(1) 24.10.07

ת. מידד

המתרגלת: מירה shamis@math.huji.ac.il

יש בעיה עם השמחה כי מירה לא מקבלת שום הנחיות איך ללמד אותנו, אז היא משבוע הבא לא ברור מה הם תעביר לנו. חוץ מזה היא לא יודעת טוב את האחוזים של התרגילים ומן הבחינה.

הם ממליצים על הספר של Real and Complex Analysis - Rudin

אבל הם לא יודעים אם זה הספר הרשמי של הקורס

<u>מרחב מטרי</u> זהו זוג (X,d) כאשר X קבוצה כלשהי ו- $d: X\times X\to \mathbb{R}^+$ פונקציה המקיימת:

(1) סימטריות $d(x,y)=d(y,x)$

(2) חיוביות $0\le d(x,y)$; $d(x,y)=0$ אמ"מ $x=y$

(3) אי שוויון המשולש $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

<u>דוגמאות</u>: (1) $\mathbb{R},\mathbb{C}$ עם $d(x,y)=|x-y|$ (המטריקה הטבעית)

(2) $\mathbb{R}$ עם $d(x,y)=|F(x)-F(y)|$ כאשר $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית במובן הצר. אם היא לא מונוטונית זה לא עובד (למשל $f(x)=x^2$) גם אם היא מונוטונית אבל לא במובן הצר זה לא עובד (למשל פונקציה קבועה)

(3) מרחב אוקלידי $\mathbb{R}^n$ עם $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$

בהינתן קבוצה כלשהי X ניתן להגדיר <u>מטריקה דיסקרטית</u> $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$

בהינתן מ"מ (X,d) ו- $Y\subseteq X$ ניתן לצמצם את d ל- Y ואז Y הופך להיות מ"מ והמטריקה נקראת <u>המטריקה המושרית</u>.

קבוצה A במ"מ נקראת <u>פתוחה</u> אם לכל $a\in A$ קיים כדור פתוח עם רדיוס חיובי המוכל כולו ב-A.

סדרה $\{x_n\}$ במ"מ (X,d) נקראת <u>מתכנסת</u> אם קיים $x\in X$ כך שסדרת המרחקים $d(x_n,x)$ <u>מתכנסת</u> ל-0.

לא קשה להוכיח שבמרחב מטרי אם סדרה מתכנסת אז הגבול שלה הוא יחיד.

במרחב מטרי X התנאים הבאים שקולים: (לא להתרגש מהוכחה)

(1) לכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי

(2) לכל סדרה $\{x_n\}$ ב-X יש תת סדרה מתכנסת.

מרחב מטרי שמקיים את התנאים האלה נקרא <u>מרחב קומפקטי</u>.
כמובן אפשר לדבר על קומפקטיות של תת קבוצה של X כאשר אנחנו מסתכלים על התת קבוצה כתת מרחב עם המטריקה המושרית.

נאמר ש-A <u>סגורה</u> אם $X\setminus A$ פתוחה.
<u>סגור</u> של קבוצה A המסומן ע"י $\bar{A}$ הוא חיתוך של כל הקבוצות הסגורות המכילות את A.

<u>טענה</u>: קבוצה A במ"מ X היא סגורה אמ"מ כל גבול של סדרת נקודות מתכנסת ב-A שייך ל-A.

<u>הוכחה</u>: נניח ש-A סגורה. לכל $x\in X\setminus A$ יש כדור $B_0(x,r)$ עם $r>0$ כך ש- $B_0(x,r)\cap A=\emptyset$. לכן לא ייתכן להיות ש-x הוא גבול של סדרת איברים ב-A כי אז כמעט כל האיברים בסדרה היו אמורים להיות ב-$B_0(x,r)$ ולזה אינו להיות.
מצד שני, נניח שכל סדרת נקודות מתכנסת ב-A גבולה גם ב-A ונניח ש-A סגורה. תהי $x\in X\setminus A$. נתבונן בסדרה $B_n=B_0(x,\frac{1}{n})$.
אם בכל B_n יש נקודה $a_n\in A$ אזי הסדרה $\{a_n\}$ היא סדרת נקודות מ-A המתכנסת ל-x והיא אינו ב-A בסתירה להנחה $\Rightarrow$ חייב להיות N כך ש- $B_0(x,\frac{1}{N})\cap A=\emptyset$ $\Rightarrow$ A סגורה.

טענה: קבוצה קומפקטית במ"מ הינה סגורה וחסומה.

הוכחה: נניח $A\subseteq X$ קומפקטית.

אם A אינה חסומה אזי קיימת נקודה $a\in X$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ A אינה מוכלת בכדור $B(a,n)$ ולכן קיימת $x_n\in A$ כך ש- $n\le d(x_n,a)$. אזי לכל $x\in X$

$$d(a,x)+d(x,x_n)\ \ge\ d(a,x_n)\ \ge n$$

$\Leftarrow$ ל- $\{x_n\}$ אין ת"ס מתכנסת, בסתירה לקומפקטיות של A.

כעת, נראה ש- A סגורה. תהי $\{x_n\}$ סדרה ב- A כך ש- $x_n\to x$. אזי יש ל- x_n ת"ס $\{x_{n_k}\}$ המתכנסת ב- A.

נקודת הגבול של ת"ס חייבת להיות x $\Leftarrow$ $x\in A$ $\Leftarrow$ A סגורה.

☺

פנים של קבוצה $A\subseteq X$ המסומן ב- $\mathring{A}$ הוא האיחוד של כל הקבוצות הפתוחות המוכלות ב- A.

שפה של קבוצה A היא הקבוצה $\partial A=\overline{A}\setminus\mathring{A}$.

תת קבוצה A במרחב מטרי X נקראת צפופה אם $\overline{A}=\overline{X}$.

מ"מ X נקרא ספרבילי אם קיימת בו קבוצה בת מניה (או סופית) צפופה.

סדרת פונקציות $\{f_n\}$ ממרחב מטרי X למרחב מטרי Y מתכנסת נקודתית לפונקציה f אם לכל $x\in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$

כלומר לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $m=m(\varepsilon,x)$ כך שעבור $n>m$ $d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$.

$\{f_n\}$ מתכנסת ל- f במידה שווה אם m לא תלוי ב- x, כלומר אם $\sup\limits_{x\in X} d(f_n(x),f(x))\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

שעת קבלה - יום ד' 14-18 הסוינשטיין 318 (לא סופי)

③ 31.10.07
ת. מידה

(א)להפסיק לשלוח לזירה אי-מיילים אם יהיה שיעור או לא. כל עוד המתרגלים לא שובתים יש תרגולים!!!
התרגול הבא והגשה רק אחרי השביתה!!!

היום נעסוק על מרחבים מטריים ועל שלמות.

(X,d) מרחב מטרי. (x_n) נקראת <u>סדרת קושי</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n>N$ $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.
ברור שכל סדרה מתכנסת במרחב היא סדרת קושי. זה נובע מאי שוויון המשולש:

$$d(x_m,x_n) < d(x_m,x)+d(x,x_n) < 2\varepsilon$$

<u>אבל</u>, לא כל סדרת קושי מתכנסת במרחב. למשל, נתבונן במרחב $(0,1)$ עם המטריקה הרגילה ונסתכל על הסדרה $(\frac{1}{n})$.
זו סדרת קושי אבל היא לא מתכנסת במרחב.

מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנסת נקרא <u>מרחב מטרי שלם</u>.
למשל $\mathbb{R}$ מרחב מטרי שלם (ממשפט קושי מאינפי 1)
לעומת זאת $\mathbb{Q}$ אינו שלם משום ש- $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ והרי $e\notin\mathbb{Q}$. עוד דוגמה היא $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}} \longrightarrow \sqrt{2}$
באופן כללי, כל מספר אירציונלי ניתן לקרוב ע"י מספרים רציונליים...

<u>טענה</u>: אם לסדרת קושי יש ת"ס מתכנסת אז כל הסדרה מתכנסת לאותו גבול.
<u>הוכחה</u>: נניח (x_n) קושי. כלומר $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ החל מ-N.
ונניח $x_{n_k}\to x$. אז החל מ-N' $d(x_{n_k},x)<\varepsilon$.
$\Leftarrow$ אם ניקח $n>\max(N,N_1)$ אז החל ממנו לפי אי שוויון המשולש $d(x_n,x)\le d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<2\varepsilon$.

הערה: שלמות אינה שקולה לסגירות. $\mathbb{Q}$ בהיותו מ"מ הוא סגור אבל הוא לא שלם.

טענה: אם (X,d) מ"מ שלם ו- $Y\subseteq X$ אז (Y,d) מ"מ שלם אמ"מ Y סגורה ב- X.

הוכחה: אם Y שלם אז: תהי $(x_n)\subseteq Y$ סדרה מתכנסת. כן סדרה קושי ולכן גבולה ב- Y. $\Leftarrow$ Y סגור

אם Y סגור ניקח $(x_n)\subseteq Y$ סדרת קושי. X שלם $\Leftarrow$ $x_n\to x\in X$

אבל Y סגורה $\Leftarrow$ $x\in Y$. ☺

מרחב נורמי שלם נקרא מרחב בנך. מרחב מכפלה פנימית שלם נקרא מרחב הילברט.

היא משאירה לנו לחשוב בבית מה היחס בין המושגים האלה.

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי. נגדיר $C(X)$ מרחב ה הפונקציות הרציפות $f:X\to\mathbb{R}$. נגדיר נורמה על $C(X)$: $\|f\|=\max_{x\in X}|f(x)|$

מאחר ש- X קומפקטי המקסימום אכן קיים והנורמה מוגדרת היטב.

(אם X לא קומפקטי היינו מגדירים נורמה עם sup ולא max).

טענה: אם X מ"מ קומפקטי אזי $C(X)$ מ"מ שלם.

הוכחה: נניח $(f_n)\in C(X)$ סדרת קושי. אז

$$\lim_{m,n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)|=0$$

טענה: (X,d) מרחב שלם אמ"מ לכל סדרה יורדת של כדורים $B(x_1,r_1)\supseteq B(x_2,r_2)\supseteq\dots$ רק ש- $r_n\to 0$ קיים $\bigcap_{n=1}^{\infty}B(x_n,r_n)\neq\emptyset$.

הוכחה: תרגיל. רצוי גם למצוא דוגמה ש- $r_n\not\to 0$ והכל מתקלקל.

טענה: יהי (X,d) מרחב קומפקטי ו- $K_n\subseteq X$ סדרת קבוצות קומפקטיות כך ש- $\dots\subseteq K_2\subseteq K_1$ אם לכל n $K_n\neq\emptyset$ אז $\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\neq\emptyset$.

<u>הוכחה:</u> נניח $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. אז $X = X\setminus\emptyset = X\setminus\bigcap K_n = \bigcup X\setminus K_n$

K_n קומפ' במ"מ ⇐ היא סגורה ⇐ $X\setminus K_n$ פתוחה.

⇐ זה כיסוי פתוח של X. אבל X קומפ'. ⇐ קיים תת

כיסוי סופי $X\setminus K_1,\dots,X\setminus K_m$ ⇐ $X=\bigcup_{n=1}^{m} X\setminus K_n = X\setminus\bigcap_{n=1}^{m} K_n$

⇐ $\bigcap_{n=1}^{m} K_n=\emptyset$ וזו סתירה ☺

<u>המלצה:</u> להוכיח את אותה טענה אבל עם קומפ' סדרתית!

<u>טענה:</u> אם (X,d) מ"מ קומפקטי אז X מ"מ שלם.

<u>הוכחה:</u> נניח (x_n) סדרת קושי. X קומפקטי. ⇐ יש ת"ס $x_{n_k}\to x\in X$. אבל מטענה קודמת הסדרה מתכנסת ל- $x\in X$. ☺

<u>טענה:</u> איחוד סופי של קבוצות קומפקטיות היא קבוצה קומפקטית.

<u>הוכחה:</u> נניח $A=\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ ונניח (x_n) סדרה ב- A. היות של K_i קומפקטיות חייבת להיות ל- (x_n) תת סדרה אינסופית מתכנסת לפחות באחד מה- K_i ⇐ היא מתכנסת ב- A

לכן A קומפקטית. ☺

<u>המלצה:</u> להוכיח את אותה טענה עם קומפקטיות של כיסויים.

<u>הערות:</u> - מרחב עם מספר סופי של נקודות הוא קומפקטי.

- קבוצה במ"מ דיסקרטי קומפקטית אמ"מ היא סופית.

- קומפקטי לא שקול לסגור - למשל $(0,1)$ במרחב מטרי סגור אבל לא קומפקטי.

<u>טענה:</u> תהי (f_n) סדרת פונקציות ממ"מ (X,d) ל- $\mathbb{R}$.

נניח שקיימת סדרת מספרים $(M_n)\subseteq\mathbb{R}^+$ כך ש- $\sup_{x\in X}|f_n(x)|\le M_n$

כך ש- $\sum M_n$ מתכנס. אז $\sum f_n$ מתכנס במידה שווה על X.

<u>הוכחה:</u> לכל x נסמן $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. לכל x $\sum f_n(x)$

מתכנס בהחלט ולכן קיים גבול $S(x)$. נוכיח שההתכנסות במ"ש.

$|S(x)-S_n(x)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(x)|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k$ וזהו ☺

<u>טענה:</u> יהי (X,d) מ"מ: $D\subseteq X$ קבוצה צפופה אז X שלם אמ"מ כל סדרת קושי ב- D מתכנסת ב- X.

(5) 7.11.04
ת. מידה

עד עכשיו היה קורס מזורז באינפי מתקדם. היום יש קורס מזורז בטופולוגיה.

תהי X קבוצה. טופולוגיה של X היא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הנקרא "הקבוצות הפתוחות" כך שמתקיימים התנאים הבאים:

(1) $\emptyset, X \in \{U_\alpha\}$

(2) איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

(3) חיתוך של שתי קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה (באינדוקציה גם כל חיתוך סופי).

למשל, על כל X קיימת טופולוגיה טריוויאלית $U_{triv}=\{X,\emptyset\}$

ועל כל X קיימת טופולוגיה דיסקרטית $U_{dis}=2^X=P(X)$

אם בקבוצה X יש יותר מאיבר אחד אז U_{triv} ו-U_{dis} שונות.

בהינתן שתי טופולוגיות U ו-$\tilde{U}$ של X נגיד ש-U חלקה יותר מ-$\tilde{U}$ אם $\tilde{U}\subseteq U$. ברור שעל X U_{triv} היא הכי גסה ו-U_{dis} היא הכי חלקה.

אם $X=\{0,1\}$ טופולוגיית ה-ב היא $U=\{\emptyset, X, \{0\}\}$

דוגמה: אוסף קבוצות פתוחות במרחב מטרי מהווה טופולוגיה והיא נקראת הטופולוגיה המטרית.

תכונות ההפרדה: יהי X מ"ט

(1) נגיד ש-X הוא T_1 אם לכל $x,y\in X$ כך ש- $x\neq y$ קיימת $U\subseteq X$ שמכילה את x אבל לא את y.

(2) נגיד ש-X הוא T_2 (האוסדורף) אם לכל $x,y\in X$ שונים קיימות $U,V\subseteq X$ פתוחות כך ש- $x\in U, y\in V$ ו- $U\cap V=\emptyset$.

(3) נגיד ש-X הוא T_3 (רגולרי) אם לכל $x\in X$ ולכל $F\subseteq X$ סגורה שמכילה את x קיימות $U,V\subseteq X$ פתוחות כך ש- $x\in U$, $F\subseteq V$ ו- $U\cap V=\emptyset$.

(4) ונגיד ש-X הוא T_4 (נורמלי) אם לכל $A,B\subseteq X$ סגורות
זרות קיימות $U,V\subseteq X$ פתוחות כך ש- $A\subseteq U$, $B\subseteq V$
ו- $U\cap V=\emptyset$; וגם X הוא T_1.

<u>למה:</u> X הוא T_1 $\iff$ כל נקודה היא קבוצה סגורה

<u>הוכחה:</u> נניח ש-X הוא T_1. תהי $y\in\overline{\{x\}}$ עבור x כלשהו.
אזי כל סביבה של y מכילה את x והיות ש-X הוא T_1 חייב להתקיים
ש- $x=y$ $\Rightarrow$ $\overline{\{x\}}=\{x\}$ $\Rightarrow$ כל נקודה סגורה.
מצד שני נניח שכל נקודה היא סגורה. אם $x,y\in X$ שונות אז
$X\setminus\{x\}$ פתוחה שמכילה את y ולא את x. $\Rightarrow$ X T_1.

קל לראות ש- $X\ T_4 \Rightarrow X\ T_3 \Rightarrow X\ T_2 \Rightarrow X\ T_1$.
הכיוונים ההפוכים לא נכונים. למשל, על כל קבוצה אינסופית X ניתן
להגדיר את הטופולוגיה <u>הקו-סופית</u> שמכילה את כל הקבוצות
שהמשלים שלהן היא קבוצה סופית ואת הקבוצה הריקה.
אפשר לראות ש-X הוא T_1 אבל לא T_2.
(המלצה: לבדוק שהטופולוגיה הקו-סופית היא אכן טופולוגיה)

<u>טענה:</u> כל מרחב מטרי הוא נורמלי

<u>הוכחה:</u> יהיו A,C קבוצות זרות וסגורות במ"מ X. נגדיר
$d(x,A)=\inf_{a\in A} d(x,a)$ ונטען שאם $d(x,A)>0$ אז
$x\notin A$. ואכן, אם $d(x,A)=0$ אז כל סביבה של x מהצורה
$B(x,\varepsilon)$ מכילה איבר מ-A ולכן $x\in\overline{A}$, אבל A סגורה
ולכן $x\in A$. הכיוון השני גם ברור.
כעת, נגדיר $U=\bigcup_{x\in A}B(x,\frac{d(x,A)}{2})$ ו- $V=\bigcup_{x\in C}B(x,\frac{d(x,C)}{2})$. נראה
ש- $U\cap V=\emptyset$. נניח בשלילה ש- $z\in U\cap V$. $z\in U$ $\Rightarrow$ קיימת
$a\in A$ כך ש- $d(z,a)<\frac{d(a,C)}{2}$. $z\in V$ ולכן קיימת $c\in C$ כך
ש- $d(z,c)<\frac{d(c,A)}{2}$. ואז נקבל סתירה:

$$d(a,c)\le d(a,z)+d(z,c)<\frac{d(a,C)}{2}+\frac{d(c,A)}{2}\le$$
$$\le\frac{d(a,c)}{2}+\frac{d(c,a)}{2}=d(a,c)$$

יהי $(X,\mathcal{U})$ מ"ט ; $A\subseteq X$ תת קבוצה של X כלשהי.
נגדיר $\mathcal{U}_A=\{U\cap A : U\in\mathcal{U}\}$. אז $\mathcal{U}_A$ טופולוגיה על A
; $(A,\mathcal{U}_A)$ מ"ט ו- $\mathcal{U}_A$ נקראת <u>הטופולוגיה המושרית</u> ע"י $\mathcal{U}$.

מ"ט X נקרא <u>קומפקטי</u> אם מכל כיסוי פתוח שלו ניתן להוציא תת כיסוי סופי.

אם X הוא T_1,T_2,T_3 אזי כל תת מרחב הוא T_1,T_2,T_3 בהתאמה. לגבי סתם לא (כמו ראינו T_4). קיים מרחב נורמלי שיש לו תת מרחב לא נורמלי.

<u>טענה</u>: יהי X מ"ט קומפקטי ותהי $A\subseteq X$ תת קבוצה. אז
(1) אם A סגורה אז A קומפקטית
(2) אם X הוא האוסדורף אזי אם A קומפקטית אז היא גם סגורה.

<u>טענה</u>: מרחב האוסדורף קומפקטי הינו נורמלי.

מרחב טופולוגי X הינו <u>קומפקטי מקומית במובן החלש</u> אם לכל נקודה ב-X קיימת סביבה שהיא קומפקטית. X <u>קומפקטי במובן החזק</u> אם לכל סביבה שלה קיימת תת סביבה קומפקטית.

<u>טענה</u>: יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית חלש. אז X קומפקטי מקומית חזק ובנוסף X הוא T_3.

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים. $f:X\to Y$ העתקה. אז f רציפה אמ"מ:
(1) לכל פתוחה $V\subseteq Y$ $f^{-1}(V)\subseteq X$ פתוחה.
(2) לכל תת קבוצה $A\subseteq X$ $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$
(3) לכל $x\in X$ לכל סביבה V של $f(x)$ קיימת סביבה U של x כך ש- $f(U)\subseteq V$

הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט נורמלי ויהיו A,B סגורות זרות ב-X. אזי קיימת פונקציה רציפה $f: X \to [0,1]$ רק ש- $f|_A = 0$; $f|_B = 1$.

שבוע הבא: אם אם יש שביתה יהיה תרגול!!

(7) 14.11.04
תימידר

הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט נורמלי ו- $A,B\subseteq X$ סגורות זרות

אז קיימת פונקציה רציפה $f:X\to[0,1]$ כך ש- $f|_A\equiv 0$

ו- $f|_B\equiv 1$.

<u>הוכחה:</u> נבחר קבוצה צפופה בת מניה בקטע $[0,1]$ ונסמנה ב- P.

למשל $P=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. נסדר את הקבוצה $P=\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך

ש- $p_1=1$ ו- $p_2=0$.

נגדיר באינדוקציה על i קבוצות פתוחות U_{p_i} ב- X כך

שלכל $p,q\in P$ $\overline{U_p}\subseteq U_q$ אמ"מ $p<q$.

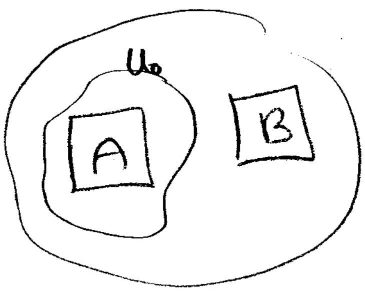
הגדרת U_1: נגדיר $U_1=X\setminus B$ וזו בוודאות קבוצה פתוחה.

הגדרת U_0: נגדיר את U_0 להיות פתוחה כלשהי המכילה את

A כך ש- $\overline{U_0}\subseteq U_1$ (זה אפשרי בגלל הנורמליות. X נורמלי

אמ"מ לכל F סגורה ב- X המוכלת בפתוחה W קיימת פתוחה

V כך שמתקיים $F\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq W$).



נניח שהגדרנו את $U_{p_1},\dots,U_{p_n}$ עבור $n\geq 2$.

נגדיר את $U_{p_{n+1}}$: יהי p_i $(i\leq n)$

המספר הגדול ביותר שעדיין קטן מ- p_{n+1}

ויהי p_j המספר הקטן ביותר הגדול מ- p_{n+1}.

p_i ו- p_j קיימים כי $0=p_2<p_{n+1}<p_1=1 \Rightarrow p_{n+1}\in(p_i,p_j)$

מהנחת האינדוקציה $\overline{U_{p_i}}\subseteq U_{p_j}$ לכן נבחר את $U_{p_{n+1}}$ פתוחה

כך ש- $\overline{U_{p_i}}\subseteq U_{p_{n+1}}\subseteq\overline{U_{p_{n+1}}}\subseteq U_{p_j}$.

קיבלנו את האוסף הנדרש.

כעת, לכל r רציונלי נגדיר $U_r=\begin{cases}\emptyset & r<0\\ U_p & r=p\\ X & r>1\end{cases}$

עדיין מתקיים $r_1<r_2 \Rightarrow \overline{U_{r_1}}\subseteq U_{r_2}$

נגדיר $f:X\to[0,1]$ ע"י $f(x)=\inf\{p\in\mathbb{Q}: x\in U_p\}$

f מוגדרת היטב כי לכל $p>1$ $x\in U_p=X$ ולכן הקבוצה שעליה

נלקח ה- inf אינה ריקה. ה- inf הוא גם סופי כי הוא

חסום מלמטה ע"י 0 - הרי אם $p<0$ אז $x\notin U_p=\emptyset$.

ברור ש- $f(x)\le 1$ לכל x $\Leftarrow$ $f: X\to[0,1]$ מוגדרת היטב.

$f|_A\equiv 0$ כי לכל $x\in A$ מתקיים $x\in U_0$ ובוודאי x לא שייך לאף U_p עבור $p<0$.

$f|_B\equiv 1$ כי לכל $x\in B$ מתקיים $x\notin U_1$ ולכן $x\in U_p$ רק ל- $1<p$.

נותר להראות ש- f רציפה. מספיק להראות לכל קטע פתוח $(c,d)\subseteq\mathbb{R}$ עם קצוות רציונליים: רוצים להראות ש- $f^{-1}((c,d))$ פתוחה ב- X. אז אם $x\in X$ כך ש- $f(x)\in(c,d)$ נרצה להראות ש- $f^{-1}((c,d))$ הוא סביבה של x.

ראשית נראה: (א) $x\in\overline{U_p} \iff f(x)\le p$

(ב) $x\notin U_p \iff f(x)\ge p$

(א) $x\in\overline{U_p} \iff x\in U_q$ לכל $p<q$. כי $p<q$ (נמצא בקבוצה שעליה נלקח ה- $\inf$ שמגדיר את $f(x)$. $\iff f(x)\le p$

(ב) $x\notin U_p \iff p$ לא בקבוצה שעליה נלקח ה- $\inf$ $\iff f(x)\ge p$.

יהי נתון $f(x)\in(c,d)$. נבחר שני רציונליים e,h כך ש- $c<e<f(x)<h<d$. אזי $U_h\setminus\overline{U_e}$ סביבה פתוחה של x שתמונתה מוכלת ב- (c,d). $x\in U_h$ (א-א') ; $x\notin\overline{U_e}$ (א-ב'). על U_h נקבל $d>h\ge f(x)$ כי h בקבוצה שעליה נלקח ה- $\inf$ ואם $x\notin\overline{U_e}$ אז $c<e\le f(x)$

לכן $x\in U_h\setminus\overline{U_e}\subseteq f^{-1}((c,d))$ $\Leftarrow$ f רציפה.

11

משפט ההרחבה של Tietze: תהי A קבוצה סגורה במרחב טופולוגי נורמלי X ותהי $f:A\to J$ רציפה כאשר J הוא קטע סגור ב- $\mathbb{R}$ אזי יש ל- f הרחבה רציפה $\tilde{f}:X\to J$.

החשיבות לסגירות של A: נקח $X=[0,1]$ ו- $A=(0,1]$ ו- $f=\sin\frac{1}{x}$. אי אפשר להרחיב את f בצורה רציפה!!!

משפט המטריזביליות של אוריסון: יהי X מרחב טופולוגי נורמלי. עם בסיס בן מניה. אזי X מטריזבילי.

(8) 23.1.08
ת' מידה

היום נדבר על σ-אלגבראות. נגדיר, נדגים ואנטי-נדגים.

<u>הגדרה</u>: X קבוצה כלשהי. תת קבוצה $\Sigma \subseteq P(X)$ תקרא <u>σ-אלגברה</u> אם:

1) $\Sigma \neq \emptyset$
2) Σ סגורה למשלים. כלומר $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$
3) Σ סגורה לאיחודים בני מניה. כלומר $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

נשים לב ש- $\emptyset, X \in \Sigma$, כי אם $A \in \Sigma$ (וישנה כזו כי היא לא ריקה) אז $A^c \in \Sigma \Rightarrow X = A \cup A^c \in \Sigma$
$\Rightarrow \emptyset = X^c \in \Sigma$.

כמו כן, Σ סגורה לחיתוכים בני מניה (בעזרת חוקי דה מורגן)

<u>הגדרה</u>: יהי X מרחב מדיד ויהי Y מרחב טופולוגי כלשהו. אזי $f: X \to Y$ תיקרא פונקציה מדידה אם לכל $V \subseteq Y$ פתוחה המקור $f^{-1}(V)$ קבוצה מדידה ב-X.

<u>הגדרה</u>: X קבוצה כלשהי. תת הקבוצה $\Sigma \subseteq P(X)$ תיקרא אלגברה אם מתקיימות התכונות הבאות:

1) $X \in \Sigma$
2) Σ סגורה למשלים
3) Σ סגורה לאיחודים <u>סופיים</u>.

זה כמעט כמו σ-אלגברה אלא ש-σ-אלגברה סגורה גם לאיחודים בני-מניה ולא רק סופיים.

<u>דוגמא</u>: האם אוסף הקבוצות $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש- A סופית או $\mathbb{N} \setminus A$ סופית היא σ-אלגברה על $\mathbb{N}$?

יחידון הוא קבוצה סופית. אבל איחוד בן מניה של יחידונים אמור להיות באוסף. אם נסתכל על אוסף היחידונים $\{\{2n\}\}_{n=1}^{\infty}$. האיחוד הוא כל המספרים הזוגיים. זו קבוצה שאינה סופית וגם המשלים לא סופי. אז האוסף לא סגור לאיחוד בן מניה ולכן לא σ-אלגברה

דוגמה: נסתכל על אוסף הקבוצות $A \subseteq \mathbb{R}$ רק ש-A בת מניה או $\mathbb{R} \setminus A$ בת מניה. (בת מניה כאן זה במובן הרחב).

זו σ-אלגברה

1) ברור ש- $\emptyset, \mathbb{R}$ באוסף
2) ברור שהוא סגור למשלים (עפ"י ההגדרה)
3) איחוד בן מניה: אם כל A_n בנות מניה אז לפי משפט מקבוצות $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ בת מניה
   אחרת יש i רק ש- $\mathbb{R} \setminus A_i$ בת מניה. בה"כ $i=1$
   והרי $(\bigcup A_i)^c \subseteq A_1^c$.

דוגמה: על $[0,1]$ נסתכל על כל תתי הקבוצות המכילות את 0.

זו לא σ-אלגברה כי זה נכון לא סגור למשלים. $\{0\}$ באוסף אבל $(0,1]$ לא.

דוגמה: על $[0,1]$ אוסף תתי קבוצות $A \subseteq [0,1]$ רק ש-A פתוחה או סגורה. זו לא σ-אלגברה כי

איחוד בן מניה של סגורות $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{4}, \frac{n-1}{2n}] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ לא פתוחה ולא סגורה

טענה: X מרחב מדיד. $E \subseteq X$. $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

E קבוצה מדידה אמ"מ χ_E מדידה.

הוכחה:

($\Leftarrow$) ראינו בכיתה

($\Rightarrow$) תרגיל.

מסקנה: הדבר הכי פשוט למצוא דוגמה לפונקציה לא מדידה היא לקחת קבוצה לא מדידה ולהסתכל על הפונקציה האופיינית שלה.

דוגמה: נתבונן ב-X עם σ-אלגברה טריוויאלית. ניקח $\emptyset \neq A \subsetneq X$ אזי A לא מדידה. ולכן χ_A פונקציה לא מדידה.

דוגמה: תהי $A \subsetneq X$ לא מדידה ונסתכל על הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כי ראינו לא פונקציה מדידה (מאותו שיקול ש- χ_A אינה מדידה). אבל $f^2 = |f| = 1$ פונקציות מדידות, כי לכל קבוצה המקור שלה או $\emptyset$ או X ושתיהן מדידות.

- הדוגמה הכי טבעית לפונקציה מדידה כי פונקציית הסתברות. במובן מסוים אלה הדוגמאות הבסיסיות ביותר.

דוגמה: X קבוצה כלשהי. X קבוצה כלשהי. Σ אוסף קבוצות שהן בנות מניה (או סופיות) או המשלים שלהן בן מניה (או סופי). ברור שזו σ-אלגברה (מאותו שיקול כמו במקרה ש- $X = \mathbb{R}$).

לחשוב בבית: היום בשיעור למדנו על ה-σ-אלגברה הנוצרת ע"י קבוצה. נא להסתכל על הדוגמאות שבאיני מתרגל ולחשוב ע"י מה נוצרות ה-σ אלגבראות שראינו.

(10) 6.2.08

ת' מידה

X מרחב מטרי.

(1) $A \subseteq X$ קבוצה דלילה אם ל- $\bar{A}$ פנים ריק, כלומר $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$

(2) $A \subseteq X$ היא מקטגוריה I אם היא איחוד בן מנייה של קבוצות דלילות

(3) $A \subseteq X$ היא מקטגוריה II אם A אינה מקטגוריה I

<u>דוגמה:</u>

$\mathbb{Q}$ קבוצה מקטגוריה I

<u>טענה:</u> איחוד בן-מנייה של קבוצות מקטגוריה I היא קבוצה מקטגוריה I

<u>משפט הקטגוריה של Baire</u> יהי X מרחב מטרי שלם. אזי פנים של קבוצה מקטגוריה I ב-X הוא ריק.

<u>מסקנה:</u>

(1) מרחב מטרי שלם (לא ריק) הוא מקטגוריה II

(2) יהיו $\{G_n\}$ $G_n \subseteq X$ פתוחות וצפופות ב-X. אזי $\cap G_n$ גם צפופה ב-X.

<u>הוכחה</u>

(2) נסמן $F_n = X \setminus G_n$. כל קבוצה סגורה: G_n - צפופה. לכן, ל-F_n יש פנים ריק.

$X \setminus \cap G_n = \cup X \setminus G_n = \cup F_n$

$\cup F_n$ קבוצה מקטגוריה I $\Leftarrow$ ממשפט Baire מעל פנים ריק $\Leftarrow$ כל כדור ב-X אינו קבוצה שאינה באיחוד $\Leftarrow$ נקודה נמצאת ב-$\cap G_n$ $\Leftarrow$ נובע הנדרש.

<u>הגדרה</u> מספר Liouville הוא מספר $x \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים $p, q \in \mathbb{N}$ $1 < q$ (בה"כ $\gcd(p,q) = 1$)

כך ש- $0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$

(I) אם x מספר ליוביל אז $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

נניח בשלילה ש- $x\in\mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ קיימים $c,d\in\mathbb{N}$ זרים כך ש- $x=\frac{c}{d}$. ויהי $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $d<2^{n-1}$, לכן אם $p,q\in\mathbb{N}$; $q>1$; $\frac{c}{d}\neq\frac{p}{q}$ אז

$$0<\left|x-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{c}{d}-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{dq}\ge\frac{1}{2^{n-1}q}>\frac{1}{q^n}$$

☺

תזכורת: $A\subseteq\mathbb{R}$ בעלת מידה אפס אם לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי פתוח $\{U_n\}$ של A כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|<\varepsilon$

(II) קבוצת מספרי ליוביל הינה בעלת מידה אפס:

נסמן את קבוצת מספרי ליוביל ב- L. עבור $n,q\in\mathbb{N}$, $n>2$ ו- $q\ge2$ נגדיר $V_{n,q}=\bigcup_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)$

אז $L\subseteq\bigcup_{q=2}^{\infty}V_{n,q}$ לכל n.

לכל $n\ge2$; $m\ge1$

$$L\cap(-m,m)\subseteq\bigcup_{q=2}^{\infty}V_{n,q}\cap(-m,m)\subseteq\bigcup_{q=2}^{\infty}\bigcup_{p=-mq}^{mq}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)$$

$$\Rightarrow |L\cap(-m,m)|\le\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{p=-mq}^{mq}\frac{2}{q^n}=\sum_{q=2}^{\infty}\frac{2(2mq+1)}{q^n}\le(4m+1)\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^{n-1}}\le$$

$$\left|\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)-\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n}\right)\right|=\frac{2}{q^n}$$

$$\le(4m+1)\int_{1}^{\infty}\frac{dq}{q^{n-1}}\le\frac{4m+1}{n-2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$\Leftarrow$ לכל $m\in\mathbb{N}$ הקבוצה $L\cap(-m,m)$ בעלת מידה 0

$\Leftarrow$ L בעלת מידה 0.

☺

(III) L היא G_δ צפופה

לכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה $U_n=\bigcup_{q=2}^{\infty}\bigcup_{p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)$ היא צפופה כי היא מכילה את הרציונליים. $L=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\setminus\mathbb{Q}$ (ומכאן בחרה הצפופה כי זו קבוצה משלימה לקבוצה מקטגוריה I).

$$L=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{q\ge n}\left(\bigcup_{\substack{1\le p\le q\\ \gcd(p,q)=1}}V_{n,q}\right)\right)$$

(IV) מספרי ליוביל אינם אלגבריים

משפט: אם $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ שורש של פולינום f מדרגה $n>0$ עם מקדמים רציונליים, אזי קיים מספר A שעבור כל $p,q\in\mathbb{N}$ כך ש- $q>0$ $\quad |\alpha-\frac{p}{q}|>\frac{A}{q^n}$

<u>הוכחה:</u> יהי $M=\max_{x\in[\alpha-1,\alpha+1]}|f'(x)|$, ויהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ שורשים שונים של f ושונים מ-α. נבחר A המקיים

$$A<\min\left(1,\frac{1}{M},|\alpha-\alpha_1|,\dots,|\alpha-\alpha_m|\right)$$

נניח בשלילה שקיימים p,q הסותרים את המשפט

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\le\frac{A}{q^n}<A<\min\left(1,\frac{1}{M},|\alpha-\alpha_1|,\dots,|\alpha-\alpha_m|\right)$$

אז $\frac{p}{q}\in[\alpha-1,\alpha+1]$ וגם $\frac{p}{q}\neq\alpha_i$ לכל $1\le i\le m$

$\Leftarrow$ $\frac{p}{q}$ אינו שורש של f וגם לא קיים שורש של f בין α לבין $\frac{p}{q}$. ממשפט ערך הביניים נקבל שקיים $\frac{p}{q}\le x_0\le\alpha$ כך ש- $f(\alpha)-f(\frac{p}{q})=f'(x_0)(\alpha-\frac{p}{q})$

$$\Leftarrow\ \left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\frac{|f(\frac{p}{q})|}{|f'(x_0)|}$$

f מהצורה $\sum_{i=0}^{m}c_ix^i$ כאשר $c_i\in\mathbb{Z}$

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|\sum c_ip^iq^{-i}\right|=\frac{|\sum c_ip^iq^{n-i}|}{q^n}\ge\frac{1}{q^n}$$

היות ש- $|f'(x_0)|\le M$; $A<\frac{1}{M}$

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{Mq^n}>\frac{A}{q^n}\ge\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$$ סתירה!

נראה כי: $x\in L$ וגם $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אם x אלגברי אז קיים $n\in\mathbb{N}$ ו- $A\in\mathbb{R}^+$ כך שלכל p,q $\quad|x-\frac{p}{q}|>\frac{A}{q^n}$

יהי $r\in\mathbb{N}$ כך ש- $2^{-r}\le A$. נסמן $m=n+r$. היות ש- $x\in L$ קיימים $a,b\in\mathbb{N}$ $b>1$ כך ש-

$$\left|x-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{b^m}\le\frac{1}{b^rb^n}\le\frac{1}{b^rb^n}\le\frac{A}{b^n}$$ סתירה!

בתרגול ראינו ? להשתמש בהגדרה הבאה: $x\in L$ אם קיימת סדרה של מספרים רציונליים $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ כך ש- $q_n\to\infty$ $\quad|x-\frac{p_n}{q_n}|<e^{-q_n}$ וגם זרים.

(12) 13.02.08
ת' מידה

① נניח E_n קבוצות מדידות ; $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$. אזי
$\mu(\limsup E_n)=0$

<u>הוכחה:</u> $\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i = \{x : x\in E_i$ עבור אינסוף i-ים$\}$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{i=n}^{\infty}\mu(E_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

כמו כן, $\limsup E_n \subseteq \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \Rightarrow 0\le \mu(\limsup E_n)\le \sum_{i=n}^{\infty}\mu(E_i)$

☺

נסמן ב- L^+ את אוסף הפונקציות המדידות האי-שליליות.

② נניח ש- $f\in L^+$; $\int f d\mu = 0$ אזי $\mu(\{x: f(x)\neq 0\}) = 0$
כלומר $f=0$ כמעט תמיד.

<u>הוכחה:</u> נתבונן ב- $E_n = \{x: f(x)\ge \frac{1}{n}\}$ אזי

$0=\int_X f d\mu \ge \int_{E_n} f d\mu \ge \int_{E_n}\frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n)$

$E_n\subseteq X$
f חיובית

$\Leftarrow \mu(E_n)=0$ לכל n . אבל $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x: f(x)>0\}$

מכאן ש $\mu(\bigcup E_n)=0$ ונקבל ש- $f=0$ כמעט תמיד.

☺

③ נניח ש- $f\in L^+$; $\int f d\mu<\infty$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה מדידה E כך ש- $\mu(E)<\infty$. וכך ש- $\int_E f d\mu \ge \int_X f d\mu - \varepsilon$

<u>הוכחה:</u> קיימת פונקציה מדידה אי-שלילית פשוטה $0\le s\le f$ כך ש- $\int s d\mu \ge \int f d\mu - \varepsilon$ (לפי הגדרת האינטגרל כגבול עליון).

מת $\mu(\{x: s(x)>0\})$ כי $\int_X s d\mu \le \int_X f d\mu < \infty$

(שלפי הגדרת האינטגרל של f כגבול עליון של האינטגרלים של פונקציות פשוטות)

(ואושר השתמשנו כאן בטענה הפשוטה: אם t מדידה אי-שלילית פשוטה אזי $\int t d\mu<\infty \Leftrightarrow \mu(\{x: t(x)>0\})<\infty$)

נסמן $E=\{x : s(x)>0\}$. מתקיים

$$\int_E f\,d\mu \ge \int_E s\,d\mu \ge \int_X f\,d\mu - \varepsilon$$

$$\int_E s\,d\mu = \int_X s\,d\mu$$

(4) אם $f\in L^+$ אזי $\int_X f\,d\mu = \int_{\{x: f(x)>0\}} f\,d\mu$

<u>הוכחה:</u>

$$\int_X f\,d\mu = \int \chi_{\{x: f(x)>0\}} f\,d\mu = \int_{\{x: f(x)>0\}} f\,d\mu$$

(5) $\mathcal{M}$ ס-אלגברה על X אזי או ש-$\mathcal{M}$ סופית או $\aleph_0 < |\mathcal{M}|$

<u>הוכחה:</u> נניח ש- $\mathcal{M}=\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ונגדיר לכל $x\in X$

$C(x)=\bigcap_{\{i: x\in A_i\}} A_i$. זה חיתוך בן מניה ולכן $C(x)\in\mathcal{M}$ ⇐ .

זהו אחד מה-A_i-ים, כלומר קיימת קבוצה מינימלית אמין

A_i המכילה את x. אם $C(x)$ חותכת את A_i אז $C(x)\subseteq A_i$

(שהרי $C(x)=(C(x)\cap A_i)\cup(C(x)\setminus A_i)$. אם $A_i\cap C(x)\neq\emptyset$

אז אחד מ- $C(x)\cap A_i$ או $C(x)\setminus A_i$ קטן ממש מ- $C(x)$

ומכיל את x)

נסתכל על $\mathcal{M}_0=\{C(x)\}_{x\in X}\subseteq\mathcal{M}$. $\mathcal{M}_0$ זהו אוסף של קבוצות זרות בזוגות ולכן איבר של $\mathcal{M}$ הוא איחוד של איברים מ-$\mathcal{M}_0$ (שהוא בן מניה) ; כלומר $A_i=\bigcup_{x\in A_i} C(x)$. אם $\mathcal{M}_0$ סופית בגודל n אזי $|\mathcal{M}|=2^n$. אם $\mathcal{M}_0$ אינסופית אזי ל-ס-אלגברה הנוצרת ע"י $\mathcal{M}_0$ יש $2^{\aleph_0}$ איברים.

<u>הלמה של Fatou</u> $\{f_n\}_{n=1}^\infty\in L^+$. אזי

$$\int \liminf_n f_n\,d\mu \le \liminf_n \int f_n\,d\mu$$

<u>הוכחה:</u> תהי $0\le h\le \liminf f_n$ פשוטה (יש כזו כי $\liminf f_n$ מדידה) ותהי $0<c<1$. נתבונן ב- $A_m=\bigcap_{n=m}^\infty\{x: f_n(x)\ge ch(x)\}$

נשים ♡ ש- $A_m\nearrow X$ כי לכל $x\in X$ $ch(x)<\liminf f_n(x)$

ראו $\int_X f_n\,d\mu \ge \int_{A_m} f_n\,d\mu \ge \int_{A_m} ch\,d\mu = c\int_{A_m} h\,d\mu$

(13)

$$\liminf \int_X f_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{n\ge m} \int_X f_n d\mu\right) \ge \inf_{n\ge m} \int_X f_n d\mu \ge c\int_{A_m} h d\mu$$

לכן $\liminf \int f_n d\mu \ge c\int_{A_m} h d\mu$ ויודעים ש- $c\int_{A_m} h d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} c\int_X h d\mu$

הוכחנו בתרגול שאם h פשוטה אזי $\nu(E)=\int_E h d\mu$ מידה ועל

סמך רציפות של מידה מלמטה עבור $E_n \uparrow E$ ח"מ והתקיים

$\nu(E_n) \uparrow \nu(E)$. (נסיק ע"י מעבר לגבול (כי זה נכון לכל m) ש-

$\liminf \int f_n d\mu \ge c\int h d\mu$ לכל $0<c<1$. (ניקח ג-ו c לשאוף

ל-1 ונקבל $\int h d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$. ניקח סופ' על

כל ה-h-ים פשוטות.

☺

היום ניתן רמזים עבור תרגיל 5

הגדרה: תהי X קבוצה ונאמר שהפונקציה $\mu^*: 2^X \longrightarrow [0,\infty]$ נקראת מידה חיצונית אם:

(1) $\mu^*(\emptyset)=0$

(2) μ^* היא תת אדטיבית, כלומר אם $A_n \subseteq X$ זרות בזוגות אז $\mu^*(\cup A_n) \le \sum \mu^*(A_n)$

נשים לב שנובע מההגדרה נובע שאם $A\subseteq B$ אז $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$

למה הדבר הזה טוב? אמנם ויתרנו על אדטיביות אבל קיבלנו את זה שהיא מוגדרת על כל 2^X.

שאלה 1: תהי X קבוצה ו- $\mathcal{U}\subseteq 2^X$ כך ש- $\emptyset\in\mathcal{U}$ ו- $X\in\mathcal{U}$.

תהי $f:\mathcal{U}\to[0,\infty]$ פונקציה המקיימת $f(\emptyset)=0$. נגדיר

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^\infty f(U_n) : U_n\in\mathcal{U},\ A\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty U_n\right\}$$

הוכיחו ש- μ^* היא מידה חיצונית.

סקיצה של הוכחה: לכל A נגדיר $\mathcal{U}_A=\{(U_n)_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{U},\ A\subseteq\bigcup_{n=1}^\infty U_n\}$

אוסף הכיסויים בני המניה של A ע"י קבוצות מ- $\mathcal{U}$.

הסיקו ש- $\mathcal{U}_A\neq\emptyset$. אגדירו $M_A=\{\sum f(U_n) : (U_n)\in\mathcal{U}_A\}$

מתכונות f הסיקו ש- M_A לא ריקה וחסומה מלרע (ע"י מה?). הסיקו ש- μ^* מוגדרת היטב, אי שלילית לכל $A\subseteq X$. באופן דומה קבלו ש- $\mu^*(\emptyset)=0$.

נותר להוכיח תת-אדטיביות. התבוננו ב- $A_n\subseteq X$ זרות בזוגות רק ש- $\mu^*(A_n)=r_n\in[0,\infty]$. יש שני מקרים: כל r_n סופיים או קיים $r_n=\infty$.

אם $r_n<\infty$ לכל n מספיק להראות שלכל $\varepsilon>0$ $\mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)\le\sum_{n=1}^\infty r_n+\varepsilon$

כלומר מספיק להראות שקיים אוסף בן מניה $\{U_i\}_{i\in I}$ של קבוצות מ- $\mathcal{U}$ שמכסות את A וכך ש- $\sum_{i\in I} f(U_i)\le\sum_{n=1}^\infty r_n+\varepsilon$.

שאלה 2: נניח μ מידה חיצונית על X ונגדיר

$$\mathcal{M}_\mu=\{A\subseteq X : \mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)\ \forall E\subseteq X\}$$

נשים לב שמההגדרה של מידה חיצונית על מנת להראות ש- $A\in\mathcal{M}_\mu$ מספיק להראות שלכל E $\mu(E)\ge\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)$

(ב) הראו ש- $\mathcal{M}_\mu$ סגורה לאיחוד סופי.

סקיצה להוכחה: תניחו ש- $A,B\in\mathcal{M}_\mu$ וקחו $E\subseteq X$ רק ש- $\mu(E)=\mu(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)$ (מה יש לזה?) הסיקו ש- $\mu(E\cap A)=\mu(E\cap A\cap B)+\mu(E\cap A\cap B^c)$ (מה?) באופן דומה קבלו משהו דומה עבור $\mu(E\cap A^c)$.

תזכרו ש- $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ ומכאן תקבלו את הנדרש.

ב) נניח ש- $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{M}_\mu$ זרות בזוגות ו- $E\subseteq X$. הראו שמתקיים

$$\mu\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E\cap A_i)$$

רמז: אינדוקציה.

ג) נניח ש- $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}_\mu$ זרות בזוגות. נסמן $B_n=\bigcup_{i=1}^n A_i$ $B=\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ ונניח ש- $E\subseteq X$.

<u>סקיצה להוכחה:</u> הראו שלכל n מתקיים

$$\mu(E) \underset{\text{למה?}}{=} \mu(E\cap B_n)+\mu(E\setminus B_n) \underset{\text{תכונה של מידה}}{\ge} \sum_{i=1}^n \mu(E\cap A_i)+\mu(E\setminus B)$$

תכונות שאתם הסקתם מההגדרה

כעת הראו ש $\mu(E)\ge\sum_{i=1}^\infty \mu(E\cap A_i)+\mu(E\setminus B)\ge\mu(E\cap B)+\mu(E\setminus B)$

הסיקו ש- $\mathcal{M}_\mu$ היא σ-אלגברה וש- μ מצומצמת ל- $\mathcal{M}_\mu$ היא מידה על $\mathcal{M}_\mu$.

<u>שאלה 3</u> נניח $\tilde{\mathcal{M}}\subseteq 2^X$ אלגברה על X. נאמר ש- $\nu:\tilde{\mathcal{M}}\to[0,\infty]$ מידה על $\tilde{\mathcal{M}}$ אם:

(1) $\nu(\emptyset)=0$

(2) אם $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\tilde{\mathcal{M}}$ זרות בזוגות ו- $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in\tilde{\mathcal{M}}$ אז $\nu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)=\sum_{i=1}^\infty\nu(A_i)$

נניח ש- ν מידה על $\tilde{\mathcal{M}}$ ונגדיר

$$\mu(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty\nu(B_i) : A\subseteq\bigcup B_i \text{ וגם } B_i\in\tilde{\mathcal{M}}\right\}$$

א) הוכיחו ש- $\mu(A)=\nu(A)$

רמז: קחו $A\in\tilde{\mathcal{M}}$ ו- $B_1=A$, $\emptyset=B_i$ ל- $i\ge2$ והסיקו... עבור $B_i\in\tilde{\mathcal{M}}$ $A\subseteq\bigcup B_i$ הגדירו $E_i=A\cap(B_i\setminus(B_1\cup\dots\cup B_{i-1}))$ עבור $i\ge2$ ו- $E_1=?$. המשיכו מכאן [<u>בדיוק</u> שתי שורות].

ב) הוכיחו כי μ מידה חיצונית על X וכי $\tilde{\mathcal{M}}\subseteq\mathcal{M}_\mu$.

רמז: קחו $A\in\tilde{\mathcal{M}}$. צ"ל $A\in\mathcal{M}$. קחו $E\subseteq X$. צ"ל:

$$\mu(E)\ge\mu(E\cap A)+\mu(E\setminus A)$$

מהגדרת μ מספיק להראות שאם $E_i\in\tilde{\mathcal{M}}$ ו- $E\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty E_i$

אז $\sum\nu(E_i)\ge\mu(E\cap A)+\mu(E\setminus A)$

הראו ש- $\mu(E\cap A)\le\sum\nu(E_i\cap A)$ (למה?)

ומכאן בדיוק שלוש שורות...

__שאלה 4__ $S \subseteq 2^X$ נקראת סמי-אלגברה אם $\emptyset \in S$ ו- S סגורה לחיתוך סופי. ולכל $A \in S$ יש $A_1,\dots,A_n \in S$ רק ש-
$A^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

מידה על סמי-אלגברה S היא פונקציה $\nu : S \to [0,\infty]$ כך ש- $\nu(\emptyset) = 0$ ואם לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq S$ זרות בזוגות כך ש- $\bigcup A_i \in S$ מתקיים $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$

S סמי-אלגברה של X ותהי ν מידה של S. תהי $\tilde{\mathcal{M}}$ האלגברה הנוצרת ע"י S (תרגיל 2). הראו שקיימת מידה $\tilde{\nu}$ על $\tilde{\mathcal{M}}$ כך ש- $\nu = \tilde{\nu}|_S$. [יש להגדיר את $\tilde{\nu}$, לוודא שההגדרה טובה ולבדוק שזו מידה].

רמז: עבור $A \in \tilde{\mathcal{M}}$ יש $A_1,\dots,A_n \in S$ זרות כך ש- $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (למה?) והגדירו $\tilde{\nu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i)$. קבלו ש- $\nu = \tilde{\nu}|_S$ וודאו שזו מידה.

__שאלה 5__ נגדיר $S = \{[a,b) : -\infty < a < b \le \infty\} \cup \{(-\infty,b) : -\infty < b \le \infty\} \cup \{\emptyset\}$
נגדיר $\nu : S \to [0,\infty]$ ע"י שנותן לקטע את אורכו.

(א) הראו ש- S סמי-אלגברה וש- ν מידה של S (תרגיל 4)

(ב) הסיקו שקיימת מידה μ על σ-אלגברה בורל של הישר $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ שנותנת לקטע את אורכו.

כבר יודעים (למה??) שניתן להרחיב את ν למידה על המשפחה של $\tilde{\mathcal{M}}$ - האלגברה הנוצרת ע"י S.

והגדירו את μ בדרך דומה לשאלה 3. $\Leftarrow$ μ מידה חיצונית (למה?)
$\Leftarrow$ $\mathcal{M}_\mu$ σ-אלגברה ו- μ מידה על $\mathcal{M}_\mu$. הסיקו ש-
$\tilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}_\mu$ ו- μ מרחיבה את ν.

(16) 27.02.08

ג' מידה

הערות לתרגול 4

(2) $a_{n,i}\ge 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i} = \sum_{i=1}^{\infty}\lim a_{n,i}$

כשבאים לפתור את זה קודם צריך להגיד מהו מרחב המידה שעובדים בו - $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ כאשר μ מידת המניה.

נגדיר סדרת פונקציות מדידות (למה?) $f_n:\mathbb{N}\to[0,\infty)$

$f_n(i)=a_{n,i}$

$\Leftarrow \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה נקודתית של פונקציות אי שליליות מדידות ביחס ל-σ-אלגברה הנתונה. ולכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית

$$\sum_i \lim_n a_{n,i} = \sum_i \lim_n f_n(i) = \int_{\mathbb{N}} \lim_n f_n\, d\mu \overset{MCT}{=} \lim \int_{\mathbb{N}} f_n\, d\mu$$

(3) בשלב הזה עוד לא הגדרנו את המידה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$! אם לא הגדרנו מידה מסוימת אי אפשר להשתמש בה!! בכלל אין דבר כזה מידה סטנדרטית. ואת מידת לבג עוד לא הגדרנו אז. חוץ מזה לא יודעים לאיזו σ-אלגברה ביחס אליה (ולא יודעים שהאינטגרל לפי מידת לבג מתלכד עם האינטגרל שאנחנו מכירים) של $\mathbb{R}$.

מרחב מידה סופי: X הוא מרחב שעבורו $\mu(X)<\infty$.

אז דוגמה טובה היא למשל המרחב $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu(n)=\frac{1}{n^2})$ קל לראות ש-μ כן אכן מידה. זה מרחב מידה סופי: כי $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$.

ונתבונן בפונקציות $f_n=\chi_{\{n\}}n^2$ ברור ש- $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

אבל $\int_{\mathbb{N}} f_n\, d\mu = n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$.

(4) $\{f_n\}$ מדידות אי שליליות; $f_n\downarrow f$ נקודתית, כלומר $f_n\to f$; $f_{n+1}\le f_n$ לכל n. ונניח ש- $\int_X f_1\, d\mu<\infty$. [כשאומרים דבר כזה זה אומר שבאופן נסתר כבר מוגדר לנו מרחב מידה $(X,\mathcal{M},\mu)$] צ"ל: $\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\, d\mu$

הוכחה: נגדיר $g_n=f_1-f_n$. כאן יש לתת את הדעת על כך שיכול להיות ש-f_1, f_n מקבלות את הערך ∞ ואז זה לא מוגדר. אבל בכל זאת אנחנו יכולים להתעלם מזה כי בגלל ש-$\int f_1\, d\mu$ סופי והסדרה יורדת והאינטגרציה היא פעולה מונוטונית (נובע שכל האינטגרלים סופיים) אז הפונקציות מקבלות ∞ רק על קבוצה בעלת מידה 0 והקבוצות אלה לא משפיעות על האינטגרל לכן אפשר להניח בה"כ ש-g_n מוגדרות. g_n מדידות כי f_1, f_n מדידות. g_n אי-שלילית

כי $f_n(x)\le f_1(x)$ לכל $x\in X$ $\{g_n\}$ עולה נקודתית כי $\{f_n\}$ יורדת נקודתית לכל x $g_n(x)\nearrow f_1(x)-f(x)$. f_n, g_n מדידות אי שליליות: $f_1=g_n+f_n$ $\Leftarrow$ $\int f_1 d\mu=\int f_n d\mu+\int g_n d\mu$

$\Leftarrow$ בגלל שכל השלושה סופיים $\int g_n d\mu=\int f_1 d\mu-\int f_n d\mu$.

באותו אופן, אם נסמן $g=f_1-f$ נקבל $\int g\, d\mu=\int f_1 d\mu-\int f d\mu$

מ-MCT מקבלים $\lim\int g_n d\mu=\int g\, d\mu$ ומכאן דבר מהר מה דרשנו כי $\int f_1 d\mu<\infty$

(5) $\{f_n\}$ מדידות אי שליליות: $f_n\to f$ נקודתית וקיים $\lim_n\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu<\infty$. אז לכל E מדידה $\int_E f_n d\mu\to\int_E f d\mu$.

פתרון

שלב I: $\int_X f d\mu=\int_E f d\mu+\int_{E^c} f d\mu=\int_E \liminf f_n d\mu+\int_{E^c}\liminf f_n d\mu \le$

$$\overset{\text{פאטו}}{\le}\liminf\int_E f_n d\mu+\liminf\int_{E^c} f_n d\mu\le\liminf\left(\int_E f_n d\mu+\int_{E^c} f_n d\mu\right)=$$

$$=\liminf\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$$

$\Leftarrow$ לכל אורך הדרך יש שוויונים!

$$(1)\quad \int_E f d\mu+\int_{E^c} f d\mu=\liminf\int_E f_n d\mu+\liminf\int_{E^c} f_n d\mu$$

$$(2)\quad \int_E f d\mu\le\liminf\int_E f_n d\mu<\infty$$

$$(3)\quad \int_{E^c} f d\mu\le\liminf\int_{E^c} f_n d\mu$$

מ-(1), (2), (3) נקבל $\int_E f d\mu=\liminf\int_E f_n d\mu$

שלב II

נניח $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה של טבעיים. אז $\{f_{n_k}\}$ מדידות אי שליליות: $f_{n_k}\to f$ נקודתית וקיים $\lim\int_X f_{n_k} d\mu=\int_X f d\mu$. לכן מהשלב הקודם נובע ש- $\int_E f d\mu=\liminf\int_E f_{n_k} d\mu$ $\Leftarrow$ $\int_E f d\mu=\lim\int_E f_n d\mu$

סקיצה של פתרון שני: נגדיר $h_n=\inf_{i\ge n} f_i$. אזי $h_n\nearrow f$ נקודתית, h_n מדידות, אי שליליות, $0\le h_n\le f_n$ לכל E מדידה $\chi_E h_n\nearrow\chi_E f$ (שימוש ב-MCT).

$$0 \le \int_E f_n d\mu - \int_E h_n d\mu = \int_E (f_n - h_n) d\mu \le \int_X (f_n - h_n) d\mu =$$

$$= \int_X f_n d\mu - \int_X h_n d\mu \longrightarrow 0$$

דרך שלישית:

משפט ההתכנסות הנשלטת המוכלל: אם $f_n, g_n, f, g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$

ומתקיים $f_n \to f$, $g_n \to g$ נקודתית ולכל n $|f_n| \le g_n$ וגם

$\int_X g_n d\mu \to \int_X g d\mu$ אזי $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$! $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$

נפעיל את המשפט על $\chi_E f_n$ ועל $\chi_E f$ שהן אי

שליליות וב-$\mathcal{L}^1(X,\mu)$. אז

$$|\chi_E f_n| = \chi_E f_n \le f_n$$

ומשם מקבלים מה שצריך.

(18) 5.03.08

ת. מידה

1) $\{f_n\}\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$ $f_n\to f$ במ"ש ! $\mu(X)<\infty$.

צ"ל: (1) $f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$

(2) $\int f_n d\mu\to\int f d\mu$

הוכחה: קיים n_0 כך שלכל x $|f_{n_0}(x)-f(x)|<1$

$\Leftarrow$ $|f(x)|\le|f_{n_0}(x)|+1$

$$\int|f|d\mu\le\int(|f_{n_0}|+1)d\mu=\int|f_{n_0}|d\mu+\mu(X)<\infty$$

$\Leftarrow$ $f\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$

יהי $\varepsilon>0$ קיים N_ε כך שלכל $n\ge N_\varepsilon$ לכל x $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\Leftarrow$ $\left|\int f_n d\mu-\int f d\mu\right|\le\int|f_n-f|d\mu\le\varepsilon\mu(X)$

$\Leftarrow$ $\int f_n d\mu\to\int f d\mu$

2) תנו דוגמה ל- $\{f_n\}\in\mathcal{L}^1$, $f_n\to f$ במ"ש אבל

ל- $\{\int f_n d\mu\}$ אין גבול

המרחב הם $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},$ מידת המנייה$)$. יהיו $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ מספרים

ממשיים כך ש- $\alpha_k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ אבל ל- $\sum\alpha_k$ אין גבול

ב- $[-\infty,\infty]$. נגדיר $f_n=\sum_{k=1}^n\alpha_k\chi_{\{k\}}$ ונגדיר

$f(n)=\alpha_n$ לכל n אזי $f_n\to f$ במ"ש

כי $\alpha_n\to0$ $\sup_{k\in\mathbb{N}}|f_n(k)-f(k)|=\sup\{|\alpha_k|;k\ge n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

כמו כן $f_n\in\mathcal{L}^1$ לכל n כי $\int|f_n|d\mu=\sum_{i=1}^n|\alpha_i|<\infty$

אבל אין גבול ל- $\int f_n d\mu$ מגבול על סמך הבנייה.

$f_n,g_n,f,g\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$, $f_n\to f$ (נקודתית) $\int|f_n|d\mu\to\int|f|d\mu$

$|f_n|\le g_n$ לכל n ! $\int g_n d\mu\to\int g d\mu$

צ"ל: $\int f_n d\mu\to\int f d\mu$

הוכחה: לכל x קיים $|f(x)-f_n(x)|\le|f(x)|+|f_n(x)|\le g(x)+g_n(x)$

$\Leftarrow$ $h_n=g+g_n-|f-f_n|\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$

$$\int 2g\,d\mu=\int\lim h_n d\mu=\int\liminf h_n d\mu\le\liminf\int h_n d\mu=$$

$$=\liminf\left(\int g_n d\mu+\int g_n d\mu+\int|f-f_n|d\mu\right)=\int 2g\,d\mu-\limsup\int|f-f_n|d\mu$$

$\Leftarrow$ $\int|f-f_n|d\mu\to0$

$f_n, f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ $\quad f_n \to f$ נקודתית $\quad \int|f_n|d\mu \to \int|f|d\mu$

צ"ל: $\int|f_n-f|d\mu \longrightarrow 0$

הוכחה: נגדיר $F_n=|f-f_n|$, $F=0$, $G_n=|f_n|+|f|$

$G=2|f|$ ⇐ $F_n, G_n, F, G \in \mathcal{L}^1$, $G_n \geq 0$, $F_n \to F$

נקודתית $G_n \to G$ נקודתית $|F_n| \leq G_n$ לכל n וגם

$$\int G_n d\mu = \int|f_n|d\mu + \int|f|d\mu \to 2\int|f|d\mu$$

⇐ לפי השאלה הקודמת $\int|f_n-f|d\mu = \int F_n d\mu \to \int F d\mu = 0$

(א) צ"ל: אם $\int|f_n-f|d\mu \to 0$ אזי $f_n \to f$ במידה.

הוכחה: יהי $0<\varepsilon$. נסמן $A_n=\{x : |f(x)-f_n(x)| > \varepsilon\}$

$$\int_X|f-f_n|d\mu \geq \int_{A_n}|f-f_n|d\mu > \varepsilon\mu(A_n)$$

⇐ $\mu(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int|f_n-f|d\mu$ ⇐ $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

⇐ $f_n \to f$ במידה.

(ב) דוגמה לפונקציות מדידות על מרחב מידה כלשהו f_n, f רק ש- $f_n \to f$ במידה, אבל $\int|f-f_n|d\mu \not\to 0$.

ניקח מרחב $[0,1]$ עם σ-אלגברה בורל ומידת לבג:

$n\chi_{(0,\frac{1}{n})} \longrightarrow 0$ במידה, אבל $\int n\chi_{(0,\frac{1}{n})}d\mu \not\to 0$.

דוגמה לאי שוויון חזק בלמה של Fatou:

יהי $X=\{a,b\}$. $\mathcal{B}$ σ אלגברה של כל תתי הקבוצות של X. $\mu=\delta_a+\delta_b$ סכום של המידות האטומיות.

נגדיר סדרת פונקציות ע"י

$f_{2n}=\chi_{\{a\}}$

$f_{2n+1}=\chi_{\{b\}}$

אזי $\liminf_{n\to\infty} f_n = 0$. אבל $\int f_n d\mu = 1$ לכל n.

⇐ $\int \liminf f_n d\mu = 0 < 1 = \liminf \int f_n d\mu$

(19) 12.03.08
ג' מידה

אדמיניסטרציה: לציון ילקחו 7 תרגילים. אבל בכל זאת ״ינתנו 11 תרגילים וגם תרגיל 11 יכול להיכלל בציון במידת הצורך

4

נגדיר על $\mathbb{R}$ יחס שקילות ע"י $x\sim y$ אמ"מ $x-y\in\mathbb{Q}$

(1) נראה כי זהו יחס שקילות: $x\sim x \Leftarrow 0\in\mathbb{Q}$

ברור ש- $r\in\mathbb{Q}$ אמ"מ $-r\in\mathbb{Q}$ $\Leftarrow$ $x\sim y$ $\Leftarrow$ $y\sim x$

אם $x\sim y$; $y\sim z$ אז $x-z=(x-y)+(y-z)$ $\Leftarrow$ $x\sim z$

(2) נראה שלכל מחלקת שקילות $[x]$ יש נציג בקטע $[0,1]$. ויהי $x\in\mathbb{R}$. מצפיפות הרציונליים קיים $r\in\mathbb{Q}$ רק ש- $x-r\in(0,1)$ $\Leftarrow$ המספר $x'=x-r$ מקיים $x'\sim x$ ולכן $x'\in[x]$ הנציג המבוקש.

(3) לכל מחלקה ב- $[0,1]$ נבחר נציג ב- $[0,1]$ ותהי $E\subseteq[0,1]$ קבוצת הנציגים (משתמשים באקסיומת הבחירה). נראה ש- $E\cap(E+r)=\emptyset$ לכל $0\neq r\in\mathbb{Q}$ וגם $\mathbb{R}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(E+r)$

הוכחה: תהי $E\subseteq[0,1]$ קבוצה המכילה נציג מכל מחלקת שקילות של $\sim$ ויהי $x\in\mathbb{R}$. קיים $r\in\mathbb{Q}$ רק ש- $x-r\in E$ כי E מכילה את הנציג של $[x]$. לכן $x\in E+r$ $\Leftarrow$ $x\in\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(E+r)$ והיות ש-x היה שרירותי נובע ש- $\mathbb{R}\subseteq\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(E+r)$

ההכלה בכיוון השני ברורה. אם $x\in E$ אז לכל $r\in\mathbb{Q}$ מתקיים $x+r\sim x$ והיות ש- E מכילה נציג אחד מכל מחלקה $\Leftarrow$ E זרה לקבוצה $E+r$ לכל $0\neq r\in\mathbb{Q}$

<u>סימון</u>: $x\in E-E$ אמ"מ קיימים $y_1,y_2\in E$ רק ש- $x=y_1-y_2$.

מתרגיל נובע שאם $E\subseteq\mathbb{R}$ מדידה בעלת מידת לבג חיובית ממש אזי $E-E$ מכילה קטע סביב 0.

נניח ש- $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה ו- $0<\mu(A)$ (נראה של- A יש תת קבוצה לא מדידה לבג. נניח בשלילה שכל תת קבוצה של A מדידה. ויהי E אוסף הנציגים של $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. [כמו קודם $\{E+r\}_{r\in\mathbb{Q}}$ ראינו שהן זרות זו לזו ומכסות את $\mathbb{R}$].

(א) נראה שקיים $r\in\mathbb{Q}$ כך שמידה של $A_r=A\cap(E+r)$ היא חיובית ממש. $A=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}A_r$ איחוד בן מניה זר. $0<\mu(A)=\sum_{r\in\mathbb{Q}}\mu(A_r)$
$\Leftarrow$ חייב להיות $r\in\mathbb{Q}$ שעבורו $\mu(A_r)>0$.

(ב) כעת נראה ש- $\mathbb{Q}\cap(A_r-A_r)=\{0\}$.

(תרגיל) נניח שכל $E\subseteq\mathbb{R}$ מדידה בעלת מידה חיובית ממש אזי $E-E$ חייבת להכיל קטע סביב 0. אבל במקרה כזה

$$A_r-A_r\subseteq(E+r)-(E+r)=E-E$$

ו- $\mathbb{Q}\cap(E-E)=\{0\}$ וזו סתירה. (משפט רן סימנו)

(ג) נראה שמספיק להראות שלכל $K\subseteq A_r$ קומפקטית מתקיים $\mu(K)=0$. (זה מספיק בגלל הרגולריות של μ). ועכשיו נראה:
תהי $K\subseteq A_r$ קומפקטית ונתבונן ב- $H=\bigcup_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}(K+t)$. אזי H חסומה, שהרי $H\subseteq[0,1]+K$ $\Leftarrow$ $\mu(H)<\infty$. אבל מצד שני האיחוד הוא איחוד זר כי $K\subseteq E+r$ לכן מתקיים

$$\mu(H)=\sum_t\mu(K+t)=\aleph_0\mu(K)$$

$\Leftarrow$ $\mu(K)=0$. (וזאת הוכחה בלי להסתמך על התרגיל).

---

(1) הוכיחו כי קיימת $G\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה וצפופה עם מידת לבג קטנה מ- ε לכל $\varepsilon>0$ נתון (חשבו על סידור הרציונליים).

(2) (א) הוכיחו שקיימת $A\subseteq[0,1]$ סגורה בעלת מידת לבג חיובית ובעלת פנים ריק (להיעזר ב-1).

(ב) הוכיחו שאם A,B סגורות בעלות פנים ריק אז גם $A\cup B$. הניחו בשלילה כי $A\cup B$ מכילה קטע והשתמשו בכך של- A ול- B פנים ריק.

(ג) מאינדוקציה.

(ד) הוכיחו שקיימת סדרת מספרים $0=r_0<r_1<\dots<1$
כך שלכל $i\ge 0$ $0<\mu(A\cap(r_i,r_{i+1}))$
(A זו הקבוצה מ-(א)).
הגדירו פונקציה $F(x)=\mu(A\cap[0,x))$ $0\le x\le 1$ אזי
F רציפה (דורש הוכחה) על $[0,1]$ ועולה ומשם
קבלו את הנדרש.
עבור הרציפות של F השתמשו ברציפות של מידה מלמטה
ומלמעלה.
(ה) קחו קבוצות מסעיף ג' והיעזרו ב(ד)

3) הוכיחו שקיימת פונקציה מדידה אי שלילית וסופית על הישר כך
שלכל קטע I $\int_I f\,d\mu=\infty$. קחו את הקטעים מסעיף
2ב ודאגו לכך שלכל n $\int_{I_n} f\,d\mu=\infty$ (I_n הם הקטעים)

(22) 19.03.08
ת' מידה

נשתמש בא"ש Jensen על מנת להראות:

(1) נניח $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $0<\lambda_i$ לכל i. אז עבור $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$

מתקיים: $(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \le \sum \frac{a_i^2}{\lambda_i}$

ניקח $X=\{1,\dots,n\}$, $\mu(i)=\lambda_i$, $f(i)=\frac{a_i}{\lambda_i}$.

$\varphi(x)=x^2$. זוהי פונקציה קמורה על הישר. אזי

$$(\sum a_i)^2 = \varphi(\sum \lambda_i\cdot\frac{a_i}{\lambda_i}) = \varphi(\int f\,d\mu) \le$$
$$\underset{Jensen}{\le} \int \varphi\circ f\,d\mu = \sum \lambda_i\,\varphi(\frac{a_i}{\lambda_i}) = \sum\frac{a_i^2}{\lambda_i}$$

(2) $h\in L^+\cap L^1$ של מרחב מידה 1. $A=\int h$ אזי

$$\sqrt{1+A^2}\le\int\sqrt{1+h^2}\le 1+A$$

נגדיר $\varphi(t)=\sqrt{1+t^2}$ $\Leftarrow$ $\varphi'(t)=t(1+t^2)^{-1/2}$

$\Leftarrow$ $\varphi''(t)=(1+t^2)^{-3/2}$ $\Leftarrow$ φ קמורה על הישר.

א"ש Jensen נותן באופן מיידי את הא"ש השמאלי.

לכל $0\le t$ מתקיים $\sqrt{1+t^2}\le 1+t$ $\Leftarrow$

$$\int\sqrt{1+h^2}\le\int 1+h = 1+A$$

(3) X ממידה 1. $0<p<q\le\infty$ אזי עבור f מדידה

מתקיים $\|f\|_p\le\|f\|_q$.

נניח $\|f\|_p=\infty$. ניקח $E=\{|f|\ge 1\}$ אזי

$$\int_{E^c}|f|^p \le \mu(E^c)1 \le 1$$

$\Leftarrow$ $\int_E|f|^p=\infty$.

אם $p<q<\infty$ אז לכל $x\in E$ $|f(x)|^p\le|f(x)|^q$

$\Leftarrow$ $\infty=\int_E|f|^p\le\int_E|f|^q$ ולכן $\|f\|_q=\infty$ כנדרש,

אם $\|f\|_\infty=M<\infty$ אז לכל $0<t<\infty$ $\int|f|^t\le M^t$

$\Leftarrow$ $\|f\|_t\le M$. $\Leftarrow$ $\|f\|_p=\infty$ אז $\|f\|_\infty=\infty$

נניח $\|f\|_p<\infty$. נגדיר $g=|f|^p$ - מדידה אי שלילית

ב־L^1. ניקח $\varphi(t)=t^{q/p}$ $\Leftarrow$ φ קמורה על (ממש)

(כי $1<\frac{q}{p}$).

<u>הערה:</u> כבר הראינו ש- $\|f\|_q \le \|f\|_\infty$ אם מניחים
ש- $0<p<q<\infty$. כדי לקבל את הטענה ש- g מקבלת
0 (תקין ונתונים $\varphi(t)=|t|^{q/p}$ אז φ קמורה על
הישר. מ- Jensen $\varphi(\int g) \le \int \varphi\circ g$
$\Leftarrow$ $\int|f|^q \le (\int|f|^p)^{q/p}$ וע"י הוצאת שורש q נקבל
$\|f\|_p \le \|f\|_q$.

<u>תרגיל:</u> נניח $0<r<\infty$ כך ש- $\|f\|_r<\infty$.
הוכיחו ש- $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$

<u>הוכחה:</u> אם $\|f\|_\infty=0$ $\Leftarrow$ $f=0$ כמעט תמיד
וסיימנו. לכן נניח ש- $\|f\|_\infty>0$. נבחר $0<k<\|f\|_\infty$
נסמן $E=\{|f|\ge k\}$ אז $0<e=\mu(E)$
מהגדרת נורמה $\|\cdot\|_\infty$ לכל $0<p<\infty$ מתקיים
$\int|f|^p \ge \int_E|f|^p \ge ek^p$. אם $e<\infty$ אזי
$\|f\|_p \ge e^{1/p}k \xrightarrow[p\to\infty]{} k$ ולכן $\liminf\|f\|_p \ge k$ [גם
האחרון נכון גם אם $e=\infty$]. יצא לכל k כנ"ל.
אבל שמאל לא תלוי ב- k ולכן $\liminf\|f\|_p \ge \|f\|_\infty$.
אם $\|f\|_\infty=\infty$ סיימנו. לכן, נניח ש- $0<\|f\|_\infty<\infty$
צריך להראות ש- $\limsup\|f\|_p \le \|f\|_\infty$. נוכל להניח
ש- $\|f\|_\infty=17$ (לא ברור למה אבל אפשר להניח
ש- $\|f\|_\infty>1$). ניקח $E=\{|f|\ge 1\}$
$$\int|f|^p=\int_E+\int_{E^c}\le\int_E+17^p\mu(E^c)$$
מהנתון קיים $0<r<\infty$ כך ש- $\|f\|_r<\infty$.

כאן קרה כשל מחשבתי.

(21)

<u>תרגיל</u>: יהיו $0<p<q<r\le\infty$. בתרגיל קודם ראינו ש- $L^r\cap L^p\subseteq L^q$. נניח $\lambda\in(0,1)$ כך ש-

$q^{-1}=\lambda p^{-1}+(1-\lambda)r^{-1}$ (נסכים ש- $\infty^{-1}=0$)

נראה שעבור $f\in L^r\cap L^p$ $\|f\|_q\le\|f\|_p^{\lambda}\|f\|_r^{1-\lambda}$

אם $r=\infty$ אז $\lambda=\frac{p}{q}$ ואז

$$|f|^q=|f|^p\cdot|f|^{q-p}\underset{\text{כמעט תמיד}}{\le}|f|^p\|f\|_\infty^{q-p}$$

ומכאן הטענה נובעת בקלות. (נגדיר $a=\frac{p}{\lambda q}$ $b=\frac{r}{(1-\lambda)q}$

סופית, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ $|f|^{\lambda q}\in L^a$ כי $f\in L^p$

ובאותו אופן $|f|^{(1-\lambda)q}\in L^b$. ויהיה ש- $|f|^q\le|f|^p\|f\|_\infty^{q-p}$

כמעט תמיד אחרי האינטגרציה נקבל $\|f\|_q^q\le\|f\|_\infty^{q-p}\|f\|_p^p$

נוציא שורש q ונקבל $\|f\|_q\le\|f\|_\infty^{1-\lambda}\|f\|_p^{\lambda}$.

מ- Holder $\||f|^{(1-\lambda)q}|f|^{\lambda q}\|_1\le\||f|^{\lambda q}\|_a\||f|^{(1-\lambda)q}\|_b$

$$\|f\|_q^q=\int|f|^q\le\left(\int|f|^p\right)^{1/a}\left(\int|f|^r\right)^{1/b}$$

$\frac{1}{bq}=\frac{1-\lambda}{r}$ (ושוויון דומה עבור a) ולכן אחרי הוצאת שורש q נקבל את הנדרש.

(22) 26.03.08

ג' מידה

בליניארית ראינו את המשפט הספקטרלי ואפשר לעשות לו הכללות יפות, מרחב מכפלה פנימית שלם (קרוי מרחב הילברט).

ניתן הגדרה קצת שונה לאלגברה. אלגברה היא מרחב וקטורי U שעליו מוגדרת פעולת כפל בינארית כך שמתקיים לכל $x,y,z\in U$, $a\in\mathbb{C}$:

(1) $(xy)z=x(yz)$

(2) $x(y+z)=xy+xz$ $\qquad (y+z)x=yx+zx$

(3) $a(xy)=(ax)y=x(ay)$

איבר יחידה I ב-U הוא איבר המקיים $x=Ix=xI$ לכל $x\in U$

(לא תמיד קיים איבר יחידה!)

<u>הגדרה:</u> אלגברת בנך U היא אלגברה עם נורמה כך ש-

(1) U מרחב בנך

(2) לכל $A,B\in U$ $\quad \|AB\|\le\|A\|\|B\|$

<u>דוגמאות:</u>

(1) $C([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{C}$, f רציפה$\}$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$
$$\|f\|=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

(2) $M^n(\mathbb{C})$ $\quad \|A\|=\sup_{y\in\mathbb{C}^n}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}$ כאשר $\|y\|=\sqrt{\sum y_i^2}$

(3) $B(\mathcal{H})$: אופרטורים לינאריים חסומים על מרחב הילברט $\mathcal{H}$

$$(A+B)y=Ay+By$$
$$(AB)y=A(By)$$
$$\|A\|=\sup_{\substack{y\in\mathcal{H}\\ y\neq 0}}\frac{\|Ay\|}{\|y\|} \qquad \|y\|=\sqrt{\langle y,y\rangle}$$

איבר $A\in U$ ייקרא הפיך אם קיים איבר $C\in U$ כך ש- $CA=AC=I$. נסמן הפכי של A ב-A^{-1}.

<u>הגדרה:</u> עבור $A\in U$ נגדיר הספקטרום של A ב-U הוא:

$$Sp_U(A)=\{\lambda\in\mathbb{C} : A-\lambda I \text{ אינו הפיך}\}$$

דוגמאות:

① $f\in C([0,1])$ $\quad Sp(f) = Range(f) = \{\lambda\in\mathbb{C} : \exists x\in[0,1]\ f(x)=\lambda\}$

② מטריצות נורמליות ב- $M^n(\mathbb{C})$ - הספקטרום הוא אוסף כל הערכים העצמיים.

משפט: עבור אלגברת בנך $\mathcal{U}$; $A\in\mathcal{U}$, $Sp_{\mathcal{U}}(A)$ זו קבוצה סגורה לא ריקה ומוכלת בעיגול $\{z : |z|\le\|A\|\}$.

הגדרה: אינוולוציה (הצמדה) היא פונקציה $*:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$, $A\mapsto A^*$ המקיימת:

(1) $(A+B)^*=A^*+B^*$

(2) $(AB)^*=B^*A^*$

(3) $(aA)^*=\bar{a}A^*$ לכל $a\in\mathbb{C}$

(4) $A^{**}=(A^*)^*=A$

דוגמאות:

① $f\in C([0,1])$ $\quad (f^*)(x)=\overline{f(x)}$

② $A\in M^n(\mathbb{C})$ $\quad (A_{ij})^*=\overline{A_{ji}}$

הגדרה: אלגברת C^* היא אלגברת בנך עם פעולת הצמדה רק ש- $\|A^*A\|=\|A\|^2$. A^* נקרא הצמוד של A.
A צמוד לעצמו אם $A=A^*$. A נורמלי אם $A^*A=AA^*$.
A אוניטרי אם $AA^*=A^*A=I$.

טענה:

(1) $I^*=I$

(2) A הפיך $\Longleftrightarrow$ A^* הפיך; $\quad (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

(3) $Sp(A^*)=\overline{Sp(A)}=\{\bar{\lambda} : \lambda\in Sp(A)\}$

טענה: אם $\mathcal{U}$ אלגברת $\mathbb{C}$; $A\in\mathcal{U}$ רק ש- $A=A^*$ צ"ל $Sp(A)\in\mathbb{R}$ והוא מכיל את $\pm\|A\|$.

$C(Sp(A))$ - מרחב הפונקציות הרציפות על $Sp(A)$ עבור $A\in\mathcal{U}$
(שנינו שהם דומים לזה). זהו מרחב נורמי עם נורמת $\|\cdot\|$
ממש בעצמו אלגברת C^*.

מעכשיו, הכל במרחב הילברט:

דוגמאות למרחב הילברט:

① $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu)$ כאשר μ מידת בורל

$$L^2(\mathbb{R}^n, d\mu) = \{ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\mu < \infty \}$$
$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} g \, d\mu$$

②
$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} : c_n\in\mathbb{C} \, , \, \sum |c_n|^2 < \infty \}$$
$$\langle \{c_n\}, \{a_n\}\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m a_m$$

אפשר להגדיר $L^2(M,d\mu)$ ו- $\ell^2(M)$ גם עבור M שאינה בת מניה.

סכום ישר של מרחבי הילברט:
$$\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2 = \{(x,y) : x\in\mathcal{H}_1, y\in\mathcal{H}_2\}$$
באופן דומה אפשר להגדיר סכום של מספר בן מניה של מרחבי הילברט. אבל אפשר להרחיב את זה גם לקבוצות שאינן בנות מניה. המכפלה הפנימית מוגדרת
$$\langle (x_1,y_1), (x_2,y_2)\rangle = \langle x_1,x_2\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y_1,y_2\rangle_{\mathcal{H}_2}$$

$x,y\in\mathcal{H}$ נקראים אורתוגונליים אם $\langle x,y\rangle=0$
$\{x_\alpha\}$ משפחה אורתונורמלית אם $\{x_\alpha\}$ אורתוגונליים ; $\|x_\alpha\|=1$
תת מרחב סגור של מרחב הילברט הוא מרחב הילברט.

טענה: לכל מרחב הילברט יש בסיס אורתונורמלי.

הגדרה: מרחב הילברט הוא ספרבילי אמ"מ יש לו בסיס אורתונורמלי (בא"ן) בן מניה.

אופרטור לינארי של מרחב הילברט $\mathcal{H}$ הוא $A:\mathcal{D}(A)\to\mathcal{H}$
כאשר $\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{H}$ התחום של A ומתקיים $A(x+y)=Ax+Ay$
ו- $A(ax)=aAx$ לכל $a\in\mathbb{C}$.
מגדירים $\|A\|=\sup_{0\neq y\in\mathcal{D}(A)}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}$

ניתן להראות שאם $\|A\|=\infty$, כלומר A אופרטור לא חסום, אזי A לא מוגדר על כל המרחב.
אופרטור שמקיים $\mathcal{D}(A)=\mathcal{H}$! וגם $\|A\|<\infty$ נקרא חסום.
$B(\mathcal{H})$ - אוסף כל האופרטורים הלינאריים החסומים של $\mathcal{H}$.

משפט: לכל $A\in B(\mathcal{H})$ קיים $A^*\in B(\mathcal{H})$ כך שלכל $x,y\in\mathcal{H}$ $\langle x,Ay\rangle=\langle A^*x,y\rangle$.

מזכירים: נניח ש- $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ספרבילי ומתקיים
$\langle\alpha x,\beta y\rangle=\bar{\alpha}\beta\langle x,y\rangle$

הגדרה: בהינתן אופרטור חסום וצמוד לעצמו A ; $\psi\in\mathcal{H}$.
ההעתקה $f\longmapsto\langle\psi,f(A)\psi\rangle$ הוא פונקציונל לינארי חיובי
של $C(Sp(A))$ (לכל f רציפה). לכן לפי משפט ההצגה
של ריס קיימת מידת בורל חיובית (רגולרית) ויחידה μ_ψ
על $Sp(A)$ כך שלכל $f\in C(Sp(A))$
$$\langle\psi,f(A)\psi\rangle=\int_{Sp(A)}f(x)\,d\mu_\psi(x)$$
μ_ψ נקראת המידה הספקטרלית של הוקטור ψ והאופרטור A.

המשפט הספקטרלי לאופרטור צמוד לעצמו: יהי A אופרטור צמוד לעצמו חסום של $\mathcal{H}$ אזי קיימות מידות $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ של $Sp(A)$ ואופרטור אוניטרי $U:\mathcal{H}\to\bigoplus_{n=1}^{N}L^2(\mathbb{R},d\mu_n)$
כך ש- $(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda)=\lambda\psi_n(\lambda)$!
$$(\psi_1(\lambda),\dots,\psi_N(\lambda))\in\bigoplus_{n=1}^{N}L^2(\mathbb{R},d\mu_n)$$

אתנחתא:

נכון או לא נכון:

(1) אם μ מידה מסומנת רק ש- $|\mu(A)|\le 1$ לכל A מדידה אזי $|\mu|(A)\le 2$ לכל A מדידה.

נכון: נניח ש-A מדידה ונניח ש- $A=\cup A_i$ פירוק לקבוצות זרות מדידות. נסמן $I=\{i:\mu(A_i)\ge 0\}$ אזי

$$\mu(\bigcup_{i\in I}A_i)=\sum_{i\in I}\mu(A_i)$$

וגם $\mu(\bigcup_{i\notin I}A_i)=\sum_{i\notin I}\mu(A_i)$ לכן

$$\sum|\mu(A_i)| = \sum_{i\in I}\mu(A_i)+\left|\sum_{i\notin I}\mu(A_i)\right| =$$

$$=\mu(\bigcup_{i\in I}A_i)+\left|\mu(\bigcup_{i\notin I}A_i)\right|\le 2$$

ומכאן דבר ברור.

(2) אם μ מידה חיובית; $\mu(A)\ge\nu(A)$ לכל A מדידה אזי $\mu(A)\ge|\nu|(A)$ לכל A מדידה.

לא נכון: ניקח מרחב עם נקודה אחת a ונניח ש- $\mu\equiv 0$; ν- רק ש- $\nu(\{a\})=-1$ $\Leftarrow$ μ חיובית; $\nu\le\mu$ אבל
$|\nu|(\{a\})=1>\mu(\{a\})=0$

המשך:

יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי מעל $\mathbb{C}$. עבור $\tau:V\to\mathbb{C}$ פונקציונל לינארי. נאמר ש- τ חסום אם קיים $c>0$ כך שלכל $v\in V$ $|\tau(v)|\le c\|v\|$

טענה: τ חסום אמ"מ τ רציף

הוכחה: נניח שלכל $v\in V$ $|\tau(v)|\le c\|v\|$. יהי $v_0\in V$ ויהי $\varepsilon>0$

לכן: אם $\|v-v_0\|<\frac{\varepsilon}{c}$ אז $|\tau(v)-\tau(v_0)|=|\tau(v-v_0)|<\varepsilon$

$\Leftarrow$ τ רציף.

נניח ש-τ רציף (יספיק שלה שזה אומר τ רציף ב-0). $\Leftarrow$

יש $\delta>0$ כך שאם $\|v-0\|<\delta$ אז $|\tau(v)-\tau(0)|<1$

עבור $w\neq 0$ $\left\|\frac{\delta}{\|w\|}w\right\|=\delta$ $\Leftarrow$ $\left|\tau(\frac{\delta}{\|w\|}w)\right|<1$

$\Leftarrow$ $|\tau(w)|\le\frac{1}{\delta}\|w\|$ $\Leftarrow$ τ חסום

הטענה הזו חשובה כי הרבה פעמים יותר קל להראות חסימות מרציפות או להפך וכל זה נוח.

טענה: נניח ש-τ חסום. אז מתקיים
$$\inf\{c>0 : c \text{ חוסם את } \tau\} = \sup\{|\tau(v)| : \|v\|=1\}$$
ונסמן מספר זה ב-$\|\tau\|$

הוכחה: לכל v עם $\|v\|=1$ ולכל c שחוסם את τ קיים $|\tau(v)|\le c\|v\|=c$ ולכן אגף שמאל $\geq$ אגף ימין.

מצד שני, $c_0=\sup\{|\tau(v)| : \|v\|=1\}$ חוסם את τ כי לכל $w\neq 0$ $\left|\tau\left(\frac{1}{\|w\|}w\right)\right|\le c_0 \Leftarrow |\tau(w)|\le c_0\|w\|$

$\Leftarrow$ c_0 = אגף שמאל.

טענה: נסמן ב-V^* את אוסף הפונקציונלים הלינאריים החסומים $V\to\mathbb{C}$ ונראה שזהו תת מרחב של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ וש-$\|\cdot\|$ היא נורמה עליו.

הוכחה: סכום של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה ומכפלה של פונקציה רציפה בקבוע היא פונקציה רציפה. לכן V^* סגור לחיבור וכפל בסקלר. הפונקציונל האפס כמובן ב-V^* $\Leftarrow$ V^* תת מרחב של $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$.

נניח $\tau\in V^*$. מהגדרת $\|\tau\|$ ברור ש-$\|\tau\|\geq 0$.

אם $\|\tau\|=0$ אז לכל $v\in V$ $|\tau(v)|\le\|\tau\|\,\|v\|=0 \Leftarrow \tau\equiv 0$

ברור ש- $\|\text{הפונקציונל האפס}\|=0$.

אם $\lambda\in\mathbb{C}$; $\tau\in V^*$ אז לכל v עם נורמה 1

$|(\lambda\tau)(v)|=|\lambda|\,|\tau(v)| \Leftarrow \|\lambda\tau\|=|\lambda|\,\|\tau\|$

יהיו $\tau_1,\tau_2\in V^*$. עבור $v\in V$ מנורמה 1

$|(\tau_1+\tau_2)(v)|\le|\tau_1(v)|+|\tau_2(v)|\le\|\tau_1\|+\|\tau_2\|$

אגף ימין לא תלוי ב-v. ניקח sup של אגף שמאל (בתחום v-ים) ונקבל $\|\tau_1+\tau_2\|\le\|\tau_1\|+\|\tau_2\|$

טענה: $(V^*,\|\cdot\|)$ מרחב בנך

הוכחה: הראינו שזה מרחב נורמי, אז נותר להראות שהוא שלם.

נניח ש-$\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq V^*$ סדרת קושי. עבור $v\in V$ מתקיים

$$|\tau_n(v)-\tau_m(v)|=|(\tau_n-\tau_m)(v)|\le\|\tau_n-\tau_m\|\,\|v\|$$

⇐ $\{\tau_n(v)\}$ סדרת קושי ב- $\mathbb{C}$ ⇐ קיים לה גבול ב- $\mathbb{C}$.
נסמנו ב- $\tau(v)$. כלומר פונקציה $\tau: V\to\mathbb{C}$ מקיימת לכל $v\in V$
$\tau_n(v)\to\tau(v)$. מאריתמטיקה של גבולות τ פונק' לינארית:

$$\tau(v+w)=\lim \tau_n(v+w)=\lim(\tau_n(v)+\tau_n(w))=$$
$$=\lim\tau_n(v)+\lim\tau_n(w)=\tau(v)+\tau(w)$$

נראה ש- τ חסום: לכל n,m מתקיים $|\|\tau_n\|-\|\tau_m\||\le\|\tau_n-\tau_m\|$
⇐ $\{\|\tau_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי של מספרים ממשיים ולכן חסומה.
כלומר, קיים קבוע c כך שלכל n $\|\tau_n\|\le c$. וגם לכל
$v\in V$ $|\tau_n(v)|\le\|\tau_n\|\|v\|\le c\|v\|$
אבל ימין לא תלוי ב- n ⇐ האי שוויון נשאר גם בגבול
⇐ $|\tau(v)|\le c\|v\|$ ⇐ c חוסם את τ ⇐ $\tau\in V^*$.
נותר להראות שהסדרה הנ"ל מתכנסת ל- τ ב- V^*. כלומר יש להראות
ש- $\|\tau_n-\tau\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.
יהי $\varepsilon>0$, קיים N כך שלכל $n,m>N$ $\|\tau_n-\tau_m\|<\varepsilon$
נראה ש- $\|\tau-\tau_n\|<\varepsilon$ לכל $n\ge N$ ונסיים:
נקבע n כזה. מהגדרת $\|\tau-\tau_n\|$ מספיק להראות שעבור
v עם $\|v\|=1$ $|(\tau-\tau_n)(v)|<\varepsilon$. עבור v כזה

$$|(\tau-\tau_n)(v)|=|\tau(v)-\tau_n(v)|=|\lim_m \tau_m(v)-\tau_n(v)|$$

⇐ לכל $m\ge N$ $|\tau_m(v)-\tau_n(v)|=|(\tau_m-\tau_n)(v)|\le\|\tau_m-\tau_n\|\|v\|<\varepsilon$
ואי שוויון נשאר בגבול. ☺

הערה לגבי תרגיל טו: אין צורך להראות את הטענה שכבר
הוכחה בכיתה.

(26) 2.04.08
ת. מידה

תיקון של הכשל המתשבת: נניח $0<r<\infty$ כך ש- $\|f\|_r<\infty$
אזי $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

הראינו ש- $\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p\ge\|f\|_\infty$. נותר להראות ש- $\limsup_{p\to\infty}\|f\|_p\le\|f\|_\infty$.

נניח ש- $\|f\|_\infty=M<\infty$ (אם $\|f\|_\infty=\infty$ סיימנו). אזי לכל $r<p$
מתקיים $|f|^p=|f|^r|f|^{p-r}\le M^{p-r}|f|^r \Rightarrow \int|f|^p\le M^{p-r}\int|f|^r$

$$\Rightarrow \|f\|_p=\left(\int|f|^p\right)^{1/p}\le \underbrace{M^{1-\frac{r}{p}}}_{\to M}\underbrace{\left(\int|f|^r\right)^{1/p}}_{\to 1}\to M \Rightarrow \limsup\|f\|_p\le M$$

פתרון אחר: אם $\|f\|_\infty=\infty$ סיימנו, לכן, נניח ש- $0<\|f\|_\infty<\infty$.
שני באלפא הומוגניים אפשר להניח ש- $\|f\|_\infty=17$ (העיקר ש- $17>1$). נסמן $E=\{|f|<1\}$. אז

(1) $\int|f|^p=\int_E+\int_{E^c}\le\int_E|f|^p+17^p\mu(E^c)$

מהנתון, קיים $0<r<\infty$ כך ש- $\|f\|_r<\infty$. לכל $r<p$
$|f|^r\ge\chi_E|f|^p\xrightarrow[p\to\infty]{}0$ (כי על E $|f|<1$). לפי
ימין ב- L^1. $\Rightarrow$ לפי משפט ההתכנסות הנשלטת (2) $\int_E|f|^p\xrightarrow[p\to\infty]{}0$

$0<\mu(E^c)\Rightarrow$ (3) $17^p\mu(E^c)\xrightarrow[p\to\infty]{}\infty$

$\Rightarrow$ מ-(1)+(2)+(3) נובע ש- $\int|f|^p\le2\cdot17^p\mu(E^c)$.
(שים ♡ ש- $\mu(E^c)<\infty$ כי $\mu(E^c)\le\int|f|^r<\infty$). לכן
ע"י הוצאת שורש p נקבל $\|f\|_p\le(2\mu(E^c))^{1/p}\cdot17\xrightarrow[p\to\infty]{}17$

נניח X קבוצה לא בת מניה ונניח $F:X\to[0,\infty)$. נגדיר
$$\sum_{x\in X}F(x)=\sup\Big\{\sum_{x\in Y}F(x) : Y\subseteq X \text{ סופית}\Big\}$$

(א) הוכח: אם $\aleph_0<|\{x:F(x)>0\}|$ אזי $\sum_{x\in X}F(x)=\infty$
ברור שאם $A_\varepsilon=\{x:F(x)>\varepsilon\}$ אינסופית לאיזה $\varepsilon>0$ אז ניתן לקחת סכום סופי גדול כרצוננו ולקבל $\sum_{x\in X}F(x)=\infty$. נניח ש- $\sum_{x\in X}F(x)<\infty$
אזי לכל n $A_{1/n}$ סופית ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{1/n}$ לכל היותר בת-מניה.
אבל $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{1/n}=\{x:F(x)>0\}$ וזו סתירה.

(ב) נניח μ מידת המניה על X (עם σ-אלגברה של כל תתי הקבוצות)
נראה ש- $\int F\,d\mu=\sum_{x\in X}F(x)$. עבור $Y\subseteq X$ סופית:
$$\int\chi_Y F\,d\mu=\int\sum_{y\in Y}\chi_{\{y\}}F(y)\,d\mu=\sum_{y\in Y}F(y)\underbrace{\int\chi_{\{y\}}\,d\mu}_{=1}=\sum_{y\in Y}F(y)$$
מתקיים $0\le\chi_Y F\le F\Rightarrow\int\chi_Y F\,d\mu\le\int F\,d\mu$. ע"י לקיחת סופרמום
מקבלים $\sum_{x\in X}F(x)\le\int F\,d\mu$. אם $\sum_{x\in X}F(x)=\infty$ סיימנו.

לכן, נניח $\sum_{x\in X} F(x) < \infty$ ⇐ מטענה קודמת יש ל-X תת קבוצה בת מניה $\tilde{X}$ רק שלכל $x \notin \tilde{X}$ $F(x)=0$. נסדר את איברי $\tilde{X}$ $\tilde{X}=\{x_1, x_2, \dots\}$
ונגדיר $F_n = \chi_{\{x_1,\dots,x_n\}} F$. אזי $0 \le F_1 \le F_2 \le \dots \longrightarrow F$
(נקודתית) לכן לפי משפט ההתכנסות המונוטונית נקבל ש- $\int F_n \longrightarrow \int F$
אבל $\int F_n d\mu = \sum_{i=1}^{n} F(x_i)$ ⇐ $\int F d\mu = \lim_{n\to\infty} \int F_n d\mu \le \sum_{x\in X} F(x)$.

נניח ν מידה מרוכבת על $(X, \mathcal{M})$. לכל $E \in \mathcal{M}$ נגדיר
$$\mu(E) = \sup\{\sum |\nu(E_i)| : E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \ , E_i \in \mathcal{M}\}$$
האם $\mu = |\nu|$?

תשובה: כן. $|\nu|$ ו-μ : נובע מהגדרה ש- $|\nu| \ge \mu$. מצד שני, נניח ש-
$E \in \mathcal{M}$ ונניח $|\nu|(E) > t$. מספיק להראות ש- $\mu(E) \ge t$.
מהגדרת $|\nu|$ קיים פירוק $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ רק ש-$E_i \in \mathcal{M}$; $t < \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)|$
לכן עבור n מספיק גדול קיים $t < \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)|$. ניקח $\tilde{E}_{n+1} = \bigcup_{i>n} E_i$
אזי הפירוק הסופי $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup \tilde{E}_{n+1}$ נותן $t < \mu(E)$.

נניח ש- μ מידה ממשית על $(X, \mathcal{M})$
צ"ל: קיימות קבוצות זרות $A, B \in \mathcal{M}$ רק ש- $A \cup B = X$; A - חיוביות
ו- B שליליות.
הוכחה: לפי שאלה מהתרגיל $|\mu| \gg \mu$ ולכן ממשפט רדון-ניקודים
קיימת $f \in L^1(|\mu|)$ רק ש- $d\mu = f d|\mu|$. ראשית, נראה ש- f
ממשית כ.ת. $[|\mu|]$. נסמן על
$C_+ = \{x \in X ; \operatorname{Im} f > 0\}$
$C_- = \{x \in X : \operatorname{Im} f < 0\}$
אם נראה ש- $|\mu|(C_+) = |\mu|(C_-) = 0$ אז f ממשית כ.ת. $[|\mu|]$.
$$\mu(C_+) = \int_{C_+} f d|\mu| = \int_{C_+} \operatorname{Re} f d|\mu| + i \int_{C_+} \operatorname{Im} f d|\mu|$$
$\mu(C_+) \in \mathbb{R}$ ⇐ $\int_{C_+} \operatorname{Im} f d|\mu| = 0$ ⇐ $|\mu|(C_+) = 0$ (באותו אופן
$|\mu|(C_-) = 0$. לכן, נוכל לשנות את f בקבוצה בעלת מידה 0 ולקבל
$\hat{f}$ ממשית בכל מקום, וגם מקיימת $d\mu = \hat{f} d|\mu|$. לכן נוכל להניח ש- f
ממשית. נגדיר $A = \{x \in X : f(x) \ge 0\}$; $B = X \setminus A = \{x \in X : f(x) < 0\}$
אם $E \subseteq A$ מדידה אזי $\mu(E) = \int_E f d|\mu| \ge 0$. באותו אופן, אם
$F \subseteq B$ מדידה אז $\mu(F) = \int_F f d|\mu| < 0$.