# תורת המידה - הגדרות

- מרחב טופולוגי הוא זוג $(X,\tau)$ כאשר $X$ קבוצה ו- $\tau$ אוסף תת קבוצות של $X$ (שנקראות קבוצות פתוחות) שמקיים:
  1. $\emptyset, X \in \tau$
  2. אם $V_1,\dots,V_n\in\tau$ אז $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$
  3. אם $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה כלשהי של קבוצות פתוחות אז $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\in\tau$

- אם $X,Y$ מרחבים טופולוגיים אז פונקציה $f:X\to Y$ נקראת רציפה אם לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq Y$ גם המקור $f^{-1}(V)$ קבוצה פתוחה ב-$X$.

- הישר המורחב הוא הקבוצה $\mathbb{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}=[-\infty,\infty]$ יחד עם הטופולוגיה שנוצרת ע"י הקטעים $(a,b)$ , $[-\infty,b)$ , $(a,\infty]$.

- תהי $X$ קבוצה. אוסף $\mathcal{M}$ של תת קבוצות של $X$ יקרא σ-אלגברה ב-$X$ אם:
  1. $X\in\mathcal{M}$
  2. לכל $A\in\mathcal{M}$ גם $A^c\in\mathcal{M}$
  3. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ אוסף קבוצות ב-$\mathcal{M}$ אז $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathcal{M}$

- מרחב מדיד הוא זוג $(X,\mathcal{M})$ כאשר $X$ קבוצה כלשהי ו- $\mathcal{M}$ σ-אלגברה ב-$X$. איברי $\mathcal{M}$ נקראים קבוצות מדידות ב-$X$.

- יהיו $X$ מרחב מדיד ו- $Y$ מרחב טופולוגי. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת פונקציה מדידה אם לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq Y$ המקור $f^{-1}(V)$ היא קבוצה מדידה ב-$X$.

- אם $f$ פונקציה מרוכבת מדידה על $X$ קיימת פונקציה מרוכבת מדידה $\alpha$ על $X$ כך ש- $|\alpha|=1$ ו- $f=\alpha|f|$. $\alpha$ כזו נקראת הצגה של $f$.

- יהי $F$ אוסף כלשהו של תת קבוצות של קבוצה כלשהי $X$. ה-σ-אלגברה ב-$X$ המינימלית שמכילה את $F$ נקראת ה-σ-אלגברה הנוצרת ע"י $F$.

- יהי $X$ מרחב טופולוגי. קבוצות בורל הן איברי ה-σ-אלגברה הנוצרת ע"י

הקבוצות הפתוחות ב-X. קבוצה נקראת $G_\delta$ אם היא חיתוך בן-מניה של קבוצות פתוחות והיא נקראת $F_\sigma$ אם היא איחוד בן-מניה של קבוצות סגורות.

- אם $X,Y$ מרחבים טופולוגיים אז $f:X\to Y$ נקראת מדידה בורל (או פונקציית בורל) אם היא מדידה ביחס ל-σ-אלגברה של קבוצות בורל.

- תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ממשיות מוגדרות על קבוצה X. מגדירים

$$(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x) \qquad (\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$
$$(\inf_n f_n)(x) = \inf_n f_n(x) \qquad (\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

אם בכל נקודה $x\in X$ קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ אז מוגדר גם הגבול הנקודתי $(\lim_n f_n)(x) = \lim_n f_n(x)$ ואומרים ש-$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל-$\lim_{n\to\infty} f_n$

- תהיינה $f,g: X\to[-\infty,\infty]$. נגדיר את הפונקציות הבאות:

$$(\max\{f,g\})(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$(\min\{f,g\})(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

החלק החיובי של $f$: $f^+ = \max\{f, 0\}$

החלק השלילי של $f$: $f^- = -\min\{f, 0\}$

- פונקציה מרוכבת s על מרחב מדיד X נקראת פונקציה פשוטה אם הטווח שלה כולל מספר סופי של נקודות.

- מידה חיובית על σ-אלגברה $\mathcal{M}$ היא פונקציה $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ כך ש-

① קיימת $A\in\mathcal{M}$ כך ש- $\mu(A)<\infty$

② σ-אדטיביות: לכל משפחה בת מניה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות זרות בזוגות ב-$\mathcal{M}$ מתקיים $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

מרחב מידה הוא שלשה $(X,\mathcal{M},\mu)$ כאשר $(X,\mathcal{M})$ מרחב מדיד ו-$\mu$ מידה חיובית על $\mathcal{M}$.

- מידה מרוכבת על σ-אלגברה $\mathcal{M}$ היא פונקציה $\mu:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$ שמקיימת את תכונת ה-σ-אדטיביות. מידה ממשית היא מידה מרוכבת שמקבלת רק ערכים ב-$\mathbb{R}$.

- תהי $X$ קבוצה ו- $\mathcal{M}$ σ-אלגברה ב- $X$. הפונקציה $\mu:\mathcal{M}\to[0,\infty]$ שמתאימה לכל $E\in\mathcal{M}$ את מספר האיברים בה נקראת <u>מידת המנייה</u> של $X$.

- תהינה $X$ קבוצה, $\mathcal{M}$ σ-אלגברה ב- $X$ ו- $x_0\in X$. הפונקציה
$$\mu(E)=\begin{cases}0 & x_0\notin E\\ 1 & x_0\in E\end{cases}$$
נקראת <u>מידה אטומית</u> ב- $x_0$ או <u>מידת דירק</u> ב- $x_0$.

- תהי $\mu$ מידה חיובית על מרחב מדיד $(X,\mathcal{M})$. עבור פונקציה מדידה פשוטה $s:X\to[0,\infty)$ מהצורה $s=\sum_{i=1}^n \alpha_i\chi_{A_i}$ לכל $E\in\mathcal{M}$ נגדיר
$$\int_E s\,d\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,\mu(A_i\cap E)$$
עבור $f:X\to[0,\infty]$ מדידה ו- $E\in\mathcal{M}$ נגדיר $\int_E f\,d\mu=\sup\int_E s\,d\mu$ כאשר הסופרמום נלקח על כל הפונקציות המדידות הפשוטות $s$ כך ש- $0\le s\le f$. $\int_E s\,d\mu$ נקרא <u>אינטגרל לבג</u> של $f$ על $E$ ביחס למידה $\mu$.

- בהינתן מידה חיובית $\mu$ על מרחב מדיד $X$ נסמן ב- <u>$\mathcal{L}^1(\mu)$</u> את אוסף הפונקציות המרוכבות המדידות $f$ על $X$ שעבורן $\int_X|f|\,d\mu<\infty$. איברי $\mathcal{L}^1(\mu)$ נקראים <u>פונקציות אינטגרביליות</u> (או <u>אינטגרביליות לבג</u>) ביחס ל- $\mu$.

- אם $f=u+iv$ פונקציה מרוכבת כך ש- $u,v$ מדידות על $X$ וגם $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ אז לכל $E\in\mathcal{M}$ נגדיר את <u>אינטגרל לבג</u> של $f$ על $E$ ביחס ל- $\mu$:
$$\int_E f\,d\mu=\int_E u^+\,d\mu-\int_E u^-\,d\mu+i\int_E v^+\,d\mu-i\int_E v^-\,d\mu$$

- לעיתים מגדירים גם אינטגרלים עבור $f:X\to[-\infty,\infty]$ ע"י
$$\int_E f\,d\mu=\int_E f^+\,d\mu-\int_E f^-\,d\mu$$
אם $\int_E f^+\,d\mu=\int_E f^-\,d\mu=\infty$ אומרים <u>שהאינטגרל לא מוגדר</u>.

- תהי $P$ תכונה שעשויה להתקיים או לא להתקיים בנקודה $x\in X$. אם $\mu$ מידה על σ-אלגברה $\mathcal{M}$ ב- $X$ ואם קיימת $N\in\mathcal{M}$ כך ש- $\mu(N)=0$ ורק ש- $P$ מתקיימת לכל $x\in N^c$ נאמר ש- $P$ מתקיימת <u>כמעט בכל מקום</u> ביחס ל- $\mu$.
עבור $E\in\mathcal{M}$ נאמר ש- $P$ מתקיימת <u>כמעט בכל מקום של $E$</u> ביחס ל- $\mu$ אם $P$ מתקיימת לכל $x\in E\setminus N$.

- אם $f,g$ פונקציות מדידות ואם $\mu(\{x: f(x)\neq g(x)\})=0$ נאמר ש- $f=g$ **כמעט בכל מקום** ביחס ל- $\mu$ ונסמן $f\sim g$.

- יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה. עבור $N\subseteq X$ כלשהי נאמר ש- $\mu(N)=0$ אם קיימת $E$ מדידה, כך ש- $N\subseteq E\in\mathcal{M}$ ו- $\mu(E)=0$.

- מידה $\mu$ נקראת **שלמה** אם לכל $N$ כך ש- $\mu(N)=0$ במובן המורחב מתקיים $N\in\mathcal{M}$.

- יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה. תהי $\mathcal{M}^*$ אוסף כל תתי-קבוצות $E$ של $X$ שעבורן קיימות קבוצות $A,B\in\mathcal{M}$ כך ש- $A\subseteq E\subseteq B$ ו- $\mu(B\setminus A)=0$. נגדיר $\mu^*(E)=\mu(A)$. אז $\mathcal{M}^*$ $\sigma$-אלגברה ו- $\mu^*$ מידה שלמה והן נקראות **השלמת-$\mu$** של $\mathcal{M}$ ושל $\mu$ בהתאמה.

- יהי $(X,\mathcal{M},\mu)$ מרחב מידה ותהי $E\in\mathcal{M}$ כך ש- $\mu(E^c)=0$. נאמר ש- $f:E\to Y$ היא **מדידה על $X$** אם $f^{-1}(V)\cap E$ מדידה לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq Y$. בפרט, ניתן לדבר על פונקציה מדידה שמוגדרת כמעט בכל מקום ביחס ל- $\mu$ על $X$. עבור פונקציה כזו נאמר שהיא ב- $\mathcal{L}^1(\mu)$ אם $\int_E|f|d\mu<\infty$ ונגדיר $\int_X f d\mu=\int_E f d\mu$.

- יהי $Y$ מרחב טופולוגי.

א) $E\subseteq Y$ נקראת **סגורה** אם $E^c$ פתוחה.

ב) **הסגור** של $E$, שנסמנו ב- $\bar{E}$, היא הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את $E$.

ג) $K\subseteq Y$ נקראת **קומפקטית** אם מכל כיסוי פתוח של $K$ ניתן להוציא תת כיסוי סופי. בפרט, אם $Y$ קומפקטית אז $Y$ **מרחב טופולוגי קומפקטי**.

ד) **סביבה** של נקודה $p\in Y$ היא קבוצה פתוחה שמכילה את $p$.

ה) $Y$ נקרא **מרחב האוסדורף** אם לכל $p,q\in Y$ שונות יש סביבות $U,V$ כך ש- $p\in U$, $q\in V$ ו- $U\cap V=\emptyset$.

ו) $Y$ נקרא **קומפקטי מקומית** אם לכל נקודה $p\in Y$ יש סביבה עם סגור קומפקטי.

ז) $Y$ נקרא **$\sigma$-קומפקטי** אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות קומפקטיות.

ה) פונקציה $f:X\to\mathbb{C}$ נקראת בעלת תומך קומפקטי אם יש $K\subseteq X$ קומפקטית כך ש-$f(x)=0$ לכל $x\notin K$. באופן שקול, הסגור של $\{x: f(x)\neq 0\}$ נקרא התומך של $f$ ומסומן ב- $\underline{supp f}$. נסמן ב- $\underline{C_c(X)}$ את אוסף הפונקציות המרוכבות הרציפות על $X$ שהן בעלות תומך קומפקטי.

- פונקציונל לינארי $\Lambda$ על $C_c(X)$ נקרא חיובי אם לכל $0\leq f$ $\Lambda f\geq 0$.

- תהי $\mu$ מידת בורל על מרחב האוסדורף קומפקטי מקומית. אומרים ש-$\mu$ רגולרית חיצונית אם לכל $E\in\mathfrak{M}$ $\mu(E)=\inf\{\mu(V): E\subseteq V \text{ פתוחה } V\}$; $\mu$ רגולרית פנימית אם לכל $E\in\mathfrak{M}$ $\mu(E)=\sup\{\mu(K): K\subseteq E \text{ קומפקטית } K\}$. נאמר ש-$\mu$ רגולרית אם היא גם רגולרית חיצונית וגם רגולרית פנימית.

- יהיו $X$ מרחב טופולוגי ו-$f: X\to[-\infty,\infty]$. $f$ נקראת סמי-רציפה מלרע אם לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{x: f(x)>\alpha\}$ פתוחה. $f$ נקראת סמי-רציפה מלעיל אם לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{x: f(x)<\alpha\}$ פתוחה.

- עבור מרחב טופולוגי $X$ הסימון $\underline{K\prec f}$ פירושו ש-$K$ קבוצה קומפקטית, $f$ פונקציה רציפה בעלת תומך קומפקטי כך ש- $0\leq f(x)\leq 1$ לכל $x\in X$ ו- $f(x)=1$ לכל $x\in K$.
  הסימון $\underline{f\prec V}$ פירושו ש-$V$ פתוחה, $f$ פונקציה רציפה בעלת תומך קומפקטי כך שלכל $x\in X$ $0\leq f(x)\leq 1$ והתומך של $f$ מוכל ב- $V$.
  הסימון $\underline{K\prec f\prec V}$ פירושו ששני התנאים מתקיימים.

- פונקציה ממשית $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ (כאשר $-\infty\leq a<b\leq\infty$) נקראת קמורה אם לכל $x,y\in(a,b)$ ולכל $0\leq\lambda\leq 1$ $\varphi((1-\lambda)x+\lambda y)\leq(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$

- מידה שנותנת לכל המרחב מידה $1$ נקראת מידת הסתברות.

- $p,q\in(0,\infty)$ נקראים אקספוננטים צמודים אם $p+q=pq$. אם בנוסף $p=1$ ו- $q=\infty$ נקראים אקספוננטים צמודים.

- יהיו $(X,\mathfrak{M},\mu)$ מרחב מידה ו- $0<p<\infty$. לכל $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה נגדיר את נורמת-$p$ של $f$ ע"י $\|f\|_p=(\int_X|f|^p d\mu)^{1/p}$. נסמן ב- $\underline{\mathcal{L}^p(\mu)}$

את אוסף הפונקציות $f$ המרוכבות המדידות שמוגדרות כמעט בכל מקום ביחס ל-$\mu$ על $X$ ועבורן $\|f\|_p<\infty$. אם $\mu$ מידת המניה על $X$ נסמן את $\mathcal{L}^p(\mu)$ ב- $\ell^p(\mu)$.

- תהי $g:X\to[0,\infty]$ מדידה. נגדיר $S=\{M\in\mathbb{R}: \mu(g^{-1}((M,\infty]))=0\}$. נגדיר את הסופרמום העיקרי של $g$ ע"י $\text{ess-sup}\, g=\begin{cases}\inf S & S\neq\emptyset\\ \infty & S=\emptyset\end{cases}$
עבור $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה נסמן $\|f\|_\infty = \text{ess-sup}|f|$ נורמת-$\infty$ של $f$. נסמן ב-$\mathcal{L}^\infty(\mu)$ את מרחב הפונקציות המרוכבות המדידות שעבורן $\|f\|_\infty<\infty$. איברי $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ נקראים פונקציות מדידות חסומות עיקרית.

- יהי $1\le p\le\infty$. $L^p(\mu)$ הוא אוסף מחלקות השקילות של פונקציות ב-$\mathcal{L}^p(\mu)$ שיש ביניהן שוויון כמעט בכל מקום ביחס ל-$\mu$. בהינתן $F\in L^p(\mu)$ נגדיר $\|F\|_p=\|f\|_p$ עבור $f\in F$ כלשהי.

- יהי $X$ מרחב מדיד ו-$\mathcal{M}$ $\sigma$-אלגברה ב-$X$. אוסף בן מניה $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ נקרא חלוקה של קבוצה $E\in\mathcal{M}$ אם $E_i\cap E_j=\emptyset$ לכל $i\neq j$ וגם $E=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$.
תהי $\mu$ מידה מרוכבת על $\mathcal{M}$. נגדיר $|\mu|:\mathcal{M}\to[0,\infty)$ ע"י
$$|\mu|(E)=\sup\sum_{i=1}^\infty|\mu(E_i)|$$
כאשר הסופרמום נלקח על כל החלוקות $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ של $E$. $|\mu|$ נקראת מידת הווריאציה הטוטאלית של $\mu$ או מידת הערך המוחלט של $\mu$.

- תהי $\mu$ מידה ממשית. החלק החיובי של $\mu$ הוא $\mu^+=\frac{1}{2}(|\mu|+\mu)$ והחלק השלילי של $\mu$ הוא $\mu^-=\frac{1}{2}(|\mu|-\mu)$. הפירוק $\mu=\mu^+-\mu^-$ נקרא פירוק Jordan של $\mu$. פירוק Jordan של מידה מרוכבת מתקבל מפירוק Jordan של החלק הממשי והחלק המדומה בנפרד.

- תהי $\mu$ מידה חיובית ו-$\lambda$ מידה כלשהי, שתיהן על אותו מרחב מדיד. אומרים ש-$\lambda$ רציפה לחלוטין ביחס ל-$\mu$ ומסמנים $\lambda\ll\mu$ אם לכל $E\in\mathcal{M}$ כך ש-$\mu(E)=0$ גם $\lambda(E)=0$. אם $|\mu|$ מרוכבת נאמר ש-$\lambda\ll\mu$ אם $\lambda\ll|\mu|$

- תהי $\lambda$ מידה כלשהי. נאמר ש-$\lambda$ מרוכזת על $A$ (או נתמכת על $A$) אם לכל $E\in\mathcal{M}$ מתקיים $\lambda(E)=\lambda(E\cap A)$.

• תהי $\mu$ מידה חיובית ותהי $\lambda$ מידה כלשהי. אומרים ש-$\lambda$ סינגולרית ביחס ל-$\mu$ אם $\lambda$ מרוכזת על קבוצה $A\in\mathfrak{M}$ כך ש- $\mu(A)=0$. אם $\mu$ מידה מרוכבת נאמר ש-$\lambda$ סינגולרית ביחס ל-$\mu$ אם $\lambda$ סינגולרית ביחס ל- $|\mu|$.
אם $\lambda_2$ ו-$\lambda_1$ מידות אומרים שהן סינגולריות הדדית ומסמנים $\lambda_1 \perp \lambda_2$ אם קיימות קבוצות זרות $A,B\in\mathfrak{M}$ כך ש- $\lambda_1$ מרוכזת על $A$ ו-$\lambda_2$ מרוכזת על $B$.

• מידה חיובית $\mu$ על $X$ נקראת סופית אם $\mu(X)<\infty$. $\mu$ נקראת $\sigma$-סופית אם $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ כאשר $\mu(E_n)<\infty$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

• מרחב בנך הוא מרחב נורמי שלם מעל $\mathbb{C}$. מרחב הילברט הוא מרחב מכפלה פנימית שלם מעל $\mathbb{C}$.

• יהי $L$ פונקציונל לינארי על מרחב הילברט. נאמר שהוא חסום אם $\sup_x \frac{\|Lx\|}{\|x\|}<\infty$. לפעמים אומרים גם פונקציונל רציף.

• תהי $\mu$ מידה חיובית $\sigma$-סופית על $\mathfrak{M}$ ו-$\lambda$ מידה מרוכבת על $\mathfrak{M}$. הפירוק היחיד $\lambda=\lambda_a+\lambda_s$ כאשר $\lambda_a \ll \mu$ ו- $\lambda_s \perp \mu$ נקרא פירוק לבג של $\lambda$ ביחס ל-$\mu$.

• יהי $\lambda=\lambda_a+\lambda_s$ פירוק לבג של $\lambda$ ביחס ל-$\mu$. הפונקציה היחידה $h\in L^1(\mu)$ שמקיימת $\lambda_a(E)=\int_E h\,d\mu$ לכל $E\in\mathfrak{M}$ נקראת נגזרת Radon-Nikodym של $\lambda_a$ ביחס ל-$\mu$.

• תהי $\mu$ מידה מרוכבת על $\mathfrak{M}$. ההצגה $\mu(E)=\int_E h\,d|\mu|$ כאשר $|h(x)|=1$ לכל $x\in X$ נקראת פירוק פולארי או הצגה פולארית של $\mu$.

• תהי $\mu$ מידה ממשית על $\mathfrak{M}$. $A,B\in\mathfrak{M}$ כך ש- $A\cup B=X$ ו- $A\cap B=\emptyset$ אשר מקיימות $\mu^+(E)=\mu(A\cap E)$ ו- $\mu^-(E)=-\mu(B\cap E)$ נקראות פירוק Hahn של $X$ המושרה מ-$\mu$.

• תהי $\mu$ מידה מרוכבת על $\mathbb{R}^k$ ו-$m$ מידת בורל. לכל $x\in\mathbb{R}^k$ ולכל $0<r$ (נגדיר)

$$Q_r(\mu)(x)=\frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))} \qquad (D\mu)(x)=\lim_{r\to 0}Q_r(\mu)(x)$$

אם $\mu$ ממשית הפונקציה המקסימלית ביחס ל-$\mu$ היא $(M\mu)(x)=\sup_{0<r<\infty}Q_r(\mu)(x)$

עבור $\mu$ מרוכבת מגדירים $M\mu = M|\mu|$.

אם $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$ היא מגדירה מידה $\mu(E)=\int_E f\,dm$. הפונקציה המקסימלית של $f$ היא

$$(Mf)(x)=\sup_{0<r<\infty}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f|\,dm$$

- נאמר שפונקציה ממשית $g$ שייכת ל- $L^1$-חלש אם קיים קבוע $c>0$ כך שלכל $\lambda>0$
$$\lambda\, m(\{x: |g(x)|>\lambda\})\le c$$

- תהי $f\in L^1(\mathbb{R}^k)$. נקודה $x\in\mathbb{R}^k$ נקראת נקודת לבג של $f$ אם מתקיים
$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\,dm=0$$

- תהי $x\in\mathbb{R}^k$. אומרים שסדרת קבוצות בורל $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ מתכווצת יפה ל- $x$ אם קיימים $\alpha>0$ וסדרת מספרים חיוביים $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim_{i\to\infty} r_i=0$, $E_i\subseteq B(x,r_i)$ לכל $i\in\mathbb{N}$ וגם $m(E_i)>\alpha\, m(B(x,r_i))$

- תהי $E$ קבוצה מדידה לבג ב- $\mathbb{R}^k$. הצפיפות המטרית של $E$ בנקודה $x\in\mathbb{R}^k$ מוגדרת להיות
$$\lim_{r\to 0}\frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

- אם $A,B$ קבוצות המכפלה הקרטזית שלהן היא הקבוצה $A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}$

- יהיו $(X,\mathfrak{M})$, $(Y,\mathfrak{N})$ מרחבים מדידים. מרחב המכפלה הוא המרחב $(X\times Y, \mathfrak{M}\times\mathfrak{N})$ כאשר $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$ ה-$\sigma$-אלגברה ב- $X\times Y$ שנוצרת ע"י קבוצות מהצורה $A\times B$ כאשר $A\in\mathfrak{M}$, $B\in\mathfrak{N}$. הקבוצות $A\times B$ נקראות מלבנים.

- אם $E\subseteq X\times Y$ לכל $x\in X$ ולכל $y\in Y$ נגדיר
  1. חתך $x$ של $E$: $E_x=\{y: (x,y)\in E\}\subseteq Y$
  2. חתך $y$ של $E$: $E^y=\{x: (x,y)\in E\}\subseteq X$

- תהי $f: X\times Y\to Z$ מדידה. לכל $x\in X$ ולכל $y\in Y$ נגדיר את הפונקציות
$$f_x: Y\to Z,\quad y\mapsto f(x,y) \qquad f^y: X\to Z,\quad x\mapsto f(x,y)$$

- אם $(X,\mathfrak{M},\mu)$, $(Y,\mathfrak{N},\nu)$ מרחבי מידה $\sigma$-סופיים נגדיר את מידת המכפלה $\mu\times\nu$ על $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$
$$(\mu\times\nu)(Q)=\int_X \nu(Q_x)\,d\mu=\int_Y \mu(Q^y)\,d\nu$$