① 22.1.08
מרוכבות

<u>הגדרה:</u> תהי $z:[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת המוגדרת בקטע $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. (נאמר שהיא <u>גזירה</u> בנקודה $t_0\in[a,b]$ אם קיים הגבול

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$$

אם הוא קיים (נסמן אותו ב- $z'(t_0)$.
אם t_0 הוא אחד הקצוות אז הגבול הוא חד-צדדי.

<u>הערה:</u> z גזירה בנקודה $t_0\in[a,b]$ אמ"מ

$$x(t)=\mathrm{Re}\,z(t)$$
$$y(t)=\mathrm{Im}\,z(t)$$

הן גזירות בנקודה t_0 ואז $z'(t_0)=x'(t_0)+iy'(t_0)$
אז זאת למעשה ההגדרה שאנחנו מכירים מאינפי לגבי פונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

<u>הגדרה:</u> תהי $z_0\in\mathbb{C}$! ו- $f:U\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת המוגדרת בסביבה U של נקודה z_0. (נאמר ש- f <u>גזירה</u> בנקודה z_0 אם קיים הגבול

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

אם הוא קיים (נסמן אותו ב- $f'(z_0)$.
בוודאי הגבול צריך להיות בלתי תלוי באופן שבו z שואף ל- z_0.
במילים אחרות, אם עבור כל סדרה $\omega_n\to z_0$ קיים הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\omega_n)-f(z_0)}{\omega_n-z_0}$$

והוא שווה תמיד לאותו מספר $f'(z_0)$ אז f גזירה

<u>משפט</u> (משוואות קושי-רימן)
תהי $f(z)=u(z)+iv(z)$ פונקציה מרוכבת. (נסמן $z=x+iy$.
f גזירה בנקודה $z_0=x_0+iy_0$ אמ"מ הפונקציות הממשיות $u(x,y)$, $v(x,y)$ דיפרנציאבליות בנקודה (x_0,y_0) ומשוואות

קושי רימן מתקיימות: $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ בנקודה (x_0, y_0)

<u>הוכחה:</u>

<u>תנאי הכרחי:</u>

נניח שקיימת הנגזרת $f'(z_0)$. אז

$$(1) \qquad f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

(תזכורת: $\varphi(x) = o(x)$ אם $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$)

נסמן $f'(z_0) = A + iB$, $f(z) = u + iv$, $f(z_0) = u_0 + iv_0$

נפריד בין חלק ממשי ומדומה:

$$(u - u_0) + i(v - v_0) = (A + iB)((x - x_0) + i(y - y_0)) + o(|z - z_0|)$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) - u(x_0,y_0) = A(x - x_0) - B(y - y_0) + o(|z - z_0|) \\ v(x,y) - v(x_0,y_0) = B(x - x_0) + A(y - y_0) + o(|z - z_0|) \end{cases}$$

אבל מה שרשום ראינו כי בדיוק ההגדרה של הדיפרנציאביליות של $u(x,y)$ ושל $v(x,y)$ ולכן u, v דיפרנציאביליות בנקודה (x_0, y_0)

והנגזרות הן $u_x = A \quad u_y = -B$

$v_x = B \quad v_y = A$

כלומר מתקיימות משוואות קושי-רימן: $\begin{cases} v_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ ב-(x_0, y_0).

<u>תנאי מספיק:</u> נניח ש-(2) מתקיים כאשר $A = u_x = v_y$

$B = -u_y = v_x$

בנקודה (x_0, y_0). אבל מחיבור של (2) נקבל את (1)

שכן הגזירות של f ב-z_0. רק צריך לשים לב ש-

$$\underbrace{o(|z - z_0|)}_{\in \mathbb{R}} + i\,\underbrace{o(|z - z_0|)}_{\in \mathbb{R}} = o(|z - z_0|) \in \mathbb{C}$$

הערות:

1. אם f גזירה ב-z_0 אז f רציפה ב-z_0. זה ברור מ-(1)
כי אם $f(z)-f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0)+o(|z-z_0|)$
ו- $z\to z_0$ אז אגף ימין שואף ל-0 ולכן $f(z)\to f(z_0)$

2. אם f,g גזירות ב-z_0 אז לכל $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ c_1f+c_2g
גזירה ב-z_0 וגם $f\cdot g$ גזירה ב-z_0 וגם $\frac{f}{g}$
גזירה אם $g(z_0)\neq 0$ ומתקיים

$$(c_1f+c_2g)'(z_0) = c_1f'(z_0)+c_2g'(z_0)$$
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

3. אם $f:U\to\mathbb{C}$
$g:V\to\mathbb{C}$
כאשר $z_0\in U$; $f(z_0)\in V$ אם f גזירה ב-z_0
ו- g גזירה ב- $f(z_0)$ אזי $g\circ f$ גזירה ב-z_0 ו-
$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

דוגמאות של פונקציות גזירות

1. z^n לכל $n\in\mathbb{N}$ בכל $z_0\in\mathbb{C}$
2. פולינומים בכל $z_0\in\mathbb{C}$
3. פונקציות רציונליות $\frac{P(z)}{Q(z)}$ כאשר P,Q פולינומים גזירות
בכל נקודה z_0 שבה $Q(z_0)\neq 0$
4. e^z , $\sin z$, $\cos z$ בכל $z_0\in\mathbb{C}$ לפי המשפט הקודם.

נזכור שכשדיברנו על פונקציות שמוגדרות על קטע, אם הייתה סדרת הפונקציות גזירות מתכנסת במידה שווה על הקטע הגבול לא בהכרח היה גזיר. במרוכבים זה דווקא כן נכון, כאשר הפונקציות מוגדרות על תחום.

הגדרה: תהי $f:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת המוגדרת בתחום $\Omega\subseteq\mathbb{C}$
f נקראת פונקציה *הולומורפית* ב-Ω אם היא גזירה בכל $z_0\in\Omega$

אם $\Omega=\mathbb{C}$ נאמר ש- f פונקציה __שלמה__.

__טענה:__ אם f הולומורפית בכדור הפתוח $B(a,r)=\{|x-a|<r\}$ ו- $f'(z)=0$ לכל $z\in B(a,r)$ אזי f קבועה בכדור.

קווים כלליים __להוכחה:__ נפריד לחלק הממשי ולחלק המדומה. לכל אחד מהם הפונקציה דיפרנציאבילית והנגזרות החלקיות מתאפסות. ואז לפי משפט מאינפי 2 הן קבועות. ביתר פירוט: בגלל שכדור הוא תחום קשיר לוקחים שתי נקודות ומחברים אותם במסילה ואז יוצאת פונקציה ממשית שנגזרת שלה 0 אבל היא קבועה...

L. Ahlfors „Complex Analysis"
M. A. Evgrafov „Analytic Functions"

levin@math.huji.ac.il

6586817

מתמטיקה חדר 203

אינטגרלים קוויים

__מסילות ב- $\mathbb{R}^2$__

שתי העתקות $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$, $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$ נקראות __שקולות__ אם קיימת העתקה הפיכה (מונוטונית עולה) ורציפה $h:[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$ כך ש- h^{-1} רציפה ו- $\gamma_1(t)=\gamma_2\circ h(t)$ לכל $t\in[a_1,b_1]$

ברור שזה יחס שקילות. מחלקת שקילות ביחס השקילות הזה נקראת __מסילה__.

__מסילה סגורה__ היא מסילה שבה $\gamma(a)=\gamma(b)$

__מסילה פשוטה__ היא מסילה חח"ע ב- (a,b).

__מסילה הפוכה__: אם $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ מסילה אז המסילה $\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t)$ נקראת הפוכה ל- γ.

__קטע__ מ- a ל- b ב- $\mathbb{C}$ הוא מסילה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ כך ש- $\gamma(t)=(1-t)a+tb$

מכפלה של שתי מסילות:

נניח $\gamma_1:[0,1]\to\mathbb{C}$

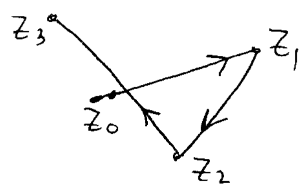
$\gamma_2:[1,2]\to\mathbb{C}$

כאשר $\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$

<u>המכפלה</u> $\gamma_1\gamma_2=\gamma$ הוא מסילה $\gamma:[0,2]\to\mathbb{C}$ כך ש- $\gamma=\gamma_1$ על $[0,1]$ ו- $\gamma=\gamma_2$ על $[1,2]$.

<u>קו פוליגונלי</u> הוא מכפלה של מספר סופי של קטעים. למשל,

$[z_0, z_1, z_2, z_3] =$



<u>מסילה חלקה</u> היא מסילה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ כאשר γ גזירה ברציפות ב- $[0,1]$ ו- $\gamma'(t)\neq 0$ לכל $t\in[0,1]$.

מסילה $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ <u>בעלת אורך</u> אם קיים $\mathcal{L}<\infty$ כך שלכל חלוקה $T=[t_0=0<t_1<\dots<t_n=1]$

$$S_T(\gamma) := \sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})| < \mathcal{L}$$

אם מסילה היא בעלת אורך אז <u>האורך</u> של γ הוא $|\gamma|=\sup_T S_T(\gamma)$

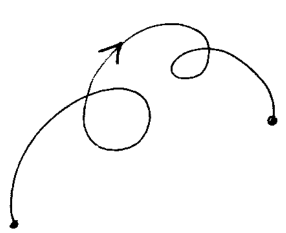
קל לראות שהאורך לא תלוי בפרמטריזציה

<u>טענה</u>: אם מסילה חלקה (מקוטעין) אזי היא בעלת אורך ומתקיים

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ $\quad |\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$

<u>אינטגרל של פונקציה f לאורך מסילה γ בעלת אורך:</u>

נניח שיש מסילה בעלת אורך $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$



ויש פונקציה $f:\{\gamma(t):t\in[0,1]\}\to\mathbb{C}$

עבור חלוקה $T=[0=t_0<t_1<\dots<t_n=1]$

ונקודות $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$ עבור $k=1,\dots,n$ נגדיר

$$S(f,T) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1}))$$

$$|S|(f,T) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau_k))\,|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|$$

אם קיים הגבול $\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T,f)$ כאשר $\lambda(T)=\max_k|t_k-t_{k-1}|$

אז מסמנים $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T,f) = \int_\gamma f(z)\,dz$

ואם קיים הגבול $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} |S|(T,f)$ אז מסמנים

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} |S|(T,f) = \int_\gamma f(z)\,|dz|$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy) =$$

$$= \int_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx$$

* γ הא בעלת אורך אמ״מ החלק הממשי והחלק המדומה שלה פונקציות בעלות השתנות חסומה. וככזה ניתן להציג אותן כהפרש של פונקציות מונוטוניות עולות. אז $x=\mathrm{Re}\gamma$; $y=\mathrm{Im}\gamma$ הן ~~זה~~ ...

כאן היה הסבר לא ברור. סליחה ☹

<u>טענה:</u> אם γ מסילה חלקה ו- f רציפה אז קיים האינטגרל ו:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

<u>הוכחה:</u> נסמן $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$

$$S(f,T) = \sum f(\gamma(\tau_k))\big((x(t_k)-x(t_{k-1})) + i(y(t_k)-y(t_{k-1}))\big) =$$

משפט ערך הביניים

$$= \sum f(\gamma(\tau_k))\big(x'(\theta_k^x)(t_k-t_{k-1}) + iy'(\theta_k^y)(t_k-t_{k-1})\big) =$$

$$\big(\tau_k,\ \theta_k^x,\ \theta_k^y \in [t_{k-1},t_k]\big)$$

$$= \sum\big[f(\gamma(\theta_k^x)) + \Delta_k^x\big]\,x'(\theta_k^x)(t_k-t_{k-1}) +$$

$$+ i\sum\big[f\gamma(\theta_k^y)) + \Delta_k^y\big]\,y'(\theta_k^y)(t_k-t_{k-1}) =$$

(נובע לפי הרציפות של f אם $\lambda(T)\to 0$ אז $\Delta_k^x, \Delta_k^y \to 0$)

$$= \sum_k f(\gamma(\theta_k^x))\,x'(\theta_k^x)(t_k-t_{k-1}) + \sum_k \Delta_k^x\,x'(\theta_k^x)(t_k-t_{k-1}) +$$

$$+ i\Big(\sum f(\gamma(\theta_k^y))\,y'(\theta_k^y)(t_k-t_{k-1}) + \sum \Delta_k^y\,y'(\theta_k^y)(t_k-t_{k-1})\Big)$$

כעת

$$\left|\sum_k \Delta_k^x x'(\theta_k^x)(t_k-t_{k-1})\right| \le \max_k |\Delta_k^x| \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \underbrace{\sum_{k=1}^n (t_k-t_{k-1})}_{=b-a}$$

כאשר $\lambda(T)\to 0$ $\max|x'(t)|(b-a)$ קבוע אבל $\max|\Delta_k^x| \to 0$. אותו הדבר לגבי הסכום השני.

$\sum f(\gamma(\theta_k^x))x'(\theta_k^x)(t_k-t_{k-1}) \to \int f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ וכנ"ל עם הסכום השני

ולכן סיימנו.

רק נסביר למה $\max|\Delta_k^x| \to 0$:

$$\Delta_k^x = f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(\theta_k^x))$$

$$\Rightarrow \quad |\Delta_k^x| \le \max |f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_{k-1}))|$$

$f(\gamma(t))$ רציפה במידה שווה ב- $[a,b]$ ולכן גם המקסימום שואף לאפס.

☺

⑤ 23.1.08
מרוכבות

מה שלמדנו באינפי מתקבל לה משפט שמתאים רק למסילות חלקות:
$$\int_a^b \langle f, \gamma' \rangle dt = \int_a^b f_1 \gamma_1'(t)dt + f_2 \gamma_2'(t)dt = \int_\gamma f_1 dx + f_2 dy$$
אנחנו הגדרנו למקרה הכללי של מסילה בעלת אורך והראנו שאם $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות אזי
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

<u>תכונות של אינטגרציה</u>

1 (א) $\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$

(ב) $\int_{\gamma^{-1}} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|$

מההנחה שהאינטגרלים שבאגף ימין קיימים.

2 $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz|$

3 $\int_\gamma |dz| = |\gamma|$

4 $\int_\gamma (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))dz = c_1\int_\gamma f_1(z)dz + c_2\int_\gamma f_2(z)dz$

$\int_\gamma c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))|dz| = c_1\int_\gamma f_1(z)|dz| + c_2\int_\gamma f_2(z)|dz|$

5 $\int_{\gamma_2\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

⇐ אם γ גזירה ברציפות למקוטעין ו- f רציפה על γ אז $\int_\gamma f(z)dz$ קיים.

6 נניח ש- $f(z,\omega)$ רציפה ב- $\{(z,\omega)\}$ כאשר $z \in \gamma$ במסילה ו- $\omega \in K$ מקבוצה קומפקטית $K \subseteq \mathbb{C}$.
אזי הפונקציה $F(\omega) = \int_\gamma f(z,\omega)dz$ רציפה על K.

<u>הוכחה</u>

3 $\int_\gamma |dz| = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_k |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$
וזה ממש נותן אותה הגדרה כמו אורך.

6 התמונה של γ ו- K קבוצות קומפקטיות ⇐ $K\times\{\gamma\}$ קומפקטית
⇐ f רציפה במידה שווה. בפרט, לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך ש-
$$|\omega_1 - \omega_2| < \delta \Rightarrow \forall z \ |f(z,\omega_1) - f(z,\omega_2)| < \varepsilon$$

וכעת, בשימוש מתכונות הקודמות

$$|F(\omega)-F(\omega_0)| \le \int_\gamma |f(z,\omega)-f(z,\omega_0)||dz| < \varepsilon\int_\gamma |dz| = \varepsilon|\gamma|$$

כאשר $|\omega-\omega_0|<\delta$. $\Leftarrow$ F רציפה.

השאר מושאר כתרגיל (ולמעשה זהה להוכחות של איפי 3.

<u>פרמטור</u> לחישוב של אינטגרלים

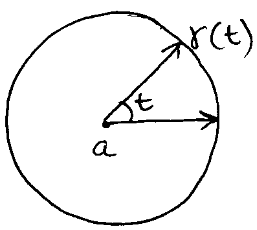
(1) אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ אז $\int_\gamma dz = \gamma(b)-\gamma(a)$

כי $\int_\gamma dz = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_k(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})) = \lim_{\lambda(T)\to 0}(\gamma(b)-\gamma(a))$

זה סכום טלסקופי
ובפרט לא תלוי בחלוקה.

בפרט, אם γ סגורה אז $\int_\gamma dz = 0$.

(2) $S(a,r)=\partial B(a,r)$ הספירה ברדיוס r סביב a.



המסילה המתאימה:

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$$
$$\gamma(t)=a+re^{it}$$

נסמן $S=S^1=S(0,1)$

נחשב את האינטגרל $I=\frac{1}{2\pi i}\int_{S(a,r)}\frac{dz}{z-a}$

המסילה גזירה ברציפות והפונקציה חלקה. לכן

$$I=\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{i(\gamma(t)-a)}{\gamma(t)-a}\,dt = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$$

$$\gamma'(t) = rie^{it} = i(\gamma(t)-a)$$

<u>תרגיל:</u> $\frac{1}{2\pi i}\int_{S(a,r)}(z-a)^m\,dz = 0$ עבור $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$

<u>אינדקס של נקודה a ביחס למסילה γ (סגורה):</u> אם $a\notin\gamma$ האינדקס

$$i(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}$$

<u>טענה:</u> אם γ (סגורה) גזירה ברציפות למקוטעין אז $i(\gamma,a)$ מספר שלם!

הוכחה: נניח ש- $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$

נגדיר $h(t)=\int_0^t \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)-a}\,d\tau$. אזי $h(1)=2\pi i\cdot i(\gamma,a)$

אז h מוגדרת ורציפה בקטע $[0,1]$. היא מוגדרת כי $\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$ רציפה חוץ ממספר סופי של נקודות (כי γ גזירה ברציפות למקוטעין) לכן היא אינטגרבילית (והאינטגרל רציף).

אם γ' רציפה ב-t אזי לפי ניוטון-לייבניץ $h'(t)=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$

(ומעשה זה נכון לכל t חוץ ממספר סופי.

נגדיר $g(t)=e^{-h(t)}(\gamma(t)-a)$

$\Leftarrow$ אם γ' רציפה בנקודה t אזי

$$g'(t)=-h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t)-a)+e^{-h(t)}\gamma'(t)=$$
$$=e^{-h(t)}\left[-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}(\gamma(t)-a)+\gamma'(t)\right]=0$$

לכן g קבועה בכל קטע ב- $[0,1]$ שבו γ' רציפה. אבל g רציפה ב- $[0,1]$ כי h רציפה ב- $[0,1]$, לכן $g\equiv const$ ב- $[0,1]$ ובפרט $g(1)=g(0)$. אבל

$g(1)=e^{-h(1)}(\gamma(1)-a)=$ $\qquad$ $g(0)=\gamma(0)-a$

$=e^{-h(1)}(\gamma(0)-a)$ (כי γ סגורה)

$\Leftarrow$ $\gamma(0)-a=e^{-h(1)}(\gamma(0)-a)$ $\Leftarrow$ $e^{-h(1)}=1$

$\Leftarrow$ $h(1)=2\pi i k$ כאשר $k\in\mathbb{Z}$ וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

מסקנה:

האינדקס $i(\gamma,a)$ הוא מספר שלם וקבוע בכל רכיב קשירות של $\mathbb{C}\setminus\gamma$

$$i(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}$$

כי הוא פונקציה רציפה, אבל לפי המשפט היא דיסקרטית. $\Leftarrow$ היא קבוע בכל רכיב קשירות שלה. אבל מהם רכיבי הקשירות? בדיוק γ ו $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

(4) 29.1.08
מרוכבות

משפט: Ω תחום חסום ו- $f:\Omega\to\mathbb{C}$ רציפה.
$\gamma:[a,b]\to\Omega$ מסילה בעלת אורך. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שעבור כל חלוקה $T=[a=t_0<t_1<\dots<t_n=b]$
אם $z_k=\gamma(t_k)$ ו- γ_k^T הקשת של המסילה γ בין הנקודות z_{k-1} ו- z_k (כלומר הצמצום של γ ל- $[t_{k-1},t_k]$) ו- $\gamma^T=[z_0,z_1,\dots,z_n]$ הקו הפוליגונלי שקודקודיו $z_0,\dots,z_n$ אז אם האורך $|\gamma_k^T|$ של כל קשת γ_k^T הוא קטן מ- δ אז

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz-\int_{\gamma^T}f(z)\,dz\right|<\varepsilon$$

הוכחה: נסמן

$$d=\operatorname{dist}(\gamma,\partial\Omega)=\inf_{\substack{z\in\gamma\\ \omega\in\partial\Omega}}|z-\omega|$$

Ω פתוחה ולכן γ ו- $\partial\Omega$ זרות. אולם γ קומפקטית ו- $\partial\Omega$ סגורה ולכן $0<d<\infty$.
כי Ω חסומה.

נגדיר $K=\overline{\bigcup_{z\in\gamma}B(z,\frac{d}{2})}$ כי קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית, ו- $K\subseteq\Omega$. לכן f רציפה במידה שווה על K.
נסמן $l=|\gamma|$ האורך של γ.
יהי $\varepsilon>0$. קיים $\sigma>0$ כך שעבור כל שתי נקודות $z',z''\in K$
אם $|z'-z''|<\sigma$ אז $|f(z')-f(z'')|<\frac{\varepsilon}{2l}$.
נגדיר $\delta=\min\{\sigma,\frac{d}{2}\}$
תהי $T=[a=t_0<t_1<\dots<t_n=b]$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $|\gamma_k^T|<\delta$ לכל $1\le k\le n$. אז לפי אדטיביות האינטגרל מתקיים

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz-\int_{\gamma^T}f(z)\,dz\right|=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\gamma_k^T}f(z)\,dz-\sum_{k=1}^n\int_{[z_{k-1},z_k]}f(z)\,dz\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^n\left\{\left(\int_{\gamma_k^T}f(z)\,dz-\int_{[z_{k-1},z_k]}f(z)\,dz\right)-\underbrace{\left(\int_{\gamma_k^T}f(z_{k-1})\,dz-\int_{[z_{k-1},z_k]}f(z_{k-1})\,dz\right)}_{=0}\right\}\right|=$$

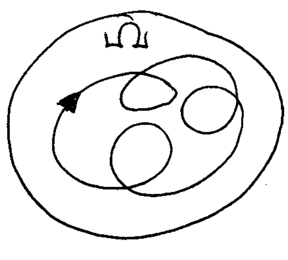
$$=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\gamma_k^T}\big(f(z)-f(z_{k-1})\big)\,dz-\sum_{k=1}^n\int_{[z_{k-1},z_k]}\big(f(z)-f(z_{k-1})\big)\,dz\right|\le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{2\ell}\int_{\gamma_k^T}|dz| + \frac{\varepsilon}{2\ell}\int_{[z_{k-1},z_k]}|dz|\right) \le \frac{\varepsilon}{2\ell}\cdot 2\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k^T| = \varepsilon$$

$|z-z_{k-1}|<\delta\le\sigma$
$z\in\gamma_k^T$

משפט גורסה-קושי (Goursat-Cauchy) עבור משולש

משפט קושי אומר שאם יש פונקציה הולומורפית (גזירה בכל נקודה) אז האינטגרל של f מסילה סגורה הוא 0.



$f:\Omega\to\mathbb{C}$

$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

האמת היא שזה לא לגמרי נכון. Ω צריך להיות פשוט קשר.

למשל, מתקיים

$$\int_{|z|=1} z^m\,dz = \begin{cases} 0 & m\neq -1 \\ 2\pi i & m=-1\end{cases}$$

למה האינטגרל של $\frac{1}{z}$ לא מתאפס? $\frac{1}{z}$ הולומורפית בתחום מאוד גדול - $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אבל התחום הזה לא פשוט קשר!

למעשה, אפילו אם התחום לא פשוט קשר האינטגרל הוא 0 של f מסילה סגורה שהומוטופית לנקודה מנוונת. אז $\int_\gamma \frac{1}{z}dz=0$ לכל מסילה γ שלא מקיפה את הראשית $(0,0)$.

הגרסה של המשפט אומרת את הדבר הבא: יהי Δ משולש כך ש- $\partial\Delta=[A,B,C,A]$. נניח שקיים תחום Ω כך ש- $\bar{\Delta}\subseteq\Omega$. תהי $f:\Omega\to\mathbb{C}$ הולומורפית (גזירה בכל נקודה). אזי $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$.

(אם הנגזרת רציפה אפשר להוכיח את זה בשימוש בתנאי גרין ומשוואות קושי רימן).

<u>הוכחה:</u> בשלבי מערכות.

(I) אם $f(z)=a+bz$ פשוט אפשר לחשב.

$$\int_{\partial\Delta}(a+bz)\,dz = a\int_{\partial\Delta}dz + b\int_{\partial\Delta}z\,dz =$$

כי $\partial\Delta$ סגורה
$z\,dz$ הוא הפרש הקדומה!

$$= a\cdot 0 + b\left[\int_{[A,B]} z\,dz + \int_{[B,C]} z\,dz + \int_{[C,A]} z\,dz\right]$$

כעת נחשב

$$\int_{[A,B]} z\,dz = \int_0^1 [(1-t)A + tB](-A+B)\,dt =$$

$z = (1-t)A + tB$

$0 \le t \le 1$

$dz = -A+B$

$$= (B-A)\left[B\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - A\frac{(1-t)^2}{2}\Big|_0^1\right] =$$

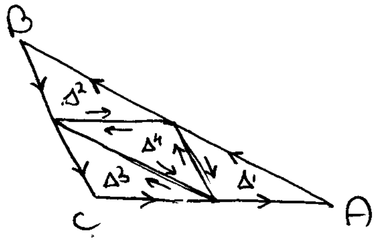
$$= (B-A)\left[\frac{B}{2} - \frac{A}{2}\right] = \frac{B^2-A^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{[A,B]} z\,dz + \int_{[B,C]} z\,dz + \int_{[C,A]} z\,dz =$$

$$= \cancel{\frac{B^2-A^2}{2}} + \cancel{\frac{C^2-B^2}{2}} + \cancel{\frac{A^2-C^2}{2}} = 0$$

(II) נניח בשלילה שקיים $\delta>0$ כך ש- $\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \ge \delta\cdot S$

כאשר $S=S(\Delta)$ שטח המשולש



נחלק את Δ לארבעה משולשים Δ^j $1\le j\le 4$

ע"י קטעי אמצעים.

אזי קיים j_0 כך ש- $\left|\int_{\partial\Delta^{j_0}} f(z)\,dz\right| \ge \delta S(\Delta^{j_0})$

כי אחרת

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{j=1}^{4}\int_{\partial\Delta^j} f(z)\,dz\right| \le \sum_{j=1}^{4}\left|\int_{\partial\Delta^j} f(z)\,dz\right| <$$

$$< \delta\cdot\sum_{j=1}^{4} S(\Delta^j) = \delta\cdot S$$

וזו סתירה להנחת השלילה.

נסמן: $\Delta_0 = \Delta$

$\Delta_1 = \Delta^{j_0}$

נמשיך את התהליך. נעשה אותה בניה ב- Δ_1, נקבל $\Delta_2, \dots, \Delta_n$

סדרת משולשים כך ש-

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$ $\left|\int_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz\right| \ge \delta\cdot S_n$

כאשר $S_n = S(\Delta_n) = \frac{1}{4^n}S$.

(2) $\overline{\Delta_n} \subseteq \overline{\Delta_{n-1}}$ לכל $n\ge 1$

③ $\operatorname{diam} \Delta_n \longrightarrow 0$

④ $s_n = \frac{1}{4^n} S$

⑤ ההיקף P_n של Δ_n הוא $P_n = \frac{1}{2^n} P$

כאשר P ההיקף של Δ.

טומר כי סדרה יורדת של קבוצות קומפקטיות $\overline{\Delta_n}$ עם קוטר שואף לאפס

אזי $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Delta_n} = \{z_0\}$ כאשר $z_0 \in \overline{\Delta} \subseteq \Omega$

לכן f גזירה ב- z_0 :

$$f(z) - \left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\right) = \alpha(z)(z-z_0)$$

כאשר $\alpha(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$.

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \overset{\text{שלב I}}{=} \left| \int_{\partial\Delta_n} \Big\{ f(z) - \underbrace{\left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\right)}_{\text{זאת פונקציה לינארית ולכן האינטגרל שלה הוא } 0} \Big\}\,dz \right| =$$

$$= \left| \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz \right| \underset{|z-z_0|<P_n}{\le} \max_{z\in\partial\Delta_n} |\alpha(z)|\, P_n^2 =$$

$$= \frac{P^2}{S} \max_{z\in\partial\Delta_n} |\alpha(z)| \cdot S_n$$

מצד שני, לפי תכונה ①

$$\delta \cdot S_n \le \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \le \frac{P^2}{S} \max_{z\in\partial\Delta_n} |\alpha(z)|\, S_n$$

זה יכול להיות רק אם $\max_{z\in\partial\Delta_n} |\alpha(z)| \ge \overbrace{\frac{S}{P^2}}^{\text{קבוע}} \delta$ לכל n

וזו סתירה כי $\alpha(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$

☺

משפט קושי בעיגול

פונקציה קדומה

<u>הגדרה:</u> Ω תחום, $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. פונקציה $F:\Omega \to \mathbb{C}$

נקראת פונקציה קדומה של f אם F גזירה בכל $z\in\Omega$ ו-

$$F'(z) = f(z) \quad , \quad z \in \Omega$$

<u>טענה:</u> תהי f רציפה.

(א) אם F פונקציה קדומה של f אזי $F+c$ כאשר c קבוע גם פונקציה קדומה של f.

(ב) אם F_1, F_2 שתי פונקציות קדומות של f אזי $F_1 - F_2 \equiv c$ כאשר c קבוע.

<u>תרגיל:</u> לבדוק אם הרציפות של f נחוצה. כנראה שלא.

<u>הוכחה:</u>

(א) ברור.

(ב) נסמן $F = F_1 - F_2$. אז F גזירה בכל $z \in \Omega$ ולכל z מתקיים $F'(z) = 0$. נניח ש- $F = u + iv$.
לפי משוואות קושי רימן u ו- v דיפרנציאביליות ב- z ומתקיים

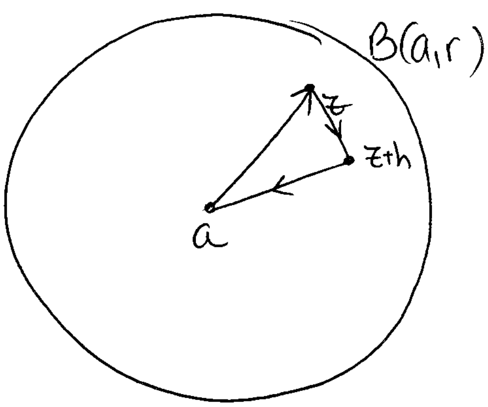
$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$$

ומכאן ש- u, v קבועות כי לכל z_1, z_2 בתחום אפשר לעבור בנייר רק:

ועל כל קטע אין שינוי.

11

<u>משפט:</u> תהי f הולומורפית בעיגול $B(a,r)$. אזי קיימת פונקציה קדומה של f ב- $B(a,r)$.



<u>הסבר:</u> איך היינו מוכיחים את זה במקרה של $\mathbb{R}$? היינו עושים אינטגרל. אז כאן נעשה משהו דומה רק באופן חד-ממדי.

<u>הוכחה:</u> לכל $z \in B(a,r)$ נגדיר

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(z)\,dz$$

צריך להראות ש- F גזירה (וזה יותר מסובך מאשר במקרה החד-ממדי כי אפשר להתקרב ל- z מכל כיוון).

ניקח נקודה כלשהי $z+h$ הקרובה ל- z. לפי משפט גורסה-קושי עבור משולש, המשולש עם הקודקודים $a, z, z+h$ נמצא ב- $B(a,r)$ ולכן

$$\int_{[z+h,\, a,\, z,\, z+h]} f(\omega)\,d\omega = 0$$

⇐ מהאדיטיביות של האינטגרל

$$-\int_{[a,z+h]} f(\omega)\,d\omega + \int_{[a,z]} f(\omega)\,d\omega + \int_{[z,z+h]} f(\omega)\,d\omega = 0$$

לפי ההגדרה של F זה אומר ש-

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\omega)\,d\omega$$

נמשיך בפעם הבאה, אבל עקרונית עכשיו זה דבר ברור.
בקטע מספיק קטן אפשר לקרב את f ע"י פונקציה
לינארית ואז האינטגרל בצד ימין מתאפס...

10 5.2.08
מרוכבות

משפט: f הולומורפית בכדור $B(a,r)$. אזי קיימת פונקציה קדומה F כך ש- $F'=f$

הוכחה: נגדיר $F(z)=\int_{[a,z]} f(w)\,dw$ מכיוון שכדור מוגדר היטב.
אז מה שצריך להוכיח זה שאכן $F'=f$.
מתקיים $F(z+h)-F(z)=\int_{[z,z+h]} f(w)dw$
נתבונן ב-

$$F(z+h)-F(z)-f(z)h=$$
$$=\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw-\int_{[z,z+h]} f(z)\,dw=$$
$$=\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,dw$$

לכן

$$|F(z+h)-F(z)-f(z)h|=\left|\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,dw\right|\le$$
$$\le\int_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)||dw|\le$$
$$\le\max_{w\in[z,z+h]} |f(w)-f(z)|\cdot|h|=o(h)$$

כי מהרציפות של f
$$\max_{w\in[z,z+h]}|f(w)-f(z)|\xrightarrow[h\to0]{}0$$

אזי, לפי ההגדרה של נגזרת $f(z)$ היא הנגזרת של F בנקודה $z\in B(a,r)$
(נזכור ש- $\lim_{h\to0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$ אמ"מ

$$F(z+h)-F(z)-f(z)h=o(h)$$

מסקנה (נוסחת ניוטון לייבניץ)
f רציפה בתחום Ω. נניח ש- F היא פונקציה קדומה של f ב- Ω.
אזי לכל מסילה $\gamma:[0,1]\to\Omega$ (עם אורך) א- $a=\gamma(0)$ ו- $b=\gamma(1)$
מתקיים
$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(b)-F(a)=F(\gamma(1))-F(\gamma(0))$$

הוכחה: לפי משפט הקירובים בעזרת קווים פוליגונליים, מספיק להוכיח את הנוסחה ראשית עבור גזירה ברציפות למקוטעין, שהרי אם הנוסחה נכונה עבור מסילה פוליגונלית עם אותם קצוות אז עבור מסילה כזו "נצא" אותו ערך לאינטגרל ואז במעבר לגבול נקבל שזה ערך קבוע (נקבל את הדרוש.

עבור $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (F\circ\gamma)'(t)\,dt =$$

$$= (F\circ\gamma)(1) - (F\circ\gamma)(0) = F(b)-F(a)$$

לפי נוסחת ניוטון-לייבניץ הרגילה עבור פונקציות במשתנה ממשי:

נסמן $F\circ\gamma = G = u+iV:[0,1]\to\mathbb{C}$

אז $G'(t)=u'(t)+iV'(t)$

$$\int_0^1 G'(t)\,dt = \int_0^1 u'(t)\,dt + i\int_0^1 V'(t)\,dt =$$

$$=(u(1)-u(0)) + i(V(1)-V(0)) =$$

$$= G(1)-G(0)$$

☺

משפט קושי בכדור: f הולומורפית בכדור $B(a,r)$. תהי $\gamma:[0,1]\to B(a,r)$ מסילה סגורה בכדור. אזי $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

הוכחה: f הולומורפית בכדור $\Rightarrow$ קיימת פונקציה קדומה F של f בכדור. אז לפי נוסחת ניוטון לייבניץ

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(1)) = 0$$

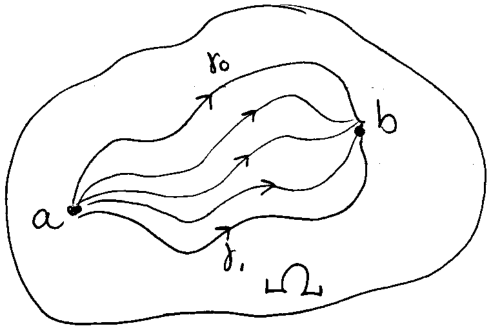
γ סגורה

☺

עכשיו אפשר להוכיח של- $\frac{1}{z}$ אין פונקציה קדומה בכדור היחידה. אם הייתה כזו אז האינטגרל על שפת כדור היחידה היה מתאפס. אבל אנחנו יודעים שזה לא נכון ולכן אין קדומה!

<u>הגדרה</u>: יהי $I=[0,1]$ ויהי Ω תחום.

① שני מסילות $\gamma_0, \gamma_1 : I \to \Omega$ מאותה נקודה $\gamma_1(0) = a = \gamma_0(0)$ לאותה נקודה $\gamma_1(1) = b = \gamma_0(1)$ (כלומר יש להן אותן נקודות קצה) נקראות <u>הומוטופיות</u> ב-Ω אם קיימת הומוטופיה בין γ_0 ו-γ_1:



(א) $\Gamma : I\times I \to \Omega$ רציפה
$(s,t) \mapsto \Gamma(s,t)$

(ב) לכל $t\in I$: $\gamma_0(t) = \Gamma(0,t)$, $\gamma_1(t) = \Gamma(1,t)$

(ג) לכל $s\in I$: $\Gamma(s,0) = a$, $\Gamma(s,1) = b$

במילים אחרות, משפחה של מסילות $\{\gamma_s(t) = \Gamma(s,t)\}_{s\in I}$ מהווה דפורמציה (deformation) מ-γ_0 ל-γ_1 ששומרת על הקצוות.

② שתי מסילות סגורות $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ נקראות <u>הומוטופיות</u> (<u>כמסילות סגורות</u>) אם קיימת Γ רק ש-

(א) $\Gamma : I\times I \to \Omega$ רציפה

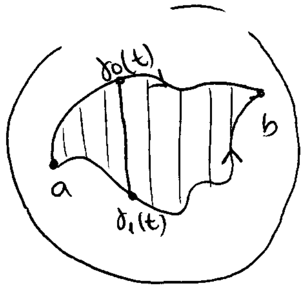
(ב) לכל $t\in I$: $\gamma_0(t) = \Gamma(0,t)$, $\gamma_1(t) = \Gamma(1,t)$

(ג) עבור כל $s\in I$ $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$, כלומר כל מסילה $\gamma_s(t)=\Gamma(s,t)$ היא סגורה.

<u>הערה</u>: בעיקרון צריך להוכיח שההגדרות האלה לא תלויות בפרמטריזציה של המסילות, אבל זה די ברור.

<u>טענה</u> (תרגיל): ההומוטופיה היא יחס שקילות על קבוצת המסילות ב-Ω מ-a ל-b.

<u>דוגמה</u>: בתחום קמור כל שתי מסילות מ-a ל-b הן הומוטופיות כי לכל t אפשר לחבר את $\gamma_0(t)$ עם $\gamma_1(t)$ עם הקטע $[\gamma_0(t), \gamma_1(t)]$.

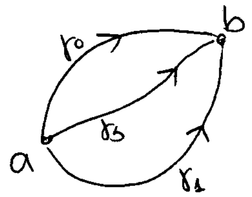


משפט קושי כללי: תהי f הולומורפית בתחום Ω ו- γ_0, γ_1 שתי מסילות הומוטופיות ב-Ω (כלומר γ_0, γ_1 הומוטופיות כשתי מסילות עם אותם קצוות או כמסילות סגורות) אזי

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

הערה: משפט קושי למשולש ומשפט קושי למלבן הם מקרים פרטיים של משפט קושי הכללי כי פשוט נבחר שתי נקודות על המשולש או על המסילה הסגורה. יש שתי דרכים לעבור בין הנקודה הראשונה לשנייה והאינטגרל יהיה זהה. אבל מאחר שהאינטגרל במעבר מהנקודה השנייה לראשונה הוא הנגדי של האינטגרל מהראשונה לשנייה הסכום מתאפס והוא בדיוק האינטגרל על המשולש או המסילה הסגורה.

הוכחה: עבור $s \in I$ נגדיר מסילה $\gamma_s : I \to \Omega$ ע"י $\gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$ כאשר $\Gamma : I \times I \to \Omega$ הומוטופיה בין γ_0 ל- γ_1.



לכל $s \in I$ נגדיר $J(s) = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz$.
צריך להראות ש- $J(0) = J(1)$. מספיק להראות שהפונקציה $J(s)$ קבועה מקומית, כלומר לכל $s \in I$ קיימת סביבה U של s כך ש- $J(s) = const$ ב- U. למה זה מספיק? I קומפקטי. ניקח כיסוי של I ע"י קבוצות U שעליהן J קבועה. לכיסוי הזה יש תת כיסוי סופי. אפריורי לכל סביבה U יכול להיות ש- J קבועה אבל עם קבוע אחר אבל מהחיתוך שלהן יוצא שזה אותו קבוע. וכך ע"י מספר סופי של צעדים מתקבל ש- $J(0) = J(1)$.

יהי $s_0 \in I$ ונמצא סביבה U של s_0 כך ש- $J|_U \equiv const$. יהי $d > 0$ כך ש- $B(z,d) \subseteq \Omega$ לכל $z \in \gamma_{s_0}$ (כלומר רדיוס שמרחיק את המסילה). הפונקציה $\Gamma : I \times I \to \Omega$ היא רציפה בקבוצה הקומפקטית $I \times I \subseteq \mathbb{R}^2$ לכן היא רציפה במידה שווה. לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל שתי נקודות $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in I \times I$ מתקיים

$$\|(s_1-s_2, t_1-t_2)\| < \delta \Rightarrow |\Gamma(s_1,t_1) - \Gamma(s_2,t_2)| < d$$

כאשר הנורמה $\|(s,t)\| = \max\{|s|,|t|\}$.

נבחר N כך ש- $\delta_0 = \frac{1}{N} < \delta$ ונגדיר $U = (s_0 - \delta_0, s_0 + \delta_0)$

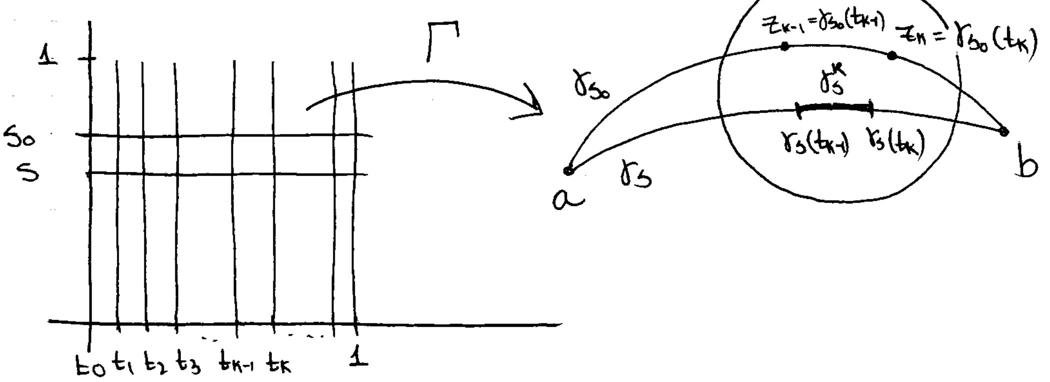
נסמן

$$\begin{cases} t_k = \frac{k}{N} \\ z_k = \gamma_{s_0}(t_k) \\ B_k = B(z_k, d) \end{cases} \quad \text{לכל} \quad k = 0, \dots, N$$

תכונות:

א) $B_k \subseteq \Omega$ (זה ברור מההגדרה של d)

ב) לכל $s \in U$ לכל $1 \le k \le N$ נגדיר קשת γ_s^k של γ_s בין הנקודות $\gamma_s(t_{k-1})$ ו- $\gamma_s(t_k)$



הקשת γ_s^k נמצאת ב- B_k: אם $t_{k-1} \le t \le t_k$ אזי

$|\gamma_s(t) - z_k| = |\gamma_s(t) - \gamma_{s_0}(t_k)| < d$ כי $\|(s-s_0, t-t_0)\| < \delta$

ג) לכל $s \in U$ $\gamma_s(t_k) \in B_{k-1} \cap B_k$ עבור $1 \le k \le N$:

$|\gamma_s(t_k) - \gamma_{s_0}(t_{k-1})| < d$ כי $\|(s-s_0, t-t_0)\| < \delta$

וכבר ראינו ש- $\gamma_s(t_k) \in B_k$.

כעת, לכל k נבחר פונקציה קדומה F_k של f בכדור B_k באופן הבא:

- F_0 פונקציה קדומה כלשהי של f ב- B_0
- F_1 קדומה של f ב- B_1 רק ש- $F_1 = F_0$ ב- $B_1 \cap B_0$.

איך עושים את זה? אם היינו בוחרים ב- B_1 פונקציה קדומה כלשהי G בגלל ש- $B_1 \cap B_0$ תחום אזי $F_0 - G \equiv const$. אם הקבוע c פשוט ניקח $F_1 = G + c$

- F_k פונקציה קדומה של f ב- B_k רק ש- $F_k = F_{k-1}$ ב- $B_{k-1} \cap B_k$ לכל $2 \le k \le N$ (אנחנו יודעים שהחיתוך לא ריק!)

(13) 6.2.08

מרוכבות

המשך הוכחת המשפט:

$$J(S) = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_s^k} f(z)\,dz$$

הקשת γ_s^k נמצאת בכדור B_k. שבו הפונקציה f מקבלת פונקציה קדומה F_k. לכן, לפי נוסחת ניוטון-לייבניץ

$$\int_{\gamma_s^k} f(z)\,dz = F_k(\gamma_s(t_k)) - F_k(\underbrace{\gamma_s(t_{k-1})}_{B_{k-1}})$$

אבל F_k מתלכדת עם F_{k-1} ב- $B_k \cap B_{k-1}$ לכן

$$\int_{\gamma_s^k} f(z)\,dz = F_k(\gamma_s(t_k)) - F_{k-1}(\gamma_s(t_{k-1}))$$

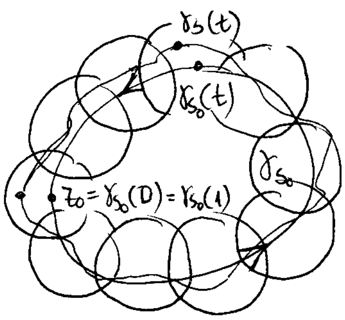
$$\Rightarrow J(S) = \sum_{k=1}^{N}\left(F_k(\gamma_s(t_k)) - F_{k-1}(\gamma_s(t_{k-1}))\right) = F_N(\gamma_s(1)) - F_0(\gamma_s(0))$$

עכשיו יש שתי אפשרויות לפי סוג ההומוטופיה.

(א) אם γ_0, γ_1 הומוטופיות עם קצוות קבועים a ו- b אזי

$$\gamma_s(0) = a \qquad \gamma_s(1) = b$$

$\Leftarrow$ $J(S) = F_N(b) - F_0(a)$ קבוע ב- U.



(ב) γ_0, γ_1 סגורות נסמן $\gamma_s(t) = \Gamma(s,t)$

$$a_s = \gamma_s(0) = \gamma_s(1)$$

הנקודה a_s נמצאת בכדורים B_0 ו- B_N

ובפרט $B_0 \cap B_N \neq \emptyset$ לכן קיים C כך ש-

$F_N(z) - F_0(z) = C$ לכל $z \in B_0 \cap B_N$ אזי

$J(S) = F_N(a_s) - F_0(a_s) \equiv C$ לכל $s \in U$.

הערה: השתמשנו כאן בהנחה של γ_s הן בעלות אורך. אפשר להוריד את זה בלי ההנחה הזאת אבל זה יותר מסובך.

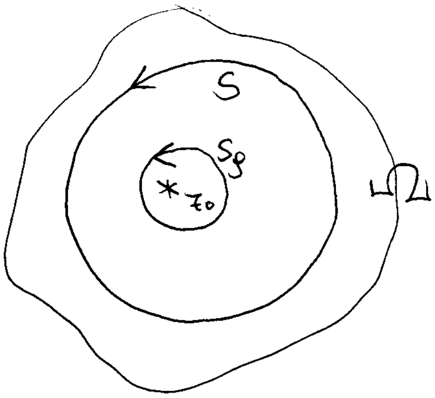
משפט (משפט הנוסחה של קושי עבור מעגל)

תהי פונקציה f הולומורפית בסביבה של כדור סגור $\bar{B} = \overline{B(a,r)}$

אזי לכל נקודה $z_0 \in B$ מתקיים $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$ כאשר $S = \partial B$

בכיוון החיובי.

(הפונקציה $\frac{1}{z - z_0}$ נקראת גרעין קושי)



<u>הוכחה:</u>

ניקח מעגל קטן $S_\rho = \{|z-z_0| = \rho\}$

סביב נקודה z_0 ו- ρ קטן.

נתבונן בתחום $\Omega^* = \Omega \setminus \{z_0\}$

המסילות הסגורות S ו- S_ρ הן הומוטופיות

ב- Ω^* (תרגיל). מצד שני, נגדיר

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$$

הפונקציה φ היא הולומורפית ב- Ω^* ולכן לפי משפט קושי $\int_S \varphi(z)dz = \int_{S_\rho}\varphi(z)dz$ לכל ρ מספיק קטן. נראה שקיים

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{S_\rho}\varphi(z)\,dz = 2\pi i\, f(z)$$

$$\int_{S_\rho}\varphi(z)\,dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{S_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\underbrace{\int_{S_\rho}\frac{dz}{z-z_0}}_{=2\pi i} =$$

$$= \int_{S_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

$$\Rightarrow \left|\int_{S_\rho}\varphi(z)dz - 2\pi i f(z_0)\right| \le \max_{z\in S_\rho}|f(z)-f(z_0)|\cdot\int_\rho \frac{|dz|}{\rho} =$$

$$= \max_{z\in S_\rho}|f(z)-f(z_0)|\cdot\frac{2\pi\rho}{\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$$

כי f רציפה בכדור.

$$\Leftarrow \quad 2\pi i f(z_0) = \int_S \varphi(z)dz = \int_S \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

<u>מסקנה:</u> אם f הולומורפית על כדור היחידה אז $f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz$

<u>טורי חזקות ופונקציות אנליטיות</u>

טור חזקות הוא $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

אנחנו יודעים שלכל טור חזקות יש רדיוס התכנסות $0\le R\le\infty$ רק שהטור מתכנס ב- $|z-z_0|<R$ ומתבדר ב- $|z-z_0|>R$.

בעיגול ההתכנסות הטור מתכנס במ"ש בכל קבוצה קומפקטית

4

בעיגול ההתכנסות הטור גם גזיר. בעיגול ההתכנסות ממש
אפשר לגזור את הטור איבר איבר $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1}$
אז הנגזרת היא גם טור חזקות ורדיוס ההתכנסות שלו זהה
לרדיוס ההתכנסות של הטור המקורי. לכן אפשר לגזור אותה
גם וכן הלאה. טור חזקות גזיר אינסוף פעמים בעיגול ההתכנסות
שלו. ומעשה הוא גזיר ברציפות אינסוף פעמים.

פונקציה היא אנליטית אם בכל נקודה בתחום ההגדרה שלה
יש סביבה שבה אפשר להציג את הפונקציה כטור חזקות.
אנחנו נראה שפונקציה היא הולומורפית אמ"מ היא אנליטית.

(15) 12.02.08

ארובות

טורי חזקות ופונקציות אנליטיות

סדרה $\{f_n\}$ של פונקציות המוגדרות על קבוצה $E \subseteq \mathbb{C}$ מתכנסת במידה שווה ל-f אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $z \in E$

$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

משפט: גבול במידה שווה של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה

תזכורת: f רציפה על E אם $f(z_n) \to f(a)$ לכל סדרה $\{z_n\}$ כך ש- $z_n \to a$; $z_n, a \in E$

משפט: אם γ מסילה בעלת אורך ו- f_n רציפות על γ ו- $f_n \to f$ במ"ש על γ אזי $\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz$

הוכחה: $\left|\int_\gamma (f_n - f)dz\right| \le \sup_\gamma |f_n - f| \cdot |\gamma| \longrightarrow 0$

$\sup_\gamma |f_n - f| \to 0$ כי ההתכנסות במ"ש

$|\gamma|$ אורך המסילה קבוע סופי

(11)

טור פונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס על E (במידה שווה) אם הסדרה $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z)$ מתכנסת על E (במידה שווה)

טענה: אם כל u_n רציפות על מסילה γ והטור $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס במידה שווה על γ ל- $f(z)$ אז $\int_\gamma f dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma u_n dz$

קריטריון ויירשטראס: אם קיימת סדרה של מספרים $\{a_n\}$ כך ש- $|u_n(z)| \le a_n$ עבור כל n מספיק גדול לכל z והטור $\sum a_n < \infty$ אזי הטור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה על E.

טור חזקות הוא טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ כאשר $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$.

משפט אבל: קיים $0 \le R \le \infty$ כך שטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס כאשר $|z-z_0| < R$ ומתבדר כאשר $|z-z_0| > R$

R זה נקרא <u>רדיוס ההתכנסות</u> ו- $\{z: |z-z_0|<R\}$ נקרא <u>עיגול ההתכנסות</u>.

<u>נוסחת Cauchy-Hadamard</u> יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R. אזי
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ עם רדיוס התכנסות R מתכנס במידה שווה בכל עיגול $\{|z-z_0|\le r\}$ עבור $r<R$. בפרט הסכום שלו הוא פונקציה רציפה.

<u>טענה</u>: סכום של טור חזקות הוא פונקציה הולומורפית בעיגול ההתכנסות.

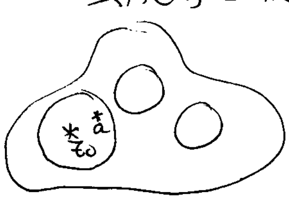
<u>מקרה פרטי</u>: סכום של טור חזקות גזיר במרכז של ההתכנסות:
נניח ש- $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ אזי
$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}$$
וזה טור חזקות עם אותו רדיוס התכנסות כמו f (מנוסחת קושי-הדמר). ולכן מהרציפות $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \xrightarrow[z\to z_0]{} a_1$, כלומר $f'(z_0)=a_1$.

פונקציה המוגדרת בתחום Ω נקראת <u>אנליטית</u> אם לכל $z_0\in\Omega$ קיים כדור $B(z_0,r)\subseteq\Omega$ וקיים טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ שמתכנס ב- $B(z_0,r)$ לפונקציה $f(z)$.

<u>הערה</u>: פונקציה אנליטית היא הולומורפית באותו תחום, שהרי בכל נקודה קיים כדור סביבה שבו ניתן לפתח את הפונקציה לטור חזקות. אבל טור חזקות הוא הולומורפי...

<u>משפט</u>: אם f הולומורפית (כלומר, גזירה בכל נקודה) בתחום Ω, אז f אנליטית ב- Ω.

<u>רעיון</u>: יש תחום ובו נקודה z_0. ניקח כדור סביב z_0 ונרצה להוכיח שאפשר לפתח את f לטור חזקות. אבל במקום יש את נוסחת קושי- $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-a}dz$. את $\frac{1}{z-a}$ ניתן לפתח לטור חזקות ואז נכניס את זה ונשתמש באינטגרציה איבר-איבר.

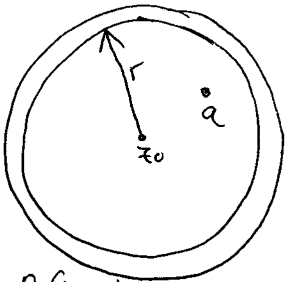


הוכחה: ניקח $z_0 \in \Omega$ ויהי $0<d=\inf_{\omega\in\partial\Omega}|z_0-\omega|$.

נוכיח שבכדור $B(z_0,d)\subseteq\Omega$ יש הצגה של f כטור חזקות.

ניקח $a\in B(z_0,d)$ ונבחר $0<r<d$ כך ש-

$$|a-z_0|<r$$



$B(z_0,d)$

לפי נוסחת ההצגה של קושי $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$

נשים לב שמתקיים

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$$

$$\theta=\left|\frac{a-z_0}{z-z_0}\right|=\left|\frac{a-z_0}{r}\right|<1$$

$$\Rightarrow f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}(a-z_0)^n\,dz$$

הטור מהאינטגרל מתכנס במידה שווה על המעגל $|z-z_0|=r$ כי

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\cdot(a-z_0)^n\right|\le\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|\cdot\frac{\theta^n}{r}=M\theta^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

f רציפה על $|z-z_0|=r$ שהוא קומפקטי ולכן מקבלת שם מקסימום

כי $\theta<1$

לכן ניתן להחליף את סדר הסכימה והאינטגרציה ונקבל

$$f(a)=\sum_{n=0}^{\infty}(a-z_0)^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(a-z_0)^n$$

כאשר המקדמים הם $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\in\mathbb{C}$ ולכן טור חזקות.

11 (נעיר רק שהאינטגרל קיים כי הפונקציה רציפה)

הערה: אם f הולומורפית בתחום Ω אז ל- f יש פיתוח לטור חזקות סביב נקודה $z_0\in\Omega$ בכדור $B(z_0,d)$ כאשר

$$d=\mathrm{dist}(z_0,\partial\Omega)=\inf_{w\in\partial\Omega}|z_0-w|$$

דוגמה: $f(z)=\sqrt{1+z^2}$ הולומורפית בתחום $\Omega=\{|z|<1\}$

לכן ניתן לפתח אותה של טור $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ עם רדיוס ההתכנסות $R=|i|=1$.

דוגמה: הפונקציה $e^{\frac{1}{z}}$ הולומורפית ב- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אבל לא z_0

ניתן לפתח אותה לטור חזקות בכדור הפתוח סביב z_0 ברדיוס $|z_0|$
(זה הכדור המקסימלי שלא נוגע בראשית).

הוכחנו את המשפט: אם f הולומורפית בכדור $B(z_0, R)$ אזי
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ב- $B(z_0, R)$ ואשר $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$
עבור כל $0<r<R$.

בפרט f (כסכום של טור חזקות) גזירה אינסוף פעמים!

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad n \ge 0$$

לכן פונקציה הולומורפית גזירה אינסוף פעמים.

<u>משפט ליוביל</u>: כל פונקציה שלמה (כלומר גזירה בכל נקודה של $\mathbb{C}$) וחסומה היא קבועה.

<u>הערה</u>: f חסומה ב- $\mathbb{C}$ אם קיים $M>0$ כך ש- $|f(z)|<M$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח ש- $f'(z)=0$ בכל $z\in\mathbb{C}$. ניקח $a \in \mathbb{C}$.
לכל $R>0$ מתקיים $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$

$$\Rightarrow |f(a)| \le \frac{1}{\cancel{2\pi}} \max_{|z-a|=R}\left|\frac{f(z)}{(z-a)^2}\right| \cdot \cancel{2\pi} R \le \frac{M}{R^2}\cdot R = \frac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\Leftarrow$ $f'(a)=0$ (שהרי זה לכל R).

<u>מסקנה</u>: כל פולינום שאינו קבוע יש לו שורש ב- $\mathbb{C}$.

<u>הוכחה</u>: יהי פולינום $p(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + a_d$. אם p אינו קבוע אז $d \ge 1$. נניח בשלילה ש- p אין שורשים ב- $\mathbb{C}$.
נגדיר $f(z) = \frac{1}{p(z)}$. לפי ההנחה $p(z) \ne 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$ לכן f גזירה בכל $z\in\mathbb{C}$. נראה ש- f חסומה.
קיים $R>0$ כך שעבור כל $|z|>R$ אז $|p(z)| \ge \frac{1}{2}|z|^d$ (כי $|p(z)| \ge |z|^d - \sum_{k=1}^{d}|a_k||z|^{d-k}$) לכן $|f(z)| \le \frac{2}{|z|^d}$ עבור $|z|>R$.
לכן $|f(z)| \le \frac{2}{R^d}$. בכדור $\{|z|\le R\}$ f חסומה כי (היא) רציפה. לכן f שלמה וחסומה. לפי משפט ליוביל f קבועה.
לכן גם p קבוע, וזו סתירה.

<u>משפט היחידות:</u> תהי f הולומורפית בתחום Ω. נניח שקיימת
סדרה $\{z_n\} \subseteq \Omega$ של נקודות שונות רק ש- $z_n \to a \in \Omega$.
אם $f(z_n)=0$ אז $f(z)=0$ לכל $z \in \Omega$.

<u>מסקנה:</u> נניח שתי פונקציות f,g שמתלכדות על סדרה כנ"ל $\{z_n\}$
אז $f \equiv g$. (גם המסקנה נקרא משפט היחידות).

<u>הוכחת המשפט:</u> נניח שקיים כדור סביב a $B(a,r)$ $r>0$ רק ש-
$f(z)=0$ לכל $z \in B(a,r)$. f הולומורפית אם f אנליטית
אם קיים $B(a,r)$ רק ש- $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$. בגלל הרציפות
של f נובע ש- $c_0 = f(a) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. לכן $f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k$
ונבונן בפונקציה $f_1(z) = \frac{f(z)}{z-a}$. אז f_1 אפשר להציג כ-

$$f_1(z) = c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \dots \qquad (1)$$

מצד שני, $f_1(z_n) = \frac{f(z_n)}{z_n-a} = 0$ כי $z_n \neq a$. לפי (1)-ה

$$0 = f_1(z_n) = c_1 + c_2(z_n-a) + c_3(z_n-a)^2 + \dots$$

נעבור לגבול כאשר $n \to \infty$ ומהרציפות של f_1 נקבל $c_1=0$.
נגדיר $f_2(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^2}$ עבור $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$. אז

$$0 = f_2(z_n) = c_2 + c_3(z_n-a) + \dots$$

נעבור לגבול כאשר $n \to \infty$ ומהרציפות של f_2 נקבל $c_2=0$
רק נמשיך הלאה ונקבל שכל המקדמים מתאפסים, לכן $f \equiv 0$
בכדור $B(a,r)$.

המשך מחר.

(18) 13.2.08

מרוכבות

<u>משפט</u>: f הולומורפית בתחום Ω ו- $z_n \to a$ רק ש- $z_k \neq z_j$ לכל $k \neq j$, $z_n \in \Omega$ ו- $a \in \Omega$ ו- $f(z_n) = a$. אז $f(z) = 0$ לכל $z \in \Omega$.

<u>הוכחה</u>:

ראשית נראה שזה נכון בכדור. ניקח כדור $B = B(a,r) \subseteq \Omega$. f הולומורפית ולכן אנליטית ולכן קיים פיתוח: לכל $z \in B$

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

$$c_0 = f(a) = \lim f(z_n) = 0$$

נניח שהוכחנו ש- $c_0 = c_1 = \dots = c_{j-1} = 0$. כלומר

$$f(z) = c_j(z-a)^j + \dots$$

עבור $z \in B \setminus \{a\}$ נגדיר $f_j(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^j} = c_j + c_{j+1}(z-a) + \dots$

אז $\lim_{z \to a} f_j(z) = c_j$ אבל אז

$$c_j = \lim_{z \to a} f_j(z) = \lim_n f_j(z_n) = \lim \frac{f(z_n)}{(z_n-a)^j} = 0$$

לכן הוכחנו ש- $f \equiv 0$ בסביבה B של נקודה a.

נניח ש- $f(z) = 0$ לכל $z \in \Omega$. נחבר את הנקודות a ו- z בתחום Ω ע"י מסילה $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = z$.

ניתן להניח ש- γ קו פוליגונלי. נגדיר $t_* \in [0,1]$ ע"י

$t_* = \sup\{t : f(\gamma(\tau)) = 0$ לכל $0 \le \tau \le t\}$

לפי החלק הראשון $t_* > 0$. נניח בשלילה ש- $t_* < 1$. אז קיימת סדרה $t_n \nearrow t_*$ רק ש-

$$w_n = \gamma(t_n) \longrightarrow \gamma(t_*) = b$$

$w_n \neq w_k$ לכל $n \neq k$. לפי הגדרה של t_* לכל n $f(w_n) = 0$

לכן לפי החלק הראשון קיימת סביבה B_1 של b רק ש- $f \equiv 0$ ב- B_1. בפרט, לכל $t > t_*$ וקרוב ל- t_* $f(\gamma(t)) = 0$

וזו סתירה לכך ש- t_* הוא חסם עליון.

מסקנה 8

שתי פונקציות הולומורפיות המתלכדות על סדרה של נקודות מתחום שהיא בעלת נקודת הצטברות בתחום, הן מתלכדות בתחום כולו.
(בפרט, שתי פונקציות שמתלכדות על $\mathbb{R}$ (אוקטע של $\mathbb{R}$) שוות לחלוטין!)

דוגמאות:

(1) $z=x+iy$ אז $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

e^z שלמה. נתבונן בטור החזקות $\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

זה טור חזקות עם רדיוס התכנסות ∞ אזי $\exp$ פונקציה שלמה.
מצד שני לכל $x\in\mathbb{R}$ $e^x=\exp(x)$. $\Leftarrow$ לפי משפט היחידות
$e^z=\exp(z)$.

(2) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$. לכל $\mathbb{R}\ni z_2$ קבוע נגדיר

$$f_1(z)=e^{z+z_2}$$
$$f_2(z)=e^{z}\cdot e^{z_2}$$

אלה פונקציות הולומורפיות על $\mathbb{C}$; $f_1|_{\mathbb{R}}\equiv f_2|_{\mathbb{R}}$. $\Leftarrow$ $f_1\equiv f_2$
ובאופן דומה לה נטען לכל $z_2\in\mathbb{C}$.

(3) באופן כללי כל זהות ב-$\mathbb{R}$ שהייתה נכונה לפונקציות אנליטיות היא נכונה גם ב-$\mathbb{C}$.

טורי לורן (Laurent)

טור לורן הוא טור מהצורה $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-z_0)^n$. האם אפשר לומר איפה הטור הזה מתכנס?

נתבונן בטור $\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$. נגדיר $w=\frac{1}{z-z_0}$. אז הטור הזה הוא למעשה טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}a_k w^k$ והוא מתכנס בעיגול התכנסות $|w|<R_1$ כאשר $0\le R_1\le\infty$. ומתבדר ב- $|w|>R_1$.
לכן הטור $\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n$ מתכנס בתחום $|z-z_0|>\frac{1}{R_1}=r_1$ ומתבדר ב- $|z-z_0|<r_1$.

(19) 19.2.08

מרוכבות

<u>משפט</u>: תהי γ מסילה (בעלת אורך) ו- f רציפה על γ. נגדיר פונקציה $g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega-z}\,d\omega$ (שנראית אינטגרל מסוג קושי) (זו מעשה קונבולוציה עם גרעין קושי) לכל $z\notin\gamma$. אזי g הולומורפית ב- $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

<u>הוכחה</u>: תהי $z_0\notin\gamma$ אזי

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\omega)\frac{\left[\frac{1}{\omega-z}-\frac{1}{\omega-z_0}\right]}{z-z_0}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega-z)(\omega-z_0)}\,d\omega \xrightarrow[z\to z_0]{} \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^2}\,d\omega$$

↲ מאחר שעל γ האינטגרנד שואף ל- $\frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^2}$ במ"ש

(!!)

טור לורן

טור לורן הוא טור מהצורה $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ (*)

<u>הגדרה</u>: הטור (*) מתכנס ב- z אם הטורים

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad (*+)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n \qquad (*-)$$

מתכנסים ב- z. הסכום של (*) ב- z הוא הסכום של (*+) ב- z עם הסכום של (*-) ב- z.

<u>טענה</u>: קיימים $0\le R_1,R_2\le\infty$ כך ש- (*) מתכנס בטבעת $R_2<|z-z_0|<R_1$ (שנסמנה $C(R_1,R_2)$) (במ"ש בקבוצות קומפקטיות ב- $C(R_1,R_2)$) ומתבדר ב- $\mathbb{C}\setminus\overline{C(R_1,R_2)}$. ומתקיים

R_1 = רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

$\frac{1}{R_2}$ = רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\,\omega^n$ כאשר $\omega=\frac{1}{z-z_0}$

הסכום של (*) הוא פונקציה הולומורפית ב- $C(R_1,R_2)$: (כי בטבעת זה סכום של הולומורפיות)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad z\in C(R_1,R_2)$$

יתר על כן, $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$ כאשר $R_2<R<R_1$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

הוכחה: הטור (*+) מתכנס ב- $|z-z_0|<R_1$ (במ"ש על קומפקטיות)
והטור (*-) מתכנס ב- $|z-z_0|>R_2$ (במ"ש על קומפקטיות)
הסכומים הם פונקציות הולומורפיות. עבור כל $R_2<R<R_1$ הטור
(*) מתכנס במ"ש על $\{|z-z_0|=R\}$. נתבונן ב-

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n-m-1}$$

הטור $\sum_{n=\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n-m-1}$ מתכנס במ"ש על $|z-z_0|=R$ ולכן אפשרית
אינטגרציה איבר איבר:

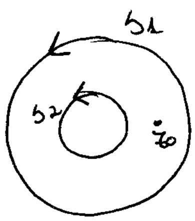
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^{n-m-1}\,dz=$$

$$=a_m$$

הכל מתאפס חוץ
מהאינטגרל כאשר $m=n$

11

משפט: נוסחת ההצגה של קושי בטבעת
יהיו $0\le R_2<R_1\le\infty$. תהי f הולומורפית בסביבה של הטבעת הסגורה
$\bar{C}(R_1,R_2)=\{R_2\le|z-z_0|\le R_1\}$
אזי לכל נקודה $a\in C(R_1,R_2)$ מתקיימת נוסחת קושי:



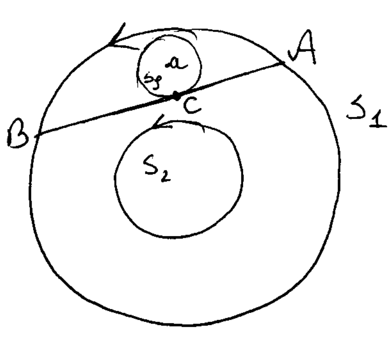
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{f(z)}{z-a}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

הוכחה: הראינו שמתקיים

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a)$$

לכן מספיק להוכיח את הנוסחה הבאה:

$$\int_{S_1}\frac{f(z)}{z-a}\,dz-\int_{S_2}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{S_\rho}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$



כאשר $S_\rho=\{|z-a|=\rho\}$
הפונקציה $\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-a}$ היא הולומורפית
ב- $\bar{C}(R_1,R_2)\setminus\{a\}$ (ולכן ב- $\Omega\setminus\{a\}$ כאשר
Ω סביבה של $\bar{C}(R_1,R_2)$).

נסמן ב- S_1^{AB} הקשת של S_1 מ- A ל- B (מכיוון החיובי)

S_1^{BA} הקשת של S_1 מ- B ל- A (מכיוון החיובי)

המסילה S_1^{AB} הומוטופית ב- $\Omega\setminus\{a\}$ לשרשור $[C,B]*S_\rho*[A,C]$

לכן לפי משפט קושי

$$\int_{S_1^{AB}}\varphi\,dz=\int_{[A,C]}\varphi\,dz+\int_{S_\rho}\varphi\,dz+\int_{[C,B]}\varphi\,dz=$$

$$=\int_{S_\rho}\varphi\,dz+\int_{[A,B]}\varphi\,dz$$

$$\Rightarrow\int_{S_1}\varphi\,dz=\int_{S_1^{AB}}\varphi\,dz+\int_{S_1^{BA}}\varphi\,dz=\int_{S_\rho}\varphi\,dz+\int_{[A,B]}\varphi\,dz+\int_{S_1^{BA}}\varphi\,dz=$$

$$=\int_{S_\rho}\varphi\,dz+\int_{S_1^{BA}}\varphi\,dz=\int_{S_\rho}\varphi\,dz+\int_{S_2}\varphi\,dz$$

המסילה $S_1^{BA}*[A,B]$ הומוטופית ב- $\Omega\setminus\{a\}$ ל- S_2.

וזה בדיוק מה שרצינו.

<u>משפט</u> (פיתוח לטור לורן)

תהי f הולומורפית מסביבה של טבעת $C(R_1,R_2)=\{R_2<|z-z_0|<R_1\}$

אזי $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ ב- $C(R_1,R_2)$ ואשר

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

לכל $n\in\mathbb{Z}$! $R_2<R<R_1$.

<u>הוכחה:</u> עבור $z\in C(R_1,R_2)$ לפי נוסחת קושי מתקיים

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,d\omega-\frac{1}{2\pi i}\int_{S_2}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,d\omega$$

נגדיר שתי פונקציות:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,d\omega\qquad |z-z_0|<R_1$$

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_2}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,d\omega\qquad |z-z_0|>R_2$$

נפתח לטור 2 תזכורות.

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1} \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right]$$

המסקנה היא ש- f_1 יש הצגה של טור חזקות ב- $|z-z_0|<R_1$.

נעבור ל- f_2. זה כמעט אותו הדבר אלא ש- z מחוץ למעגל. אז:

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}\,dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_2}\frac{f(w)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\,dw =$$

$$\left[\text{כאשר}\quad \theta = \left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|<1\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_2} f(w)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,dw =$$

הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$ מתכנס במ"ש על $|w-z_0|=R_2$ ולכן אפשר להחליף סדר סכימה ואינטגרציה.

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_2} f(w)(w-z_0)^n\,dw\right]$$

כאשר $|z-z_0|>R_2$ וזה החלק השני של טור לורן: כלומר

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}B_{-n-1}(z-z_0)^{-n-1}$$

עבור $R_2<|z-z_0|<R_1$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$B_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R_2} f(w)(w-z_0)^n\,dw$$

בגלל שבתוך הטבעת אפשר להרחיב או לכווץ את המעגלים אפשר להחליף את R_1 ואת R_2 באותו $R_2<R<R_1$

11

טורי לורן הם מאוד שימושיים בהרבה תחומים.

אפסים ונקודות סינגולריות של פונקציות הולומורפיות

אפסים

האם יתכן ש- f הולומורפית בסביבה של נקודה a ולכל $n\geq 0$
$f^{(n)}(a)=0$? לא! כי אז הפונקציה היא אפס
זהותית - פשוט נפתח את הפונקציה סביב a.

המשך מחר...

(22) 20.2.08
ארונבוים

אפסים ונקודות סינגולריות

הגדרה: תהי f הולומורפית בסביבה של נקודה z_0 וכך ש- $f\not\equiv 0$. z_0 נקראת אפס מסדר $m\geq 0$ של f אם

$$f(z_0)=\dots=f^{(m-1)}(z_0)=0$$

ו- $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. בפרט, אפס מסדר $m=0$ הוא לא אפס ואפס מסדר 1 הוא אפס פשוט.

הערות:

1. הסדר של כל נקודה הוא סופי. אחרת $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(m)}(z_0)=\dots=0$ אבל טור טיילור של f סביב z_0 הוא זהותית אפס וזו סתירה.
2. כל אפס של f הוא נקודה מבודדת, כלומר קיימת סביבה U של z_0 וכך ש- $f(z)\neq 0$ לכל $z\in U\setminus\{z_0\}$ לפי משפט היחידות.
3. z_0 הוא אפס מסדר m אמ"מ בכדור קטן $\{|z-z_0|<r\}$ מתקיים $f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots$ כאשר $a_m\neq 0$, כלומר $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ עבור φ הולומורפית באיזור סביבה של z_0 ולא מתאפסת ב- z_0.

הגדרה: תהי f הולומורפית ב- $\{0<|z-z_0|<r\}$ אז z_0 נקראת נקודה סינגולרית של f.

ראשון מה שנרצה הוא לאפיין את הנקודות הסינגולריות – סליקות או לא סליקות?

דוגמאות:

1. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ הולומורפית לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. אז 0 נקודה סינגולרית.
2. $f(z)=\frac{1}{z^m}$ הולומורפית ב- $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. אז 0 נקודה סינגולרית.
3. $f(z)=e^z$ הולומורפית ב- $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. אז 0 נקודה סינגולרית.

בכל המקרים האלה 0 נקודה סינגולרית אבל בכל זאת יש הבדל מהותי בין המקרים.
ההבדל מתבטא בגבול של f:

$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ לא קיים.

$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^m}=\infty$ אינסופי.

$\lim_{z\to 0} e^z=1$ סופי.

הגדרה: נתבונן בטור לורן של f בטבעת $\{0<|z-z_0|<r\}$ $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$

1. אם לכל $n<0$ $a_n=0$ הנקודה הסינגולרית z_0 נקראת נקודה סינגולרית סליקה (removable) של f.
2. אם קיים $-1\geq m$ וכך ש- $a_n=0$ לכל $m>n$ אבל $a_m\neq 0$ אזי z_0 נקראת

קוטב מסדר m.

3) אם קיימת סדרה $n_k \to -\infty$ כך ש- $a_{n_k} \neq 0$ לכל k אז z_0 נקראת סינגולרית עיקרית.

דוגמה:

1) $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ אז 0 נקודה סינגולרית עיקרית.
$z^3 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!} = z^3 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4! z} + \dots$ גם כאן 0 נקודה סינגולרית עיקרית.

2) $\frac{1}{z^m}$ עבור $m \in \mathbb{N}$. אז 0 קוטב מסדר m.

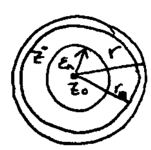
3) כל נקודה של פונקציה הולומורפית היא נקודה סינגולרית סליקה של אותה פונקציה מצומצמת לכל התחום פרט לנקודה.

משפט: התנאים הבאים הם שקולים:

1) z_0 היא נקודה סינגולרית סליקה של פונקציה f.
2) פונקציה f ממשיכה עד פונקציה הולומורפית בסביבה של z_0. (כלומר קיימת פונקציה אחת g הולומורפית בסביבה של z_0; f-g מתלכדות בסביבה מנוקבת.
3) פונקציה f חסומה בסביבה המנוקבת.
4) $\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot M(\varepsilon) = 0$ כאשר $M(\varepsilon) = \max_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z)|$

הוכחה:

$(1 \Rightarrow 2)$ ברור מהגדרת סינגולריות.
$(2 \Rightarrow 3)$ ברור כי פונקציה הולומורפית חסומה.
$(3 \Rightarrow 4)$ אם f חסומה אז $|M(\varepsilon)| < A$ חסום ולכן הגבול מתאפס.
$(4 \Rightarrow 1)$ לפי ההנחה קיימת סדרה $\varepsilon_n \to 0$ כך ש- $\varepsilon_n M(\varepsilon_n) \to 0$. ניקח נקודה כלשהי $z \in \{0 < |z-z_0| < r\}$ וניקח $\varepsilon_n < |z-z_0|$.



לפי נוסחת ההצגה של קושי בטבעת $\frac{\varepsilon_n}{2} < |z-z_0| < r$
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_0} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\varepsilon_n} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$$
כאשר $|z-z_0| < r_0 < r$. כעת
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\varepsilon_n} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw\right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot M(\varepsilon_n) \int_{|w-z_0|=\varepsilon_n} \frac{|dw|}{|w-z|} \le \frac{2\pi \cdot \varepsilon_n}{2\pi} M(\varepsilon_n)(|z-z_0| - \varepsilon_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$|w-z| \ge |z-z_0| - \varepsilon_n$$

$\Leftarrow$ $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r_0} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$ וזה נכון לכל z בסביבה המנוקבת. $0 < |z-z_0| < r_0$.
לפי מה שראינו קודם פונקציה זו הולומורפית בכל $\{|z-z_0| < r_0\}$. לכן z_0 נקודה סינגולרית סליקה של f.

2

תנאי (3) הוא לרוב התנאי הכי שימושי במשפט הזה.

(23) 26.02.08

מרוכבות

הגדרה: f הולומורפית בסביבה מנוקבת של נק' z_0 ($0<|z-z_0|<r$). אזי z_0 נקראת נקודה סינגולרית מבודדת של f. יהי $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ טור לורן של f בסביבה זו.

1. אם $a_n=0$ לכל $n<0$ אז z_0 נקראת נקודה סינגולרית סליקה.
2. אם קיים $m>0$ רק ש- $a_{-m}\neq 0$ ו- $a_n=0$ לכל $n<-m$ אזי z_0 נקראת קוטב מסדר m.
3. אם קיימת סדרה $n_k\to -\infty$ רק ש- $a_{n_k}\neq 0$ z_0 נקראת נקודה סינגולרית עיקרית.

משפט: התנאים הבאים שקולים:

א) z_0 קוטב מסדר m

ב) קיימת פונקציה $g(z)$ הולומורפית בסביבה של z_0 ו- $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ רק ש- $g(z_0)\neq 0$

ג) לפונקציה $\frac{1}{f(z)}$ הנקודה z_0 היא אפס מסדר m.

ד) קיים גבול $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)\neq 0,\infty$

הוכחה:

(א⇐ב) לפי הגדרה של קוטב נובע ש-

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\dots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots$$

ו- $a_{-m}\neq 0$ עכשיו אפשר פשוט להוציא את $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^m$ מחוץ לסוגריים ובדיוק נקבל את המבוקשת $g(z)$.

(ב⇐ג) ברור כי $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ א"מ $\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m}{g(z)}$

(ב⇐ד) גם ברור כי $(z-z_0)^m f(z)=(z-z_0)^m\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}=g(z)$ ול- $g(z)$ יש גבול סופי שאינו 0 לפי הנתונים של (ב).

(ד⇐א) נניח שקיים הגבול $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)\neq 0,\infty$ בסביבה מנוקבת של z_0. נגדיר פונקציה $g(z)=(z-z_0)^m f(z)$. z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של g. משום שקיים הגבול $\lim_{z\to z_0} g(z)$ אזי g חסומה בסביבה של z_0. לכן, לפי קריטריון לנקודה סינגולרית סליקה z_0 נקודה סינגולרית סליקה של g, כלומר g ממשיכה עד פונקציה הולומורפית בסביבה של z_0 ו- $g(z_0)\neq 0$ $\lim_{z\to z_0} g(z)$. אז

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}=\frac{g(z_0)+b_1(z-z_0)+\dots}{(z-z_0)^m}=\frac{g(z_0)}{(z-z_0)^m}+\dots$$

וזו בדיוק ההגדרה של קוטב.

סה"כ הכל טוב גמר הכל!

א ⇐ ב ⇒ ג

ד

מסקנה: z_0 קוטב אמ"מ מתקיים $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

הוכחה: ($\Rightarrow$) נגדיר $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$. אז z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של φ (כי בוודאי באיזושהי סביבה $|f(z)| > 1$; בפרט f לא מתאפסת בסביבה מנוקבת של z_0 $\Leftarrow$ $\varphi(z)$ הולומורפית בסביבה מנוקבת זו). חוץ מזה $\lim_{z\to z_0}\varphi(z) = 0$

לכן z_0 נקודה סינגולרית סליקה של φ ואפשר להגדיר $\varphi(z_0) = 0$.

יהי m הסדר של האפס z_0 של φ. אז $\varphi(z) = (z-z_0)^m \psi(z)$ כאשר $\psi(z_0) \neq 0$.

לכן לפונקציה $\frac{1}{f}$ z_0 הוא אפס מסדר m ולכן לפי (ג) של המשפט הקודם z_0 קוטב של f.

($\Leftarrow$) אם z_0 קוטב אז $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ משום ש- $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) \neq 0$ והרי $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m = 0$

משפט: z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של f אמ"מ עבור כל $0 \le k$ $\lim_{r\to 0} r^k M_f(r) = \infty$ (*)

כאשר $M_f(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$

הוכחה:

($\Rightarrow$) נניח ש- z_0 נקודה סינגולרית אך לא עיקרית של f (כלומר סליקה או קוטב).

אם z_0 נקודה סינגולרית סליקה אז (*) לא נכון לכל $0 \le k$ כי קיים במקרה זה הגבול $\lim_{r\to 0} M_f(r) = |f(z_0)|$ והוא סופי. אם z_0 קוטב מסדר m אז (*) לא נכון עבור $k \ge m$ כי קיים $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) \neq 0, \infty$. לכן $\lim_{r\to 0} r^{k} M_f(r) \neq \infty$.

($\Leftarrow$) נניח ש- z_0 נקודה סינגולרית עיקרית ונוכיח את (*). נניח בשלילה ש- (*) לא מתקיים עבור איזשהו $0 \le k_0$. אזי $0 \le \liminf_{r\to 0} r^{k_0} M_f(r) < \infty$.

ניקח $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $m > k_0$. נגדיר $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$. אז

$\liminf_{r\to 0} M_g(r) = 0$ (**) משום ש- $M_g(r) = r^m M_f(r)$; $k_0 < m$. לפי המשפט על נקודות סינגולריות סליקות, אם $\liminf_{r\to 0} r M_g(r) = 0$ אז z_0 נקודה סינגולרית סליקה של g. לפי (**) אכן הגבול התחתון הזה מתקיים לכן z_0 נקודה סינגולרית סליקה של g. לכן $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ בעלת קוטב בנקודה z_0. זאת סתירה לכך ש- z_0 נקודה סינגולרית עיקרית.

דוגמה: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ב- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$. $z_0 = 0$ נקודה סינגולרית עיקרית של $e^{\frac{1}{z}}$. ניקח $\omega \in \mathbb{C}$ ונתבונן במשוואה $\omega = f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

אם $\omega = 0$ אין פתרונות. אחרת $n \in \mathbb{Z}$ $\frac{1}{z} = \ln|\omega| + i\arg\omega + 2\pi i n$

כאשר $\arg\omega \in [-\pi, \pi)$. לכן כל הפתרונות הם

$$z_n = \frac{1}{\ln|\omega| + i\arg\omega + 2\pi i n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>הערה:</u> לכל $\omega\neq 0$ למשוואה $\omega=e^{\frac{1}{z}}$ ישנם פתרונות בכל סביבה של $z=0$.
הדבר הזה הוא לא מקרה!

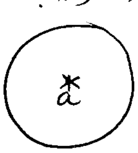
<u>משפט פיקרד</u> (Picard) תהי z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של פונקציה f. אזי לכל $\omega\in\mathbb{C}$ פרט אולי לנקודה אחת, למשוואה $f(z)=\omega$ קיים פתרון בכל סביבה של $z=z_0$. במילים אחרות, לכל $r>0$ $f(\{0<|z-z_0|<r\}) \supseteq \mathbb{C}\setminus\{a\}$

זה משפט מאוד עמוק ולא נוכיח אותו בקורס הזה. נוכיח משהו הרבה יותר חלש.

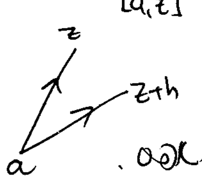
<u>משפט</u> (Casorati-Weierstrass-Sohotzki) אם z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של f, אזי לכל $r>0$ הקבוצה $f(\{0<|z-z_0|<r\})$ היא צפופה ב-$\mathbb{C}$.
<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיים כדור $B(a,r)=\{|z-a|<R\}$ כך ש- $f(\{0<|z-z_0|<r\})\cap B(a,r)=\emptyset$. כלומר לכל z כך ש $0<|z-z_0|<r$ $|f(z)-a|\geq R$. נסתכל על הפונקציה $g(z)=\frac{1}{f(z)-a}$. z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של g ו- g חסומה בסביבה מנוקבת $0<|z-z_0|<r$: $|g(z)|\leq\frac{1}{R}$. לכן g הולומורפית בסביבה של z_0. $f(z)=a+\frac{1}{g(z)}$.
לכן z_0 נקודה סליקה או קוטב של f. וזו סתירה.

<u>קריטריון של הולומורפיות</u>

<u>משפט מוריירה:</u> יהי Ω תחום, f רציפה ב-Ω. נניח שעבור כל משולש סגור $\Delta\subseteq\Omega$ $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0$ אזי f הולומורפית ב- Ω.
<u>הוכחה:</u> לכל $a\in\Omega$ ניקח כדור $B(a,r)\subseteq\Omega$ ונוכיח ש-f הולומורפית בכדור זה.



מספיק להוכיח קיום של פונקציה קדומה F של f ב- $B(a,r)$, כלומר קיימת F הולומורפית ב- $B(a,r)$ כך ש: לכל $z\in B(a,r)$ $f(z)=F'(z)$, שהרי אם פונקציה היא נגזרת של פונקציה הולומורפית בכדור היא בעצמה הולומורפית (זה נובע מהאנליטיות של הקדומה).
כמו בהוכחה של קיום של פונקציה קדומה לפונקציה הולומורפית בכדור (נגדיר $F(z)=\int_{[a,z]} f(\omega)\,d\omega$ ($z\in B(a,r)$). האינטגרל קיים כי f רציפה. לפי הנתון



$$F(z+h)-F(z)=\int_{[a,z+h]} f(\omega)\,d\omega-\int_{[a,z]} f(\omega)\,d\omega=\int_{[z,z+h]} f(\omega)\,d\omega$$

מסתכלים על המשולש $(a,z,z+h)$ והאינטגרל עליו מתאפס.

$$\Rightarrow |F(z+h)-F(z)-f(z)h|=\left|\int_{[z,z+h]}(f(\omega)-f(z))\,d\omega\right|\leq\max_{\omega\in[z,z+h]}|f(\omega)-f(z)|\cdot|h|=o(h)$$

כלומר $F'(z)=f(z)$. וכן f נגזרת של פונקציה הולומורפית ולכן הולומורפית בעצמה.

מסקנה 1: תהי סדרה $\{f_n(z)\}$ של פונקציות הולומורפיות בתחום Ω המתכנסת במידה שווה בכל קבוצה קומפקטית של Ω. אזי הגבול של הסדרה הוא גם פונקציה הולומורפית.

הוכחה: הגבול f הוא פונקציה רציפה כי הוא גבול במ"ש של רציפות. נשתמש במשפט מוררה - ניקח משולש $\bar{\Delta} \subseteq \Omega$. אז

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} \lim f_n(z)dz \underset{\substack{\text{כי זה גבול במ"ש}\\ \text{על } \partial\Delta}}{=} \lim \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \underset{\text{לפי משפט קושי}}{=} \lim 0 = 0$$

☺

מסקנה 2: תהי $f(z,\omega)$ כאשר $z\in\Omega$ תחום ו-$\omega\in\Omega$ במסילה בעלת אורך. נניח ש-f רציפה בכל $(z,\omega)\in\Omega\times\gamma$ ו-f הולומורפית ב-z לכל $\omega\in\gamma$. אזי הפונקציה $\varphi(z)=\int_\gamma f(z,\omega)d\omega$ היא הולומורפית ב-Ω.

דוגמה: $f(z,\omega)=\frac{\psi(\omega)}{\omega - z}$ כאשר $\omega\in\gamma$ ו-$z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$, ו-$\psi$ רציפה. זוהי פונקציה שאנחנו כבר מכירים.

(25) 27.02.08

אורתבור

משפט: אם $\{f_n\}$ סדרת פונקציות הולומורפיות בתחום Ω שמתכנסת במ"ש על קבוצות קומפקטיות, אז הגבול f הוא פונקציה הולומורפית.

הערות:

(1) אם טור של פונקציות הולומורפיות מתכנס במ"ש על קבוצות קומפקטיות אזי הסכום הוא פונקציה הולומורפית.

(2) תוספת של המשפט: עבור כל $m=1,2,\dots$ $\quad f_n^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(m)}$ במ"ש בקבוצות קומפקטיות.

הוכחה: מספיק לבדוק שמתקיים (כמו עבור כל כדור) $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$. במקרה זה יש לנו נוסחה

$$f_n^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{|w-a|=r+\varepsilon} \frac{f_n(w)}{(w-z)^{m+1}}\,dw$$

כאשר $\varepsilon>0$ רק ש- $B(a,r+\varepsilon)\subseteq\Omega$

אבל $\frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}} \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{f_n(w)}{(w-z)^{m+1}}$ במ"ש ב- $|w-a|=r+\varepsilon$ $\Leftarrow$ $f_n^{(m)}(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{m!}{2\pi i}\int \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}}\,dw$

במ"ש, כלומר $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$.

☺

משפט: $f(z,w)$ פונקציה רציפה לפי $(z,w)\in D\times\gamma$ כאשר D תחום ו- γ מסילה, וגם $f(z,w)$ הולומורפית ב- $z\in D$ עבור כל w. אזי $F(z)=\int_\gamma f(z,w)\,dw$ פונקציה הולומורפית ב- $z\in D$.

הוכחה א: פשוט (ננסה לגזור):

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - \int_\gamma f'_z(z_0,w)\,dw = \int_\gamma\left[\frac{f(z,w)-f(z_0,w)}{z-z_0} - f'_z(z_0,w)\right]dw$$

לכן מספיק לבדוק ש-

$$\frac{f(z,w)-f(z_0,w)}{z-z_0} - f'_z(z_0,w) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$$

במידה שווה לפי $w\in\gamma$

$$\frac{f(z,w)-f(z_0,w)}{z-z_0} - f'_z(z_0,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|u-z_0|=\rho}\left[\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{f(u,w)}{u-z}-\frac{f(u,w)}{u-z_0}\right)-\frac{f(u,w)}{(u-z_0)^2}\right]du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|u-z_0|=\rho} f(u,w)\underbrace{\left[\frac{1}{(u-z)(u-z_0)}-\frac{1}{(u-z_0)^2}\right]}_{\text{שואף ל-0 כאשר } z\to z_0 \text{ במ"ש לפי } u}du \longrightarrow 0$$

כי $f(u,w)$ חסומה.

☺

הוכחה ב': F רציפה בתחום D כי $f(z,w)$ רציפה לפי הזוג (z,w). נשתמש במשפט מוריירה. ניקח משולש $\overline{\Delta}\subseteq D$ ונתבונן באינטגרל

$$\int_{\partial\Delta}F(z)\,dz = \int_{\partial\Delta}\int_\gamma f(z,w)\,dw\,dz \underset{\text{פוביני}}{=} \int_\gamma\underbrace{\int_{\partial\Delta} f(z,w)\,dz}_{=0}\,dw = 0$$

כי f הולומורפית לכל w.

$\Leftarrow$ לפי מוריירה F הולומורפית.

☺

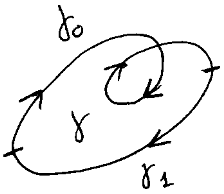
תחומים פשוטי-קשר - משפט קושי

הגדרה: תחום Ω הוא פשוט קשר אם כל שתי מסילות עם אותם קצוות ב-Ω הן הומוטופיות ב-Ω

משפט קושי בתחום פשוט קשר: אם f הולומורפית בתחום פשוט קשר Ω, אזי לכל מסילה סגורה γ ב-Ω $\int_\gamma f(z)dz=0$.

הוכחה: נבחר שתי נקודות קצה שרירותיות ונחלק את γ לשתי מסילות:

אז γ_0 הומוטופית ל-γ_1^{-1} ולכן



$$\int_\gamma f dz=\int_{\gamma_0} f dz+\int_{\gamma_1} f dz=\int_{\gamma_1^{-1}} f dz-\int_{\gamma_1} f dz=0$$

נוסחת קושי בתחום פשוט קשר

f הולומורפית בתחום פשוט קשר Ω. γ מסילה סגורה ב-Ω ; $z_0\in\Omega\setminus\gamma$

אזי $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)\cdot i(z_0,\gamma)$

כאשר $i(z_0,\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ האינדקס של הנק' z_0 ביחס למסילה γ.

הוכחה: נגדיר פונקציה חדשה $\varphi(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

מראש, φ הולומורפית ב-$\Omega\setminus\{z_0\}$ אבל z_0 נקודה סינגולרית סליקה של הפונקציה φ משום שקיים הגבול $\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=f'(z_0)$. לכן φ הולומורפית בתחום פשוט קשר Ω ולפי משפט קושי $\int_\gamma \varphi(z)dz=0$.

$$0=\int_\gamma\varphi(z)dz=\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\cdot 2\pi i\cdot i(z_0,\gamma)$$

(26) 4.3.08

מרוכבות

<u>משפט</u>: אם f הולומורפית ב- Ω תחום פשוט קשר ! - γ מסילה סגורה ב-Ω, $z_0 \in \Omega \setminus \gamma$ עבור כל נקודה st

(א) $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\cdot \mathrm{ind}(z_0,\gamma)$$

(ב) לכל $$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)\,\mathrm{ind}(z_0,\gamma) \quad n\geq 0$$

<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח את (ב).

לכל $z\in\Omega\setminus\{z_0\}$ נגדיר

$$g(z) = \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+1}}$$

ברור ש- g הולומורפית ב- $\Omega\setminus\{z_0\}$. אבל z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של g. בסביבה של z_0 קיים טור לורן של g.

$$g(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n-1}$$

וזה טור תקין סביב z_0. $\Leftarrow$ g הולומורפית בסביבת z_0.

לכן z_0 נקודה סינגולרית סליקה של g ; $\lim_{z\to z_0} g(z) = \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}$

$\Leftarrow$ לפי משפט קושי $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,dz = 0$. אבל מצד שני

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz - \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz - \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot \mathrm{ind}(z_0,\gamma)$$

☺

משפט השארית

<u>הגדרה וסימון</u>: תהי z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של f. השארית של f בנקודה z_0 היא $\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz$ כאשר ρ מספיק קטן כך שאין עוד נקודות סינגולריות ב- $|z-z_0|\leq\rho$.

אזי $\operatorname{Res}_{z_0} f = a_{-1}$

כאשר a_{-1} מקדם בפיתוח $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

של טור לורן סביב z_0.

<u>הערות על חישוב של שאריות:</u>

(1) נניח ש- $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ כאשר p,q הולומורפיות

בסביבה של נק' z_0 רק ש- $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=0$.

אז z_0 קוטב של $f(z)$.

(2) אם z_0 אפס פשוט של q, כלומר $q'(z_0)\neq 0$

אזי $\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ שכן:

$f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)\varphi(z)}$ כאשר φ הולומורפית סביב z_0

ו- $\varphi(z_0)\neq 0$. אז $f(z) = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{p(z)}{\varphi(z)}$. $\frac{p}{\varphi}$

הולומורפית בסביבה של z_0 ולכן יש לה פיתוח לטור

חזקות:

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}\frac{p(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-z_0}\left[\frac{p(z_0)}{\varphi(z_0)} + O(z-z_0)\right] =$$

$$= \frac{p(z_0)}{\varphi(z_0)}\cdot\frac{1}{z-z_0} + O(1)$$

$\Leftarrow$ $a_{-1} = \frac{p(z_0)}{\varphi(z_0)}$. אבל $\varphi(z_0) = q'(z_0)$

(3) אם z_0 אפס מסדר $m\geq 1$ אז

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

עבור $m=1$ זה ברור כי

$$(z-z_0)f(z) = \frac{p(z)}{\frac{q(z)}{z-z_0}} \underset{q(z_0)=0}{=} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}} \xrightarrow[z\to z_0]{} \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

שאר המקרים - תרגיל.

<u>הגדרה:</u> תהי f הולומורפית בסביבה מנוקבת של נקודה z_0 ו-

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

פיתוח לטור לורן. החלק הראשי של f בנקודה z_0 הוא הטור

$$G(f,z_0) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

(כלומר החלק הסינגולרי של הטור)

<u>טענה:</u> החלק הראשי $G(f, z_0)$ הוא פונקציה הולומורפית ב- $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

<u>הוכחה:</u> מצד אחד, הפונקציה $G(f, z_0)$ היא מוגדרת והולומורפית ב- $\{0<|z-z_0|<\varepsilon\}$. מצד שני, לטור
$$G(f, z_0)=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$
קיים $0\le r\le\infty$ רק שהטור מתכנס ב- $r<|z-z_0|$ ומתבדר ב- $r>|z-z_0|$. לכן $r=0$, כלומר הטור מתכנס ומגדיר את $G(f, z_0)$ ב- $0<|z-z_0|$.

<u>משפט השאריות</u> (בתחום פשוט קשר)

f הולומורפית בתחום פשוט קשר Ω פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות מבודדות $z_1, z_2, \dots, z_m \in \Omega$.

γ מסילה סגורה ב- Ω שלא מכילה את הנקודות $z_1, \dots, z_m$.

אזי
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} ind(z_k,\gamma)\cdot \underset{z_0}{Res}\, f$$

<u>הערה:</u> פרקטית, בד"כ $ind = 0, \pm 1$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר פונקצית עזר
$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m} G(f, z_k)$$
מראש, g הולומורפית ב- $\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_m\}$ כי f הולומורפית שם ; $G(f,z_k)$ הולומורפית ב- $\Omega\setminus\{z_k\}$.

נראה ש- z_j נקודה סינגולרית סליקה של g. בסביבה של z_j כל $G(f,z_k)$ כאשר $k\neq j$ הוא פונקציה הולומורפית; $f(z)-G(f,z_j)$ היא גם הולומורפית כי יש לה פיתוח לטור חזקות בסביבה של z_j, שהרי
$$f(z)-G(f,z_j)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_j)^n-\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_j)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_j)^n$$
לפי משפט קושי בתחום פשוט קשר
$$0=\int_\gamma g(z)\,dz=\int_\gamma f(z)\,dz-\sum_{k=1}^{m}\int_\gamma G(f,z_k)\,dz$$
נחשב את $\int_\gamma G(f,z_k)\,dz$: אם $G(f,z_k)=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_k)^n$
$$\int G(f,z_k)\,dz=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\int_\gamma (z-z_k)^n\,dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_k}=a_{-1}\cdot 2\pi i\, ind(z_k,\gamma)$$
$$\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_\gamma (z-z_k)^{-m}\,dz = \underbrace{1^{(m-1)}}_{\text{פונקציה ששווה ל-1 באופן זהותי}}\cdot ind(z_k,\gamma)=0$$
כי לפי נוסחת קושי לנגזרות עבור $m>1$.

חישוב של אינטגרלים ספציפיים

① $I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$ כאשר $R(x,y)$

פונקציה רציונלית של משתנים ממשיים x,y . ז"א R מוגדרת על $|z|=1$

נסמן $z = e^{i\theta}$. אז $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$. $\Leftarrow$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}$$

כלומר זה אינטגרל על מעגל היחידה של פונקציה רציונלית

<u>דוגמה:</u> $I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\sin\theta}$ כאשר $a>1$.

$$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(a+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)} = \int_{|z|=1}\underbrace{\frac{2\,dz}{z^2+2aiz-1}}_{f(z)}$$

נמצא את הנקודות הסינגולריות של $f(z)$:

$$z^2+2aiz-1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -ia \pm i\sqrt{a^2-1} = i\left(-a\pm\sqrt{a^2-1}\right)$$

$\Leftarrow$ אחת הנקודות בפנים עיגול היחידה ואחת בחוץ.

הנקודה שבפנים היא $z_1 = i\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)$.

$\Leftarrow$ לפי משפט השאריות

$$I = 2\pi i \cdot \underbrace{\text{ind}(z_1, S^1)}_{=1} \cdot \operatorname{Res}_{z_1}\frac{z}{z^2+2\pi i z-1} =$$

כי S^1 בכיוון החיובי

ו- z_1 בפנים.

$$= 2\pi i \cdot \frac{2}{(z^2+2aiz-1)'(z_1)} = 2\pi i\cdot\frac{2}{2z_1+2ai} =$$

$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$
כאשר ל-q
אפס פשוט

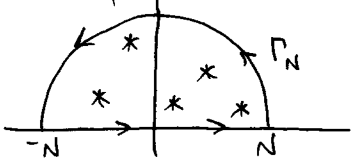
$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{i\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)+ia} = \frac{2\pi i}{i\sqrt{a^2-1}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

דוגמה: $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = I$ כאשר $R(x)$ פונקציה רציונלית ממשית בלי קטבים על $\mathbb{R}$ רק ש- $R(x)=O(\frac{1}{x^2})$ כאשר $x\to\infty$ אז

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{\{z_k \text{ קטבים של } R\\ \operatorname{Im} z_k>0\}}} \operatorname{Res} R$$

הוכחה: אם N מספיק גדול אז כל הקטבים של R שנמצאים בחצי המישור העליון נמצאים בתוך העיגול ברדיוס N.



מתקיים $I=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}R(x)\,dx$

לפי משפט השאריות $\int_{\Gamma_N}R(z)\,dz = 2\pi i\sum_{z_k}\operatorname{Res}R$

כאשר $\Gamma_N=\{|z|=N\}_{\operatorname{Im}z>0} * [-N,N]$; N מספיק גדול רק של הקטבים z_k ב- $\mathbb{H}^+$ ($=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$) נמצאים בתחום החסום ע"י Γ_N

כאשר $N\to\infty$ $\int_{-N}^{N}R(x)\,dx\to I$

$$\left|\int_{\substack{|z|=N\\ z\in\mathbb{H}^+}}R(z)\,dz\right| \le \pi\cdot N\cdot O\left(\frac{1}{N^2}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

לכן $2\pi i\sum_{z_k}\operatorname{Res}R = \int_{\Gamma_N}R(z)\,dz \xrightarrow[N\to\infty]{} I$

דוגמה: $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{\pm ix}\,dx$ כאשר $f(z)$ פונקציה הולומורפית ב- $\mathbb{C}$ פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות, $f(z)$ ממשי כאשר $z\in\mathbb{R}$ ואין נקודות סינגולריות על $\mathbb{R}$ וגם $\limsup_{z\to\infty}|zf(z)|<\infty$

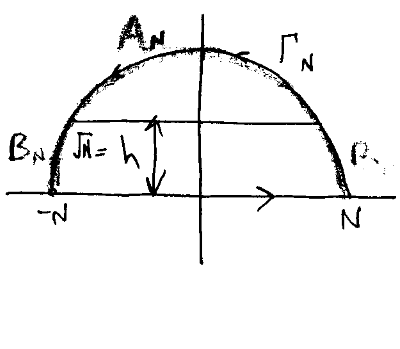
נוכיח ש- $\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}f(x)e^{\pm ix}\,dx = 2\pi i\sum_{\substack{z_k \text{ נק' סינגולריות } f\\ \text{ב- } \mathbb{H}^+}}\operatorname{Res}(f(z)e^{\pm iz})$

(האינטגרל הזה נקרא אינטגרל קושי (או ערך קושי של האינטגרל)).

לפי משפט השאריות,

$$\int_{\Gamma_N}f(z)e^{iz}\,dz = 2\pi i\sum_{z_k\in\mathbb{H}^+}\operatorname{Res}(f(z)e^{iz})$$

כאשר Γ_N המסילה מהדוגמה הקודמת. $N \gg 1$;



נותר להוכיח ש- $\int_{\substack{|z|=N\\ z\in\mathbb{H}^+}}f(z)e^{iz}\,dz\xrightarrow[N\to\infty]{}0$.

$z=x+iy \Leftarrow e^{iz}=e^{-y}e^{ix}$

$\Leftarrow |e^{iz}|=e^{-y}$.

$$\left|\int_{A_N}f(z)e^{iz}\,dz\right|\le e^{-h}O\left(\frac1N\right)\pi N =$$
$$= e^{-\sqrt N}O(1)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

מצד שני, $z \in \mathbb{H}^+$ <1 $|e^{iz}| = e^{-y}$ לכן

$$\left|\int_{B_N} f(z)\, e^{iz}\, dz\right| \le O\left(\frac{1}{N}\right)\cdot |B_N| \le O\left(\frac{1}{N}\right)\sqrt{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

(2)

$$|B_N| \underset{N\to\infty}{\sim} 2\cdot\frac{\sqrt{N}}{N}\cdot N = 2\sqrt{N}$$

<u>הערה</u>: אם החזקה של e הוא $-ix$ אז עושים דבר דומה אבל ב-$\mathbb{H}^-$.

<u>דוגמה</u>: $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx \quad a>0$

נניח שהאינטגרל הזה קיים ונחשב אותו.

$$\int_0^N \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\int_{-N}^{N} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\int_{-N}^{N} \frac{x}{x^2+a^2}\, e^{ix}\,dx\right]$$

כי הפונקציה זוגית

לפי הטענה שהוכחנו, כאשר $N\to\infty$ קיים הגבול הזה. (עבור $f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$ מתקיים!)

$$\lim \int_{-N}^{N} \frac{x}{x^2+a^2}\, e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\frac{z}{z^2+a^2}\, e^{iz}\right) =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z_0 = ia} \frac{z}{z^2+a^2}\, e^{iz} =$$

$$= \cancel{2}\pi i\, \frac{\cancel{i}a\, e^{i(ia)}}{\cancel{2ia}} = i\pi e^{-a}$$

לפי השיעור הקודם עם אפס פשוט של g

$$\frac{z e^{iz}}{z^2+a^2} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$\Leftarrow$ קיים

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(i\pi e^{-a}) = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

$\Leftarrow$ קיים $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$

(29) 11.03.08

מרוכבות

לכל $0<a$ מתקיים $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$

נשאיף את a ל-0 ונקבל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

<u>משפט</u>: תהי f הולומורפית במישור פרט לסדרה של קטבים $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ (סופית או אינסופית). נניח שקיימת סדרה של רדיוסים $R_k \to \infty$ כך ש- $\max_{|z|=R_k}|f(z)| = M_f(R_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

אזי $f(z) = \lim_{k\to\infty}\sum_{|z_n|<R_k} G(z,z_k)$ כאשר $G(z,z_k)$ החלק הראשי של f בקוטב z_n.

<u>סקיצה להוכחה</u>: להסתכל ב- Evgrafov.

<u>דוגמה</u>:

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{ctg z}{z} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi k(z-\pi k)} + \sum_{k=-n}^{-1}\frac{1}{\pi k(z-\pi k)}\right] =$$

$$= \frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-\pi^2k^2}$$

<u>משפט ז'ורדן</u> (Jordan) תהי $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ מסילה סגורה פשוטה. (כלומר $\gamma(1)=\gamma(0)$ ולכל $t_1<t_2$ $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ פרט ל- $t_1=0,\ t_2=1$). [מסילה כזו נקראת מסילת ז'ורדן] אז $\mathbb{R}^2\setminus\gamma$ מורכב משני רכיבי קשירות: אחד חסום $\Omega(\gamma)$ (הפנים של γ) ושני לא חסום $\Omega(\gamma,\infty)$ (החוץ של γ) כך ש- $\Omega(\gamma)$ תחום פשוט קשר ומתקיים

$$\gamma = \partial\Omega(\gamma) = \partial\Omega(\gamma,\infty)$$

יתר על כן, $ind(z_0,\gamma)=\pm1$ לכל $z_0\in\Omega(\gamma)$

<u>הערה</u>: $ind(z_0,\gamma)=0$ לכל $z_0\in\Omega(\gamma,\infty)$

<u>הגדרה</u>: תהי γ מסילת ז'ורדן. נאמר שהכיוון של γ הוא חיובי אם

$$ind(z_0,\gamma)=+1$$

לכל z_0 מהפנים של γ.

<u>הגדרה</u>: תחום Ω נקרא p-קשר ($1\le p$) אם

$$\partial\Omega = \gamma_0\cup\gamma_1\cup\dots\cup\gamma_{p-1}$$

ראשית כל γ_k מסילת ז'ורדן וגם המסילות $\gamma_1,\dots,\gamma_{p-1}$

שייכות לפנים $\Omega(\gamma_0)$ של המסילה γ_0 ומתקיים

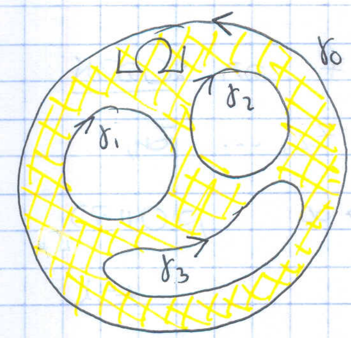
$$\Omega = \Omega(\gamma_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{p-1} \overline{\Omega(\gamma_k)}$$

הכיוון של γ_0 הוא חיובי והכיוון של כל $\gamma_1,\dots,\gamma_{p-1}$ הוא שלילי.

(מהדרישה ש- $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{p-1} \gamma_i$ נובע

שגם הפנים של המסילות זרים (ריק) היות כי

$0<i<j$ $\quad \Omega(\gamma_i)\cap\Omega(\gamma_j)=\emptyset$)

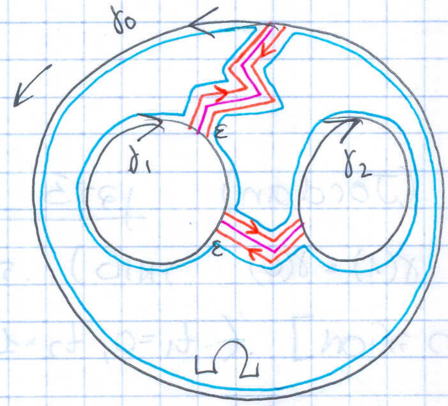


משפט קושי עבור תחום Ω p-קשר:

אם f הולומורפית בסביבה של $\overline{\Omega}$ אז

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0$$

"הוכחה": נחבר את γ_0 עם γ_1 ואת γ_1 עם γ_2 ע"י מסילות פוליגונליות בשני הכיוונים:



אז המסילה הכוללת היא מסילת ז'ורדן.

יותר פורמלית: באינדוקציה על p:

עבור $p=1$ התחום הוא פשוט קשר

ולכן המשפט נכון.

איך עושים את המעבר מ- p ל- $p+1$?

נניח שהמשפט נכון לכל התחומים p-קשר. יהי Ω תחום $p+1$

קשר ; $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}, \gamma_p$ רכיבים של השפה של Ω.

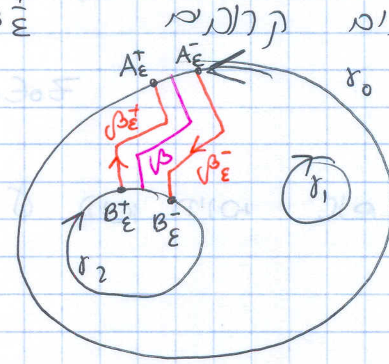
נחבר γ_0 ו- γ_p ע"י קו פוליגונלי פשוט β ב- Ω. (נזיז את β בשני

קווים קרובים $\beta_\varepsilon^\pm$. נגדיר מסילת ז'ורדן חדשה

$$\Gamma_\varepsilon = \beta_\varepsilon^+ \circ \underbrace{\gamma_p}_{} \circ \beta_\varepsilon^- \circ \underbrace{\gamma_0}_{} \quad \text{מ-}\ A_\varepsilon^+\ \text{ל-}\ A_\varepsilon^-$$

ללא החלק בין החיבורים של המסילות $\beta_\varepsilon^+, \beta_\varepsilon^-$

ללא החלק בין החיבורים של המסילות (בדומה לציור למעלה)



וכיוון שהכיוונים של β_ε^-, β_ε^+ מושרים ע"י הכיוון החיובי של γ_0.

לפי הנחת האינדוקציה

$$0 = \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

נשאיף את ε ל-0 ונקבל

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz \longrightarrow \int_{\gamma_0} f\,dz + \int_{\gamma_p} f\,dz$$

$$\Longleftarrow \quad \sum_{k=0}^{p} \int_{\gamma_k} f\,dz = 0$$

נוסחת קושי עבור תחום p-קשיר Ω: אם f הולומורפית בסביבה של $\overline{\Omega}$ ו- $z_0\in\Omega$ אזי $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

__הוכחה:__ נגדיר $g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. אז z_0 נקודה סינגולרית סליקה של g כי קיים $\lim_{z\to z_0} g(z)$ לכן לפי משפט קושי עבור תחום Ω $\int_{\partial\Omega} g(z)\,dz=0$ כלומר

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{dz}{z-z_0} =$$

$$= f(z_0)\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z-z_0} =$$

$$= f(z_0)\left(\mathrm{ind}(z_0,\gamma_0)+\sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{ind}(z_0,\gamma_k)\right)$$

$$= f(z_0)$$

שכן z_0 היא בפנים של γ_0 ובחוץ של $\gamma_1,\dots,\gamma_{p-1}$.

משפט השארית עבור תחום Ω p-קשיר: אם f הולומורפית בסביבה של $\overline{\Omega}$ פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,\dots,z_n\in\Omega$ אזי

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}_{z_k} f$$

עיקרון של ארגומנט ומשפט רושה (Rouche)

__משפט__ (עיקרון של ארגומנט)

יהי Ω תחום p-קשיר וחסום. $z_1,\dots,z_n\in\Omega$. תהי f הולומורפית בסביבה של $\overline{\Omega}$ פרט לנקודות $z_1,\dots,z_n$ כך שכל נקודה z_k היא קוטב.

נניח שלכל $z\in\partial\Omega$ מתקיים $f(z)\neq 0$. יהיו $a_1,\dots,a_m$ האפסים של f ב-Ω. (סמן) N_k - סדר האפס a_k של f

P_j - סדר הקוטב z_j של f.

אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{m} N_k - \sum_{j=1}^{n} P_j$$

<u>הוכחה:</u> לפי משפט השאריות

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_j}\frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\frac{f'(z)}{f(z)}$$

ונחשב שאם f הולומורפית $f(z)=(z-z_0)^r\varphi(z)$

כאשר φ הולומורפית ו- $\varphi(z_0)\neq 0$ אז

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{r}{z-z_0}$$

$\Leftarrow$ $\operatorname*{Res}_{z_0}\frac{f'}{f} = r$ (כי ל- $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ אין שאריות). סוף

$$\operatorname*{Res}_{a_k}\frac{f'}{f} = +N_k \qquad \operatorname*{Res}_{z_j}\frac{f'}{f} = -P_j$$

11

יום הולדת שמח לענת!!

<u>משפט רושה:</u> Ω תחום ק-קשר. f,g הולומורפיות בסביבה של $\bar{\Omega}$. נניח שעל השפה $\partial\Omega$ של Ω התנאים הבאים מתקיימים:

① $f(z)\neq 0$

② $|f(z)| > |f(z)-g(z)|$

אזי מספר האפסים של f ($\Delta(f)$) ב-Ω שווה למספר האפסים של g ($\Delta(g)$) ב-Ω (כולל הסדר) (כלומר מדובר פה בסכום הסדרים)

<u>הוכחה:</u> לפי עיקרון הארגומנט

$$I=\Delta g-\Delta f=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{g'(z)}{g(z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{f'+h'}{f+h}-\frac{f'}{f}\right)dz=$$

$h=g-f$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{h'f-hf'}{f(f+h)}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{\cancel{f^2}(1+\frac{h}{f})'}{\cancel{f^2}(1+\frac{h}{f})}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{H'(z)}{H(z)}dz$$

$H=1+\frac{h}{f}$

אינטואיציה:

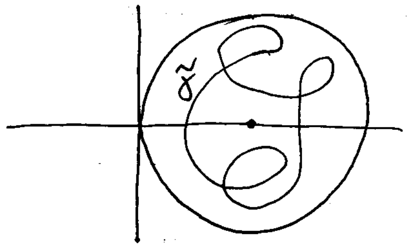
מאנליזה: למסילה מישורית γ אם $\tilde{\gamma}=H\circ\gamma$ אז

$$\int_\gamma\frac{H'(z)}{H(z)}dz=\int_{\tilde\gamma}\frac{d\omega}{\omega}$$

נסתכל על $\partial\Omega=\gamma$. מתקיים עבור $z\in\gamma$ ש-

$$|H(z)-1|=\left|\frac{h(z)}{f(z)}\right|<\frac{|f(z)|}{|f(z)|}=1$$

לכן $H(\gamma)$ בתוך עיגול כזה:



לכן $\tilde{\gamma}$ איפשהו בתוך העיגול הנ"ל

ולכן לפי משפט קושי $\int_{\tilde\gamma}\frac{d\omega}{\omega}=0$

פורמלית מספיק לבדוק ש- $\int_\gamma \frac{H'(z)}{H(z)}\,dz = 0$ לכל γ רכיב של

$\partial\Omega$. ואמנם, לכל מסילה סגורה γ של $\partial\Omega$ לכל $z\in\gamma$

$$|H(z)-1| = \left|\frac{h(z)}{f(z)}\right| \overset{(2)}{<} 1$$

לכן $\omega = H(z) \in \{|\omega-1|<1\}$. כלומר, המסילה $\tilde{\gamma} = H\circ\gamma$

מוכלת כולה ב- $\{|\omega-1|<1\}$.

$$\int_\gamma \frac{H'(z)}{H(z)}\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\omega}{\omega} \underset{\text{קושי בעיגול}}{=} 0$$

כי הפונקציה $\frac{1}{\omega}$ הולומורפית בעיגול $\{|\omega-1|<1\}$

ו- $\tilde{\gamma}$ מסילה סגורה בתוך העיגול.

דוגמה

משפט יסודי של אלגברה -

$$g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

נתבונן ב- $f(z) = z^n$; $\Omega = B(0,R)$ עבור $R>>1$.

אז $|g-f| < |f|$ על $\partial\Omega$ כאשר R מספיק גדול.

$\Rightarrow$ לפי משפט רושה מספר האפסים של g שווה למספר האפסים של f, כלומר יש n אפסים (כולל הריבוי).

משפט Kokeya-Eneström:

יהיו $0<a_0<a_1<\dots<a_n$. אזי כל האפסים של הפולינום

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

נמצאים בעיגול היחידה $\{|z|\le 1\}$

הוכחה: נתבונן בפונקציה

$$g(z) = (1-z)p(z) =$$
$$= a_0 + (a_1-a_0)z + (a_2-a_1)z^2 + \dots + (a_n-a_{n-1})z^n - a_n z^{n+1}$$

נגדיר $f(z) = -a_n z^{n+1}$. אז

$$|g(z)-f(z)| = |a_0 + (a_1-a_0)z + \dots + (a_n-a_{n-1})z^n|$$

נגדיר $\Omega_r = B(0,r)$ עבור $1<r$.

(32)

$\Rightarrow$ על ∂D_r מתקיים

$$|g(z)-f(z)| \le a_0+(a_1-a_0)|z|+\dots+(a_n-a_{n-1})|z|^n <$$

$$< |z|^n\left(a_0+(a_1-a_0)+\dots+(a_n-a_{n-1})\right) =$$

כי $r>1$.

$$= a_n|z|^n$$

$$< a_n|z|^{n+1} = |f(z)|$$

$\Rightarrow$ לפי משפט רושה מספר האפסים של g ב- D_r שווה למספר האפסים של f ב- D_r שהוא $n+1$.

המסקנה היא שמספר האפסים של p בכל רדיוס $\{|z|<r\}$ הוא בדיוק n. $\Rightarrow$ כל האפסים בעיגול היחידה הסגור $\{|z|\le 1\}$. נותר לבדוק שאין אפסים על השפה.

נניח ש- $|z_0|=1$ ו- $g(z_0)=1$ אזי

$$|g(z_0)-f(z_0)| = |f(z_0)| \le a_0+(a_1-a_0)+\dots+(a_n-a_{n-1}) = a_n = |f(z_0)|$$

$\Rightarrow$ באי שוויון של אי"ש המשולש יש שוויון וזה קורה אם המספרים הם למעשה כולם חיוביים. מכאן $z_0=1$.

עכשיו, ברור ש- $f(1)\neq 0$ כי למעשה $f(1)=\sum_{i=0}^{n} a_i$ וזה סכום של חיוביים.

☺

33) 14.3.08

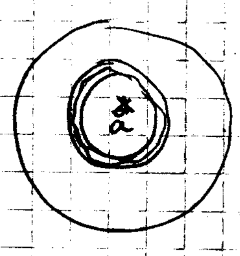
מרוכבות

משפט הורביץ (Hurwitz): תהי Ω תחום, $\{f_n\}$ הולומורפיות ב-Ω. $f_n \to f$ במידה שווה על קבוצות קומפקטיות ב-Ω, f אינה קבועה. אזי לכל אפס $a \in \Omega$ של f מסדר $m \geq 1$ ולכל רדיוס $B(a,r) \subseteq \Omega$ מספיק קטן (כך שלא יהיה אפס נוסף ברדיוס) קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מספר האפסים של f_n ב-$B(a,r)$ שווה ל-m (כולל הסדר).

הוכחה: לפי עיקרון הארגומנט: מספר האפסים של f_n ב-$B(a,r)$ הוא

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f_n'}{f_n}\, dz \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f'}{f}\, dz = m$$

(יש r כזה שעבורו אין ל-f_n אפסים על השפה משום שהאפסים הם מבודדים ואז יש סביבה של a שבה אין אפסים ואז מההתכנסות במידה שווה אפשר להניח r כזה)



אזי הסדרה של מספרים טבעיים $M_n \to M$

לכן לכל n מספיק גדול $M_n = M$

עיקרון המקסימום:

משפט: תהי Ω תחום כך ש-$\bar{\Omega}$ קבוצה קומפקטית ב-$\mathbb{C}$. תהי f רציפה ב-$\bar{\Omega}$ והולומורפית ב-Ω. נסמן

$$M = \max_{\partial\Omega} |f(z)|$$

אזי אם f לא קבועה, בכל נקודה $z \in \Omega$ $|f(z)| < M$.

הוכחה: נסמן $M_0 = \max_{\bar{\Omega}} |f(z)|$. מספיק להראות ש-$|f(z)| < M_0$ בכל $z \in \Omega$.

נניח בשלילה שקיימת $z_0 \in \Omega$ רק ש-$M_0 = |f(z_0)|$. משום ש-f לא קבועה, $|f|$ לא קבועה בכל רדיוס ב-Ω:

אחרת, $|f|^2 = u^2+v^2 \equiv c$ ב- $B(a,\rho)=U$. נגזור ונקבל:

$$\begin{cases} uu'_x + vv'_x = 0 \\ uu'_y + vv'_y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{ב-} \ \mathcal{U}$$

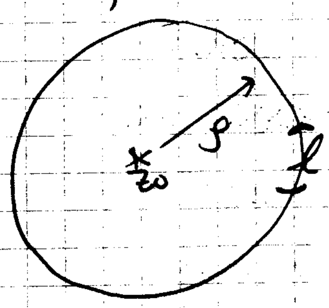
$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ -uv_x + vu_x = 0 \end{cases}$$

⇐ מכל נקודה של U או $u_x = v_x = 0$

או $\begin{vmatrix} u & v \\ v & -u \end{vmatrix} = u^2+v^2 = 0$, כלומר $u=v=0$.

אבל הפונקציה לא קבועה אז המקרה השני לא יכול להיות. אבל גם אם הנגזרות מתאפסות זו סתירה לכך שהפונקציה לא קבועה.

אז הראינו ש- $|f|$ לא קבוע בכל סביבה של נקודה z_0.



לכן קיימת נקודה ω קרובה ל- z_0 כך ש- $|f(\omega)| < M_0$ ניקח $\rho = |z_0-\omega|$ אז לפי רציפות של $|f|$ קיימת קשת l על המעגל $\rho = |z-z_0|$ כך ש- $|f(z)| \le M-\delta$ לכל $z \in l$ עבור $\delta>0$ כלשהו.

לפי נוסחת קושי:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \underset{z-z_0=\rho e^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_l f\,d\theta + \int_{[0,2\pi]\setminus l} f\,d\theta\right]$$ (כאן l הוא קטע של זוויות)

$$\Leftarrow \quad M_0 = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\left[|l|(M_0-\delta) + M_0(2\pi-|l|)\right] < M_0$$

וזו סתירה!

זה עיקרון מאוד חשוב.

מסקנה: (עיקרון המינימום) אם $f(z)\neq 0$ בכל $z\in G$

אז: $|f(w)|$ מינימום$_{\text{בתחום}}$ $< |f(z)|$ לכל $z\in G$

הוכחה: בגלל ש- $f(z)\neq 0$ מסתכלים על $\frac{1}{f}$ - היא הולומורפית ואפשר להשתמש עליה בעיקרון המקסימום. ☺

(ראו רמון דיבור להתקיים כל התנאים של עיקרון המקסימום והדרישה ש- f לא מתאפסת היא בונוס)

הספרה של רימן

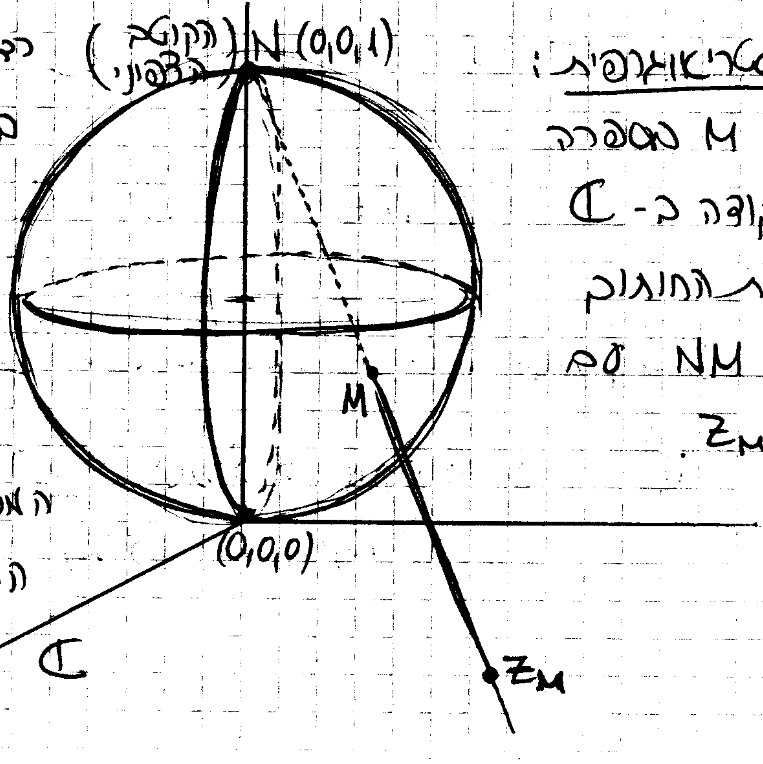
הגדרה: סביבה של אינסוף זאת קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{C}$ שמכילה קבוצה מהצורה $\{|z|>R\}$. נוסיף נקודה **אחת** ל- $\mathbb{C}$ (שנקראת נקודת אינסוף ∞) ונקבל את המישור הסגור (למה שנדע - זאת קומפקטיפיקציה חד-נקודתית).

המישור הסגור הוא מרחב קומפקטי (זה טריוויאלי אם מסתכלים על ההגדרה של קומפקטיות סדרתית שזאת גם ההגדרה היחידה של קומפקטיות שאנחנו משתמשים בה)

נגדיר מטריקה במישור הסגור שנקראת מטריקת רימן.

המישור הסגור עם מטריקת רימן נקרא ספרת רימן $\hat{\mathbb{C}}$.

ההטלה הסטריאוגרפית: לכל נקודה M בספרה מתאימה נקודה ב- $\mathbb{C}$ שהיא נקודת החיתוך של הישר NM עם $\mathbb{C}$ - z_M.



כדי למדוד את המרחק בין z_M ו- $z_{M'}$ מסתכלים על המקבילות M ו- M' והמרחק הוא המרחק בין M ו- M' ב- $\mathbb{R}^3$.

המרחק בין z_M ו- ∞ הוא המרחק בין M ו- N.

ניקח ספרה ב- $\mathbb{R}^3$. $S=\{x^2+y^2+(u-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2\}$

$N=(0,0,1)$ נקראת הקוטב הצפוני של S. נגדיר

את ההטלה הסטראוגרפית $T:S\setminus\{N\}\to\mathbb{C}=\{(x,y,0)\}$:

לכל נקודה $A\in S\setminus\{N\}$ $z_A=T(A)$ הוא נקודת החיתוך

של הישר $\overline{NA}$ עם $\mathbb{C}$. ברור ש-T חח"ע ועל.

נגדיר מטריקת רימן ρ ב- $\mathbb{C}$: לכל $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

$$\rho(z_1,z_2)=\|T^{-1}(z_1)-T^{-1}(z_2)\|_{\mathbb{R}^3}$$

נגדיר מטריקת רימן ρ ב- $\hat{\mathbb{C}}$ (המישור הסגור):

$$\rho(z,\infty)=\|T^{-1}(z)-N\|_{\mathbb{R}^3}$$

אז המישור הסגור הופך למרחב מטרי קומפקטי.

אפשר לבדוק שמתקיים (תרגיל!)

(1) $\rho(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$ $z_1,z_2\in\mathbb{C}$

$$\rho(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \qquad z\in\mathbb{C}$$

$$d\rho=\frac{|dz|}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

$$\int_\gamma d\rho=\int_0^1\frac{|\gamma'(t)|dt}{\sqrt{1+|\gamma(t)|^2}}$$

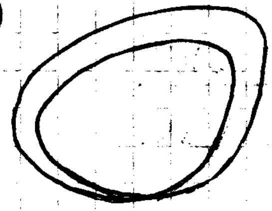
(2) לכל מעגל C על S $T(C)$ מעגל או ישר ב- $\mathbb{C}$.

$T(C)$ ישר אמ"מ $N\in C$.

תורה גיאומטרית של פונקציות מרוכבות.

נקודת המבט: פונקציה מקבוצה של $\hat{\mathbb{C}}$ ו- $\hat{\mathbb{C}}$ לאו העתקה של קבוצה על קבוצה.

(38)



העתקת מביוס

העתקת מביוס היא מהצורה

$$\omega(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

מתקיים $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq 0$ אמ"מ ω לא קבועה

נשים את ω לכל $\hat{\mathbb{C}}$ ע"י:

$$\omega(\infty)=\frac{a}{c}\qquad \omega\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$$

אז $\omega:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$

<u>טענה 1</u>: העתקת מביוס היא הומאומורפיזם של המישור $\hat{\mathbb{C}}$ על עצמו. (כלומר חח"ע, רציפה והפוכה רציפה). כמו כן, ההעתקה ההפוכה גם היא העתקת מביוס.

<u>טענה 2</u>: ω_1,ω_2 העתקות מביוס. אז $\omega_2\circ\omega_1$ העתקת מביוס.

<u>טענה 3</u>: ω העתקת מביוס. C מעגל או ישר. אזי $\omega(C)$ מעגל או ישר.

<u>טענה 4</u>: נתונים z_1,z_2,z_3 ; $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ נקודות ב- $\hat{\mathbb{C}}$ כך ש- $z_i\neq z_j$, $\omega_i\neq\omega_j$ עבור $i\neq j$.
אזי קיימת העתקת מביוס $\omega(z)$ אחת ויחידה כך ש- $\omega(z_i)=\omega_i$ ל- $i=1,2,3$.

הנוסחה היא $[\omega(z),\omega_1,\omega_2,\omega_3]=[z,z_1,z_2,z_3]$ כאשר $[a_1,a_2,a_3,a_4]$ היחס הכפול המוגדר ע"י

$$[a_1,a_2,a_3,a_4]=\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3}\Big/\frac{a_1-a_4}{a_2-a_4}$$

(נשים לב שזה מוגדר גם עבור נקודות של ∞ ומפרשים את זה ע"י מעבר לגבול)

טענה 5: הצורה הכללית של העתקת מביוס שמעתיקה את כדור היחידה הפתוח D על עצמו היא

$$\omega(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

כאשר $a \in D$ ו- $|\lambda| = 1$.

(זאת נוסחה שכדאי לזכור!)

הוכחה: נראה שאם ω מצורה זו אז היא מעבירה את D על D. מתקיים $\omega(0) = -\lambda a \in D$ ולכן מספיק לבדוק ש- $\omega(S^1) \subseteq S^1$. אכן, נניח ש- $|z|=1$, אז $z = e^{i\varphi}$

$$|\omega(z)| = \left|\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \cancel{|\lambda|}\frac{|e^{i\varphi}-a|}{|1-\bar{a}e^{i\varphi}|} =$$

$$= \left|\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{-i\varphi}-\bar{a}}\right| = \frac{|e^{i\varphi}-a|}{|e^{i\varphi}-a|} = 1$$

מצד שני, צריך להראות שכל ההעתקות מתקבלות בצורה הזאת.

נניח $\omega : D \xrightarrow{\text{על}} D$ העתקת מביוס.

נסמן $b = \omega(0)$. נתבונן ב-

$$M(z) = \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$$

לפי מה שהראנו זו העתקת מביוס שמעבירה את D על D ולכן $\varphi = M \circ \omega$ העתקת מביוס של D על D ומתקיים $\varphi(0) = M(b) = 0$.

אם $\varphi(z) = \frac{mz+n}{pz+k}$ ו- $\varphi(0) = 0$ אז $n=0$

ולכן $\varphi(z) = \frac{mz}{pz+k} = \nu \frac{z}{1-cz}$.

נשתמש ש- φ הומאומורפיזם היא מעבירה את S^1 ל- S^1.

ניקח $z = e^{i\varphi} \in S^1$. אז $|\varphi(z)| = \frac{|\nu|}{|1-cz|} = 1$ ואז

$$|\nu|^2 = (1-ce^{i\varphi})(1-\bar{c}e^{-i\varphi}) = 1 - 2Re(ce^{i\varphi}) + |c|^2$$

$$\Rightarrow Re(ce^{i\varphi}) = \frac{1+|c|^2-|\nu|^2}{2}$$

קבוע לכל $\varphi \in [0,2\pi]$ $\Leftarrow$ $c=0$ $\Leftarrow$ $\varphi(z) = \nu z$

ראשית $|\nu| = 1$. $\Leftarrow$ $M\circ\omega(z) = \nu z$

$\Leftarrow$ $\omega(z) = M^{-1}(\nu z)$. נותר לבדוק ש- $M^{-1}(\nu z)$
היא מהצורה המבוקשת. נבדוק:

$$\omega = \lambda\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \Rightarrow \omega - \bar{a}z\omega = \lambda z - \lambda a$$

$$\Rightarrow z = \frac{\omega+\lambda a}{\lambda+\bar{a}\omega} = \frac{1}{\lambda}\frac{\omega-(-\lambda a)}{1-\overline{(-\lambda a)}\omega}$$

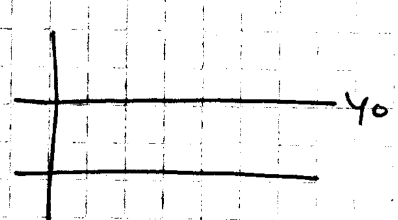
נותר לבדוק שאם מציבים $z\nu$ אז עדיין מתקבלת אותה צורה.
וזה כתרגיל.

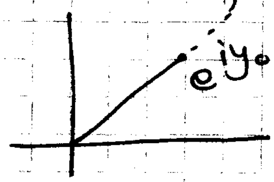
(11)

<u>הגדרה:</u> פונקציה הולומורפית חד-חד-ערכית (על התמונה) נקראת <u>פונקציה פשוטה</u>. (univalent)
פונקציה הולומורפית בסביבה של נקודה z_0 נקראת <u>פשוטה מקומית</u> אם היא פשוטה באיזושהי סביבה של z_0.

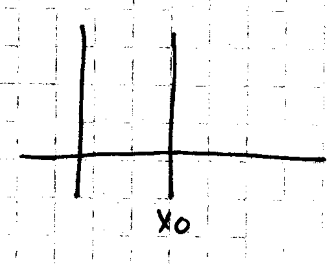
<u>דוגמה:</u> $\exp(z) = e^z$. זו פונקציה פשוטה מקומית בכל נקודה של $\mathbb{C}$ אך לא פשוטה בכל תחום שמכיל שתי נקודות שונות z_1, z_2 רק ש- $z_1 - z_2 = 2\pi i k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$. מה ההעתקה הזאת עושה?

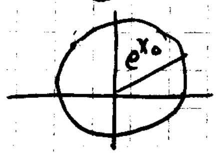
$$\exp(\underbrace{\{x+iy_0 : x\in\mathbb{R}\}}_{\text{ישר}}) = \underbrace{\{e^{iy_0}\cdot e^{x} : x\in\mathbb{R}\}}_{\text{קרן שעוברת דרך } e^{iy_0} \text{ והנקודה } 0}$$





$$\exp(\{x_0+iy : y\in\mathbb{R}\}) = \underbrace{\{e^{x_0}\cdot e^{iy} : y\in\mathbb{R}\}}_{\text{מעגל שעובר אינסוף פעמים והרדיוס } e^{x_0}}$$





37

18.3.08

מרוכבות

תרגיל: להראות שכל העתקת מביוס של חצי המישור העליון הפתוח $H^+=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ על עצמו היא מהצורה $M(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ו- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc=1$!

הגדרה: פונקציה הולומורפית f בתחום Ω נקראת **פשוטה** אם היא חד-חד-ערכית, כלומר לכל $z_1,z_2\in\Omega$, $f(z_1)=f(z_2)$ גורר ש- $z_1=z_2$.

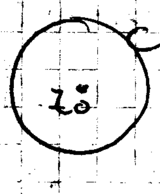
הגדרה: f הולומורפית בסביבה של נקודה z_0 נקראת **פשוטה מקומית** אם קיימת סביבה של z_0 שבה f פשוטה.

דוגמה: $f(z)=\exp(z)$ פשוטה מקומית בכל נקודה אך לא פשוטה בכל תחום המכיל שתי נקודות שונות מהצורה $z+2\pi ik$ ו- $k\in\mathbb{Z}$.

טענה: f פשוטה מקומית בנקודה z_0 אמ"מ $f'(z_0)\neq 0$.

היינו רוצים להגיד שזו תוצאה מיידית של משפט הפונקציה ההפוכה. אכן כיוון אחד הוא תוצאה. אבל משפט הפונקציה ההפוכה לא נכון בכיוון השני. למשל $f(x)=x^3$ היא חח"ע בסביבת 0 אולם הנגזרת שם היא 0. אבל במרוכבים זה דווקא כן נכון! $f(z)=z^3$ היא לא חח"ע בסביבת אפס.

הוכחה: נשתמש במשפט רושה. הרי z_0 אפס מבודד של הפונקציה $\varphi(z)=f(z)-f(z_0)$ לכן לכל מעגל $C=\{|z-z_0|=r\}$



עבור $r>0$ מספיק קטן סביב z_0 מתקיים $\inf_{z\in C}|\varphi(z)|>0$

נסמן $2\varepsilon=\inf_{z\in C}|\varphi(z)|>0$

יהי w כך שהוא רק ש-

$$|w-f(z_0)|<\varepsilon$$

ונגדיר $g(z)=f(z)-w$. אזי על המעגל C לכל $z\in C$ מתקיים $|\varphi(z)-g(z)|<|\varphi(z)|$

לכן לפי משפט רושה מספר אפסים (כולל ריבוי) של φ שווה למספר האפסים של g בכדור $\{|z-z_0|<r\}$.

וזה נותן את המשפט: אם f לא פשוטה בסביבה של z_0 אז נניח שקיימת סדרה $\omega_n \to f(z_0)$ כך שלמשוואה $f(z)=\omega_n$ יש שני פתרונות $z_n', z_n'' \to z_0$.

לכן, לפי מה שהוכחנו, למשוואה $f(z)=f(z_0)$ יש גם לפחות שני פתרונות בכל כדור כזה. לכן z_0 לא אפס פשוט של $f(z)-f(z_0)=\varphi(z) \Leftarrow f'(z_0)=0$

מצד שני, נניח ש- $f'(z_0)=0$, כלומר z_0 אפס של $\varphi(z)$ לפחות מסדר 2. לכן לכל ω קרוב ל- $f(z_0)$ למשוואה $f(z)=\omega$ יש לפחות שני פתרונות, לכן f לא פשוטה מקומית. (נשים לב שיכול להיות פיתרון כפול. אבל לא יתכן שלכל ω מספיק קרוב יש פיתרון כפול, כי אם יש סדרה $\omega_n \to f(z_0)$ כך שלמשוואה $f(z_n)-\omega_n=0$ יש רק פיתרון כפול אז $f'(z_n)=0$ ואז לפי משפט היחידות $f'\equiv 0$ וזה כמובן גם אומר ש- f לא פשוטה מקומית.

דוגמה: כתוב במספר: לכל $\omega \neq f(z_0)$ מספיק קרוב ל- $f(z_0)$ כל פיתרון של המשוואה $f(z)-\omega=0$ הוא אפס פשוט. אחרת, קיימת סדרה $\omega_n \to f(z_0)$ וסדרה $z_n \to z_0$ כך ש- z_n אפס כפול של המשוואה $f(z)=\omega_n$. לכן $f'(z_n)=0$ ולפי משפט היחידות, $f'\equiv 0 \Leftarrow f$ קבועה

אפס מסדר k של f הוא אפס מסדר k-1 של f', כלומר אם יש אפס כפול אז ... אפס ... זהו ...

משפט העתקה הפתוחה: f הולומורפית בתחום Ω ולא קבועה אזי $D=f(\Omega)$ תחום.

הוכחה: מספיק להראות שלכל $z_0\in\Omega$ יש כדור $B(z_0,r)$ שהתמונה $f(B(z_0,r))$ מכילה כדור סביב הנקודה $f(z_0)$.

ניתן להניח ש- $f(z_0)=0$ (אחרת נתבונן ב- $g(z)=f(z)-f(z_0)$).

לכל $0<r$ מספיק קטן, נסמן $2\varepsilon=\min_{C}|f(z)|>0$

(38)

נניח ש- $C=\partial B(z_0,r)$ אזי לכל w כך ש-

$|w|<\varepsilon$ לפי משפט רושה למשוואה $f(z)=w$ יש

לפחות פתרון אחד ב- $B(z_0,r)$, שהרי על C

$$|f(z)| \ge 2\varepsilon > \varepsilon > |f(z)-(f(z)-w)|$$

משפט (למת שוורץ Schwarz):

תהי f הולומורפית בעיגול היחידה $\mathbb{D}=\{|z|<1\}$

כך ש- $f(0)=0$; $|f(z)|\le 1$ לכל $z\in\mathbb{D}$. אזי

א) $|f(z)|\le|z|$ לכל $z\in\mathbb{D}$ (תחום סביב 0 עובר לעצמו)

ב) $|f'(0)|\le 1$

ג) אם קיימת נקודה $z\in\mathbb{D}$ כך שב-(א) או ב-(ב) יש שוויון

אזי קיים λ כך ש- $|\lambda|=1$; $f(z)=\lambda z$ לכל $z\in\mathbb{D}$

הוכחה: נגדיר פונקציה עזר

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{z} & z\neq 0\\ f'(0) & z=0\end{cases}$$

אזי g הולומורפית ב- $\mathbb{D}$ כי 0 נקודה סינגולרית

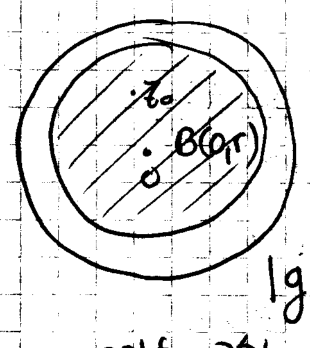
סליקה של g ; $\lim_{z\to 0} g(z)=f'(0)$

(נשים לב ש- f ובתוצאה מזה גם g לא מוגדרות על

$\partial\mathbb{D}$ ולכן אי אפשר להשתמש בעיקרון המקסימום שם.)

ניקח נקודה כלשהי $z_0\in\mathbb{D}$. נתבונן בפונקציה g בכדור

סגור $\overline{B}(0,r)=\{|z|\le r\}$ כאשר $|z_0|<r$



g רציפה ב- $\overline{B}(0,r)$ והולומורפית בפנים ולכן

לפי עיקרון המקסימום

$$|g(z_0)|\le\max_{|z|=r}|g(z)|=\max_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|}\le\frac{1}{r}$$

אזי לכל $r<1$ מספיק קרוב ל-1 $|g(z_0)|\le\frac{1}{r}$

נשאיף את r ל-1 ונקבל $|g(z_0)|\le 1$ וזה גורר

את (א) ואת (ב).

נותר להוכיח את (ג). נניח שקיימת $z_0\in\mathbb{D}$ כך ש-

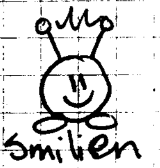
$|g(z_0)|=1$ (אם $z_0\neq 0$ אז לפי (א) $|f(z_0)|=|z|$

ואם $z_0=0$ אז $f'(0)=1$).

משום ש- $|g(z)|\le 1$ ב- $\mathbb{D}$ ו- $z_0\in\mathbb{D}$ נובע

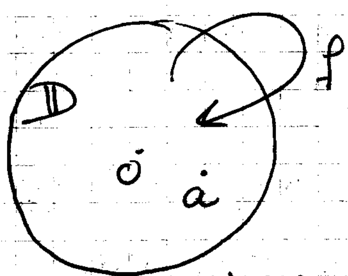
ש- $|g|$ מקבלת מקסימום בנקודה פנימית. לכן g קבועה,

כלומר קיים λ כך ש- $f(z)=\lambda z$ ו- $|\lambda|=1$.



<u>מסקנה</u>: אם f הולומורפית ב- $\mathbb{D}$ חח"ע ועל $\mathbb{D}$ אזי

f העתקת מביוס.



<u>הוכחה</u>: נסמן $a=f(0)\in\mathbb{D}$. ניקח

$$\omega(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

כלומר $\omega(a)=0$ ו- $\omega(\mathbb{D})\to\mathbb{D}$

פשוטה ועל. נתבונן ב- $h(z)=(\omega\circ f)(z)$

אז $h:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ פשוטה ועל כי היא הרכבה של

כאלה, ומתקיים $h(0)=0$. לפי למת שוורץ

$|h(z)|\le|z|$ לכל $z\in\mathbb{D}$ וגם $|h^{-1}(z)|\le|z|$

כי $h^{-1}:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ חח"ע ועל והולומורפית ו- $h^{-1}(0)=0$

$\Leftarrow$ $|h(z)|=|z|$ ולפי (ג) של שוורץ

$\Leftarrow$ $(\omega\circ f)(z)=h(z)=\lambda z$

$f(z)=\omega^{-1}(\lambda z)$ הרכבה של העתקות מביוס ולכן

f העתקת מביוס.

<u>המשפט היסודי של פונקציות מרוכבות</u> (משפט ההעתקה

של רימן): יהי Ω תחום פשוט קשר ב- $\mathbb{C}$ כך ש-

$\Omega\neq\mathbb{C}$ ו- $z_0\in\Omega$. אזי קיימת פונקציה f אחת

ויחידה כך ש-

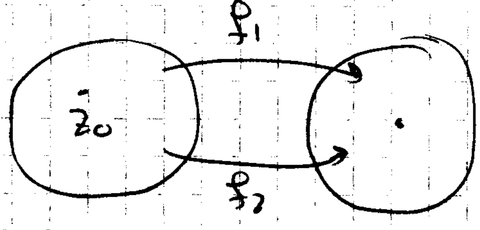
(א) $f(z_0)=0$ ו- $f'(z_0)>0$

(ב) $f:\Omega\to\mathbb{D}$ הולומורפית חח"ע ועל.

(רימן לא הוכיח את המשפט אלא רק ניסח אותו)

הוכחת היחידות:

נניח ש- f_1, f_2 שתי העתקות שמקיימות את תנאי המשפט.



נתבונן ב- $H = f_2 \circ f_1^{-1}$
זאת העתקה של עיגול היחידה על עצמו (היא מוגדרת היטב).
לפי תנאי (ב). H חח"ע, על, הולומורפית ומתקיים $H(0)=0$; $H'(0)>0$. לכן קיימים $a\in \mathbb{D}$; $|\lambda|=1$
כך ש- $H(z)=\lambda\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. $a=0 \Leftarrow H(0)=0$
$H(z)=\lambda z \Rightarrow H'(z)=\lambda>0 \Rightarrow \lambda=1$ ולכן
$H(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{D}$ $\Rightarrow f_2\circ f_1^{-1}(z)=z$
$\Rightarrow f_2 \equiv f_1$.

הערה: f_1^{-1} הולומורפית כי f_1 פשוטה ולכן הנגזרת שלה לא מתאפסת בכל נקודה אז אפשר לגזור את f_1^{-1} לפי נוסחת פונקציה הפוכה.

(40) 19.03.08
מרוכבות

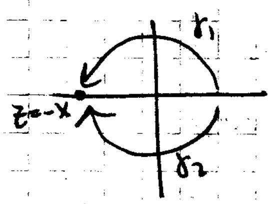
המשכה אנליטית

פונקציית לוג | log

פונקציה $\log z$ מוגדרת הולומורפית בסביבה של הנקודה $z=1$

$$|z-1|<1 \quad \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(1+(z-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}(-1)^{n+1}$$

הבעיה היא: נניח שנתון תחום $1\in\Omega$. האם קיימת פונקציה הולומורפית F ב-Ω כך ש- $F=\operatorname{Log}$ בסביבה של 1? האם קיים תחום מקסימלי כזה?
ברור ש- $0\notin\Omega$ (כי $\lim_{z\to 0}|\log(z)|=\infty$). אם $F=\operatorname{Log}$ סביב $z=1$ אז $F'(z)=\frac{1}{z}$ סביב $z=1$
אז $F'(z)=\frac{1}{z}$ ב-Ω. אם γ מסילה ב-Ω מ-1 ל-z, אזי $F(z)=\int_\gamma \frac{dt}{t}$. מכאן כבר ברור שאין תחום מקסימלי: לא ייתכן ש- $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ כי אם $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אז עבור $z<0$ אפשר לקרב את $F(z)$ גם ע"י מסילה שעוברת ב-$\mathbb{H}^+$ וגם ע"י מסילה שעוברת ב-$\mathbb{H}^-$ (כמו בציור) ואז



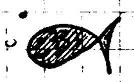
$$F(z)=\int_{\gamma_1}\frac{dt}{t}=\int_{\gamma_2}\frac{dt}{t} \Rightarrow \int_{\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1}\frac{dt}{t}=0$$

אבל זו סתירה כי $\int_{\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1}\frac{dt}{t}=2\pi i\cdot \operatorname{ind}(0,\gamma_2^{-1}\circ\gamma_1)=2\pi i$

אבל אפשר להמשיך את $\operatorname{Log} z$ ל- $\mathbb{C}\setminus\{z\le 0\}$.
ניקח $F(z)=\log|z|+i\cdot\operatorname{Arg} z$ כאשר $\operatorname{Arg} z\in(-\pi,\pi)$

<u>הגדרה</u>: תהי $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ו- γ מסילה שלא מכילה את 0 מ-1 ל-z. אזי <u>ענף</u> של פונקציית $\log$ בנקודה z הוא האינטגרל $\log_\gamma z=\int_\gamma\frac{dt}{t}$

<u>טענה</u>: אם $\log_{\gamma_1} z$ ו- $\log_{\gamma_2} z$ שני ענפים של $\log$ ב-z, אזי $\log_{\gamma_2}z-\log_{\gamma_1}z=2\pi i k$ כאשר $K=\operatorname{ind}(0,\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2)$



<u>טענה:</u> יהי Ω תחום פשוט קשר ; $0\notin\Omega$. יהי $\log z_0$ ענף של $\log$ בנקודה $z_0\in\Omega$

אז קיימת פונקציה הולומורפית $\log_\Omega$ ב-Ω

כך ש- $\log_\Omega(z_0) = \log z_0$; $\log_\Omega(z)$ ענף כלשהו של $\log$ ב-z.

<u>הוכחה:</u> עבור כל $z\in\Omega$ נגדיר $\log_\Omega(z) = \log z_0 + \int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t}$

לאורך איזשהו מסלול γ ב-Ω מ-z_0 ל-z. Ω תחום פשוט

קשר ; $0\notin\Omega$ ולכן האינטגרל לא תלוי במסלול מ-z_0 ל-z.

ואת זה שזאת פונקציה הולומורפית כבר הוכחנו בכל מיני הזדמנויות.

; $\log_\Omega(z)$ הוא ענף של $\log$ ב-z לפי ההגדרה. ☺

<u>מקרה פרטי:</u> אם $1\in\Omega$; $z_0=1$ - אז קיימת פונקציה

$\log_\Omega$ הולומורפית ב-Ω כך ש- $\log_\Omega(z) = \operatorname{Log} z$

בסביבה של 1.

<u>הגדרה</u> של הפונקציה z^α עבור $\alpha\in\mathbb{C}$: $z^\alpha = e^{\alpha\log z}$

כאשר $\log z$ ענף של $\log$ בנקודה $z\neq0$.

ענף של פונקציה z^α (הוא מוגדר בעזרת ענף של $\log$)

<u>מסקנה:</u> אם Ω פשוט קשר ; $0\notin\Omega$ אז

לכל ענף z_0^α של z^α בנקודה $z_0\in\Omega$

קיימת פונקציה הולומורפית $(z^\alpha)_\Omega$ כך ש- $(z_0^\alpha)_\Omega = z_0^\alpha$

; $(z^\alpha)_\Omega$ ענף של z^α לכל $z\in\Omega$.

(41) 25.03.08

ארונבות

הגדרה:

1. ענף של פונקצית log בתחום Ω שלא מכיל את 0 הינו פונקציה הולומורפית $L(z)$ ב-Ω כך ש- $L(z)$ הוא אחד מערכי של $\log z$ לכל $z\in\Omega$.
2. ענף של פונקציה z^α עבור $\alpha\in\mathbb{C}$ בתחום Ω הינו פונקציה הולומורפית $f(z)$ ב-Ω כך ש- $f(z)$ אחד מערכי של z^α עבור $z\in\Omega$.

תזכורת: אחד מערכי $\log_\gamma z$ של log בנקודה z הוא

$$\log_\gamma z = \int_\gamma \frac{dw}{w} = \log|z| + i\operatorname{Arg} z + i2\pi k$$

כאשר γ מסלול מ-1 ל-z ; $k\in\mathbb{Z}$, $\operatorname{Arg} z\in(-\pi,\pi]$

אחד מערכי של z^α הינו $z_\gamma^\alpha = e^{\alpha\log_\gamma z}$

משפט:

1. אם L ענף של log בתחום Ω אז $e^{L(z)}\equiv z$ ב-Ω , $L:\Omega\to\mathbb{C}$ פונקציה פשוטה.
2. עבור כל תחום Ω פשוט קשר כך ש- $0\notin\Omega$ ועבור כל אחד מערכי $\log z_0$ ב- $z_0\in\Omega$ קיים ענף L של log ב-Ω כך ש- $L(z_0)=\log z_0$.
3. עבור כל תחום Ω פשוט קשר כך ש- $0\notin\Omega$: $\alpha\in\mathbb{C}$ ולכל אחד מערכי z_0^α, $z_0\in\Omega$ קיים ענף f של z^α ב-Ω כך ש- $f(z_0)=z_0^\alpha$.
4. אם $\frac{p}{q}=\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, f ענף של $z^{\frac{p}{q}}$ בתחום Ω , אז $(f(z))^q=z^p$ עבור $z\in\Omega$.

אם $\alpha=\frac{1}{q}$ עבור $q\in\mathbb{N}$ אז f פשוטה.

הוכחה:

(1) אם $L(z)$ ענף אנליטי של $\log z$ אזי קיים $k\in\mathbb{Z}$

כך ש- $L(z)=\log|z|+i\operatorname{Arg}z+i2\pi k$ לכן

$$e^{L(z)} = e^{\log|z|+i\operatorname{Arg}z+2\pi i k} = z$$

L פשוטה כי אם $L(z_1)=L(z_2)$ אזי

$$z_1=e^{L(z_1)}=e^{L(z_2)}=z_2$$

(2) נגדיר $L(z)=\log z_0+\int_{z_0}^{z}\frac{dw}{w}$

לאורך איזשהי מסילה בתחום פשוט קשר Ω מ-z_0

ל-z אזי הראינו ש-L הולומורפית; $L(z)$

ענף אנליטי של $\log z$ עבור $z\in\Omega$.

(3) נובע מ-(2): $f(z)=e^{\alpha L(z)}$ כאשר L

ענף של $\log$ ב-Ω (שקיים לפי (2)) כך ש-

$L(z_0)=\log_r z_0$; $z_0^\alpha=e^{\alpha\log_r z_0}$

(4) אם $\alpha=\frac{p}{q}$; f - ענף של z^α, אזי

$$(f(z))^q=\left(e^{\frac{p}{q}\log z}\right)^q=\left(e^{\log z}\right)^p=z^p$$

אם $\alpha=\frac{1}{q}$ ואם $f(z_1)=f(z_2)$ אזי

$$z_1=(f(z_1))^q=(f(z_2))^q=z_2$$

☺

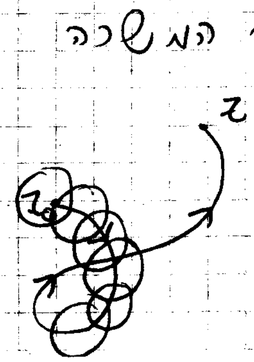
מושג כללי של המשכה אנליטית

המשכה אנליטית לאורך מסילה:

תהי f - f_0 פונקציה הולומורפית בסביבה של נקודה

z_0; γ - מסילה מ-z_0 ל-z. נאמר שנתונה המשכה

אנליטית של פונקציה f לאורך מסילה



γ אם נתון מספר סופי של כדורים

$B_0,\dots,B_p$ ופונקציות $f_0,\dots,f_p$ כך ש-

f_j הולומורפית ב- B_j , $\bar{B}_j \subseteq U$

$\varnothing \neq B_j \cap B_{j+1}$ ו- $f_j = f_{j+1}$ בחיתוך $B_j \cap B_{j+1}$.

נשים לב שאם המסילה לא פשוטה אז בנקודות החיתוך
שלה יכולים להיות כמה ערכים להמשכה האנליטית
בתלות ברכיב שבו אנחנו נמצאים.

כמו כן, אם ניקח מסילה קרובה ל-γ יתקבל אותו ערך
ל-z בהמשכה האנליטית - אם המסילה עוברת בתוך
אותם רכיבים. ברור שאפשר אז להסתפק רק של מסילות
פוליגונליות וכן אפשר לקחת את הקודקודים שלהן להיות
רציונליים. אז כדי לדעת את כל הערכים של ההמשכה
האנליטית ב-z מספיק לבחון מספר בן מניה של מסילות
כי לכל מסילה אפשר להתקרב עם מסילה עם קודקודים
רציונליים שנותנת אותו ערך ל-z.

<u>דוגמה:</u> ב-$z_0=1$ $f_0=\log z$ סביב z. $0\notin\gamma$.
$\int_\gamma \frac{dw}{w} = \log_\gamma z$.

מ-z_0 ל-z

<u>הערה:</u> התוצאה $f(z)$ לא משתנה אם מחליפים מסילה γ
במסילה γ' הקרובה ל-γ. בפרט, ניתן להתבונן רק בקווים
פוליגונליים עם קודקודים בנקודות רציונליות. לכן התוצאות
$f(z)$ שייכות לקבוצה בת מניה.

פונקציה אנליטית המוגדרת ע"י הנקודה f_0 סביב z_0 היא
פונקציה שמקבלת ב-z את אוסף התוצאות של
ההמשכות האנליטיות של f_0 על כל המסילות γ מ-z_0.

<u>משפט המונודרומיה:</u>

G תחום פשוט קשר. f_0 מוגדרת והולומורפית בסביבה
של $z_0\in G$. נניח שקיימת המשכה אנליטית של f_0 לאורך
כל מסילה ב-G מ-z_0 לכל נקודה $z\in G$. אז קיימת
פונקציה הולומורפית f ב-G כך ש- $f=f_0$ סמוך z_0.

עיקרון של חסימות במידה שווה

משפט: Ω תחום, $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות הולומורפיות ב-Ω. נניח שהיא חסומה במידה שווה, כלומר קיים M רק ש- $|f_n(z)| \le M$ לכל n ולכל z.
אזי קיימת תת סדרה של $\{f_n\}$ שמתכנסת ב-Ω לפונקציה הולומורפית במידה שווה על כל קומפקט.

הוכחה:

שלב 1 נוכיח ש- $\{f_n\}$ רציפה במידה אחידה (equicontinuous) על כל קבוצה קומפקטית $K \subseteq \Omega$, כלומר
לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ רק שלכל $z_1, z_2 \in K$ אם $|z_1 - z_2| < \delta$ אז $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$ לכל n.
נבחר $\rho > 0$ רק ש- $B(z,\rho) \subset \Omega$ לכל $z \in K$.
נגדיר $K_\rho = \bigcup_{z \in K} \overline{B}(z, \frac{\rho}{2})$
K_ρ קומפקטית (כי היא סגורה וחסומה). ניקח $z_1, z_2 \in K$ רק ש- $|z_1 - z_2| < \frac{\rho}{4}$. אז $z_2 \in B(z_1, \frac{\rho}{2}) \subseteq B(z,\rho) \subseteq \Omega$. לכן

$$|f_n(z_2) - f_n(z_1)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_1| = \frac{\rho}{2}} \left(\frac{f_n(z)}{z - z_2} - \frac{f_n(z)}{z - z_1} \right) dz \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_1| = \frac{\rho}{2}} f_n(z) \frac{z_2 - z_1}{(z-z_2)(z-z_1)} dz \right| \le$$

$$\le \frac{M}{2\pi} |z_1 - z_2| \frac{1}{\frac{\rho}{4} \cdot \frac{\rho}{2}} \cdot 2\pi \cdot \frac{\rho}{2} = C |z_1 - z_2|$$

כאשר $C = \frac{4M}{\rho}$

לכן, ל- $\varepsilon > 0$ ניקח $\delta = \min\{\frac{\rho}{4}, \frac{\varepsilon}{C}\}$

אז אם $z_1, z_2 \in K$; $|z_1 - z_2| < \delta$ אז
לכל n $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$

* מראן נשתמש מהולומורפיות ואחר כך נשתמש מהוכחת משפט Arzela - Ascoli.

<u>שלב 2</u> תהי $\{w_1, w_2, \ldots, w_k, \ldots\}$ סדרה של נקודות ב-Ω הצפופה ב-Ω. נבצע את התהליך האלכסוני של קנטור.

$\{f_n(w_1)\}$ חסומה ולכן קיימת תת סדרה $\{f_{n,1}\} \subseteq \{f_n\}$ כך ש-$\{f_{n,1}(w_1)\}$ מתכנסת.

$\{f_{n,1}(w_2)\}$ חסומה ולכן קיימת תת סדרה $\{f_{n,2}\} \subseteq \{f_{n,1}\}$ כך ש-$\{f_{n,2}(w_j)\}$ מתכנסת עבור $j=1,2$ וכך נמשיך.

$\{f_{n,k-1}(w_k)\}$ חסומה ולכן קיימת תת סדרה $\{f_{n,k}\} \subseteq \{f_{n,k-1}\}$ כך ש-$\{f_{n,k}(w_j)\}$ מתכנסת ל-$j=1,2,\ldots,k$.

נקח את סדרה $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$. היא מתכנסת בכל w_k. כי $\{f_{n,k}\} \supseteq \ldots \supseteq \{f_{n,n-1}\} \supseteq \{f_{n,n}\}$. נוכיח ש-$\{f_{n,n}\}$ מתכנסת במ"ש בכל קבוצה קומפקטית $K \subseteq \Omega$.

לפי שלב 1, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $z_1, z_2 \in K$ לכל n אם $|z_1 - z_2| < \delta$ אז $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (*)

נכסה את הקבוצה הקומפקטית K ע"י מספר סופי של כדורים $B_1, \ldots, B_p$ עם רדיוס $\frac{\delta}{2}$. בכל כדור B_j נבחר נקודה $z_j \in \{w_1, w_2, \ldots, w_k, \ldots\}$ (יש כזו כי היא צפופה).

קיים N כך שעבור כל $n, m > N$

$$|f_{n,n}(z_j) - f_{m,m}(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (**) \quad j = 1, \ldots, p$$

כעת, לכל $z \in K$ קיים $z_j \in B_j$; $z \in B_j$

$$|f_{n,n}(z) - f_{m,m}(z)| \le |f_{n,n}(z) - f_{n,n}(z_j)| + |f_{n,n}(z_j) - f_{m,m}(z_j)| + |f_{m,m}(z_j) - f_{m,m}(z)| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{(**)} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

לפי (*)

לכן $\{f_{n,n}(z)\}$ סדרת קושי לכל $z \in K$ ולכן מתכנסת ל-$f(z)$. $|f_{n,n}(z) - f_{m,m}(z)| < \varepsilon$. נשאיף את m לאינסוף ונקבל $|f_{n,n}(z) - f(z)| \le \varepsilon$ לכל $z \in K$ ולכל $n > N$.

זאת התכנסות במ"ש על K. f הולומורפית כי היא גבול של הולומורפיות שמתכנסות במ"ש על כל קומפקט.

(44) 26.03.08
ארונבור

משפט ההעתקה של רימן

הוכחה של קיום

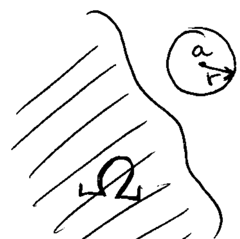
Ω תחום פשוט קשר ב- $\mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ ו- $z_0 \in \Omega$. צריך להוכיח קיום של פונקציה f הולומורפית ב-Ω כך ש-

(1) $f : \Omega \to \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ העתקה חח"ע ועל.

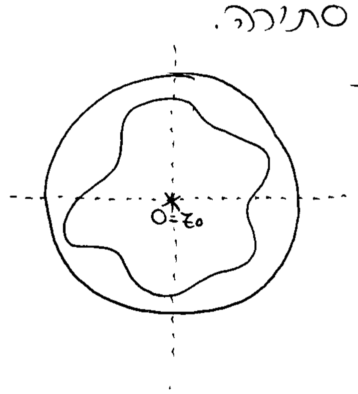
(2) $f(z_0) = 0$ ו- $f'(z_0) > 0$. (הדרישה הזו חשובה רק ליחידות)

שלב I ניתן להניח ש- $z_0 = 0$ ו- $\mathbb{D} \supseteq \Omega$. צריך להראות שקיימת העתקה פשוטה $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ כך ש- $\varphi(z_0) = 0$ ואז אפשר להחליף את Ω ב- $\varphi(\Omega)$.

- מקרה א - כאשר Ω תחום חסום אז ניקח $\varphi(z) = k(z - z_0)$ כאשר k מספיק קטן. - זה פשוט מזיז את Ω להיות סביב 0 ואז מכווץ אותו.
- מקרה ב - כאשר Ω לא חסום אבל קיים כדור $B(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ נבחר $M(z) = \frac{1}{z-a}$. אזי M פשוטה ו- נמצא מכך ש-$M(\Omega)$ תחום פשוט קשר חסום, כלומר חזרנו למקרה (א). (הוא חסום כי הוא מחמיץ סביבה של ∞ שהיא $M(B)$).



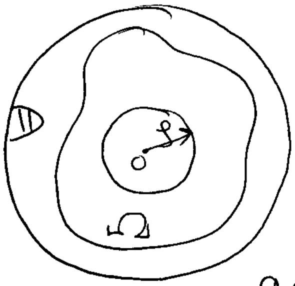
- מקרה ג - $\Omega \neq \mathbb{C}$ אבל Ω^c גדולה לפחות משתי נקודות $a, b \in \mathbb{C}$, כי אחרת $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\text{נקודה}\}$ אינו פשוט קשר. קודם כל, ניקח $K(z) = \frac{z-a}{z-b}$. אזי $\Omega_1 = K(\Omega)$ תחום פשוט קשר ב- $\mathbb{C}$ (כי $K(b) = \infty \notin \Omega_1$) ו- $K(a) = 0 \notin \Omega_1$.
נגדיר $\varphi = q \circ K$ כאשר $q(z) = \sqrt{z}$ ענף של $\sqrt{\ }$ בתחום פשוט קשר Ω_1 שלא מכיל את 0. φ פשוטה ונראה שהתחום $q(\Omega_1)$ מחמיץ כדור בחוץ, כלומר חזרנו למקרה (ב). מספיק לראות שאם $c \in q(\Omega_1)$ אזי $-c \notin q(\Omega_1)$ - ומשום שיש כדור בפנים נקבל שיש כדור בחוץ. ואכן, נניח בשלילה שיש c כך ש- $c = \sqrt{z_1}$ ו- $-c = \sqrt{z_2}$ $\Leftarrow$ $z_1 = c^2 = (-c)^2 = z_2$ וזו סתירה.
כמובן $z_1 \neq z_2$



שלב II $\mathbb{D} \supseteq \Omega$ ו- $z_0 = 0$. הפונקציה המבוקשת היא פתרון של בעיית קיצון: נתבונן במשפחה $\mathcal{M}$ של כל הפונקציות הפשוטות f ב- Ω כך ש- $f : \Omega \to \mathbb{D}$, $f(0) = 0$ ו- $f'(0) > 0$.

תכונות של $\mathcal{M}$:

① $\mathcal{M}$ לא ריקה כי היא מכילה פונקציות מהצורה $f_a(z) = az$
עבור $0 < a \le 1$.



② $\infty > \alpha = \sup\{f'(0) : f \in \mathcal{M}\}$
קיים $\rho > 0$ כך ש- $\{|z| < \rho\} \subseteq \Omega$ ולכן לכל
$f \in \mathcal{M}$ היא $f : \{|z| < \rho\} \longrightarrow \{|z| < 1\}$
ו- $f(0) = 0$ ולכן הפונקציה $g(z) = f(\rho z)$ היא
הולומורפית ב- $\mathbb{D}$, $|g(z)| < 1$ לכל $z \in \mathbb{D}$ ו- $g(0) = 0$.
$\Leftarrow$ לפי הלמה של שוורץ $\rho|f'(0)| = |g'(0)| \le 1$
$\Leftarrow$ $|f'(0)| \le \frac{1}{\rho}$ $\Leftarrow$ $\alpha \le \frac{1}{\rho} < \infty$.

③ לפי (2) קיימת סדרה $\{f_n\}$ של פונקציות מ- $\mathcal{M}$ כך ש-
$f_n'(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. המשפחה $\{f_n\}$ היא חסומה במידה שווה, שהרי
$|f_n(z)| \le 1$ לכל $z \in \Omega$ ולכל $n \in \mathbb{N}$. לפי עיקרון החסימות במ"ש,
קיימת תת-סדרה שנסמן גם אותה ב- $\{f_n\}$ כך ש- $f_n \longrightarrow f_*$
במ"ש על קבוצות קומפקטיות ב-Ω ו- f_* הולומורפית ב-Ω.
נראה ש- $f_* \in \mathcal{M}$. מתקיים $f_*'(0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(0) = \alpha$ ו- $1 \le \alpha$ כי -
$f_a \in \mathcal{M}$ לכל $0 < a \le 1$. המסקנה היא ש- f_* אינה קבועה.
ברור ש- $f_* : \Omega \to \mathbb{D}$. נותר לבדוק ש- f_* פשוטה. וזה נובע כי f_* היא
גבול במ"ש של פונקציות פשוטות.

(45) 1.04.08
ארורבות

המשך הוכחת המשפט:

$\Omega \subseteq \mathbb{D}$ תחום פשוט קשר רק ש- $0\in\Omega$. נסמן

$$\mathcal{M} = \{f:\Omega\to\mathbb{D} \;;\; f(0)=0,\ f'(0)>0,\ f \text{ פשוטה}\}$$

תכונות של המשפחה הזו:

(א) $\{z\mapsto az\}\subseteq \mathcal{M}$ עבור $0<a\le 1$

(ב) $\alpha=\sup\{f'(0): f\in\mathcal{M}\}$, $1\le\alpha<\infty$

(ג) קיימת סדרה $\{f_n\}\subseteq\mathcal{M}$ רק ש- $f_n'(0)\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha$

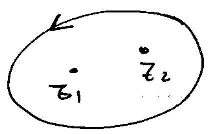
לפי עיקרון התמונות במידה שווה ניתן להניח ש- $\{f_n\}$ מתכנסת ל- f_*
במידה שווה על קבוצות קומפקטיות ב- Ω. בפרט $f_*'(0)\longleftarrow f_n'(0)\longrightarrow \alpha\neq 0$
לכן $f_*\neq const$. $f_*\in\mathcal{M}$: נותר לבדוק ש-

(1) $|f_*(z)|<1$ לכל $z\in\Omega$

(2) f_* פשוטה.

ואכן - ברור ש- $|f_*(z)|\le1$. מצד שני, f_* לא קבועה ולכן לפי משפט ההעתקה הפתוחה $|f_*(z)|<1$.

כמו כן, אם f_* לא פשוטה אז יש $z_1\neq z_2\in\Omega$ רק ש- $f_*(z_1)=f_*(z_2)=a$
ניקח מסילה γ שמקיפה את z_1 ואת z_2 ואז



$$2\le \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_*'(z)dz}{f_*(z)-a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f_n'(z)dz}{f_n(z)-a}\le 1$$

כי f_n פשוטות

וזו סתירה.

שלב III f_* היא הפונקציה הנדרשת. כלומר $f_*(\Omega)=\mathbb{D}$.

נניח בשלילה ש- $E=f_*(\Omega)\subsetneq\mathbb{D}$. לכן קיימת נקודה $a\in\mathbb{D}$ וגם $a\in\partial E$.
$0\in E$. נבנה פונקציה $H:E\to\mathbb{D}$ פשוטה רק ש- $H(0)=0,\ H'(0)>1$.
אז $F=H\circ f_*\in\mathcal{M}$ אבל $\alpha<F'(0)=H'(0)\cdot f_*'(0)$ בסתירה.
אז נותר למצוא H כזו. נגדיר $H=M_1\circ g\circ M_0$ כאשר:

M_0 - פונקציית מביוס של $\mathbb{D}$ על $\mathbb{D}$ רק ש- $M_0(a)=0$, כלומר,
$$M_0(z)=\frac{z-a}{1-\bar a z}$$

g - $g(z)=\sqrt{z}$ ענף של $\sqrt{\ }$ בתחום פשוט קשר $E_1=M_0(E)$.
g זו קיימת כי $0\in\partial E_1$. g פשוטה

M_1 - פונקציית מביוס של $\mathbb{D}$ על $\mathbb{D}$ רק ש- $M_1(g(M_0(0)))=0$. כלומר
$M_1(z)=\lambda\frac{z-a_1}{1-\bar a_1 z}$ כאשר $|\lambda|=1$; $a_1=g(M_0(0))$

נראה ש- H זו מקיימת את התכונות הדרושות. $H:E\to\mathbb{D}$ פשוטה כי היא
הרכבה של פשוטות. ברור גם מההגדרה של H ש- $H(0)=0$. ובוחרים λ
רק ש- $|\lambda|=1$ ו- $H'(0)>0$. צריך להראות ש- $H'(0)>1$. ע"י חישוב
אפשר לראות ש- $H'(0)=\frac{1+|a|}{2\sqrt{|a|}}>1$. אבל אפשר גם להוכיח את זה

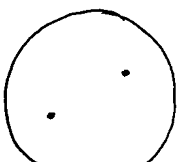
על סמך הלמה של שוורץ. נתבונן בפונקציה $G(z)=M_0^{-1}((M_1^{-1}(z))^2)$
זו פונקציה הולומורפית ב- $\mathbb{D}$ ו- $G=H^{-1}$ בתחום $0\in H(E)$
מצד שני, $G:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ ו- $G(0)=0$ ו- G לא לינארית. לכן, לפי
הלמה של שוורץ $|G'(0)|<1$ וכעת $H'(0)=\frac{1}{G'(0)}>1$
ובזאת סיימנו את הוכחת המשפט!! ☺

מסקנה מעניינת של המשפט הזה היא שכל תחום פשוט קשר הוא הומאומורפי לעיגול היחידה והשפה של תחום פשוט קשר היא קשירה בספרה של רימן.

מטריקה היפרבולית (במישור היפרבולי)

רוצים להגדיר מטריקה (מיוחדת) בעיגול היחידה. נסמנה ρ_H.
קודם כל, נגדיר דיפרנציאל של המטריקה

$$d\rho_H(z)=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$$



$\mathbb{D}$

לכל מסילה γ ב- $\mathbb{D}$ בעלת אורך האורך ההיפרבולי של γ הוא:

$$l_H(\gamma)=\int_\gamma d\rho_H(z)=\int_\gamma\frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

בפרט, אם γ גזירה ברציפות למקוטעין עם פרמטריזציה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{D}$
חלקה אזי $l_H(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|/(1+|\gamma(t)|)^2\,dt$
כעת נגדיר את המרחק ההיפרבולי $\rho_H(a,b)$ לכל $z_1,z_2\in\mathbb{D}$:

$$\rho_H(z_1,z_2)=\inf_{\substack{\gamma:[0,1]\to\mathbb{D}\\ \gamma(0)=z_1\\ \gamma(1)=z_2}} l_H(\gamma)$$

אם האינפימום מתקבל על איזו מסילה היא נקראת ישר היפרבולי בין z_1 ו- z_2.

מבחן - כנראה משהו כזה:
חלק I - 30 נק' 2 שאלות חובה
חלק II - 3/4 שאלות - 60 נק'
חלק III - שאלה אחת קצת קשה יותר
ממה שהבנתי לא יהיה הוכחת משפטים.

טענה 1 (התכונה האופיינית של מטריקה היפרבולית)
המטריקה ההיפרבולית היא אינווריאנטית תחת העתקות מביוס של $\mathbb{D}$ על $\mathbb{D}$.
למשל, אם $\mathbb{D}\xrightarrow{\text{על}}\mathbb{D}$: w מביוס אז לכל מסילה γ ב- $\mathbb{D}$ $l_H(\gamma)=l_H(w(\gamma))$

הוכחה: מספיק להוכיח ש- $\frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}$ כי אז

$$\int_\gamma d\rho_H = \int_{\omega\circ\gamma} d\rho_H = \int_\gamma \frac{|\omega'(z)||dz|}{1-|\omega(z)|^2}$$

ול-ω כזאת יש נוסחה $\omega(z)=\lambda\frac{z-a}{1-\bar a z}$. אז נחשב:

$$\omega'(z) = \lambda\frac{(1-\bar a z)+\bar a(z-a)}{(1-\bar a z)^2} = \lambda\frac{1-|a|^2}{(1-\bar a z)^2}$$

$$1-|\omega(z)|^2 = 1-\omega(z)\cdot\overline{\omega(z)} = 1-\lambda\bar\lambda\cdot\frac{z-a}{1-\bar a z}\cdot\frac{\bar z-\bar a}{1-a\bar z} =$$
$$= \frac{1-\cancel{\bar a z}-\cancel{a\bar z}+|a|^2|z|^2-|z|^2+\cancel{\bar a z}+\cancel{a\bar z}-|a|^2}{|1-\bar a z|^2} =$$
$$= \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar a z|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} = \frac{\cancel{1-|a|^2}}{\cancel{|1-\bar a z|^2}}\cdot\frac{\cancel{|1-\bar a z|^2}}{(1-|z|^2)\cancel{(1-|a|^2)}} = \frac{1}{1-|z|^2}$$

טענה 2: המרחק ההיפרבולי בין נקודות 0 ו- $x\in(0,1)$ הוא

$$\rho_H(0,x) = \frac12\ln\frac{1+x}{1-x}$$

והישר ההיפרבולי בין 0 ל-x הוא הקטע $[0,x]$.

מסקנה: עכשיו אפשר לדעת מה קורה עם כל שתי נקודות כלשהן. מהיות שתי נקודות a,b נשלח אותן ל-0 ו- $x\in(0,1)$ בהתאמה ע"י העתקת מביוס ובגלל שהמרחק נשמר הרי זה הכל...

הוכחה בקצרה: עבור כל מסילה γ מ-0 ל-x מתקיים

$$l_H(\gamma) = \int_\gamma\frac{|dz|}{1-|z|^2} \ge \int_\gamma\frac{dp}{1-p^2} = \int_0^x\frac{dp}{1-p^2} = \frac12\ln\frac{1+x}{1-x}$$

אם γ חלקה

$$\int_0^1\frac{|\gamma'(t)|\,dt}{1-|\gamma(t)|^2} \ge \int_0^1\frac{p'(t)\,dt}{1-(p(t))^2} = \frac12\ln\frac{1+p(t)}{1-p(t)}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac12\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$\gamma(t)=p(t)+iq(t)$$
$$\gamma(0)=0=p(0)$$
$$\gamma(1)=x=p(1)$$

השוויון מתקיים אמ"מ $q(t)\equiv 0$, כלומר $\gamma=[0,x]$.

מסקנה 1: הישר ההיפרבולי בין נקודות z_1 ו- z_2 ב- $\mathbb D$ כלשהן הוא קיים, ויחיד והוא הקטע של המעגל שעובר דרך z_1 ו- z_2 וניצב למעגל היחידה $\partial\mathbb D$.

הוכחה: הישר הוא $M^{-1}([0,x])$ כאשר $M:\mathbb D\to\mathbb D$ כך ש- $M(z_1)=0$, $0<M(z_2)=x$.

ובנוסף:

$$\rho_H(z_1,z_2) = \frac12\ln\frac{1+\frac{|z_1-z_2|}{|1-\bar z_1\cdot z_2|}}{1-\frac{|z_1-z_2|}{|1-\bar z_1 z_2|}}$$

מטלה 2:

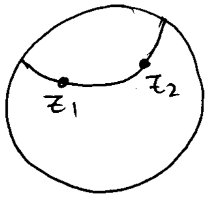
(א) $\rho_H(z_1,z) \longrightarrow \infty$ כאשר $z \longrightarrow \partial\mathbb{D}$

(ב) הראו שהמרחב $(\mathbb{D}, \rho_H)$ הוא שלם.

47 2.4.08

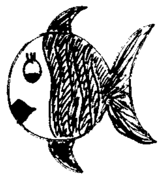
מרוכבות

<u>מסקנה 3</u>: דרך כל שתי נקודות ב-$\mathbb{D}$ עובר ישר היפרבולי אחד ויחיד: המעגל דרך נקודות אלה שניצב ל-$\partial\mathbb{D}$. בפרט, כל שני ישרים היפרבוליים נחתכים בנקודה אחת לכל היותר.



<u>מסקנה 4</u>: דרך נקודה $a\in\mathbb{D}$ שלא נמצאת על ישר היפרבולי l עוברים אינסוף ישרים היפרבוליים שלא נחתכים עם l.

* זה אומר שהאקסיומה החמישית של הגאומטריה האוקלידית לא מתקיימת בגאומטריה ההיפרבולית של $\mathbb{D}$.

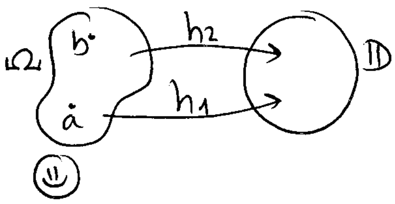


<u>מטריקה היפרבולית בתחום פשוט קשר $\Omega\neq\mathbb{C}$</u>

<u>הגדרה/טענה</u>: המרחק ההיפרבולי $\rho_{H,\Omega}$ בין a ו-b ב-Ω מוגדר באופן הבא:
תהי $h:\Omega\xrightarrow{\text{על}}\mathbb{D}$ העתקה פשוטה. אזי $\rho_{H,\Omega}(a,b)=\rho_H(h(a),h(b))$
הדיפרנציאל של המטריקה החדשה מוגדר ע"י $d\rho_{H,\Omega}(z)=\frac{|h'(z)|}{1-|h(z)|^2}|dz|$ (מטעמה זו נובע מהגדרת המרחק)
הטענה היא שהמרחק $\rho_{H,\Omega}(a,b)$ לא תלוי בבחירה של ההעתקה h.

<u>הוכחה</u>: אם $h_1,h_2:\Omega\to\mathbb{D}$ שתי העתקות רימן אזי $M=h_2\circ h_1^{-1}:\mathbb{D}\xrightarrow{\text{על}}\mathbb{D}$ פשוטה ולכן M מוביוס. לכן M שומרת מרחק היפרבולי ב-$\mathbb{D}$. לכן,

$$\rho_H(h_1(a),h_2(b))=\rho_H(h_2(a),h_2(b))$$



<u>הערה</u>: אי אפשר להגדיר מטריקה היפרבולית על המישור $\mathbb{C}$ כולו.

<u>עיקרון המטריקה ההיפרבולית</u>

יהיו Ω_1,Ω_2 שני תחומים פשוטי קשר השונים מ-$\mathbb{C}$. תהי $f:\Omega_1\to\Omega_2$ הולומורפית. אזי היא מכווצת מטריקות היפרבוליות ב-Ω_1 ו-Ω_2, כלומר, עבור $a,b\in\Omega_1$ $\rho_{H,\Omega_2}(f(a),f(b))\le\rho_{H,\Omega_1}(a,b)$. אם קיים שוויון) עבור שתי נקודות כלשהן $a\neq b$ אזי f פשוטה ועל. (הוכחה בעזרת הלמה של שוורץ)

<u>דוגמה</u>: $\Omega_1\subsetneq\Omega_2$ ו-$f=id$. אם $a,b\in\Omega_1$ אז $\rho_{H,\Omega_2}(a,b)<\rho_{H,\Omega_1}(a,b)$
האי-שוויון חזק כי f איננה על!

פונקציות הרמוניות

Ω תחום. פונקציה $u:\Omega\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית ב-Ω אם u גזירה ברציפות פעמיים ומתקיימת משוואת לפלס $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

טענה 1: אם f הולומורפית ב-Ω אזי $\mathrm{Re}f$ פונקציה הרמונית.
הוכחה: f גזירה אינסוף פעמים ולכן בפרט גזירה פעמיים ברציפות.
ממשוואות קושי-רימן $u_x=v_y,\ u_y=-v_x \Rightarrow u_{xx}=v_{yx}=-v_{xy}=-u_{yy}$ ☺

טענה 2: אם Ω פשוטת קשר ו-u הרמונית ב-Ω, אזי קיימת פונקציה הולומורפית f כך ש- $u=\mathrm{Re}f$.
הוכחה: נגדיר $\omega(z)=u_x-iu_y$. ω הולומורפית כי $u_x, -u_y$ דיפרנציאביליות ו- $(u_x)_x=-u_{yy}=(-u_y)_y$, $(u_x)_y=u_{xy}=-(-u_y)_x$, כלומר מתקיימות משוואות קושי-רימן. התחום Ω פשוט קשר ולכן קיימת פונקציה f הולומורפית כך ש- $f'=\omega$. נראה ש- $u=\mathrm{Re}f$. אם $f=U+iV$ אזי $U_x=u_x$ ו- $U_y=-V_x=-(-u_y)=u_y \Rightarrow u=U+const$ סיימנו. ☺

ועכשיו אפשר להסיק מזה כל מיני דברים על פונקציות הרמוניות בשימוש בפונקציות אנליטיות:
- $u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta$
- עיקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות
- יחידות: פונקציות הרמוניות שמתלכדות בסביבה מתלכדות בכל התחום.

אינטגרל Poisson: $u(re^{i\psi})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(Re^{i\varphi})P_{r,R}(\varphi-\psi)$
כאשר P גרעין פואסון
$$P_{r,R}(\theta)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}$$

לא למבחן: הוכחה של משפט ההעתקה של רימן
הוכחה של משפט רימן הכללי לפי מסילות הומוטופיות
פונקציות הרמוניות
גיאומטריה היפרבולית

כן למבחן: החומר מהתרגולים בזמן השביתה