> של קבוצה $E\in\mathcal{M}$ אם $E_i\cap E_j=\emptyset$ לכל $i\neq j$ ו- $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$.

מידה מרוכבת היא פונקציה $\mu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ שמקיימת $\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ לכל $E\in\mathcal{M}$ ולכל חלוקה $\{E_i\}$ של E. (נשים לב שכדי ש- $\mu(E)$ יהיה מוגדר היטב הטור חייב להתכנס בהחלט כי סדר הסכימה לא משנה).

בהינתן μ מרוכבת כנ״ל נגדיר הפונקציה $|\mu|:\mathcal{M}\to[0,\infty)$

(29)

ע"י

$$|\mu|(E) = \sup_{\substack{\{E_i\} \text{ חלוקה} \\ \text{של } E}} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

$|\mu|$ יקראו מידת הווריאציה הטוטאלית של μ (total Variation measure of μ) או מידת הערך המוחלט של μ.

<u>הערה חשובה:</u> אסור לבלבל את $|\mu|$ עם פונקציית הערך המוחלט הקשורה ל- μ כפונקציה מרוכבת $(abs_\mu)(E) = |\mu(E)|$.
מתברר גם ש- $|\mu|(X) < \infty$ כי $X \in \mathcal{M}$ אבל עוד נעבוד לפני שנוכיח את זה.

<u>משפט:</u> עבור כל מידה מרוכבת μ, $|\mu|$ הוא מידה חיובית על $\mathcal{M}$.

~~הוכחה: תהי $\{E_i\}$ חלוקה של $E \in \mathcal{M}$ ותהי $\{t_i\} \in [0,\infty)$ סדרת מספרים (ממשיים) אזי לכל $t_i \le |\mu|(E_i)$ $i=1,2,\dots$ יש ל- E_i חלוקה $\{A_{ij}\}_j$ כך ש- $\sum_j |\mu(A_{ij})| > t_i - \frac{\delta}{2^i}$. היות ש- $\{A_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots}$ חלוקה של E נקבל: $\sum_{i,j} |\mu(A_{ij})| \le |\mu|(E)$ ע"י לקיחת סופרמום על כל הבחירות האפשריות של t_i~~

<u>הוכחה:</u> תהי $\{E_i\}$ חלוקה של $E \in \mathcal{M}$, ו-$\delta > 0$. לכל $i=1,2,\dots$ יש ל- E_i חלוקה $\{A_{ij}\}$ רק ש- $\sum_j |\mu(A_{ij})| > |\mu|(E_i) - \frac{\delta}{2^i}$. היות ש- $\{A_{ij}\}_{i,j}$ חלוקה של E נקבל $\sum |\mu|(E_i) - \delta < \sum |\mu(A_{ij})| \le \mu(E)$
והיות ש-δ שרירותי נקבל $\sum |\mu|(E_i) \le \mu(E)$
מצד שני, תהי $\{A_j\}$ חלוקה של E, אזי לכל i קבוע $\{A_j \cap E_i\}$ חלוקה של A_j ולכל i קבוע כו חלוקה של E_i. לכן

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \left|\sum_i \mu(A_j \cap E_i)\right| \le \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| \underset{\text{מספרים חיוביים}}{=} \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \le$$

$$\le \sum_i |\mu|(E_i)$$

כעת שנקח סופרמום לכל חלוקה $\{A_j\}$ של E נקבל $|\mu|(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i)$. קל לראות גם ש- $|\mu|(\emptyset) = \emptyset$ ☺

<u>משפט:</u> לכל מידה מרוכבת μ $|\mu|(X) < \infty$.

(30) 12.03.08
מידה

יום הולדת שמח לעמי!

מידות מרוכבות

הערה: רצוי לשים לב ש- $|\mu(E)| \le |\mu|(E)$ לכל $E\in\mathfrak{m}$.

הגדרה: מידה מרוכבת המקבלת רק ערכים ממשיים נקראת מידה ממשית או מידה מסומנת (signed measure). בהינתן מידה μ כזו נגדיר $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu|+\mu)$, $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu|-\mu)$. אזי μ^+ , μ^- מידות חיוביות על $\mathfrak{m}$ ומתקיים

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- \qquad \mu = \mu^+ - \mu^-$$

μ^+ נקראת החלק החיובי של μ (positive variation)

μ^- נקראת החלק השלילי של μ (negative variation)

הפירוק $\mu=\mu^+-\mu^-$ נקרא פירוק Jordan של μ.

למידה מרוכבת קיים פירוק יחיד לקומבינציה לינארית של שתי מידות ממשיות $(\mathrm{Re}\,\mu)(E) = \mathrm{Re}(\mu(E))$, $(\mathrm{Im}\,\mu)(E) = \mathrm{Im}(\mu(E))$
$\mu = \mathrm{Re}\,\mu + \mathrm{Im}\,\mu$ ולכן יש לה פירוק Jordan לקומבינציה לינארית של ארבע מידות חיוביות (המתקבלת מפירוק Jordan של החלק הממשי והחלק המדומה).

הגדרה: תהי μ מידה חיובית, λ מידה (מרוכבת או חיובית) המוגדרות על אותו מרחב מדיד. אומרים ש-λ רציפה בהחלט ביחס ל-μ (λ is absolutely continuous w.r.t. μ) וכותבים $\lambda \ll \mu$ (או $\mu \gg \lambda$) אם $\lambda(E)=0 \Leftarrow \mu(E)=0$ לכל $E\in\mathfrak{m}$.

אומרים ש-λ מרוכזת על $A\in\mathfrak{m}$ (או נתמכת על A) אם לכל $E\in\mathfrak{m}$ $\lambda(E)=\lambda(A\cap E)$ (זה שקול לכך ש- $A\cap E=\emptyset \Rightarrow \mu(E)=0$)
וגם לכך ש- $|\lambda|(X\setminus A)=0$
(הערה: אין פה יחידות של A!).

דוגמה: מידת בורל על $\mathbb{R}$ $\mu(A)=\int_A \chi_{[0,1]}\,dx$ היא מרוכזת על $\mathbb{R}$, וגם על $[0,1]$, וגם על $[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$ וגם על $[-1,3]\setminus\mathbb{Q}$

אומרים ש-λ סינגולרית ביחס ל-μ אם λ מרוכזת על קבוצה $A \in \mathcal{M}$ שעבורה $\mu(A)=0$.

(מההגדרות הנ"ל אפשר גם ש-μ תהיה מידה מרוכבת ואז אומרים ש-λ רציפה לחלוטין / סינגולרית ביחס ל-μ אם יש לה התכונה המתאימה ביחס ל-$|\mu|$.)

<u>דוגמה</u>: $\mu(A)=\int_A \chi_{[0,1]}\,dx$; $\lambda(A)=\int_A \chi_{[-1,-\frac{1}{2}]}\,dx$ אזי λ סינגולרית ביחס ל-μ. וגם μ סינגולרית ביחס ל-λ.

<u>דוגמה</u>: $\mu(A)=\int_A \chi_{[0,1]}\,dx$; $\lambda(A)=\begin{cases}1 & \frac{1}{2}\in A \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. אזי λ סינגולרית ביחס ל-μ. וההפך. משום ש-μ מרוכזת על $[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$

אם λ_1, λ_2 מידות אומרים שהן סינגולריות הדדית (Mutually Singular) ומסמנים $\lambda_1 \perp \lambda_2$ אם קיימות קבוצות זרות $A,B \in \mathcal{M}$ כך ש-λ_1 מרוכזת על A ; λ_2 מרוכזת על B. [קל לראות שאם λ_1 סינגולרית ביחס ל-λ_2 אזי גם λ_2 סינגולרית ביחס ל-λ_1. ואז הן סינגולריות הדדית - תרגיל]

<u>משפט</u>: יהיו $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ מידות על $\mathcal{M}$ כך ש-μ חיובית. אזי

(א) אם λ מרוכזת על A אזי גם $|\lambda|$

(ב) אם $\lambda_1 \perp \lambda_2$ אזי $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$

(ג) אם $\lambda_1 \perp \mu$; $\lambda_2 \perp \mu$ אזי $\lambda_1+\lambda_2 \perp \mu$

(ד) אם $\lambda_1 \ll \mu$; $\lambda_2 \ll \mu$ אזי $\lambda_1+\lambda_2 \ll \mu$

(ה) אם $\lambda \ll \mu$ אזי $|\lambda| \ll \mu$

(ו) אם $\lambda_1 \ll \mu$; $\lambda_2 \perp \mu$ אזי $\lambda_1 \perp \lambda_2$

(ז) אם $\lambda \ll \mu$; $\lambda \perp \mu$ אזי $\lambda = 0$.

<u>הוכחה</u>: (א) נניח $A \cap E = \emptyset$, $\{E_j\}$ חלוקה של E $\Leftarrow$ לכל j ; $\lambda(E_j)=0$
$\Leftarrow$ $|\lambda|(E)=0$.

(ב) נובע מיידית מ-(א).

17/3/08
מידה

טענה: $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ מידות ; $\mu \geq 0$.

(א) אם λ מרוכזת על A רק אם $|\lambda|$.

(ב) $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$

(ג) אם $\mu \perp \lambda_1$; $\mu \perp \lambda_2$ אזי $\mu \perp \lambda_1 + \lambda_2$

(ד) אם $\lambda_1 \ll \mu$; $\lambda_2 \ll \mu$ אז $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$

(ה) $\lambda \ll \mu \Leftrightarrow |\lambda| \ll \mu$

(ו) $\lambda_1 \ll \mu$; $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$

(ז) $\lambda \ll \mu$; $\lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$.

הוכחה:

(א)
(ב) } הוכחנו

(ג) יש קבוצות זרות A_1, B_1 כך ש- λ_1 מרוכזת על A_1 ; μ מרוכזת על B_1. ויש קבוצות זרות A_2, B_2 כך ש- λ_2 מרוכזת על A_2 ; μ מרוכזת על B_2. מכאן ש- $\lambda_1 + \lambda_2$ מרוכזת על $A = A_1 \cup A_2$; μ מרוכזת על $B = B_1 \cap B_2$ ומתקיים $A \cap B = \emptyset$.

(ד) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda_1(A) = \lambda_2(A) = 0 \Rightarrow$
$$(\lambda_1 + \lambda_2)(A) = \lambda_1(A) + \lambda_2(A) = 0$$

(ה) אם $\mu(E) = 0$; $\{E_j\}$ חלוקה של E אזי $\mu(E_j) = 0$ לכל j והיות ש- $\lambda \ll \mu$ גם $\lambda(E_j) = 0$ לכל j
$\Leftarrow \sum |\lambda(E_j)| = \sum 0 = 0$ לכל חלוקה כנ"ל
לכן $|\lambda|(E) = 0$. $\Rightarrow$ $|\lambda| \ll \mu$.

(ו) $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_2$ מרוכזת על A עם $\mu(A) = 0$ והיות ש- $\lambda_1 \ll \mu$ $\lambda_1(E) = 0$ לכל $E \subseteq A$. לכן λ_1 מרוכזת על המשלים של A

(ז) מ-(ו) נובע ש $\lambda \perp \lambda$ וזה ייתכן רק אם $\lambda = 0$.

הגדרה: מידה חיובית μ של X נקראת סופית אם $\mu(X)<\infty$. היא נקראת σ-סופית אם $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, ו- $\mu(E_n)<\infty$ לכל n.

דוגמה: מידת לבג של $\mathbb{R}^n$ היא σ-סופית כי אפשר לחלק את $\mathbb{R}^n$ לקוביות בעלות מידה סופית. מידת המניה של $(0,1)$ היא לא σ-סופית.

הערה: מידה של מרחב שהוא σ-קומפקטי שנותנת משקל סופי לקבוצות קומפקטיות היא σ-סופית (דה!)

למה: אם μ מידה חיובית σ-סופית של X אז קיימת פונקציה $w\in L^1(\mu)$ כך ש- $0<w(x)<1$ לכל $x\in X$.

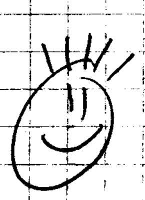
הוכחה: $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n\in\mathfrak{M}$, $\mu(E_n)<\infty$. נגדיר

$$W_n(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{-n}}{1+\mu(E_n)} & x\in E_n\\ 0 & x\in X\setminus E_n\end{cases}$$

ונגדיר $w(x)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(x)$. ברור ש- $0<w(x)<1$ ($0<w(x)$ כי לכל x יש לפחות n אחד שעבורו $x\in E_n$ ואז יש מחובר חיובי ממש בטור. $1>w(x)$ כי $\sum\frac{2^{-n}}{1+\mu(E_n)}<1$).

$w\in L^1$ כי

$$\int|w(x)|\,d\mu\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}w_n\,d\mu\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(E_n)2^{-n}}{1+\mu(E_n)}\le 1$$



הגדרה: מרחב בנך הוא מרחב נורמי שלם מעל $\mathbb{C}$ ($L^p(\mu)$)
מרחב הילברט הוא מרחב מכפלה פנימית שלם מעל $\mathbb{C}$. ($L^2(\mu)$)

$$\langle f,g\rangle=\int f\bar{g}\,d\mu$$

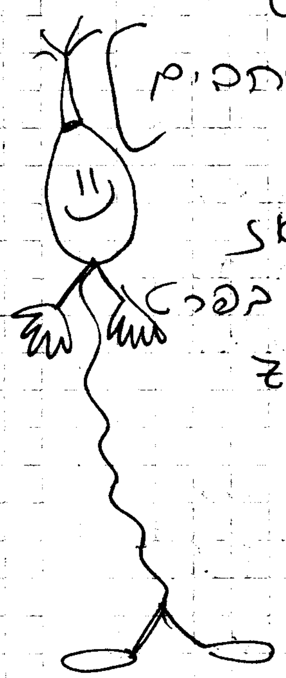
$$\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}$$

טענה: אם $\mathcal{H}$ מרחב הילברט, אזי כל פונקציונל לינארי חסום על $\mathcal{H}$ שקול למכפלה פנימית בווקטור כלשהו במרחב. כלומר אם L פונקציונל כנ"ל, אזי קיים $y \in \mathcal{H}$ ויחיד כך ש- $Lx = \langle x, y \rangle$ לכל $x \in \mathcal{H}$.

הערה: L כנ"ל נקרא חסום אם $\sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} < \infty$
(לפעמים אומרים גם: פונקציונל לינארי רציף)

הוכחה: נסמן $M = \{x \in \mathcal{H} : Lx = 0\}$
$M^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \forall y \in \mathcal{H} \ \langle x, y \rangle = 0\}$
קל לראות ש- $M, M^{\perp}$ תת מרחבים סגורים. אם $L = 0$
ברור ש- $y = 0$. אחרת $M^{\perp} \neq \{0\}$ וקיים $z \in M^{\perp}$
כך ש- $\|z\| = 1$. נגדיר
$u(x) = (Lx)z - (Lz)x$
היות ש- $Lu(x) = (Lx)(Lz) - (Lz)(L(x)) = 0$
נובע ש- $u \in M$. לכן $\langle u, z \rangle = 0$ ומתקיים

$$Lx = (Lx)\langle z, z \rangle = \langle (Lx)z, z \rangle =$$
$$= \langle (Lx)z, z \rangle - \langle u, z \rangle =$$
$$= \langle (Lx)z - u, z \rangle = \langle (Lz)x, z \rangle =$$
$$= (Lz)\langle x, z \rangle = \langle x, \overline{(Lz)}\, z \rangle \Rightarrow y = \overline{(Lz)}\, z$$



[* השלמות דרושה כדי להבטיח שהתת מרחבים סגורים.]

להוכחת היחידות אם $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$ לכל x אז
עבור $z = y - y'$ $\langle x, z \rangle = 0$ לכל x, בפרט
עבור $x = z$ $\Leftarrow$ $\|z\| = 0$ $\Leftarrow$ $z = 0$
$\Leftarrow$ $y = y'$.

<u>משפט הפירוק של לבג</u>. תהי μ מידה חיובית σ-סופית על $\mathfrak{M}$ ו- λ מידה מרוכבת על $\mathfrak{M}$. אזי קיימות מידות מרוכבות יחידות על $\mathfrak{M}$, λ_s ו- λ_a כך ש- $\lambda_s \perp \mu$, $\lambda_a \ll \mu$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. אם λ חיובית סופית, כך גם λ_s ו- λ_a.

<u>משפט Radon-Nikodym</u>: בתנאי המשפט הקודם, יש $h \in L^1(\mu)$ יחידה כך שלכל $E \in \mathfrak{M}$ $\lambda_a(E) = \int_E h\,d\mu$

<u>הערות</u>: הזוג (λ_a, λ_s) נקרא פירוק לבג של λ ביחס ל- μ. פורמלית, נהוג לרשום את מסקנת משפט Radon-Nikodym כ- $d\lambda_a = h\,d\mu$ (או $h = \frac{d\lambda_a}{d\mu}$). h הנ"ל נקראת נגזרת Radon-Nikodym של λ_a ביחס ל- μ.

<u>הוכחת המשפטים</u>: נראה תחילה שהפירוק (λ_a, λ_s), אם קיים, הוא יחיד. אם (λ_a', λ_s') פירוק אחר בעל אותן תכונות אז $\lambda_a' + \lambda_s' = \lambda = \lambda_a + \lambda_s$.

$\Leftarrow$ $\lambda_a' - \lambda_a = \lambda_s - \lambda_s'$

ומתקיים $\lambda_a' - \lambda_a \ll \mu$, $\lambda_s - \lambda_s' \perp \mu$ ועפ"י מה שראינו $0 = \lambda_s - \lambda_s' = \lambda_a' - \lambda_a$. ומכאן היחידות.

נניח כעת ש- λ מידה חיובית סופית על $\mathfrak{M}$ ותהי $w \in L^1(\mu)$ המקיימת $0 < w(x) < 1$ לכל $x \in X$ (ראינו קודם שקיימת כזאת). הביטוי $d\varphi = d\lambda + w\,d\mu$ מגדיר מידה חיובית סופית על $\mathfrak{M}$ המקיימת לכל f מדידה

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\lambda + \int_X f w\,d\mu$$

אם $f \in L^2(\varphi)$ נקבל מאי-שוויון קושי-שוורץ ש-

$$\left|\int_X f\,d\lambda\right| \le \int_X |f|\,d\lambda \le \int_X |f|\,d\varphi \le \left(\int_X |f|^2\,d\varphi\right)^{1/2} \varphi(X)^{1/2}$$

היות ש- $\varphi(X) < \infty$ נקבל שההעתקה $f \mapsto \int_X f\,d\lambda$ מגדירה פונקציונל לינארי חסום על $L^2(\varphi)$.

היות שפונקציונל כזה שקול לכפל סקלרי באיבר של $L^2(\varphi)$,
קיימת $g \in L^2(\varphi)$ רק ש- $\int_X f d\lambda = \int_X f g d\varphi$ לכל $f \in L^2(\varphi)$
עבור $f = \chi_E$ עבור $E \in \mathfrak{M}$ בעלת מידה חיובית
$\varphi(E) > 0$ נקבל

$$\int_E g d\varphi = \int_X \chi_E g d\varphi = \int_X \chi_E d\lambda = \lambda(E)$$

לכן $0 \le \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \le 1$. מכאן נקבל ש-
$g(x) \in [0,1]$ כמעט בכל מקום $[\varphi]$ לכן ניתן להניח $0 \le g(x) \le 1$
לכל $x \in X$.

כעת נקבל $(*)$ $\int_X (1-g) f d\lambda = \int_X f g w d\mu$

נגדיר $B = \{x \in X : g(x) = 1\}$ $A = \{x \in X : 0 \le g(x) < 1\}$

ואת המידות λ_a, λ_s באופן הבא:

$$\lambda_s(E) = \lambda(B \cap E)$$
$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E)$$
לכל $E \in \mathfrak{M}$

נראה שמתקיימות התכונות הדרושות:

עבור $f = \chi_B$ ב-$(*)$ ברור שאגף שמאל מתאפס
ואגף ימין הוא מהצורה $\int_B w d\mu$. היות ש- $w(x) > 0$
לכל $x \in X$ נקבל ש- $\mu(B) = 0$ לכן $\mu \perp \lambda_s$
היות ש- g חסומה, $(*)$ מתקיים עבור f מהצורה
$(1+g+g^2+\dots+g^n)\chi_E$ עבור $E \in \mathfrak{M}$; $n \in \mathbb{N}$ ו- f
כזאת $(*)$ הוא מהצורה

$$\int_E (1-g^{n+1}) d\lambda = \int_E g(1+g+\dots+g^n) w d\mu \quad (**)$$

בכל $x \in B$ $g(x) = 1$ לכן $1 - g^{n+1}(x) = 0$.
בכל $x \in A$ $g^{n+1}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ מונוטונית. לכן כאשר $n \to \infty$
אגף שמאל של $(**)$ מתכנס ל- $\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E)$.
גם בעת האינטגרנדים באגף ימין של $(**)$ עולים מונוטונית
ומתכנסים לגבול נקודתי אי-שלילי h. ממשפט ההתכנסות
המונוטונית נקבל שאגף ימין של $(**)$ מתכנס ל- $\int_E h d\mu$
כאשר $n \to \infty$. לכן נקבל $\lambda_a(E) = \int_E h d\mu$ ועבור $E = X$
נקבל $h \in L^1(\mu)$ היות ש- $\lambda_a(X) < \infty$ וברור גם ש- $\lambda_a \ll \mu$.

וזה משלים את הוכחת שני המשפטים ל-λ חיובית סופית. עבור λ מרוכבת, נביא אותה כפירוק Jordan לקומבינציה ליניארית של ארבע מידות חיוביות ונקבל את התוצאה מהמקרה החיובי.

☺

שבוע הבא ביום שני מתניה בן ארצי מתחיל את יונים.

(34) 19.03.08
מידה

<u>הערה</u>: רוב תוכן משפט הפירוק של לבג ומשפט רדון-ניקודים תקף למקרה שגם μ וגם λ חיוביות ו-σ-סופיות. במקרה כזה ניתן לפרק $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ כך ש- $\{X_n\}$ חלוקה של X וש- $\mu(X_n)<\infty$ וגם $\lambda(X_n)<\infty$ ומתקיים $\lambda(E)=\sum_n \lambda(E\cap X_n)$
ואז מהפירוק $\lambda_n=\lambda_{n,a}+\lambda_{n,s}$ של כל λ_n (ביחס ל- μ) נקבל פירוק $\lambda_a=\sum_n \lambda_{n,a}$, $\lambda_s=\sum_n \lambda_{n,s}$ כך ש- $\lambda=\lambda_a+\lambda_s$
ו- λ_a ו- λ_s בעלות התכונות הדרושות. עדיין מתקבלת פונקציה h המוגדרת ע"י $h(x)=h_n(x)$ ו- $x\in X_n$ שעבורה מתקיים $\lambda_a(E)=\int_E h\,d\mu$ אבל באופן כללי $h\notin L^1(\mu)$

<u>משפט</u>: יהיו μ מידה חיובית ו- λ מידה מרוכבת על $\mathfrak{M}$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(א) $\lambda \ll \mu$

(ב) לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שלכל $E\in\mathfrak{M}$ $\mu(E)<\delta \Rightarrow |\lambda(E)|<\varepsilon$

<u>הוכחה</u>: נניח ש-(ב) מתקיים. אם $\mu(E)=0$ אזי $\mu(E)<\delta$ לכל $\delta>0$ ונובע $|\lambda(E)|<\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$. לכן $\lambda(E)=0$.
לכן ב $\Rightarrow$ א
נניח ש-(ב) איננו נכון. אזי קיים $\varepsilon>0$ וקיימות $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathfrak{M}$ כך ש- $\mu(E_n)<2^{-n}$ אבל $|\lambda|(E_n)\geq\varepsilon$. נגדיר $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$
אז $A_n=\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i$ וכן $\mu(A_n)<2^{-n+1}$ וכן $A_n\supseteq A_{n+1}$
ונובע $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$ אבל $|\lambda|(A)=\lim_{n\to\infty}|\lambda|(A_n)\geq\varepsilon>0$
(כי $|\lambda|(A_n)\geq|\lambda|(E_n)$) [אפשר להשתמש כאן ברציפות המידה כי λ מרוכבת אז הווריאציה הטוטאלית שלה סופית)
מכאן ש- $|\lambda|\ll\mu$ לא מתקיים אז גם לא מתקיים (א).

<u>משפט</u>: אם μ מידה מרוכבת על $\mathfrak{M}$ אזי יש פונקציה מרוכבת מדידה h המקיימת $|h(x)|=1$ לכל $x\in X$ ו- $d\mu=h\,d|\mu|$
(כלומר בכל אינטגרל אפשר להחליף את $d\mu$ ב- $h\,d|\mu|$,
כלומר $\mu(E)=\int_E h\,d|\mu|$)

הערה: זה נקרא פירוק פולארי או הצגה פולארית של μ.

הוכחה: ברור ש- $|\mu| \gg \mu$ ולכן ממשפט רדון-ניקודים נובע שיש $h \in L^1(\mu)$ המקיימת את השוויון הנדרש. (נראה ש- $|h(x)|=1$ כ"מ $[\mu]$ ואז ברור שניתן לקחת $|h(x)|=1$ לכל $x \in X$. נגדיר $A_r = \{x : |h(x)| < r\}$ $(r \geq 0)$ ותהי $\{E_j\}$ חלוקה של A_r. אזי

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} h \, d|\mu| \right| \leq \sum_j r|\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r)$$

$$\Leftarrow \quad |\mu|(A_r) \leq r \cdot |\mu|(A_r)$$

ו- $r<1$ זה אפשרי רק אם $|\mu|(A_r)=0$ ולכן $|h(x)| \geq 1$ כ"מ $[\mu]$. מצד שני, אם $|\mu|(E)>0$ אז

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h \, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1$$

ונובע $|h(x)| \leq 1$ כ"מ $[\mu]$ ובסה"כ $|h(x)|=1$ כ"מ $[\mu]$.

משפט: נניח ש- μ מידה חיובית על $\mathfrak{M}$, $g \in L^1(\mu)$ נגדיר $\lambda(E) = \int_E g \, d\mu$. אזי $|\lambda|(E) = \int_E |g| \, d\mu$

הוכחה: $d\lambda = h \, d|\lambda|$ וגם $d\lambda = g \, d\mu$. לכן $h \, d|\lambda| = g \, d\mu \Leftarrow d|\lambda| = \bar{h} g \, d\mu$. היות ש $|\lambda| \geq 0$, $\mu \geq 0$, נובע $\bar{h} g \geq 0$ כ"מ $[\mu]$ ולכן $\bar{h} g = |g|$ כ"מ $[\mu]$.

(35) 24.03.08
מידה

שיעור עם פרופ' בן-ארצי

- m - מידת בורל (לבג) על $\mathbb{R}^k$.
- $B(x,r)$ הכדור הפתוח ברדיוס r סביב x (בנורמה אוקלידית)

נתונה מידה מרוכבת μ של $\mathbb{R}^k$ אז מגדירים:
לכל $x\in\mathbb{R}^k$ ו- $0<r$

$$Q_r(\mu)(x)=\frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

נזכור שמידה מרוכבת הוריאציה הטוטאלית שלה סופית.

<u>הגדרה:</u>

$$(D\mu)(x)=\lim_{r\to 0} Q_r(\mu)(x)$$

כמובן צריך לבדוק מתי הגבול מצד ימין קיים וזו תהיה מטרתנו היום.

<u>הגדרת הפונקציה המקסימלית:</u> נניח ש- $0\le\mu$ מידה. הפונקציה המקסימלית ביחס ל- μ מוגדרת ע"י

$$(M\mu)(x)=\sup_{0<r<\infty} Q_r(\mu)(x)\in[0,\infty]$$

$Q_r(\mu)(x)$ עבור $\mu\ge 0$ היא רציפה ומדידה כפונקציה של x (תרגיל!) לכן גם $(M\mu)(x)$ מדידה (אפשר לקחת את הסופרמום רק על הרציונליים ואז זו קבוצה בת מניה).

<u>הגדרה:</u> אם μ מרוכבת אז $M\mu\equiv M|\mu|$

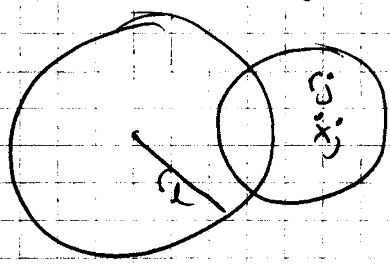
<u>למה:</u> אם W איחוד סופי של כדורים $W=\bigcup_{i=1}^{N}B(x_i,r_i)$ אזי קיימת $S\subseteq\{1,\dots,N\}$ כך ש-

(א) הכדורים $B(x_j,r_j)$ עבור $j\in S$ זרים בזוגות

(ב) $W\subseteq\bigcup_{j\in S}B(x_j,3r_j)$

(ג) $m(W)\le 3^k\sum_{j\in S}m(B(x_j,r_j))$

הוכחה: נסדר את הכדורים ע"י רדיוס יורד $r_1 \ge r_2 \ge \dots$
נגדיר $i_1 = 1$ בתור האינדקס הראשון ב-S. נסתכל
בכדור $B(x_j, r_j)$ הראשון שאינו נוגע את $B(x_1, r_1)$
האינדקס זה נקרא $i_2 \in S$. S תיבנה ע"י מיצוי התהליך.
הוא כמובן סופי. נניח ש- $j \notin S$ אזי
קיים כדור $B(x_\ell, r_\ell)$ $\ell \in S$ $r_\ell \ge r_j$
וכן ש- $B(x_\ell, r_\ell) \cap B(x_j, r_j) \neq \emptyset$
לכן $B(x_\ell, 3r_\ell) \supseteq B(x_j, r_j)$



(זה מאוד חשוב אך פשוט מהציור)
מכאן נובע (ב).
מכאן כמובן נובע גם (ג) מאינווריאנטיות של המידה m
ומכך שכשמגדילים את הרדיוס פי 3 הנפח גדל פי 3^k.

משפט: אם μ מידה מרוכבת על $\mathbb{R}^k$ אזי לכל מספר חיובי $\lambda > 0$ מתקיים

$$m(\overbrace{\{x \mid (M\mu)(x) > \lambda\}}^{\{M\mu > \lambda\}}) \le 3^k \lambda^{-1} |\mu|(\mathbb{R}^k)$$

הוכחה: מספיק להניח ש- $\mu \ge 0$, כי באופן כללי לפי ההגדרה) - μ לכל $M\mu = M|\mu|$.
תהי K תת קבוצה קומפקטית של $\{M\mu > \lambda\}$ ל-
$x \in K$ הוא מרכז של כדור פתוח $B(x,r)$ כך ש-

$$\mu(B(x,r)) \ge \lambda m(B(x,r)) \Longleftarrow \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))} > \lambda$$

הכדורים הללו מכסים את K לכן מספר סופי שלהם
מכסה את K. לפי הלמה, קיים אוסף סופי של כדורים
זרים $B_1, \dots, B_\ell$ המקיימים את תנאי הלמה:

$$m(K) \le 3^k \sum_{i=1}^{\ell} m(B(x_i, r_i)) \le$$
$$\le 3^k \cdot \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{\ell} \mu(B(x_i, r_i)) \le$$
$$\le 3^k \lambda^{-1} \mu(\mathbb{R}^k)$$

כי הכדורים זרים בזוגות

בגלל הרגולריות של מידת בורל

$$m\{x : M\mu>\lambda\} = \sup\{K : \underset{\text{קומפקטי}}{K}\subseteq\{M\mu>\lambda\}\} \le$$

$$\le 3^k\lambda^{-1}\mu(\mathbb{R}^k)$$

הגדרה: נאמר שפונקציה מדידה g שייכת ל- "חלש-L^1" (weak L^1) אם קיים קבוע $C>0$ כך שלכל $\lambda>0$
$\lambda m\{x : |g(x)|>\lambda\}\le C$.

מסקנה: $M\mu(x)$ היא ב- חלש-L^1 לכל μ מרוכבת.

טענה: $f\in L^1(\mathbb{R}^k) \Leftarrow f$ היא חלש-L^1.

הוכחה:
$$\lambda m(\{x : |f(x)|>\lambda\}) \le$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^k}|f(x)|\,dx = \|f\|_1$$

ההפך כמובן לא נכון - למשל $f(x)=\frac{1}{x}$

אם $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ היא מגדירה מידה $\mu(E)=\int_E f\,dx$
אז היא מגדירה פונקציה מקסימלית, שאותה נסמן ב Mf.
$$(Mf)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f|\,dm$$

מסקנה: $\lambda m\{x \mid (Mf)(x)>\lambda\} \le 3^k\|f\|_1$

הגדרה: יהי $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ נקודה $x\in\mathbb{R}^k$ שעבורה
$$\lim_{r\to0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|\underbrace{dm(y)}_{\text{אינטגרציה לפי } y}=0$$
נקראת נקודת לבג של f.

טענה: אם x נקודת רציפות של f, אזי x נקודת לבג. (זה ברור מאינפי).

משפט: אם $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ אזי כמעט כל $x\in\mathbb{R}^k$ הוא נקודת לבג של f.

<u>הוכחה:</u> נגדיר לכל $r\ge 0$ פונקציה

$$0 \le (T_r f)(x) = \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dm(y)$$

ונגדיר $(Tf)(x) = \limsup_{r\to 0}(T_r f)(x)$. צריך להראות

ש- $(Tf)(x)=0$ כמעט בכל מקום.

יהי $n\in\mathbb{N}$ טבעי, הפונקציות הרציפות צפופות ב- L^1

לכן ניתן למצוא $g\in L^1(\mathbb{R}^k)\cap C(\mathbb{R}^k)$ כך ש-

$\|f-g\|_1<\frac{1}{n}$. נסמן $h=f-g$. כמובן $Tg=0$ רק

בגלל הרציפות. נוסף לכך

$$T_r h(x) \le \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |h|\,dm(y) + |h(x)|$$

$$\le Mh(x)+h(x)$$

אבל $T_r f(x) \le T_r g(x) + T_r h(x)$ (אי-שוויון המשולש)

⇐ $Tf(x)\le Th(x)\le Mh(x)+|h(x)|$

⇐ $\{Tf>2y\}\subseteq \underbrace{\{Mh>y\}\cup\{|h|>y\}}_{E(y,n)}$

$$m(E(y,n)) \le 3^k y^{-1}\|h\|_1 + y^{-1}\|h\|_1 \le y^{-1}(3^k+1)\cdot\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow m\{Tf>2y\}\le \frac{y^{-1}(3^k+1)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

⇐ $m\{Tf>2y\}=0$ וזה לכל y. לכן

$$m\{Tf\neq 0\}=0$$

יהי $\mu\ge 0$ מידה כך ש- $\mu\ll m$. ממשפט רדון-ניקודים

נובע שקיימת $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ כך ש- $\mu(E)=\int_E f\,dm$. מהמשפט

שלנו נובע $\lim_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))}=f(x)$ בכל נקודת

לבג של f. נסמן $D\mu(x)=\lim_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))}$.

<u>מסקנה:</u> אם $\mu\ll m$ אזי $D\mu(x)=f(x)$ כמעט לכל $x\in\mathbb{R}^k$

ביחס ל- m.

<u>הערה:</u> נובע $\frac{\left|\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dm(y)\right|}{m(B(x,r))}\xrightarrow[r\to 0]{}0$ (וגם) $\frac{\int_{B(x,r)} f(y)\,dm(y)}{m(B(x,r))}\xrightarrow[r\to 0]{} f(x)$ בנקודות לבג

כדי להוכיח נכתוב $f(y)=f(y)-f(x)+f(x)$ ונשתמש באי-שוויון המשולש.

37 31.03.08
מידה

במבחן - רק חומר מההרצאות! התרגול בא רק לעזור. ☺

<u>הגדרה:</u> תהי $x\in\mathbb{R}^k$. אומרים שסדרת קבוצות בורל $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ <u>מתכווצת יפה</u> ל-x אם קיימים $\alpha>0$ וסדרת מספרים חיוביים $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{i\to\infty} r_i=0$ כך שלכל i מתקיים $E_i\subseteq B(x,r_i)$ וגם $m(E_i)>\alpha m B(x,r_i)$

מה שחשוב בהגדרה הזו, שאולי לא כל כך טבעי, שאין דרישה ש-x נמצא בקבוצות.

<u>משפט:</u> תהי $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$. $x\in\mathbb{R}^k$ נקודת לבג של f; $\{E_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות המתכווצת יפה ל-x. אזי $f(x)=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{m(E_i(x))}\cdot\int_{E_i(x)} f\,dm$

<u>הוכחה:</u> יהיו α ו-$\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ המתאימים ל-$\{E_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ מהגדרת התכווצות יפה. אזי

$$\frac{\alpha}{m(E_i(x))}\int_{E_i(x)}|f-f(x)|\,dm\le\frac{1}{m(E_i(x))}\int_{B(x,r_i)}|f-f(x)|\,dm\xrightarrow[i\to\infty]{}0$$ ☺

<u>משפט:</u> אם $f\in L^1(\mathbb{R})$; $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f\,dm$ $(-\infty<x<\infty)$ אזי $F'(x)=f(x)$ בכל נקודת לבג של f ולכן כמעט בכל מקום ביחס ל-m.

<u>הוכחה:</u> תהי $\{\delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת חיוביים השואפת לאפס. אם ניקח במשפט הקודם $E_i(x)=[x,x+\delta_i]$ (עבור נקודת לבג x) נקבל שהנגזרת החד-צדדית של F מימין קיימת ושווה ל-$f(x)$. שכן:

$$\frac{F(x+\delta_i)-F(x)}{\delta_i}=\frac{1}{m([x,x+\delta_i])}\int_{x}^{x+\delta_i} f\,dm\xrightarrow[i\to\infty]{}f(x)$$

בדומה, מראים את הקיום והשוויון עבור הנגזרת החד-צדדית משמאל. ומכאן ש- $F'(x)=f(x)$ בכל נקודת לבג x. ☺

<u>הערה:</u> F מהמשפט היא רציפה אבל לא הוכחנו את זה. (כמעט בכל מקום כמובן)

<u>הגדרה:</u> תהי E קבוצה מדידה לבג ב-$\mathbb{R}^k$. הצפיפות <u>המטרית</u> של E בנקודה $x\in\mathbb{R}^k$ מוגדרת להיות $\lim_{r\to\infty}\frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}$ בכל נקודה שבה הגבול קיים.

<u>מסקנה:</u> הצפיפות המטרית של קבוצה מדידה E היא 1 (כמעט בכל מקום ביחס ל-m) של E ו-0 כמעט בכל מקום ביחס ל-m של E^c. בפרט, לא קיימים קבוצה מדידה $E\subseteq\mathbb{R}$ ו- $0<\varepsilon<1$ כך ש- $\varepsilon<\frac{m(E\cap I)}{m(I)}<1-\varepsilon$ לכל קטע I.

<u>תזכורת:</u> בהינתן מידה ממשית μ מגדירים

$$\mu^+=\tfrac{1}{2}(|\mu|+\mu)\qquad\mu^-=\tfrac{1}{2}(|\mu|-\mu)$$

משפט הפירוק של Hahn: תהי μ מידה ממשית על $\mathfrak{M}$. אזי קיימות $A,B\in\mathfrak{M}$ כך ש- $A\cup B=X$, $A\cap B=\emptyset$ וכך שלכל $E\in\mathfrak{M}$ מתקיים

$$\mu^+(E)=\mu(A\cap E) \qquad \mu^-(E)=-\mu(B\cap E)$$

- הזוג (A,B) נקרא ~~פירוק~~ Hahn של X המושרה ע"י μ. ניתן לרשום

$$d\mu^+=\chi_A\,d\mu \qquad d\mu^-=-\chi_B\,d\mu$$

הוכחה: $d\mu=h\,d|\mu|$ עם $|h|=1$ (פירוק פולרי). היות ש- μ ממשית נובע ש- h ממשית (כמעט בכל מקום ביחס ל- $|\mu|$ ומכיוון ע"י הגדרה מחדש ניתן להניח בכל נקודה). לכן $h(x)$ מקבלת רק ערכים 1 או -1.
נגדיר $A=\{x:\ h(x)=1\}$, $B=\{x:\ h(x)=-1\}$. היות ש- $\mu^+=\frac12(|\mu|+\mu)$ והיות ש- $\frac12(1+h)=\begin{cases}h & x\in A\\ 0 & x\in B\end{cases}$ נובע שלכל $E\in\mathfrak{M}$

$$\mu^+(E)=\frac12\int_E(1+h)\,d|\mu|=\int_{E\cap A}h\,d|\mu|=\mu(E\cap A)$$

כעת, היות ש- $\mu(E)=\mu(A\cap E)+\mu(B\cap E)$ ומ- $\mu=\mu^+-\mu^-$ נובע גם השוויון $\mu^-(E)=-\mu(B\cap E)$. ☺

מסקנה: אם $\mu=\lambda_1-\lambda_2$ כאשר λ_1,λ_2 חיוביות, אזי $\mu^+\le\lambda_1$ ו- $\mu^-\le\lambda_2$.
(זה אומר שבמידה מסוימת הפירוק הזה הוא אופטימלי - החלק החיובי בו הוא הקטן ביותר והחלק השלילי בו הוא הקטן ביותר)

הוכחה: בוודאי $\mu\le\lambda_1$. $\Leftarrow$ $\mu^+(E)=\mu(E\cap A)\le\lambda_1(E\cap A)\le\lambda_1(E)$
ובדומה $\lambda_2\ge\mu^-$. ☺

משפט ההצגה של Riesz (גרסה מרוכבת): יהי X מרחב האוסדורף קומפקט-מקומית. אזי לכל פונקציונל לינארי חסום Φ על $C_c(X)$ קיימת מידת בורל מרוכבת רגולרית יחידה μ על X כך שלכל $f\in C_c(X)$ $\Phi f=\int_X f\,d\mu$. ללא הוכחה

הערות:

א. מידת בורל מרוכבת נקראת רגולרית אם $|\mu|$ רגולרית.

ב. ניתן להחליף במשפט את $C_c(X)$ ב- $C_0(X)$ שהיא משפחת הפונקציות הרציפות "השואפות לאפס באינסוף" (כלומר לכל $\varepsilon>0$ אפשר למצוא קבוצה קומפקטית שמחוץ לה הפונקציה קטנה מ- ε).

ג. מתקיים: $|\mu|(X)=\sup_{f\in C_c(X)}\frac{|\Phi f|}{\|f\|_\infty}\equiv\|\Phi\|$ - כי הנורמה של Φ. Φ חסום אם $\|\Phi\|<\infty$.

מרחבי מכפלה

הגדרה: אם A,B קבוצות המכפלה הקרטזית שלהן היא הקבוצה
$$A\times B = \{(a,b) : a\in A,\ b\in B\}$$

הערה: אם $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$ אזי $A\times B\subseteq X\times Y$ אבל ב- $X\times Y$ יש כמובן הרבה קבוצות חלקיות שאינן מהצורה $A\times B$.

הגדרה: יהיו $(X,\mathcal{M})$, $(Y,\mathcal{N})$ מרחבים מדידים. נגדיר את $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ להיות ה-σ-אלגברה המינימלית ב- $X\times Y$ המכילה את כל הקבוצות מהצורה $A\times B$ ש- $A\in\mathcal{M}$ ו- $B\in\mathcal{N}$. הקבוצות $A\times B$ נקראות מלבנים.

טענה: $(X\times Y, \mathcal{M}\times\mathcal{N})$ בסימונים של ההגדרה הוא מרחב מדיד (ונסמנו בקיצור $X\times Y$).

הוכחה: ברור! $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ היא σ-אלגברה לפי ההגדרה!!

* זה אורך השיעור בכל מקום שאצלי כתוב ν בלוח היה γ, אבל ν נראה לי מתאים יותר!

אנחנו מדברים על מרחבי מכפלה של מרחבי מידה

$$(X,\mathcal{M}),\ (Y,\mathcal{N}) \longrightarrow (X\times Y,\ \mathcal{M}\times\mathcal{N})$$

(א)לגברת המכפלה. לא מכפלה קרטזית של $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{N}$ אלא ה-σ-אלגברה המינימלית שמכילה את הקבוצות המלבניות.

אם $E\subseteq X\times Y$, $x\in X$ ו-$y\in Y$ מגדירים:

$E_x=\{y:(x,y)\in E\}\subseteq Y$ - חתך x של E

$E^y=\{x:(x,y)\in E\}\subseteq X$ - חתך y של E.

<u>משפט</u>: אם $E\in\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ אזי $E_x\in\mathcal{N}$, $E^y\in\mathcal{M}$ לכל $x\in X$ $y\in Y$.

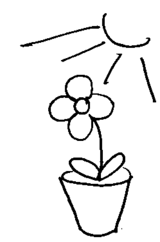
בהינתן פונקציה מוגדרת על $X\times Y$ נגדיר לכל $x\in X$ את f_x על Y ע"י: $f_x(y)=f(x,y)$ ובדומה לכל $y\in Y$ נגדיר f^y על X ע"י $f^y(x)=f(x,y)$.

<u>משפט</u>: תהי f פונקציה שהיא $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ מדידה על $X\times Y$. אזי

(א) לכל $x\in X$ f_x היא $\mathcal{N}$-מדידה על Y

(ב) לכל $y\in Y$ f^y היא $\mathcal{M}$-מדידה על X.

<u>משפט</u>: יהיו $(X,\mathcal{M},\mu)$ $(Y,\mathcal{N},\nu)$ מרחבי מידה σ-סופיים ותהי $Q\in\mathcal{M}\times\mathcal{N}$. אם נגדיר $\varphi(x)=\nu(Q_x)$, $\psi(y)=\mu(Q^y)$ לכל $x\in X$ $y\in Y$. אזי φ היא $\mathcal{M}$-מדידה, ψ היא $\mathcal{N}$-מדידה ומתקיים $\int_X\varphi\,d\mu=\int_Y\psi\,d\nu$.



<u>הגדרה</u>: אם $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ מרחבי מידה σ-סופיים, נגדיר את מידת המכפלה $\mu\times\nu$ על $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ באופן הבא:

$$(\mu\times\nu)(Q)=\int_X\nu(Q_x)\,d\mu(x)\underset{\text{משפט}}{=}\int_Y\mu(Q^y)\,d\nu(y)$$

מדגישים את שם המשתנה

ניתן להראות ש-$\mu\times\nu$ היא מידה σ-סופית על $(X\times Y,\mathcal{M}\times\mathcal{N})$, רק ש-$(X\times Y,\mathcal{M}\times\mathcal{N},\mu\times\nu)$ הוא מרחב מידה σ-סופי.

<u>משפט Fubini</u>: יהיו $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ מרחבי מידה σ-סופיים ותהי f

פונקציה $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ מדידה על $X\times Y$. אזי:

(א) אם $0 \le f \le \infty$ ואם $\varphi(x)=\int_Y f_x\,d\nu$, $\psi(y)=\int_X f^y\,d\mu$ אזי φ היא $\mathcal{M}$-מדידה, ψ היא $\mathcal{N}$-מדידה ומתקיים $\int_X \varphi\,d\mu = \int_Y \psi\,d\nu = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu)$ (*)

(ב) אם f מרוכבת ואם מתקיים $\int_X \tilde\varphi\,d\mu<\infty$ עבור $\tilde\varphi(x)=\int_Y |f|_x\,d\nu$ אזי $f\in L^1(\mu\times\nu)$

(ג) אם $f\in L^1(\mu\times\nu)$ אזי $f_x\in L^1(\nu)$ כב"מ $[\mu]$ על X, $f^y\in L^1(\mu)$ כב"מ $[\nu]$ על Y. הפונקציות φ ו-ψ מ-(א) הן ב-$L^1(\mu)$ ו-$L^1(\nu)$ בהתאמה ומתקיים השוויון (*)

__הערה:__ את (*) ניתן לכתוב באופן הבא:

$$\int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \int_Y d\nu(y)\int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu)$$

וכן, את התנאי של (ב) ניתן לכתוב כ- $\int_X d\mu(x)\int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y) < \infty$

כך שאת (ב)+(ג) ניתן גם לנסח כך:

$$\int_X d\mu(x)\int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y) < \infty \iff \int_Y d\nu(y)\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) < \infty \iff \int_{X\times Y}|f(x,y)|\,d(\mu\times\nu)$$

ואז (*) מתקיים.

המשפט הזה לא צריך להפתיע אותנו - המשפט מדבר על שינוי סדר סכימה וזה אפשרי בשני מקרים - או שהטור חיובי או שהטור מתכנס בהחלט והסכום סופי (של הערכים המוחלטים)

__דוגמה לנחיצות σ-סופיות:__ $X=Y=[0,1]$, μ - הצמצום של מידת לבג ל-$[0,1]$

ν - מידת המניה על $[0,1]$.

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x\neq y\\ 1 & x=y\end{cases}$$

אז לכל x $\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)=1$. $\Leftarrow$ $\int d\mu(x)\int f(x,y)\,d\nu(y)=1$

ואילו לכל y $\int_X f(x,y)\,d\mu(x)=0$. $\Leftarrow$ $\int d\nu(y)\int f(x,y)\,d\mu(x)=0$

$\neq$

__סוף__

__המבחן__ - באותה מתכונת כמו שנה שעברה

חלק א' - 30% - 6 שאלות ללא בחירה - שאלות של ידע - הגדרות וניסוח משפטים.
(וכן גם דברים שלא הוכחנו)

חלק ב - 70% - 3/4 שאלות - הוכחת טענות שלמדו בהרצאה
(כולל את ההרצאה של מתניה אבל לא כולל שום דבר שעשינו בתרגול/תרגילים אלא אם זה הופיע בהרצאה)

לא יהיה במבחן שום דבר חדש!

ובכל זאת - מועיל להבין ולא סתם לזכור בע"פ.