① 22.10.07
פ. מרוכבות

המרצה: עדי סמט sameti@math.huji.ac.il

יש אתר לקורס ב- OWL יש שם תרגיל וגם ארוך אבל קל.

מספרים מרוכבים

<u>הגדרה:</u> שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}=\{(x,y) : x,y\in\mathbb{R}\}$

עם פעולות חיבור וכפל שמוגדרות ע"י:

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,\ y+v)$$
$$(x,y)\cdot(u,v)=(xu-yv,\ xv+yv)$$

סימונים: $1=(1,0)$ $i=(0,1)$ וכל מספר מרוכב הוא מהצורה $z=x+iy$.

עבור $z=x+iy\in\mathbb{C}$ סימונים: $\operatorname{Re} z = x$

$\operatorname{Im} z = y$

$\bar{z}=x-iy$ הצמוד המרוכב

<u>טענה:</u> לכל שני מספרים מרוכבים $z,w\in\mathbb{C}$

1) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

2) $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

3) $z=\bar{z}$ אמ"מ $z\in\mathbb{R}$ (הכוונה פה לשיכון הטבעי של $\mathbb{R}$ ב-$\mathbb{C}$)

<u>הערה:</u> $z\mapsto\bar{z}$ הוא אוטומורפיזם של $\mathbb{C}$.

<u>נובע:</u> $\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2}$ $\operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2}$

נשים ♡ ש-$\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ מכבדים חיבור אבל לא כפל (למה).

עוד סימונים: עבור $z=x+iy\in\mathbb{C}$ מסמנים:

$|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$ הערך המוחלט של z

בזיהוי של $\mathbb{C}$ עם $\mathbb{R}^2$ זו פשוט הנורמה האוקלידית, ומכאן נובע גם כמה תכונות.

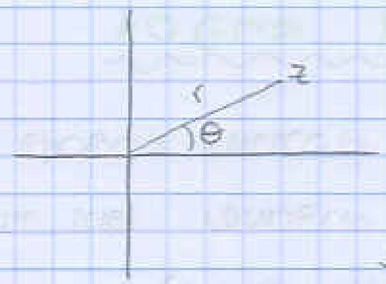
טענה: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ מספרים מרוכבים

1) $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$

2) אי-שוויון המשולש $|z+w|\le|z|+|w|$

טענה: לכל $z\in\mathbb{C}$ קיימים $r\ge0$; $\theta\in\mathbb{R}$ כך ש- $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

כמו כן, מתקיים $r=|z|$



ומסמנים $\arg z=\theta$

(זה לא מדויק כי את θ אפשר להזיז בכפולות של 2π אז לפעמים מסמנים $\arg z=\theta+2\pi k$; ו- $\operatorname{Arg} z$ הוא אותו $\arg z$ שמקיים $0\le\arg z<2\pi$).

הצגת z כ- $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ נקראת הצגה פולרית. הכפל בהצגה פולרית הוא מאוד פשוט:

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1\cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

זה נובע מזהויות טריגונומטריות

גיאומטרית המשמעות היא שמסובבים ומנפחים שזה נחמד כי זה הרחבה של כפל בממשיים ששם אפשר לנפח רק בשני כיוונים.

החיבור בכתיב פולרי הוא מסובך.

לסיכום: $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$

$$\arg(z\cdot w)=\arg z+\arg w$$

<u>נוסחת דה-מואבר:</u> אם $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ אז

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

<u>דוגמה:</u> נגדיר שורשי היחידה - השורשים של הפולינום x^n-1.

לפי הנוסחה $z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$ עבור $k=0,\dots,n-1$ מקיימים $z_k^n=1$. קל להראות שהקבוצה $\{z_0,\dots,z_{n-1}\}$ מכילה n איברים שונים ומאחר שלפולינום יש לכל היותר n שורשים אלה הם כל השורשים של הפולינום x^n-1, כלומר הוא מתפרק לגורמים לינאריים שונים מעל $\mathbb{C}$

<u>הצגה של ההופכי:</u>

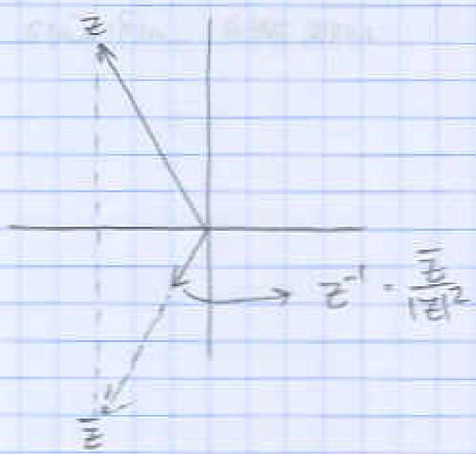
לדוגמא, $(2+3i)^{-1} = \frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{-3}{13}i$

באופן כללי, בשביל למצוא את ההופכי כופלים בצמוד

אם $|z|=1$ אז $z^{-1} = \bar{z}$ שהרי $z\bar{z} = |z|^2 = 1$

בכתיב קוטבי, אם $r \neq 0$ אז

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) =$$
$$= r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$$



<u>תרגיל:</u> הוכיחו שאם $z,w \in \mathbb{C}$ כך ש- $|z|,|w| < 1$ אז

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}\cdot w}\right| < 1$$

אם נקבע את z וניתן ל- w לרוץ בחופשיות אז הטענה אומרת שהפונקציה הזאת מעתיקה את עיגול היחידה לעיגול היחידה.

<u>פתרון:</u> נחשב:

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}\cdot w}\right|^2 = \frac{(z-w)(\bar{z}-\bar{w})}{(1-\bar{z}w)(1-z\bar{w})} = \frac{z\bar{z}+w\bar{w}-z\bar{w}-\bar{z}w}{1+z\bar{z}w\bar{w}-z\bar{w}-\bar{z}w} =$$

כיוון פה הצמוד! $\bar{\bar{z}} = z$.

$$= \frac{|z|^2+|w|^2-2Re(z\bar{w})}{1+|z|^2|w|^2-2Re(z\bar{w})} \quad (*)$$

המכנה חיובי כי הוא שווה ל- $|1-\bar{z}w|^2$. לכן $1 > (*)$ אמ"מ

אמ"מ $|z|^2+|w|^2-\cancel{2Re(z\bar{w})} < 1+|z|^2|w|^2-\cancel{2Re(z\bar{w})}$

אמ"מ $|z|^2(1-|w|^2)+|w|^2-1 < 0$

$(1-|w|^2)(|z|^2-1) < 0$ וזה נכון לפי ההנחה ☺

יש שיכון נחמד של $\mathbb{C}$ בתוך $M_2(\mathbb{R})$:

$$z = x+iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = A \qquad \text{ואז}$$

$$|z|^2 \longrightarrow \det A$$

$$\bar{z} \longrightarrow A^t$$

$$2\operatorname{Re} z \longrightarrow \operatorname{tr} A$$

מה שחשוב הוא שזה שיכון של חוגים. הפ' ב- $\mathbb{C}$ הן כמו הפ' של המטריצות המתאימות.

③ 29.10.07
ת.מרוכבות

פונקציות מרוכבות

<u>הגדרה:</u> פונקציה מרוכבת היא $f: \Omega \to \mathbb{C}$ כאשר $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום, כלומר קבוצה פתוחה קשירה ולא ריקה.
הטופולוגיה של $\mathbb{C}$ היא הטופולוגיה המושרית מהמטריקה המושרית מהנורמה $|z| \mapsto z$ וזה שקול לטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}^2$.
כל f פונקציה מרוכבת ניתן לכתוב $f = u + iv$ כאשר $u, v: \Omega \to \mathbb{R}$ (אלה פונקציות ממשיות כי הטווח שלהן $\mathbb{R}$).
f רציפה אמ"מ היא רציפה כפונקציה מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^2$ וזה לפי אינפי 3 אמ"מ u, v רציפות.

<u>משוואות קושי-רימן</u> (ק"ר)

נניח $f = u + iv$ ונניח u, v גזירות. אז המשוואות הבאות נקראות משוואות קושי-רימן:

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

פונקציות שמקיימות את המשוואות האלה הן פונקציות טובות (גזירות) והמטרה שלנו היא למצוא כמה שיותר פונקציות טובות.

<u>הערה:</u> משוואות ק"ר הן $\mathbb{R}$-לינאריות - אם f_1, f_2 מקיימות אותן אז גם $\alpha f_1 + \beta f_2$ מקיימת אותן כאשר $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. זה ברור מהלינאריות של הנגזרת.

<u>טענה:</u> משוואות ק"ר הן $\mathbb{C}$-לינאריות
<u>הוכחה:</u> מספיק לבדוק שאם f מקיימת ק"ר אז גם if מקיימת ק"ר. נניח $f = u + iv$. אז $g = if = -v + iu$
אז $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial Re(g)}{\partial y}$ ובאופן דומה גם המשוואה השנייה מתקיימת

☺

תרגול: להראות ש- $f(z)=z^2+3z$ מקיים מק"ר

פיתרון: נציג את f כ $f=u+iv$ $\quad u,v:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$

$$f(z)=f(x+iy)=(x^2-y^2+2xyi)+3(x+iy)=$$
$$=\underbrace{(x^2-y^2+3x)}_{u}+\underbrace{(2xy+3y)}_{v}i$$

נגזור:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x+3$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2y$$

משהו מפתה (מוסו למשל): אם f מקיימת מק"ר ואם u,v גזירות פעמיים ברציפות אז u,v הרמוניות. כלומר

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

פונקציות אלמנטריות

1) אם $z=x+iy$ מגדירים $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

ברור שזו פונקציה רציפה כי גם החלק הממשי וגם החלק המדומה רציפים.

תכונות: 1) $|e^z|=e^x$

2) $\arg(e^z)=y$

3) $e^{z+w}=e^z\cdot e^w$ למה?

נסמן $w=x_2+iy_2$ $\quad z=x_1+iy_1$. אז

$$e^z e^w=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)=$$
$$=e^{x_1+x_2}(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i(\cos y_1\sin y_2+\cos y_2\sin y_1))$$
$$=e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))=e^{z+w}$$

4) אם $z=x\in\mathbb{R}$ אז $e^z=e^x$

e^z – האקספוננט ב-$\mathbb{C}$; e^x – האקספוננט ב-$\mathbb{R}$

נשאלת השאלה: למה בחרנו להרחיב את e^x למרוכבים
דווקא ככה? עדיין אין לנו טעם לזה, אבל בהמ"ד נראה
שזו הדרך היחידה שניתן לעשות את זה.

אלגברית: $e: \underset{\text{חיבורית}}{\mathbb{C}} \longrightarrow \underset{\text{כפלית}}{\mathbb{C}^*}$ הומומורפיזם שגרעינו
$\{2\pi n i : n \in \mathbb{Z}\}$

<u>משוואות ק"ר</u>: נבדוק $f(z) = e^z$

$$u = e^x \cos y \qquad v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Leftarrow$ האקספוננט היא פונקציה הרמונית.

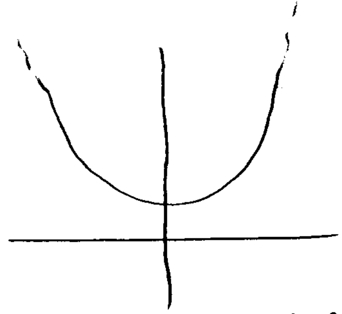
(2)
$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\[2ex] \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$ עבור $z \in \mathbb{C}$.

נשים ♡ שאם $z = x \in \mathbb{R}$ אז $\cos z = \cos x$
$\sin z = \sin x$

כלומר ההגדרה החדשה מסכימה עם ההגדרה הישנה על $\mathbb{R}$.
אבל הן מאוד שונות מהפונקציות הטריגונומטריות הרגילות.
אם $x \in \mathbb{R}$ אז

$$\cos(ix) = \frac{e^{iix} + e^{-iix}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x)$$

זו פונקציה לא חסומה וכמובן לא מחזורית.



קל לבדוק ש $\sin z, \cos z$ מקיימות מק"ר.
- "הזהויות הטריגונומטריות הרגילות" נכונות גם עבור $\sin, \cos$ החדשים.

הפונקציות ההפכיות:

1) e^z לא חח"ע - $e^0 = e^{2\pi i} = 1$ ובאופן כללי $e^z = e^{z+(2\pi n)i}$

אבל אפשר למצוא פונקציה הופכית מקומית

אם $w = e^z$ אז $|w| = e^x$ ו- $\arg w = y$

$\Rightarrow$ $z = \log|w| + i\arg w$

נשים לב שיש אינסוף אפשרויות לבחירות $\arg w$.

לכל בחירה נקבל מקור שונה ל- w.

בכל אופן, מכאן ניתן להגדיר $\log w = \underbrace{\log|w|}_{\log\ \text{ממשי רגיל}} + i\arg w$

כאשר צריך לבחור "ענף" של arg. וכך אפשר להגדיר את ההפכי באופן מקומי.

באילו תחומים ניתן להגדיר הפכי גלובלי?

על $\mathbb{C}\setminus\{(x,0) : x\le 0\}$ ניתן להגדיר

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$$

כאשר $-\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi$

ברור שזו פונקציה הפוכה לאקספוננט, אבל מה שמיוחד בה הוא שהיא רציפה והיא גם מקיימת את ק"ר, אבל לא בטוח שזה קל להוכיח...

5

5.11.07

ת. מרוכבות

הגדרנו את האקספוננט והלוגריתם אז הדבר הבא שמתבקש הוא להגדיר חזקה כללי.

<u>חזקה</u> עבור $a,b\in\mathbb{C}$ נגדיר $a^b=e^{b\log a}$. מכיוון ש-$\log a$ היא ביטוי רב ערכי גם a^b ביטוי רב-ערכי.

<u>טענה:</u> עבור $n\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{C}$ a^n מוגדר היטב ומתלכד עם ההגדרה הרגילה.

<u>הוכחה:</u> לפי ההגדרה של החזקה מתקיים $a^n=e^{n\log a}$.
נסמן את אחד מערכי $\log a$ כ- $\log_0 a$. אז $a^n=e^{n(\log_0 a+2\pi i k)}$ לכל $k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow a^n=e^{n\log_0 a}\cdot \cancel{e^{n\cdot 2\pi i k}}=e^{n\log_0 a}=$$
$$=e^{n(\log|a|+i\arg_0 a)}=$$
$$=|a|^n(\cos(n\arg_0 a)+i\sin(n\arg_0 a))=a^n$$

זה דה-מואבר מחזיר אותנו להגדרת החזקה הרגילה.

☺

<u>טענה:</u> עבור $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ (כאשר מצומצם) ו- $a\in\mathbb{C}$ $a^{p/q}$ מקבל לכל היותר q ערכים.

<u>הוכחה:</u>
$$a^{p/q}=e^{\frac{p}{q}\log a}=e^{\frac{p}{q}(\log_0 a+2\pi n i)}=$$
$$=\left\{e^{\frac{p}{q}\log_0 a},\ e^{\frac{p}{q}\log_0 a}\cdot e^{\frac{2\pi p i}{q}},\ \dots,\ e^{\frac{p}{q}\log_0 a}\cdot e^{\frac{2(q-1)\pi p i}{q}}\right\}$$

וזו קבוצה בת q איברים לכל היותר.

☺

<u>טענה</u> אם $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ו- $a\in\mathbb{C}$ אז ל- a^x יש אינסוף ערכים.

<u>הוכחה:</u> לכל $n\in\mathbb{Z}$ $a^x=e^{x\log a}=e^{x(\log_0 a+2\pi n i)}$

אז יש לכל היותר $\aleph_0$ ערכים. אבל נראה שהם באמת שונים: נניח

$$e^{x(\log_0 a+2\pi n i)}=e^{x(\log_0 a+2\pi m i)}$$

$\Leftarrow$ $e^{2\pi nxi}=e^{2\pi mxi}$ $\Leftarrow$ קיים $k\in\mathbb{Z}$ רק ש- $2\pi nxi=2\pi mxi+2\pi ki$

$\Leftarrow$ $x(n-m)=k$. מאחר ש- x אירציונלי נובע ש- $n-m=0$

$\Leftarrow$ $n=m$ $\Leftarrow$ ס"ה החלקות שונות!

הערה: e^z זו לא חלקה שנותנת את הפונקציה המסויימת שהגדרנו בשבוע שעבר.

דוגמא: נחשב את $(-1)^i$. לפי ההגדרה

$$(-1)^i=e^{i\log(-1)}=e^{i(\log|-1|+i\pi+i2\pi n)}=$$
$$=e^{i\log 1-\pi-2\pi n}=e^{-\pi-2\pi n}$$

דוגמא: נחשב את $(-1)^{\sqrt2}$ זה משהו שבטח לא ירצו לעשות באינפי כי שם הגדרנו חזקה רק עבור בסיס חיובי.

$$(-1)^{\sqrt2}=e^{\sqrt2\log(-1)}=e^{\sqrt2(i\pi+i2\pi n)}=$$
$$=e^{i(\sqrt2\pi+2\sqrt2\pi n)}=e^{i\sqrt2\pi}\cdot\underbrace{e^{2\sqrt2\pi ni}}$$

כיוון שמדובר בכפולה אירציונלית של π הנקודות הללו יושבות על מעגל היחידה אבל חוזרות אף פעם לא מצטופפות במקום מסוים על המעגל. זאת קבוצה צפופה של נקודות על מעגל היחידה.

תמונת פונקציה

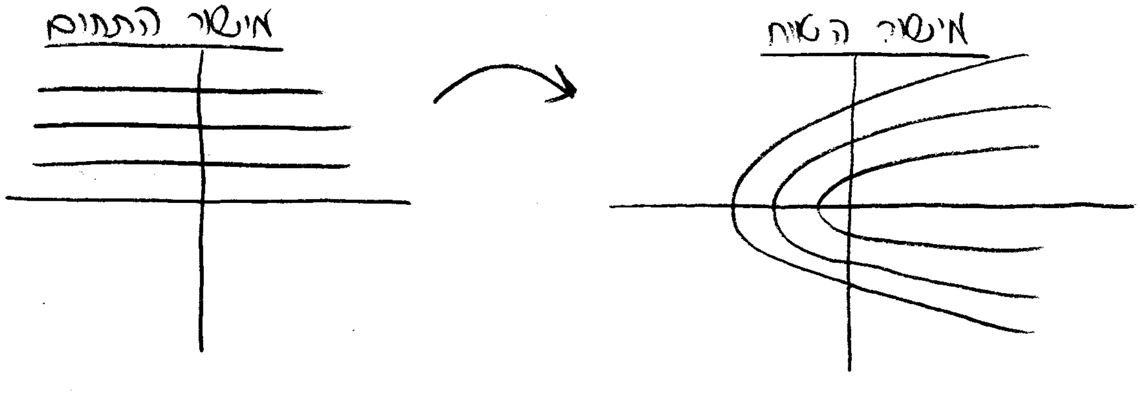
איך אפשר לצייר פונקציה מרוכבת?

שיטת שני המישורים: ניקח $f(z)=z^2$ ונבדוק מהן תמונות ישרים מקבילים לצירים.

1) ישר $\{t+iM : t\in\mathbb{R}\}$ עובר ל- $\underbrace{(t^2-M^2)}_{x(t)}+\underbrace{2tM}_{y(t)}i$

מתקיים $4M^2x-y^2=-4M^4$

$\Leftarrow$ $x=\frac{y^2}{4M^2}-M$ וזו פרבולה שוכבת.

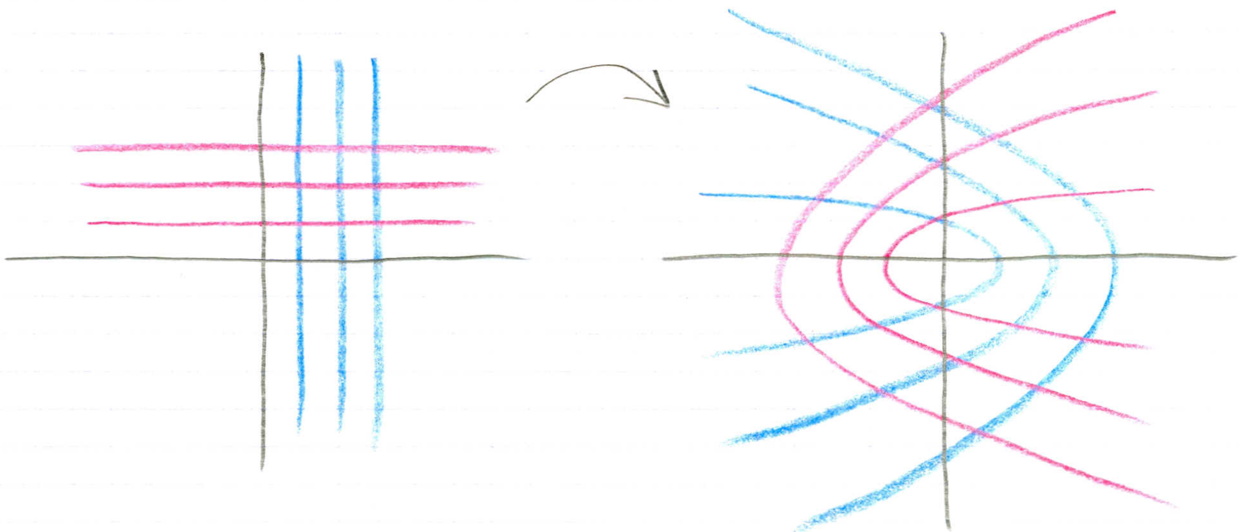


⑥

2) ישר $\{M+it \,:\, t\in\mathbb{R}\}$ עובר ל- $\underbrace{M^2-t^2}+\underbrace{2Mt}i$

מתקיים $4M^2x+y^2=4M^4$ ⇐ $x=-\frac{y^2}{4M^2}+M^2$

⇐ סה"כ התמונה של הפונקציה היא רשתות:



יש כאן פלא. הישרים בתחום מאונכים ומסתבר שגם הפרבולות בנקודות החיתוך שלהן מאונכות (למרות הציור העקום)

נבדוק שהפרבולות נחתכות בנק' $(0,2)$ $M=1$.

① $x=\frac{y^2}{4}-1$ ② $x=-\frac{y^2}{4}+1$

נגזור:

① $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{2y}{4}\Big|_{y=2}=1$ ② $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{2y}{4}\Big|_{y=2}=-1$

⇐ אכן בנקודה זו הפרבולות מאונכות.

הגדרה: יהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום, ותהי $f:\Omega\to\mathbb{R}^2$.
f נקראת קונפורמית בנקודה $x\in\Omega$ אם f "שומרת זויות" ב-x. כלומר לכל שתי מסילות גזירות γ_1,γ_2 המקיימות $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=x$

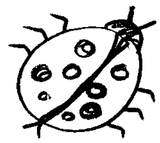
$$\left\langle \frac{\gamma_1'(0)}{\|\gamma_1'(0)\|}, \frac{\gamma_2'(0)}{\|\gamma_2'(0)\|} \right\rangle = \left\langle \frac{(f\circ\gamma_1)'(0)}{\|(f\circ\gamma_1)'(0)\|}, \frac{(f\circ\gamma_2)'(0)}{\|(f\circ\gamma_2)'(0)\|} \right\rangle$$

הגדרה: עבור z_1,z_2,z_3,z_4 ב-$\mathbb{C}$ מגדירים את היחס הכפול (cross-ratio) כ-

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

④ 14.11.07
ת׳ ארכבות

העתקות מביוס (Möbius)



<u>הגדרה:</u> $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ הספרה של רימן

מה הטופולוגיה של $\hat{\mathbb{C}}$?

- הסביבות של נקודה ב- $\mathbb{C}\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ הן כמו ב- $\mathbb{C}$
- סביבה של ∞ היא קבוצה $U\subseteq\mathbb{C}$ כך ש- $\infty\in U$ ו- $\hat{\mathbb{C}}\setminus U\subseteq\mathbb{C}$ קומפקטית.

(מי שלמד טופולוגיה- זו קומפקטיפיקציה חד נקודתית של $\mathbb{C}$)

<u>טענה:</u> אם $z_n\to\infty$ אז $|z_n|\to\infty$

<u>הוכחה:</u> יהי $R>0$. ניקח $U=\hat{\mathbb{C}}\setminus\overline{B(0,R)}$.
זו סביבת ∞. לפי ההנחה קיים N כך שלכל $N<n$
$z_n\in U$. $\Leftarrow$ $|z_n|>R$.

<u>הגדרה:</u> העתקת מביוס (= העתקה לינארית שברית)
זו העתקה $T:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ מהצורה $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$
עבור $a,b,c,d\in\mathbb{C}$; $ad-bc\neq 0$.

! $T(-\frac{d}{c})=\infty$; $T(\infty)=\frac{a}{c}$

<u>טענה:</u> העתקת מביוס היא רציפה

<u>הוכחה:</u> ב- $z\neq\infty$ ו- $z\neq -\frac{d}{c}$ זה ברור כי זו מנה של רציפות. ואילו בשתי הנקודות שנותרו הערך הוגדר לפי הגבול, כלומר אם $a\in\{-\frac{d}{c},\infty\}$ אז $\lim_{x\to a}T(x)=T(a)$

<u>טענה:</u>
1) הרכבה של העתקות מביוס היא העתקת מביוס
2) לכל העתקת מביוס יש העתקת מביוס שהיא הפכית לה
3) כל העתקת מביוס היא חח"ע ועל

<u>רעיון ההוכחה:</u> אם להעתקת מביוס $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ נתאים את המטריצה $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ולהעתקה $S(z)=\frac{ez+f}{gz+h}$ נתאים את

המטריצה $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ אז ל $T\circ S$ תואמת $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

מכאן נובע ש- T^{-1} תתאים ל- $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. האמת היא שלא חייבות את המקדם $\frac{1}{ad-bc}$ כי אם כל הסקלרים מוכפלים באותו קבוע זה לא משנה את ההעתקה.

תזכורת: עבור $z_1,\dots,z_4$ היחס הכפול המוגדר ע"י

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

מרציפות ניתן להגדיר את היחס הכפול כאשר אחד ה-z-ים הם ∞: $[\infty,z_2,z_3,z_4]=\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}$

<u>טענה</u>: העתקת מביוס שומרת את היחס הכפול, כלומר אם T העתקת מביוס אז

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=[Tz_1,Tz_2,Tz_3,Tz_4]$$

<u>הוכחה</u>: נסמן את תמונות ה-z ב-w. אז

$$w-w'=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{az'+b}{cz'+d}=\frac{(z-z')(ad-bc)}{(cz+d)(cz'+d)}$$

כאן אנחנו רואים את החשיבות של $ad-bc\neq 0$. אחרת T הייתה קבועה

$$\frac{w_1-w_2}{w_1-w_4}=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{\cancel{(cz_1+d)}(cz_4+d)}{\cancel{(cz_1+d)}(cz_3+d)}$$

$$\frac{w_1-w_3}{w_1-w_4}\Big/\frac{w_2-w_3}{w_2-w_4}=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\Big/\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

$$[w_1,w_2,w_3,w_4]=[z_1,z_2,z_3,z_4]$$

זה נכון למקרה שכל ה-z-ים וכל ה-w-ים שונים מ-∞. מרציפות היחס הכפול וה העתקות מביוס נובע שהשוויון נכון גם כאשר יש ∞ מאחת הנקודות.

<u>אבחנה</u>: אם $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ שונות אז $z \mapsto [z, z_1, z_2, z_3]$ זו העתקת מביוס שמעתיקה:

$$z_1 \mapsto 1$$
$$z_2 \mapsto 0$$
$$z_3 \mapsto \infty$$

נקרא להעתקה הזאת T.

ניקח w_1, w_2, w_3 שונות. אז יש העתקת מביוס S שמעתיקה

$$w_1 \mapsto 1$$
$$w_2 \mapsto 0$$
$$w_3 \mapsto \infty$$

נקבל העתקת מביוס $T \circ S^{-1}$ שמעתיקה $z_1 \mapsto w_1,\ z_2 \mapsto z_2,\ z_3 \mapsto w_3$ ו-
לתכונה זו קוראים 3-טרנזיטיביות.

<u>טענה</u>: העתקות מביוס פועלות על $\hat{\mathbb{C}}$ בצורה 3-טרנזיטיבית.

<u>טענה</u>: ההעתקה $T \circ S^{-1}$ הנ"ל היא ההעתקת מביוס <u>היחידה</u> שמעתיקה את $z_i \mapsto w_i$ ל- $1 \leq i \leq 3$.

כלומר, כדי לבדוק זהות של העתקות מביוס מספיק לבדוק את הזהות שלהן על 3 נקודות שונות.

<u>רעיון ההוכחה</u>: לעשות רדוקציה למקרה ש-

$$z_1 = w_1 = 1$$
$$z_2 = w_2 = 0$$
$$z_3 = w_3 = \infty$$

ואז להראות שאם T מעתיקה את 1 ל- 1, את 0 ל-0 ואת ∞ ל- ∞ אז $T = id$.

מה לגבי 4 נקודות? היינו רוצים להעתיק רק:

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{matrix}$$

ל-3 נקודות זה מתח אפשרי. השאלה היא מה קורה עם z_4 ו- w_4! אז אפשר להתאים אותן אמ"מ

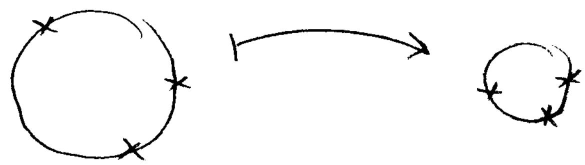
$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

מסקנה: העתקת מביוס מעתיקה מעגל או ישר למעגל או ישר

הערה: לעיתים מכנים "מעגל או ישר" בשם מעגל מוכלל.

למה? כי בעצם כשמוסיפים את הנקודה ∞ אז זה אותו דבר...

העתקת מעגל למעגל:



יש העתקת מביוס שמעתיקה בין שני המעגלים האלה.

למה? 3 נקודות קובעות גם מעגל וגם העתקת מביוס.

אם ניקח 3 נקודות במעגל הגדול ונעביר אותן ל-3 נקודות במעגל הקטן. מאחר שמעגל עובר למעגל בהכרח המעגל הגדול עובר למעגל הקטן!

הוכחת המסקנה: תזכורת: ראינו שאפשר לאפיין מעגל מוכלל כקבוצת הנקודות המקיימות $\lambda = \left|\frac{z-z_2}{z-z_3}\right| \quad (*)$

נניח ש-T העתקת מביוס ויש מעגל שנקבע ע"י z_2, z_3 ו-λ כנ"ל. נבחר z_1 שרירותית, נסמן $Tz_i = w_i$ ואז

$$[w, w_1, w_2, w_3] = [z, z_1, z_2, z_3]$$

$$\Rightarrow \left|\frac{w-w_2}{w-w_3}\right| \left|\frac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right| = \left|\frac{z-z_2}{z-z_3}\right| \left|\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right|$$

אם z מקיים את $(*)$ אז w מקיים:

$$\left|\frac{w-w_2}{w-w_3}\right| = \lambda \left|\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right| \Big/ \left|\frac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right|$$

וזו שוב משוואת ישר או מעגל.

(9) 19.11.07

ת׳ מרוכבות

נקודות סימטריות

<u>הגדרה:</u> יהי C מעגל מוכלל. נקודות z,w נקראות סימטריות ביחס ל-C אם קיימת העתקת מביוס המעתיקה את C ל-$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ואת z,w לנקודות צמודות.

<u>דוגמה:</u> נקודות צמודות הן סימטריות ביחס לציר הממשי. (ע"י העתקת הזהות).

<u>טענה:</u> אם C מעגל מוכלל אז לכל $z\in\hat{\mathbb{C}}$ קיימת $w\in\hat{\mathbb{C}}$ יחידה כך ש- z,w סימטריות ביחס ל-C.

<u>הוכחה:</u> נניח $w_1\neq w_2$ סימטריות ל-z ביחס ל-C.

ע"י התבוננות ב- $T\circ S^{-1}$ נקבל העתקת מביוס R שמעתיקה את $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ לעצמו ואיזושהי נקודה u כך ש- $R(\bar{u})\neq\overline{R(u)}$. (נראה שלא יתכן שזה כך).

<u>למה:</u> כל העתקת מביוס שמעתיקה את $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ לעצמו ניתנת להצגה כ- $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ (*).

<u>הוכחה:</u> נניח T העתקה כזו. אז T מעתיקה את $0,1,\infty$ לאיברים ב-$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ומיחידות ההעתקה הרי אנו יודעים שניתן לכתוב אותה כמו ב-(*). ☺

נחזור להוכחת הטענה. מהו מה - כי R העתקת מביוס שמעתיקה את $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ לעצמו נניח $R(z)=\frac{az+b}{cz+d}$

כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ואז $R(\bar z)=\overline{R(z)}$ ולכן
לא ייתכן מה שאמרנו לעיל.

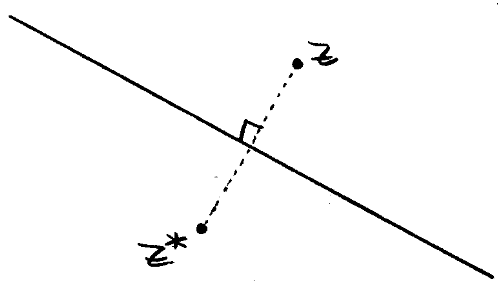
אם C מעגל מוכלל הנקודה הסימטרית ל-z ביחס ל-C
תסומן ב-z^* (כאשר ברור מהו C).

<u>מסקנה:</u> ההעתקה $z\mapsto z^*$ היא רציפה.
<u>הוכחה:</u> קובעים העתקת מביוס T שתיקח את C
ל-$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ואז $z^*=T^{-1}(\overline{T(z)})$.
הרכבה של פונקציות רציפות

<u>מסקנה:</u> אם z,w סימטריות ביחס ל-C ו-T -
העתקת מביוס אז Tz, Tw סימטריות ביחס ל-TC.

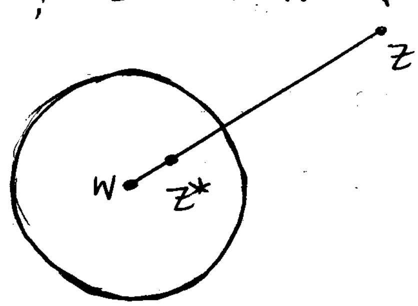
<u>מינוח:</u> להעתקה $z\mapsto z^*$ קוראים שיקוף ביחס ל-C.

<u>שאלות גאומטריות:</u>
(א) כיצד נראה שיקוף ביחס לישר?

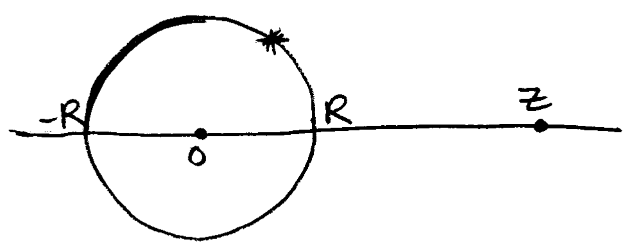


(ב) כיצד נראה שיקוף ביחס למעגל?

<u>טענה:</u> יהי C מעגל ברדיוס R סביב w. אז אם $z\neq w,\infty$
אז z^* נמצאת על הקרן מ-w ל-z ו-$|z-w||z^*-w|=R^2$
וכמו כן, $w^*=\infty$
$\infty^*=w$



<u>הוכחה:</u> ע"י הזזה וסיבוב (בלי ניפוח) נניח בה"כ
ש- $w=0$ ו- $z>0$ (ממשי בפרט)
z, z^* נמצאות משני צידי המעגל (כי התמונה שלהן ביחס
לאיזו העתקת מביוס שמעתיקה את המעגל ל- $\mathbb{R}$ נמצאות
משני צידי הישר הממשי). לכן ניתן להניח בה"כ ש-
$z>R$.



ניקח העתקת
מביוס T ע"י

$R \mapsto 0$

$-R \mapsto \infty$

$* \mapsto 1$

אז T מעתיקה את המעגל ל- $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.
תמונת $\hat{\mathbb{R}}$ תחת T היא מעגל מוכלל שעובר ב-0
וב-∞, כלומר ישר. מאחר שהעתקת מביוס הן קונפורמיות
והמעגל המקורי היה ניצב ל-$\mathbb{R}$ אזי תמונת $\hat{\mathbb{R}}$ ניצבת
ל-$\mathbb{R}$. $\Longrightarrow$ הישר $\hat{\mathbb{R}}$ עובר לציר המדומה. אז
$Tz = w$ כאשר $w \in i\mathbb{R}$ ומכאן $Tz^* = \bar{w} = -w$

$$\Longrightarrow [z, z^*, R, -R] = [w, -w, 0, \infty] =$$

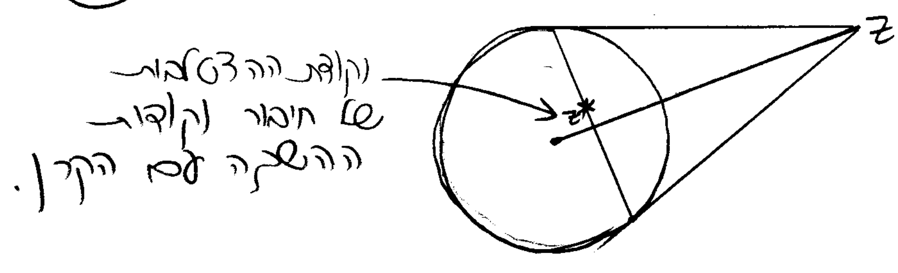
$$= \frac{(w-0)\cancel{(-w-\infty)}}{\cancel{(w-\infty)}(-w-0)} = -\frac{w}{w} = -1$$

$$\Longrightarrow \frac{(z-R)(z^*+R)}{(z+R)(z^*-R)} = -1 \Longrightarrow \left|\frac{(z-R)(z^*+R)}{(z+R)(z^*-R)}\right| = 1$$

בנוסף, מאחר שהיחס הכפול ממשי $z, z^*, R, -R$ על ישר מוכלל
אחד ומאחר ש- $z, R, -R$ על הישר הממשי אז
הן כלן על $\mathbb{R}$. $\Longrightarrow (z-R)(z^*+R) = (z+R)(-z^*+R)$

$\Longrightarrow zz^* = R^2 \Longrightarrow z^* = R^2/z$

☺



גאומטרית אפשר
להוכיח:

(11) 28.11.07
ת. מרוכבות

טורי חזקות

<u>טורים</u>: הטור $\sum a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$ מתכנס אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת וזה אמ"מ $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ ו- $\sum \mathrm{Im}\, a_n$ מתכנסים (כי התכנסות ב- $\mathbb{C}$ שקולה להתכנסות לפי קואורדינטות).
אם הטור $\sum |a_n|$ מתכנס נאמר שהטור מתכנס בהחלט.

<u>טענה</u>: אם מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.
<u>הוכחה</u>: אם $\sum |a_n|$ אז $(|a_1| + \dots + |a_n|)_n$ מתכנסת ולכן קושי. $\Leftarrow$ הסדרה $(a_1 + \dots + a_n)_n$ היא גם קושי. מאחר ש- $\mathbb{C}$ שלם זו סדרה מתכנסת.
ש

<u>מכפלת טורים</u>: אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים בהחלט אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ מתכנס בהחלט ל- $(\sum a_n)(\sum b_n)$

<u>טורי פונקציות</u>: אם $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ סדרת פונקציות וקיימים $M_n > 0$ כך ש- $|f_n(z)| < M_n$ לכל $z \in \Omega$ ו- $\sum M_n < \infty$ אז הטור $\sum f_n$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה על Ω (זה מבחן M של ויירשטראס)

<u>טור חזקות</u> הוא טור פונקציות מהצורה $\sum a_n z^n$ כאשר $a_n \in \mathbb{C}$ (או $\sum a_n (z-z_0)^n$)

<u>משפט אבל</u>: אם $\sum a_n z^n$ טור חזקות והטור מתכנס בנקודה z_0, ו- $0 < r < |z_0|$ אז הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה על $\{z : |z| \le r\}$

הוכחה: נשים לב שמתקיים $\sum a_n z^n = \sum a_n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \cdot z_0^n$

הטור $\sum a_n z_0^n$ מתכנס $\Leftarrow$ $|a_n z_0^n| < M$ $\Leftarrow$

$|a_n z^n| \le M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ ועבור $|z| \le r$ $|a_n z^n| \le M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$

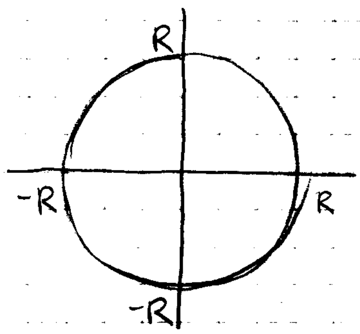
הטור $\sum M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ מתכנס כי זה טור הנדסי ! $\frac{r}{|z_0|} < 1$

ולכן לפי מבחן M הטור $\sum a_n z^n$ מתכנס בהחלט

ובמידה שווה עבור $|z| \le r$. ☺

מסקנה: נסמן ב- E את קבוצת נקודות ההתכנסות של $\sum a_n z^n$ וניקח $R = \sup\{|z| : z \in E\}$

אז E מכילה עיגול פתוח ברדיוס R סביב 0 ומוכלת בעיגול סגור ברדיוס R.



מה קורה על השפה? איפה יש התכנסות ואיפה אין? האם יש קשר בין נק' התכנסות לבין סדרות נקודות שמתכנסות אליהן? יש הרבה שאלות מעניינות...

מסקנה: טור החזקות מתכנס לפונקציה רציפה בפנים של עיגול ההתכנסות

הוכחה: ניקח $|z_0| < R$. ניקח $|z_0| < r < R$. מכיוון שהטור מתכנס במ"ש על $\{|z| \le r\}$ הוא מתכנס לפונקציה רציפה בתחום זה ובפרט בנקודה z_0. ☺

משפט קושי-הדמר: $R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$

(כאשר $0^{-1} = \infty$; $\infty^{-1} = 0$).

מה קורה על השפה?

דוגמאות:

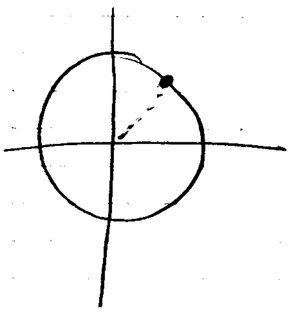
(1) $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$ רדיוס ההתכנסות $R=1$ והוא

מתבדר על כל השפה (למרות ש- $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{1-z}$
כאשר $|z_0|=1$; $z_0\neq 1$ קיים).

(2) $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ רדיוס ההתכנסות הוא 1 ומתכנס על כל השפה.

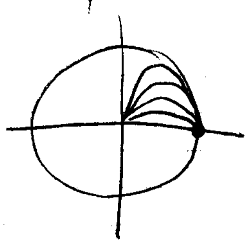
<u>משפט אבל:</u> אם $\sum a_n z^n$ טור עם רדיוס התכנסות R והטור מתכנס בנקודה R אז

$$\lim_{\substack{z\to R\\ 0<z<R}} \sum a_n z^n = \sum a_n R^n$$



נשים לב שבגלל שתמיד אפשר לכפול ב- $e^{i\theta}$ שזה פשוט סיבוב המשפט גם נכון לכל נקודה על השפה של עיגול ההתכנסות והשאיפה אליה היא רדיאלית.
זה <u>לא</u> נכון כאשר $z\to R$ מכיוונים אחרים.

<u>דוגמה:</u> הטור $\sum a_n x^n = e^{\frac{1}{1-x}}$ מתבדר ב- 1 ואם כשמתקרבים ל- 1 מהכיוון הממשי הסכומים מתבדרים אבל כשמתקרבים ל- 1 אסימפטוטית מהכיוון המאונך אפשר לקבל כל גבול.



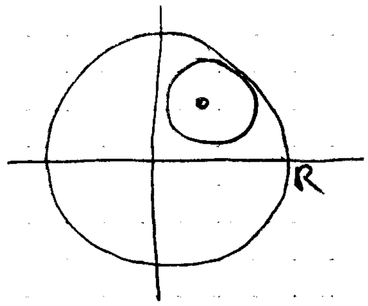
<u>למה:</u> a_n, b_n סדרות סופיות. נסמן
$A_n = a_1 + \dots + a_n$
אז
$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_{n+1}-b_n)$$
(זה כמו אינטגרציה דיסקרטית בחלקים $\int f'g = fg| - \int fg'$
ונגזרת זה כמו הפרש)

<u>הוכחת משפט אבל:</u> מראים שהטור הוא קושי במידה שווה על הקטע $[0,R]$ ומכאן שהוא מתכנס למשהו רציף ומתקבלת הטענה. מה"כ $R=1$

$$\left|\sum_{n=N}^{M} a_n z^n\right| \le |A_m||z^m| - \sum_{n=N}^{M-1} |A_n||(z^{n+1}-z^n)|$$

אפשר לדאוג ש- $A_m, A_n < \varepsilon$ ומכאן שההתכנסות היא במשותף את ק"ש-וויירש יוצא משהו טלסקופי וזה מתבדר.
נשים לב שההוכחה נפגעת אם ההתכנסות לא דרך $\mathbb{R}$.

<u>משפט</u>: אם $f(z) = \sum a_n z^n$ טור עם רדיוס התכנסות $R>0$. אם $|z_0|<R$ אז אפשר להציג טור חזקות סביב z_0 שרדיוס ההתכנסות שלו לפחות $R-|z_0|$ ובעיגול ברדיוס זה הוא מתכנס ל- f.



<u>הוכחה</u>:

$$\sum a_n z^n = \sum a_n (z - z_0 + z_0)^n =$$

$$= \sum_n a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z-z_0)^k z_0^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} z_0^{n-k}}_{b_k}$$

b_k לא תלוי ב- z

בתרגול נסיים את ההוכחה.

נגזרת מרוכבת

<u>פונקציה של קטע</u>: $f: I \to \mathbb{C}$ כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע.
הנגזרת של f בנקודה t_0 היא

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

כי פשוט נגזרת של פונקציה מ-I ל-$\mathbb{R}^2$ הגבול קיים אמ"מ הגבול של החלק הממשי קיים והגבול של החלק המדומה קיים, כלומר אמ"מ קיימות הנגזרות של החלק הממשי והחלק המדומה של f.

<u>דוגמה</u>: $f(t) = e^{wt}$ עבור $w \in \mathbb{C}$ קבוע.
פונקציה מקטע ל-$\mathbb{C}$ כי ממשית מסילה והנגזרת שלה היא הוקטור המשיק למסילה.
במקרה שלנו היינו רוצים ש- $f'(t) = we^{wt}$
אבל זה לא מובן מאליו. צריך לבדוק!
נסמן $w = u + iv$ ואז

$$f(t) = e^{ut+ivt} = e^{ut}(\cos vt + i\sin vt)$$

עכשיו נגזור את החלק הממשי והמדומה כפונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ ונקבל

$$f'(t) = ue^{ut}(\cos vt + i\sin vt) + e^{ut}(-v\sin vt + iv\cos vt) =$$
$$= (u+iv)e^{ut}(\cos vt + i\sin vt) =$$
$$= (u+iv)e^{ut+ivt} = we^{wt}$$

יופי!

<u>נגזרת של פונקציה מרוכבת</u>: $f: \Omega \to \mathbb{C}$ כאשר $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ תחום.
f תיקרא גזירה בנקודה z_0 אם קיים הגבול

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

<u>הערה</u>: משפטי הגזירה הבסיסיים - אריתמטיקה והרכבה תקפים גם במקרה המרוכב! ($\Rightarrow$ הפולינומים גזירים, כי $z' = 1$).

במקרה הממשי (נגזרת זה שיפוע ושיפוע זה) מעשה קירוב מסדר ראשון. במרוכבים קורה משהו דומה...

משוואות קושי-רימן

תזכורת - נניח ש- $f(z)=u(z)+iv(z)$

משוואות קושי רימן הן $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

משפט:

1. אם f גזירה ב- z_0 אז היא מקיימת את משוואות קושי-רימן ב- z_0.
2. אם u,v מקיימות את משוואות קושי-רימן ב- z_0 והן דיפרנציאביליות אז f גזירה ב- z_0.

מסקנות:

1. e^z , $\sin z$, $\cos z$, פולינומים - כולן גזירות בכל $\mathbb{C}$.
2. אם f גזירה אז $f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$
זה נובע מההגדרה ע"י לקיחת גבול בכיוון הממשי, כלומר $z=z_0+t$ כאשר $t\in\mathbb{R}$

דוגמה לפונקציה שמקיימת את משוואות קושי רימן בנקודה אבל אינה גזירה שם: $f(z)=\sqrt{|z^2-\bar{z}^2|}$ $z_0=0$.

למה f מקיימת את משוואות קושי-רימן?

נשים לב שעל שני הצירים f קבועה ושווה ל-0. לכן

בנקודה 0 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

אבל f אינה גזירה ב-0 כי: (נסמן) $z=x+iy$

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{\sqrt{|4xy|}}{x+iy}=\frac{\sqrt{|4\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta|}}{\cancel{r}(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

אבל הביטוי הזה לא תלוי ב- r ולכן אין גבול כאשר $z\to0$

(כי רק ש- $z\to0$ זה אומר שצריך רק ש- $r\to0$ ובכלל לא משנה מהו θ)

מסילות

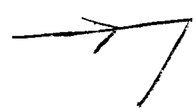
מסילה זו מחלקת שקילות של פונקציות רציפות מקטע (סגור) ל- $\mathbb{C}$.
שתי פונקציות $\gamma_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : J \longrightarrow \mathbb{C}$ הן שקולות
אם קיים הומאומורפיזם שומר אוריינטציה $\varphi : I \longrightarrow J$ כך
ש- $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.
הומאומורפיזם שומר אוריינטציה במקרה הזה הוא פשוט פונקציה
מונוטונית עולה - שהקצה השמאלי נשאר שמאלי והימני נשאר ימני.
מסילה נקראת חלקה אם קיימת נציגה במחלקת השקילות שלה
שהיא גזירה ברציפות והנגזרת אינה מתאפסת באף נקודה.

דוגמה:

①  זו מסילה חלקה אך שקיימות פונקציות
שקולות שהן אינן גזירות או שהנגזרת מתאפסת
בנקודה כלשהי.
נניח ש- $f(t) = t$ בקטע $[0,1]$ זו הנציגה החלקה.
אך נאמר ש $g : [0,\frac{3}{4}] \to \mathbb{C}$ שמוגדרת ע"י

$$g(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2t - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \end{cases}$$

היא פרמטריזציה של אותה מסילה אבל היא לא גזירה ב- $\frac{1}{2}$

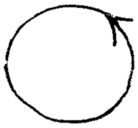
②  לא חלקה!

אינטגרציה על מסילה: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{C}$ מסילה חלקה (γ
נציגה של המחלקה) . f פונקציה מרוכבת רציפה על Ω.
נגדיר

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

זה לא תלוי בבחירת הנציג!

<u>דוגמה</u>



γ - מסילה מעגלית לאורך $|z| = 2$ בכיוון החיובי.

נחשב $\int_\gamma z\,dz$ $\int_\gamma \frac{dz}{z}$

ניקח (לדוג׳) $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\gamma(t) = 2e^{it}$

עכשיו אפשר לחשב:

$$\int_\gamma z\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{2e^{it}}_{f(\gamma(t))} \cdot \underbrace{2ie^{it}}_{\gamma'(t)}\, dt = 4i\int_0^{2\pi} e^{2it}\, dt =$$

מחשבים חלק ממשי בנפרד
וחלק מדומה בנפרד

$$= 4i\int_0^{2\pi} (\cos 2t + i\sin 2t)\, dt = 0$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$$

(15) 28.1.08

ת. מרובה

אינטגרל על מסילות

יהי $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ויש שדה $F=(p,q):\Omega \to \mathbb{R}^2$ רציף

γ מסילה בעלת אורך ב- Ω. אפשר להגדיר אינטגרל של F לאורך γ ורימני:

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_\gamma p\,dx + q\,dy$$

לא חייבים ש- γ תהיה חלקה. מספיק שהיא תהיה בעלת אורך.

נניח ש- $\gamma:[0,T] \to \Omega$ ויהי שיש חלוקה t_i של $[0,T]$

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))}_{S} \qquad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

אפשר לכתוב גם

$$S = \sum p(\gamma(\tau_i))(x(t_i)-x(t_{i-1})) + \sum q(\gamma(\tau_i))(y(t_i)-y(t_{i-1}))$$

אם γ חלקה (למקוטעין) אז

$$\int_\gamma p\,dx + q\,dy = \int_0^T (p(\gamma(t)), q(\gamma(t))) \underset{\text{מכפלה פנימית}}{\cdot} \gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T \left(p(\gamma(t))x'(t) + q(\gamma(t))y'(t)\right) dt$$

<u>הערה</u>: הביטוי $p\,dx + q\,dy$ נקרא דיפרנציאל ולרוב מבחינתנו זה חסר משמעות - סתם סימון (מי שמעניין אותו שילמד גאומטריה דיפרנציאלית)

<u>משפט</u>: האינטגרל $\int_\gamma p\,dx + q\,dy$ תלוי רק בנקודות הקצה של γ אמ"מ $\int_\gamma p\,dx + q\,dy = 0$ לכל γ סגורה אמ"מ קיימת u גזירה על Ω כך ש- $p=\frac{\partial u}{\partial x}, q=\frac{\partial u}{\partial y}$ (u כזו נקראת פוטנציאל)

<u>משפט</u>: אם Ω פשוט קשר ! - p,q גזירות ברציפות אז $F=(p,q)$ משמר אמ"מ $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$

הערה: אם השדה $F=(p,q)$ משמר אז הדיפרנציאל $pdx+qdy$ נקרא מדויק.

כל זה היה ב- $\mathbb{R}^2$. נעבור למישור המרוכב.

מגדירים $\int_\gamma f(z)dz$ ע"י סכומים

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\tau_i))\,(\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1}))$$

אם γ חלקה (למקוטעין) אז

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

מה הקשר של זה לאינטגרלים $\int_\gamma pdx+qdy$?

נכתוב $f=u+iv$ ונסמן $\gamma'=\gamma_x'+i\gamma_y'$. אז

$$\int f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int \big(u(\gamma(t))+iv(\gamma(t))\big)\big(\gamma_x'(t)+i\gamma_y'(t)\big)dt$$

$$= \int\left[u(\gamma(t))\gamma_x'(t)-v(\gamma(t))\gamma_y'(t)\right]dt \; +$$

$$+\; i\int\left[v(\gamma(t))\gamma_x'(t)+u(\gamma(t))\gamma_y'(t)\right]dt =$$

$$= \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma v\,dx+u\,dy$$

לסיכום $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy)$

מאוד מעניין לדעת מתי האינטגרל הזה תלוי רק בנקודות הקצה.

לו ידענו ש- u,v גזירות ברציפות אז ממשוואות קושי-רימן

היינו מקבלים

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

וזה אומר שהשדות (u,v), $(u,-v)$ משמרים מקומית ומגרין ינבע שבכל תחום פשוט קשר השדה משמר.

אחת המטרות של הקורס היא להוכיח את אותו הדבר רק על סמך גזירות f בלי ש- u,v גזירות ברציפות.

האינטגרל $|dz|$

מגדירים את $\int_\gamma f|dz|$ ע"י הסכומים מצורה

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i))\,|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})|$$

כאשר γ גזירה (למקוטעין) אז

$$\int_\gamma f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

תכונות:

1) $\int_\gamma |dz| = \ell(\gamma)$

2) $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f||dz|$

טענה: נסמן $M = \max_{z\in\gamma}|f(z)|$ אז

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M\,\ell(\gamma)$$

הוכחה:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz| \le M\int_\gamma |dz| = M\,\ell(\gamma)$$

(11)

דוגמה:

נוכיח ש- $\lim_{R\to\infty}\left|\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^2}\right| = 0$

הקפה פעם אחת בכיוון החיובי

נמצא חסם על $|f|$ במעגל ברדיוס R. כאשר $|z|=R$ אז

$$|(z-a)|^2 \ge (R-|a|)^2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{(z-a)^2}\right| \le \frac{1}{(R-|a|)^2}$$

⇐ לפי הטענה

$$\left|\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^2}\right| \le \underbrace{\frac{1}{(R-|a|)^2}}_{M}\cdot\underbrace{2\pi R}_{\ell(\gamma)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

(17) 4.2.08
ת' מרוכבות

משפט קושי

<u>משפט</u>: יהי Ω תחום; $f:\Omega\to\mathbb{C}$ הולומורפית ו- γ מסילה פשוטה γ שפה של משולש ב- Ω (המשולש המלא תוך ב- Ω). אז $\int_\gamma f(z)dz=0$

<u>משפט</u>: תהי f הולומורפית בעיגול D. אזי קיימת F הולומורפית על D כך ש- $F'=f$ (F קדומה של f)

<u>מסקנה</u>: בתנאי המשפט הנ"ל אם γ מסילה ב- D $\gamma:[a,b]\to D$ אזי $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$

<u>הערה</u>: מסקנה זו נכונה לכל תחום Ω וכל זוג פונקציות F, f על Ω המקיימות $F'=f$

<u>הערה</u>: בתנאים הנ"ל, אם γ מסילה סגורה אז $\int_\gamma f(z)dz=0$

<u>הקשר בין F לפוטנציאל</u>:

נסמן $f=u+iv$ $\quad F=U+iV$

נזכור ש- $\int f(z)dz = \int(udx-vdy) + i\int(vdx+udy)$

לשדות $(u,-v)$, (v,u) יש פוטנציאל

לפי משוואות קושי רימן $F' = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u+iv$

$\Leftarrow$ $u=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}$, $v=\frac{\partial V}{\partial x}$

כלומר V הוא הפוטנציאל לשדה (v,u).

בדומה מראים ש- U פוטנציאל של $(u,-v)$.

<u>דוגמה</u>: יהי $-1\neq n\in\mathbb{Z}$. לפונקציה $f(z)=z^n$ יש קדומה בתחום $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $F(z)=\frac{1}{n+1}z^{n+1}$

לכן מהאמור לעיל נובע שלכל מסילה $\gamma:[a,b]\to\Omega$

$$\int_\gamma z^n dz = F(\gamma(b))-F(\gamma(a)) = \frac{1}{n+1}\left(\gamma(b)^{n+1}-\gamma(a)^{n+1}\right)$$

ועבור γ סגורה $\int_\gamma z^n dz = 0$

האינדקס

תהא γ מסילה סגורה בתחום נתון. a נקודה ב-נתון שאינה על γ.

מגדירים $i(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$. הוכחנו שזה תמיד מספר שלם

היה תרגיל למצוא נגזרת של $Log z$ בחצי המישור הימני ויצא

$$(Log z)' = \frac{1}{z}$$

תזכורת: $log z = ln|z| + i\arg z$ כאשר $\arg z$ מוגדר עד כדי תוספת של 2π אבל לא מוגדר חד ערכית. לכל בחירה של ארגומנט יוצא פונקציה אחרת. אבל על הנגזרת זה לא משפיע כי זו בסה"כ תוספת של קבוע.

<u>מסקנה:</u> $\gamma:[a,b]\to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\quad \gamma(t)=e^{it}$

נניח ש-γ בתוך חצי המישור הימני. אז

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = Log(\gamma(b)) - Log(\gamma(a)) =$$
$$= ln 1 + i\arg(\gamma(b)) - ln 1 - i\arg(\gamma(a)) =$$
$$= i(\arg\gamma(b) - \arg\gamma(a))$$

הערות לגבי הנגזרת

נניח ש-f גזירה ב-z_0 $\Leftarrow$ מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה

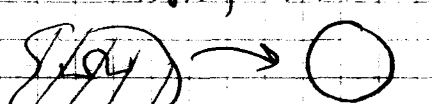
כהעתקה מ-$\mathbb{R}^2$ לעצמו יש לה יעקוביאן $J=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

כמו כן, $J^t J = |J|\cdot I$ זה אומר ש-J כמעט אורתוגונלית - $\frac{J}{\sqrt{|J|}}$ היא אורתוגונלית.

אפשר לראות שזה סיבוב ב-$\arg f'(z)$.

<u>טענה:</u> תהי f הולומורפית ב-נתון ונניח ש-$|f|$ קבוע. אז f קבועה.

f לוקחת את נתון למעגל  ואין שום ניפוח וסיבוב שיכולים לעשות את זה.

<u>הוכחה:</u> נסמן $f=u+iv$. אז $|f|^2=u^2+v^2$ קבוע $\Leftarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial x}v\equiv 0$

וגם $\frac{\partial u}{\partial y}u+\frac{\partial v}{\partial x}v\equiv 0$. אם סוכמים את הריבועים מקבלים

(18)

$$0=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2u^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2v^2+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}uv$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2u^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2v^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}uv=$$

$$=u^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+v^2\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)+$$

$$+\;2uv\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

עכשיו היינו רוצים להגיד שכל אי שווי עם הנגזרות את אפס. אבל זה לא אפשרי כי יכול להיות שיש נקודות שבהן $u=0$ או $v=0$.

(19) 11.02.08

ת' מרוכבות

הומוטופיה

Ω תחום (= קבוצה פתוחה וקשירה (⇔ קשירה מסילתית))

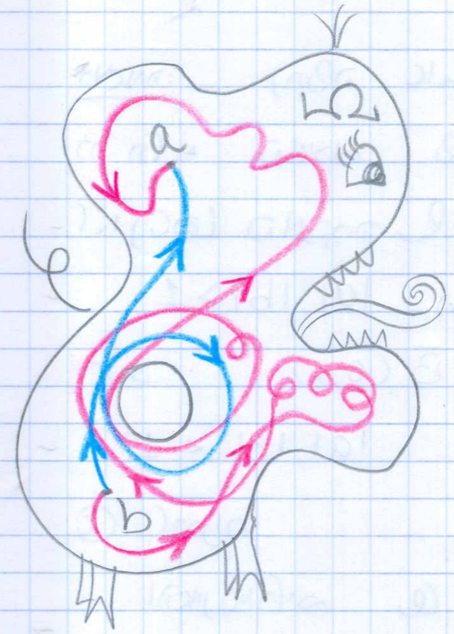
$I=[0,1]$

$\gamma_0,\gamma_1: I\to\Omega$ מסילות (= פונקציות רציפות)

① הומוטופיה עם נקודות קצה קבועות:

אם $\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=a$ $\quad$ $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)=b$

γ_0,γ_1 תיקראנה הומוטופיות אם קיימת פונקציה רציפה $H: I\times I\to\Omega$ המקיימת:



(א) לכל $t\in I$ $\quad H(0,t)=\gamma_0(t)$

$H(1,t)=\gamma_1(t)$

(ב) לכל $s\in I$ $\quad H(s,0)=a$

$H(s,1)=b$

② הומוטופיה של מסילות סגורות:

γ_1,γ_2 תיקראנה הומוטופיות אם קיימת $H: I\times I\to\Omega$ רציפה המקיימת:

(א) לכל $t\in I$ $\quad H(0,t)=\gamma_0(t)$

$H(1,t)=\gamma_1(t)$

(ב) לכל $s\in I$ $\quad H(s,0)=H(s,1)$

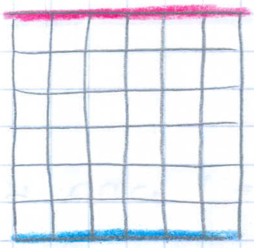
<u>משפט קושי</u>: אם f הולומורפית בתחום Ω, γ_0,γ_1 מסילות בעלות אורך ב-Ω שהן הומוטופיות אז $\int_{\gamma_0} f\,dz=\int_{\gamma_1} f\,dz$

<u>הערה</u>: משפט קושי בעיגול להו מקרה פרטי של משפט קושי.

<u>הערה</u>: בהוכחה בכיתה הייתה הנחה שלכל $s\in I$ המסילה $H(s,\cdot)$ היא בעלת אורך אבל המשפט נכון גם בלי ההנחה הזאת.

<u>רעיון ההוכחה ללא הנחה זו</u>: נחלק את I^2 לריבועים כה קטנים שתמונת כל ריבוע קטן תחת H תוכל בעיגול פתוח המוכל ב-Ω.

עכשיו עושים מין "דחיפה" לאט של המסילה הראשונה לשנייה.



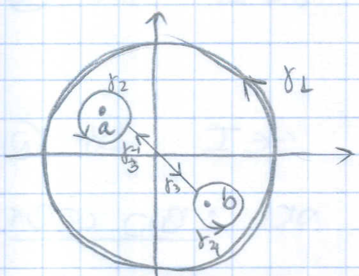
אנחנו נראה שאפשר לעבור המון ריבועים
וכל פעם לשמור את האינטגרל.
כל פעם נעבור קדימה ריבוע קטן אחד ומתוכו
האינטגרל נשמר מהמשפט קושי בעיגול.

<u>נוסחת קושי</u>: אם f הולומורפית בסביבת הכדור הסגור $\bar{B}(a,r)$
ו- $z_0 \in B(a,r)$ אז
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}$$
מה מדהים? זה אומר שפונקציה הולומורפית f נקבעת ב- $\bar{B}(a,r)$
ע"י ערכיה בשפה $\partial B(a,r)$

<u>דוגמה</u>: נחשב את $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$ כאשר $|a|,|b| \neq 1$
זה תלוי במיקום של a,b ביחס למעגל.
- אינטגרל במקרה ש- $|a|<1$, $|b|>1$ (זה דומה לתרגיל שעשינו)
- $|a|,|b|>1$ במקרה זה $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ הולומורפית בסביבה המכילה את $\bar{B}(0,1)$ ולפי משפט קושי האינטגרל הוא 0.
- $|a|,|b|<1$

① ניתוח $\displaystyle\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b}$ כאשר $A,B \in \mathbb{C}$
והאינטגרלים של הפונקציות הללו ידועים: $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$

② להשתמש בהומוטופיה + משפט קושי



יש הומוטופיה $\gamma_1 \sim \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4 * \gamma_3^{-1}$
לכן ממשפט קושי:
$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz + \cancel{\int_{\gamma_3} f\,dz} + \int_{\gamma_4} f\,dz + \cancel{\int_{\gamma_3^{-1}} f\,dz}$$
מתוך עיגול קטן סביב a $\frac{1}{z-b}$ הולומורפית (העיגול אינו מכיל את b)
$\Rightarrow$ מנוסחת קושי:
$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\gamma_2} \frac{1/(z-b)}{z-a}\,dz = 2\pi i \frac{1}{a-b} \\ &\int_{\gamma_4} \frac{1/(z-a)}{z-b}\,dz = 2\pi i \frac{1}{b-a} \end{aligned}\right. \Rightarrow \text{סה"כ } \int_{\gamma_1} f\,dz = 0$$
ובדומה

③ הפונקציה הולומורפית בתחום $\mathbb{C}\setminus\bar{B}(0,1-\varepsilon)$ התחום זה מכיל את $|z|=1$
ו- $|z|=R$ $(R>1)$ הומוטופיות. לכן $\displaystyle\int_{|z|=1} f\,dz = \int_{|z|=R} f\,dz$ ואז
$$0 \leq \left|\int_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz\right| \leq \underbrace{2\pi R}_{\text{אורך המסילה}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(R-1)^2}}_{\text{הערכה של הפונקציה}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$
מההומוטופיה האינטגרל לא תלוי ב- R ולכן שווה ל- 0.

מסקנה: לפונקציה $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ יש קדומה בתחום $\mathbb{C}\setminus\bar{B}(0,1-\varepsilon)$
$F = A\,\mathrm{Log}(z-a) + B\,\mathrm{Log}(z-b)$

(20) 18.02.08
ת' מרוכבות

רמז לשאלה 4: $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$

טורי טיילור

תהי f הולומורפית בתחום Ω ; $z_0 \in \Omega$, $B(z_0,R) \subseteq \Omega$
אזי f ניתנת לפיתוח לטור טיילור סביב z_0 ורדיוס ההתכנסות הוא לפחות R.

<u>משפט היחידות:</u> f, g הולומורפיות ב- Ω, $z_0 \in \Omega$; $z_n \to z_0$ רק ש- $z_n \neq z_0$. אם $f(z_n) = g(z_n)$ אז $f \equiv g$ ב- Ω.

<u>טענה:</u> האפסים של פונקציה הולומורפית מבודדים, אלא אם הפונקציה קבועה.
<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה ש- $f(z_n) = 0$; $z_n \to z_0$ אזי מהמשפט נובע $f \equiv 0$.

<u>מסקנה:</u> לכל $K \subseteq \Omega$ קומפקטית $f^{-1}(w_0) \cap K$ סופית (עבור $w_0 \in \mathbb{C}$) (אלא אם כן f קבועה).
<u>הוכחה:</u> האפסים של הפונקציה $f(z) - w_0$ מבודדים ב- Ω. לכן הם מהווים קבוצה דיסקרטית. אם החיתוך של קבוצה זו עם K זו קבוצה דיסקרטית קומפקטית ולכן סופית, והקבוצה זו היא בדיוק $f^{-1}(w_0) \cap K$.

<u>מסקנה:</u> לכל $w_0 \in \mathbb{C}$ $f^{-1}(w)$ קבוצה בת מנייה - אלא אם כן היא קבועה.
<u>הוכחה:</u> ניתן לקחת קומפקטיות $K_n \subseteq \Omega$ רק ש- $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$. להמשיך בתרגיל.

טענה: נניח ש- f הולומורפית ב- Ω ; $f \not\equiv 0$ ונניח ש- $f(z_0)=0$ עבור $z_0\in\Omega$. אזי קיימת g הולומורפית ב- Ω ומספר טבעי m, כך ש-

1) $g(z_0)\neq 0$

2) $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$

הוכחה: קיים $B(z_0,R)\subseteq\Omega$. נפתח את f לטור טיילור סביב z_0 מרדיוס R

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

מכיוון ש- $f(z_0)=0$ יודעים ש- $a_0=0$. אבל לא כל המקדמים 0 כי אז $f\equiv 0$ בכדור וממשפט היחידות $f\equiv 0$ ב- Ω. אז קיים m מינימלי שעבורו $a_m\neq 0$, כלומר

$$(*)\qquad f(z)=\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-z_0)^n$$

לכאורה סיימנו אבל צריך להראות שיש g בכל Ω ולא רק בכדור. אז נגדיר את g ב- Ω באופן הבא:

$$g(z)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-z_0)^n & |z-z_0|<R\\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} & |z-z_0|>\frac{R}{2}\end{cases}$$

צריך רק לוודא ששתי ההגדרות מסכימות על החיתוך ואז בוודאי g תהיה הולומורפית.

ראשית $R/2<|z-z_0|<R$ שתי ההגדרות מסכימות לפי $(*)$.

$\Leftarrow$ g מוגדרת היטב, הולומורפית ; $g(z_0)=a_m\neq 0$. ☺

הערה: זה לא נכון ב- $\mathbb{R}$:
$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אז לכל n $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0$ ולכן אין סיכוי למצוא g שתקיים את הדרישה הזאת.

למה אי אפשר להסתכל על
$$f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases} \ ?$$

היא לא רציפה ב- 0 !! ניקח $z_n=\frac{i}{n}\to 0$ אז

$$f(z_n)=e^{-\frac{1}{-1/n^2}}=e^{n^2}\to\infty$$

(21)

טענה: אין פונקציה f הולומורפית בסביבת 0 המקיימת

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{n}\cos \pi n$$

הוכחה לא נכונה: בנקודות $z=\frac{1}{n}$ מתקיים $g(z) = z\cos\frac{\pi}{z}$

$z_n \to 0$, ו $f(z_n)=g(z_n)$ $\Leftarrow$ $f=g$.

אבל זה לא נכון כי g לא הולומורפית ב-0!

הוכחה נכונה: נניח שיש כזאת. היא אינה להתאפס 0 ומרציפות $f(0)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=0$. לפי הטענה הקודמת יש g הולומורפית בעיגול היחידה רק ש- $f(z)=z\cdot g(z)$

לפי ההנחה $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot\cos(\pi n)=\frac{1}{n}g\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Leftarrow$ $g\left(\frac{1}{n}\right)=\cos \pi n$ אבל אז g לא רציפה.

טענה: אם f הולומורפית בעיגול היחידה ו- $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)$ לכל $n>1$ אז f זוגית ומפיתוח טיילור יש רק חזקות זוגיות.

הוכחה: נגדיר $g(z)=f(-z)$. היא בוודאי הולומורפית בעיגול ונתון ש $f\left(\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}\right)$. וגם $\frac{1}{n}\to 0\in$ $\Leftarrow$ ממשפט היחידה $f(z)=g(z)=f(-z)$ בעיגול.

$$f(z) = \frac{f(z)+f(-z)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum a_n z^n = \frac{\sum a_n z^n + \sum a_n(-z)^n}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

ומיחידות טור טיילור זה הפיתוח היחיד, כלומר $a_n=0$ לכל n אי-זוגי.

(22) 25.02.08

ת' מרוכבות

מילה על האקספוננט:

הגדרנו $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$$

למה זה אותו הדבר? בהרצאה ראינו את זה עם שיקולים של משפט היחידות, אבל גם אפשר פשוט לפתח את e^{x+iy} לטור טיילור ויוצא $\exp(z)$.

טורי לורן

f הולומורפית בטבעת $r<|z-z_0|<R$ ניתנת להצגה כטור לורן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

טור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מתכנס בטבעת $r<|z-z_0|<R$ כאשר

$$R=\left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

$$r=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

משפט היחידות לטורי טיילור "מתרחב" לטורי לורן. הטור מתכנס במ"ש (ובהחלט) על קומפקט, יגזר ויאינטגרל איבר-איבר.

דוגמא: $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$ נפתח טור לורן בטבעות שונות:

1) $0<|z|<1$

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n$$

2) $1<|z|$

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1/z}{1+1/z} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n z^n$$

עכשיו אפשר לחשב כל מיני אינטגרלים:

$$\int_{|z|=3} f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{-2}\int_{|z|=3}(-1)^n z^n\,dz = 0$$

$$\downarrow$$

$\int_\gamma z^n\,dz = 0$ לכל $n\neq -1$.

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = \sum_{n=-1}^{\infty}\int_{|z|=\frac{1}{2}}(-1)^{n+1}z^n\,dz = \int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{(-1)^0}{z}\,dz = 2\pi i$$

סינגולריות, קטבים ואפסים

- נניח ש-f הולומורפית בסביבת z_0. אם $f(z_0)=0$, $f\not\equiv 0$ אז קיים m טבעי ו-g הולומורפית כך ש- $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0)\neq 0$

z_0 נקרא אפס מסדר m של f. אפס מסדר 1 נקרא אפס פשוט.

- נניח ש-f הולומורפית בסביבה מנוקבת של z_0. אומרים ש-z_0 נקודת סינגולריות מבודדת. אז יש פיתוח לטור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

-אם $a_n=0$ לכל n שלילי z_0 נקראת נקודה סינגולרית סליקה.

-אם $a_n=0$ לכל $n<m<0$ עבור m כלשהו רק ש- $a_m\neq 0$
אז z_0 נקרא קוטב מסדר $|m|$

-אחרת - z_0 נקרא נק' סינגולרית עיקרית (essential)

תרגיל: תהי f הולומורפית עם אפס מסדר m ב-z_0. אז ל- $\frac{1}{f}$ יש קוטב מסדר m ב-z_0, ולהפך.

הוכחה: ל- f יש אפס מסדר m ב-z_0 אמ"מ $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$
ו- $g(z_0)\neq 0$.

ל- f יש קוטב מסדר m ב-z_0 אמ"מ $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$
עבור g הולומורפית שונה מתאפסת ב-z_0 אמ"מ $(z-z_0)^m f(z)$
הולומורפית עם נקודה סינגולרית סליקה ב-z_0 שאינה מתאפסת ב-z_0.
הטענה נובעת מכך שאם g הולומורפית בסביבת z_0, $g(z_0)\neq 0$, אז $\frac{1}{g}$
הולומורפית בסביבת z_0 ו- $(\frac{1}{g})(z_0)\neq 0$ ☺

פעולות על טורים

ברור שאפשר לחבר טורים איבר איבר. מה עם מכפלה? פורמלית

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad (*)$$

כאשר $c_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$ אבל c_n לא בהכרח מתכנס. כאשר המכפלה
מתכנסת אז היא מתכנסת בהחלט ולכן ניתן לסדר את האיברים בכל
סדר, ולכן (*) מתקיים.

דוגמה: $f(z)=\frac{z}{\sin\frac{1}{z}}$ מוגדרת והולומורפית בטבעת $|z|>\frac{1}{\pi}$
חשב טור לורן בטבעת זו:

$$\frac{z}{\sin\frac{1}{z}} = \frac{z}{\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\dots} = z^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{5!z^4}-\dots} =$$

$$= z^2\,\frac{1}{1-\underbrace{\left(\frac{1}{3!z^2}-\frac{1}{5!z^4}+\dots\right)}_{q}}$$

כאשר $|z|$ גדול דיו $|q|<1$ ולכן $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ולכן

$$f(z)=z^2(1+q+q^2+\dots)=$$
$$=z^2\left(1+\frac{1}{3!z^2}+\left(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!3!}\right)\frac{1}{z^4}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\right)=$$
$$=z^2+\frac{1}{3!}+\left(\frac{1}{3!3!}-\frac{1}{5!}\right)z^2+\dots$$

הפיתוח היה בהנחה ש- z גדול דיו אך מיחידות פיתוח לורן נובע שזהו הפיתוח
בטבעת כולה.

23 4.03.08
ת' מרוכבות

התנהגות של פונקציה בסביבה של נק' סינגולרית מבודדת

נניח ש- z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של f

1. f חסומה בסביבת z_0 אמ"מ z_0 נקודה סליקה
2. z_0 קוטב של f אמ"מ קיים הגבול $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$
3. z_0 נקודה סינגולרית עיקרית אמ"מ לא קיים הגבול $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$ אפילו לא במובן הרחב.

<u>משפט Picard הגדול</u>: אם z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של f, D סביבה מנוקבת של z_0. אז $f(D)$ הוא כל $\mathbb{C}$ למעט אולי נקודה אחת.

<u>משפט ויירשטראס</u>: בתנאים הנ"ל $f(D)$ צפופה ב- $\mathbb{C}$.

<u>מסקנה</u>: אם z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של f, אז $\forall w\in\mathbb{C}$ קיימת $z_n\to z_0$ כך ש- $f(z_n)\to w$.

<u>הוכחה</u>: לפי המשפט $\overline{f(B(z_0,\frac{1}{n}))}=\mathbb{C}$ עבור n גדול מספיק
קיים $z_n\in B(z_0,\frac{1}{n})$ כך ש- $|f(z_n)-w|<\frac{1}{n}$ ולכן
$z_n\to z_0$; $f(z_n)\to w$.

<u>מסקנות לגבי פונקציות שלמות:</u>

תהי f פונקציה שלמה ולא קבועה.

<u>טענה</u>: ל- $f(\frac{1}{z})$ יש נקודה סינגולרית מ- $z_0=0$. נקודה זו היא קוטב אמ"מ f פולינום. אחרת, היא נקודה סינגולרית עיקרית.

<u>הוכחה</u>: נפתח את f לטור חזקות סביב 0; $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$
לכל $z\in\mathbb{C}$ $\Leftarrow$ $f(\frac{1}{z})=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$ לכל $z\neq0$
זהו טור לורן של $f(\frac{1}{z})$ בטבעת $0<|z|$. אם זה קוטב אז המקדמים מתאפסים החל ממקום מסוים ולכן זה פולינום וכמובן גם להפך. אחרת, $a_n\neq0$ לאינסוף n-ים ולכן $z_0=0$ עיקרית.

הערה: סדר הקוטב של $f(\frac{1}{z})$ שווה לדרגת הפולינום

מסקנה: (משפט ליוביל): f שלמה וחסומה היא קבועה.

הוכחה: תהי f שלמה לא קבועה וחסומה. נתבונן ב- $f(\frac{1}{z})$
$f(\frac{1}{z})$ חסומה בסביבת 0 אבל 0 נקודה סינגולרית סליקה. וזאת סתירה לסעיף הקודם.

מסקנה: תהי f שלמה לא קבועה. אזי תמונת f
- שווה ל- $\mathbb{C}$ פרט אולי לנקודה אחת (משפט פיקרד הקטן)
- צפופה ב- $\mathbb{C}$.

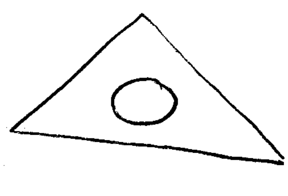
הוכחה: נסתכל ב- $f(\frac{1}{z})$. יש לה נקודה סינגולרית ב- 0.
אם 0 נקודה סינגולרית עיקרית כן מסקנה מיידית ממשפט פיקארד הגדול או ויירשטראס. אחרת לה קוטב ואז f פולינום ומהמשפט היסודי של האלגברה לכל $w\in\mathbb{C}$ לה $f(z)-w$ פולינום ול- $f(z)-w$ יש 0 ב- z_0 ואז $f(z_0)=w$, אז פולינומים הם פשוט קל.

משפט מורה: נניח ש-f רציפה בתחום Ω ונניח שלכל משולש סגור $\bar{\Delta}\subseteq\Omega$ $\oint_{\partial\Delta} f(z)dz=0$ אזי f הולומורפית ב- Ω.

שאלה: האם ייתכן ש- f רציפה ב- $\mathbb{C}$, הולומורפית ב- $|z|<1$ וב- $|z|>1$ רק ש- $f(z)=0$ לכל $|z|=1$ אבל $f\not\equiv 0$?

תשובה: לא! ראשית, אם f הולומורפית בכל $\mathbb{C}$ אז זה לא ייתכן כי ממשפט היחידות נקבל $f\equiv 0$. נראה שאם f רציפה ב- $\mathbb{C}$, הולומורפית בכל $|z|\neq 1$ אז f הולומורפית ב- $\mathbb{C}$. הבעיה היא שהנקודות $|z|=1$ אינן מבודדות ולכן אינן נקודות סינגולריות סליקות. לפי משפט מורה די להראות שלכל $\bar{\Delta}\subseteq\mathbb{C}$ $\oint_{\partial\Delta} f(z)dz=0$. אם $\bar{\Delta}$ מוכל ב- $|z|<1$ או ב- $|z|>1$ אז זה ברור כי f הולומורפית שם וזה משפט קושי.

אם $\{|z|<1\}\subseteq\bar{\Delta}$



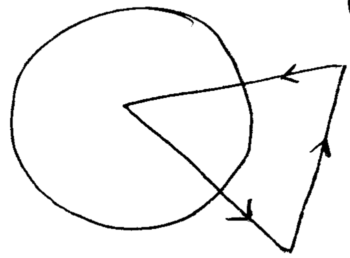
אז שפת המשולש הומוטופית ל- $C_r=\{|z|=r\}$ עם $r>1$ בתחום $|z|>1$.

24

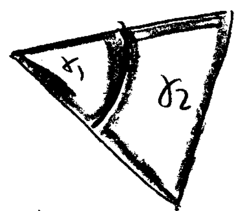
לפי תרגיל שעשינו $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{C_r} f(z)dz \xrightarrow{r\to 1^+} \int_{C_1} f(z)dz$

מצד שני $0 = \int_{\substack{C_r \\ r<1}} f(z)dz \xrightarrow{r\to 1^-} \int_{C_1} f(z)dz$. $\Leftarrow$ $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

המקרה האחרון הוא



נסתכל על שתי מסילות:



$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

את האינטגרלים $\int_{\gamma_i} f$

מחשבים ע"י קירוב עם מסילה המוכלת

כולה בתחום בו f הולומורפית ולכן

יוצא 0.

(25) 10.03.08

פ' מרוכבות

משפט השאריות

תהי f הולומורפית בסביבה מנוקבת של z_0, ו-z_0 נקודה סינגולרית
לא סליקה. אז קיים פיתוח לורן $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

מגדירים $\operatorname{Res}_{z_0} f = a_{-1}$.

<u>משפט</u>: אם f הולומורפית בתחום G עם נקודות
סינגולריות מבודדות $z_1, z_2, \dots$ ו-γ מסילה ב-G
אז $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k i(\gamma, z_k) \operatorname{Res}_{z_k} f$

<u>הערה</u>: אם ב-G יש אינסוף נקודות סינגולריות, האינדקס של γ סביב
z_k יהיה 0 לכמעט מספר סופי של k-ים.

<u>נוסחאות</u>:

1) אם $f=\frac{p}{q}$; $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=0$ אפס פשוט
אז $\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

2) אם z_0 קוטב מסדר m של f אז
$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

<u>דוגמה</u>: נחשב $\int_{|z|=5}\frac{e^z}{z(z-2)^2}\,dz$

יש שני קטבים: $z_0=0, z_1=2$. נחשב את השאריות

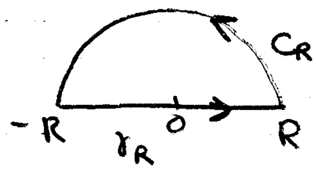
z_0 הוא אפס פשוט לכן לפי נוסחה (1)
$$\operatorname{Res}_0 \frac{e^z/(z-2)^2}{z} = \frac{e^0/(-2)^2}{1} = \frac{1}{4}$$

z_1 קוטב מסדר 2 לכן נשתמש בנוסחה (2):
$$\operatorname{Res}_2 \frac{e^z}{z(z-2)^2} = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right) = \lim_{z\to 2}\frac{ze^z-e^z}{z^2} = \frac{1}{4}e^2$$
$$\Rightarrow \int\frac{e^z}{z(z-2)^2}\,dz = 2\pi i\left(i(\gamma,0)\cdot\frac{1}{4} + i(\gamma,2)\frac{e^2}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}(1+e^2)$$

חישוב אינטגרלים מסויימים

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ נגדיר $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

וניקח מסילה:



אז $\int_{\gamma_R} f + \int_{C_R} f = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{i} \frac{1}{(z+i)(z-i)} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$

הערכה: $\left| \int_{C_R} f \right| \le \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \pi$$

האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}$ קיים אמ"מ $\int_{-\infty}^{0}$, $\int_{0}^{\infty}$ קיימים.

ואם הוא קיים אז $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} = \int_{-\infty}^{\infty}$ אבל לא להפך.

מסמנים $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f$

מקרים פרטיים טריוויאליים:

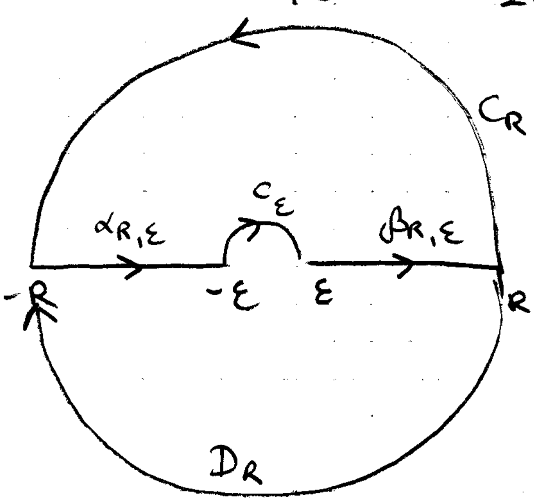
1) אם f אי-זוגית $PV \int_{-\infty}^{\infty} f = 0$

2) אם f זוגית! $pv \int_{-\infty}^{\infty} f$ קיים אמ"מ קיים $\int_{-\infty}^{\infty} f$

(2) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ (ידוע שהאינטגרל קיים)

נגדיר $f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} = \frac{\sin z}{z}$

נגדיר מסילות:



(26)

ראשית, $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$ כי f הולומורפית

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\alpha_{R,\varepsilon}} f + \int_{\beta_{R,\varepsilon}} f = 2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$!

(כי $\frac{\sin x}{x}$ זוגית ורציפה ב-0)

האינטגרל $\int_{\alpha+C_\varepsilon+\beta+C_R} \frac{e^{iz}}{2iz} = 0$

כי f הולומורפית שם.

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz\right| \le \int_{C_R}\left|\frac{e^{iz}}{2iz}\right||dz| = \int_{C_R} \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{2R}|dz| =$$

$$= \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin\theta}}{2R} R\,d\theta \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{\alpha+C_\varepsilon+\beta+C_R} \frac{e^{-iz}}{2iz}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 \frac{e^{-iz}}{2iz}\, i(\alpha+C_\varepsilon+\beta+C_R, 0) =$$

$$= -2\pi i \frac{e^0}{2i} = -\pi$$

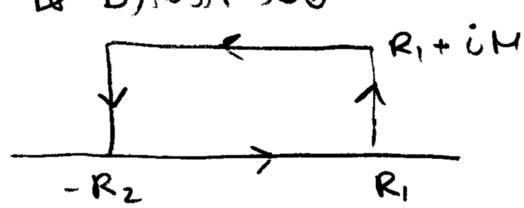
אפשר גם לראות ש- $\int_{D_R} \frac{e^{-iz}}{2iz}\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

קיבלנו -
$$\int_{\alpha_{R,\varepsilon}+C_\varepsilon+\beta_{R,\varepsilon}+C_R} f(z)\,dz = \int_{\alpha+C_\varepsilon+\beta} \frac{e^{iz}}{2iz} - \frac{e^{-iz}}{2iz}\,dz =$$

$$= \underbrace{\int_{\alpha+C_\varepsilon+\beta} \frac{e^{iz}}{2iz}\,dz}_{\downarrow\ 0} - \underbrace{\int_{\alpha+C_\varepsilon+\beta} \frac{e^{-iz}}{2iz}\,dz}_{\downarrow\ -\pi} \longrightarrow \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dz = \frac{\pi}{2}$$

רצינו לחשב $\int_{-\infty}^{\infty}$ ישירות אפשר להסתכל על מסלול



27 19.03.08

תרגול
מתרגם

תרגול עם מני

<u>הבהרה</u>: משפט השאריות נשען רק בתחומים שבהם נשען משפט קושי.

<u>עקרון הארגומנט</u>: תהי f הולומורפית בתחום פשוט קשר Ω למעט קטבים מבודדים $a_1,\dots,a_n$ ונסמן את האפסים של f ב- $b_1,\dots,b_m$ (האפסים והקטבים רשומים עם ריבוי) [אונלים לספירת אפסים ללא ריבוי]. תהי γ מסילה ב- Ω שאינה חותכת אף קוטב או אפס של f. אזי:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{m} i(\gamma,b_k)}_{\text{מספר הסיבוב של האפסים}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} i(\gamma,b_k)}_{\text{מספר הסיבוב של הקטבים}}\Big]$$

<u>אינטואיציה</u>: ע"י החלפת משתנה מתקיים

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w} \qquad (*)$$

זה למעשה סופר את הסיבוב של התמונה של γ וזו הסיבה שזה נקרא עקרון הארגומנט.

דוגמא שעוזרת לזכור: $f(z)=z^n$ יש 3 דרכים לחשב את $\int_{S^1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$

1. פשוט לחשב את האינטגרל $\int_{S^1}\frac{nz^{n-1}}{z^n}dz=\int_{S^1}\frac{n}{z}dz = n\cdot 2\pi i$
2. מעקרון הארגומנט - מספר האפסים של f הוא n אכן $\int_{S^1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n2\pi i$
3. מהאינטואיציה: f למעשה מסובבת את המעגל n פעמים סביב הראשית. אכן $\int_{S^1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n\cdot 2\pi i$

איך נספור כמה פעמים f מקבלת את הערך 3 נתבונן ב-

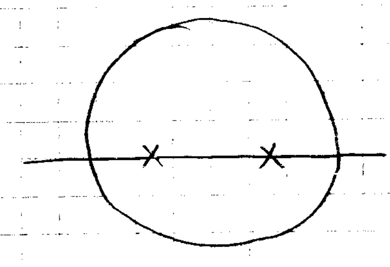
$$\int_{S^1}\frac{f'}{f-3}\,dz$$

דוגמה: $f(z)=\dfrac{z^2+a}{z^3}$ כאשר $1\neq a>0$ ו- C -
מסלול מעגל היחידה. כמה פעמים $f(C)$ מקיפה את
הראשית.

נשתמש שימוש הפוך במשפט. ע"פ (*) מספר
זה הוא בדיוק מספר האפסים של f פחות מספר
הקטבים בתוך מעגל היחידה. האפסים הם $\pm i\sqrt{a}$
והקטבים הם $0,0,0$. אם $a<1$ אז
יוצא $2-3=-1$ ואם $1<a$ יוצא $0-3=-3$.

תרגיל: f שלמה ונניח ש- $f(z)$ ממשי אמ"מ
z ממשי. אז f מתאפסת לכל היותר פעם
אחת (כולל ריבוי)

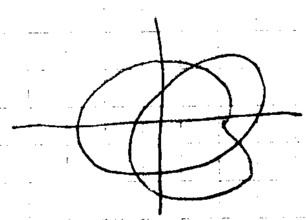
הוכחה: נניח בשלילה שהיא מתאפסת פעמיים. אז
שני האפסים מהכרח על הישר הממשי. ניקח מסילה
γ שמקיפה את שני האפסים. אז



$$2\cdot 2\pi i=\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz=\int_{f\circ\gamma}\frac{dw}{w}$$

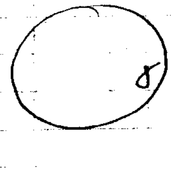
f שלמה ויש רק שני אפסים בתוך γ

f



ועכשיו ישנה סתירה כי מצד אחד $f\circ\gamma$
חוצה את הישר הממשי 4 פעמים אבל
יש רק שתי נקודות ממשיות.
אם יש אפס אחד עם ריבוי $n\geq 2$
אז $f\circ\gamma$ חוצה את $\mathbb{R}$ n פעמים וזו
עדיין סתירה.

משפט רושה: f ו- g רק שעל γ $f\neq 0$ ו-
$|f-g|<|f|$. אז ל- f ול- g אותו מספר
אפסים בתוך γ.



(28)

דוגמה: נסמן את עיגול היחידה ב- D. $f:\bar{D}\to D$ הולומורפית. נראה של-f יש נקודת שבת יחידה. נסמן $g(z)=f(z)-z$ ונראה שיש לה אפס יחיד. על ∂D $|z|\neq 0$ ומתקיים

$$|g(z)-(-z)| = |f(z)| < 1 = |z| = |-z|$$

לכן ל-$(-z)$ ול-g אותו מספר אפסים ב-D, כלומר יש אפס יחיד ל-g ב-D לכן נקודת שבת יחידה ל-f.

דוגמה: $g(z)=z^9-8z^2+5$. נחסום את האפסים של g. נשתמש בשני אי שוויוני המשולש

$$|a+b|\le |a|+|b|$$

$$|a-b|\ge ||a|-|b||$$

נחשוב ש- $f(z)=z^9$. אז

$$|f-g| = |8z^2-5| \le |8z|^2+5 < |z|^9$$

עבור $|z|\ge \frac{3}{2}$ איך מוצאים את זה? צריך $8|z|^2+5<|z|^9$ ומספיק ש- $8|z|^2+5$ זה מונוטוני עולה אז זה רק יותר

$\Leftarrow$ כל האפסים של g נמצאים ב $|z|\le\frac{3}{2}$

(29) 26.03.08

ת' מרוכבות

עקרון הארגומנט:

מספר הסיבובים של $f\circ\gamma$ $= \int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz =$ מספר האפסים פחות מספר הקטבים

ומכאן הוכחנו את משפט רושה: אם על γ $|f| > |g-f|$ אז ל-f ו-g אותו מספר אפסים בתוך γ.

<u>משפט ההעתקה הפתוחה</u>: אם f הולומורפית (ולא קבועה) בסביבת z_0 אז קיימת סביבה של $f(z_0)$ רק ש-f מכסה אותה.

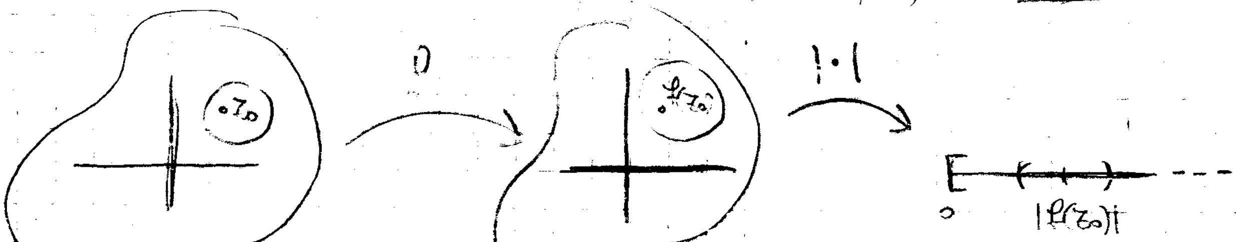
אם $f'(z_0)\neq 0$ זה נובע מיידית של היעקוביאן של ההעתקה $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י f.

אם $f'(z_0)=A+iB$ אז היעקוביאן הוא $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \neq 0$.

אז משפט ההעתקה הפתוחה נובע ממשפט ההפוך.

מה שחדש הוא שבפונקציות מרוכבות המשפט נכון גם כאשר $f'(z_0)=0$

<u>מסקנה</u>: עקרון המינימום / מקסימום



הגענו לסביבה פתוחה של $|f(z_0)|$. לכן אפשר למצוא w_0 בסביבה של z_0 כך ש- $|f(w_0)| > |f(z_0)|$ ו-w_1 כך ש- $|f(w_1)| < |f(z_0)|$

אז אי אפשר למצוא מינימום או מקסימום.

<u>טענה</u>: תהי f הולומורפית לא קבועה בסביבת z_0 ונניח ש- $0 \neq |f(z_0)|$

אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $w_0, w_1 \in B(z_0,\varepsilon)$ כך ש-

$|f(z_0)| < |f(\omega_0)|$; $|f(z_0)| > |f(\omega_1)|$.

<u>הוכחה:</u> ממשפט ההעתקה הפתוחה $f(B(z_0,\varepsilon))$ מכיל את $B(f(z_0),2\delta)$ עבור $\delta>0$. נבחר ω_0 מתוך $f^{-1}((1+\frac{\delta}{|f(z_0)|})f(z_0))$ ו-ω_1 מתוך $f^{-1}((1-\frac{\delta}{|f(z_0)|})f(z_0))$ וזהו.

עקרון המקסימום (והמינימום) הם מסקנות ממשפט ההעתקה הפתוחה.

אם f הולומורפית ו-$|f|$ קבועה אז f קבועה. כי הרי אם היא לא היתה קבועה אז ממשפט ההעתקה הפתוחה התמונה שלה היתה מכילה קבוצה פתוחה.

<u>הלמה של שוורץ</u> אם $f: D\to D$ ו- $|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D$ ו- $f(0)=0$ אז $|f(z)|\le|z|$ ו- $|f'(0)|\le 1$ ואם יש שוויון מאחד האי שוויונים (אפילו ב- $z_0\ne 0$ כלשהו) אז הפונקציה היא $f(z)=\lambda z$ עבור $|\lambda|=1$, $\lambda\in\mathbb{C}$

<u>מסקנה:</u> f פשוטה ועל מ-D לעצמו אז f העתקת מביוס מהצורה $f(z)=\lambda\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

<u>הכללה קלה:</u> $f: B(0,r)\longrightarrow B(0,R)$ $f(0)=0$
נתבונן ב- $g(z)=\frac{1}{R}f(zr)$ אז $g: D\to D$ ו- $g(0)=0$ ואפשר להשתמש בלמה של שוורץ:
$\frac{1}{R}|f(zr)| = |g(z)| \le |z|$ וכן הלאה...

נסמן ב-M את כל העתקות מביוס, $H<M$ תת החבורה של ההעתקות המעתיקות את D לעצמו.
H^+ חצי המישור העליון.
נשארה שאלה שנרצה לשאול:

(30)

ג) מיהן כל ההעתקות הח"ע ועל שמעתיקות את $\mathbb{H}^+$ לעצמו?

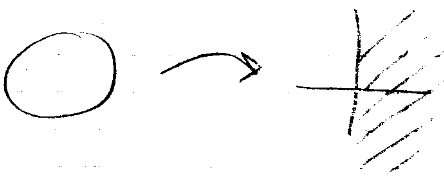
ב) מיהן כל ההעתקות הח"ע ועל מ-$\mathbb{H}^+$ ל-D?

עפ"י (ב) נבחר העתקה מסוימת $g:\mathbb{H}\to D$. אז המחלקה Hg היא ה- ההעתקות מ- $\mathbb{H}$ ל-D,
נניח $f:\mathbb{H}^+\to D$ אז $h=f\circ g^{-1}\in H$

$\Rightarrow$ $f=hg$.

לפי (א) התשובה היא $g^{-1}Hg$ - אלה כל ההעתקות הח"ע ועל מ-$\mathbb{H}^+$ ל-$\mathbb{H}^+$.

<u>דוגמה:</u> תהי $f:D\to\mathbb{C}$ ונניח ש- $\mathrm{Re}\, f(z)>0$
וגם $f(0)=1$



ניקח העתקת מוביוס שלוקחת
את 1 ל-0 ואת ה3.
המישור הימני ל-D. $g(z)=\frac{z-1}{z+1}$
אז $g\circ f$ מקיימת את תנאי הלמה של שוורץ
$|g f(z)|\le|z|$, כלומר

$$\frac{|f(z)|-1}{|f(z)|+1}\le\left|\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right|\le z\Rightarrow|f(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

(31) 2.4.08
ת. מרוכבות

פונקציות רב ערכיות - הדוגמא העיקרית היא $\log z$.

איך נגדיר את $\log(x+iy)$? נניח ש- $\log(x+iy)=u+iv$

אז $x+iy = e^{\log(x+iy)} = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$

$\Leftarrow$ אין ברירה אלא להגדיר $u=\log(|x+iy|)$ כאשר כאן $\log$ היא פונקציית ה-$\log$ הממשית שאנחנו מכירים.

כדי להגדיר את v נרצה ש- $v=\arg(x+iy)$ אבל זה מוגדר עד כדי $2\pi k$. נסמן ב- Arg את הארגומנט שנמצא ב- $[-\pi,\pi)$ ואז $v=\mathrm{Arg}(x+iy)+2\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$

כך נוכל להגדיר את $z^{\frac{1}{n}}$ באופן הבא: $(e^{\log z})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log z}{n}}$

ואז הבחירה שלנו לבחור את $\log$ משנה כאשר מגדירים את $z^{\frac{1}{n}}$ בעזרתו:

$$e^{\frac{u+iv}{n}} = e^{\frac{u+i(v+2\pi n)}{n}}$$

בעצם משהו כזה מסביר את הבעיה של רב-ערכיות אבל המחירים שם עוברים לא אנליטיים מסובכים יותר. זה נושא מעניין.

<u>משפט המונודרומיה</u>: יהי D תחום פשוט קשר. תהי f_0 פונקציה הולומורפית המוגדרת בסביבה של $z_0\in D$. אם קיימת המשכה אנליטית לאורך כל מסילה מ- z_0 ל- $z\in D$ אז קיימת פונקציה הולומורפית f ב- D כך ש- $f=f_0$ בסביבה של z_0.

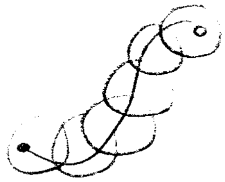
<u>הערה</u>: המשכה אנליטית היא יחידה כי אם שתי פונקציות הולומורפיות מסכימות בתחום עם נקודת הצטברות הן מסכימות בכל נקודה.

לכן מה שמשפט המונודרומיה אומר זה שלא משנה באיזו מסילה נבחר ללכת לנקודה, נקבל את אותה המשכה אנליטית לאורך המסילה (ואת הוכחתו לא נראה) אבל כאן חשובה הדרישה שהתחום יהיה פשוט קשר כי אחרת זה לא מסכים.

ראינו בתרגיל שאם $f(z)\neq 0$ או של f יש אפס מסדר 2 אז אפשר להוציא שורש ריבועי.

טענה: אם f שלמה וכל האפסים הם מסדר 2 אז קיימת g כך ש- $g^2=f$, כלומר אפשר להוציא שורש ריבועי ל-f.

הוכחה: כמו שאמרנו, אפשר לעשות זאת מקומית. $\mathbb{C}$ פשוט קשר אז לפי משפט המונודרומיה אומר שמספיק שנראה שאפשר להוציא שורש לאורך כל מסילה. ואת זה קל לראות שאפשר לעשות. אפשר לעשות את זה מקומית אז יש לנו רדיוסים



על שני רדיוסים או שהערך שלהם מסכים או שצריך לשים - $(-g)^2=f$

☺

שאלה: $f(z)=\frac{z}{z-1}$. האם ניתן להגדיר לה שורש ריבועי אנליטי, באיזו סביבה?

פתרון: בכל נקודה ששונה מ-0 ו-1 אפשר מקומית. אבל $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ לא פשוט קשר. אז אפשר להוציא את הקרן $[0,\infty)$ ואז להשתמש במונודרומיה. אם נעשה את זה אחרת. ננסה ישירות: ננסה להגדיר $\log f$. בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, אם נגדיר את $\log f$ אז $h(z)=e^{\frac{\log f(z)}{2}}$ יהיה שורש ריבועי. רצינו להגדיר את $\log z$ השתמשנו ב- $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. רצו להגדיר את $\log f$ נשתמש ב- $\int_\gamma \frac{f'}{f}dz=\int_{f\circ\gamma}\frac{dw}{w}$

$$\int \frac{f'}{f}dz=\int\frac{z-1-z}{(z-1)^2}\cdot\frac{z-1}{z}\,dz=\int\frac{dz}{z(z-1)}$$

ורואים שהאינטגרנד הוא $O(\frac{1}{R^2})$ אז אינטגרל על מסילה עם רדיוס השואף לאינסוף הוא 0 $\Rightarrow$ האינטגרל של כל מסילה סגורה הוא 0. $\Rightarrow$ אפשר להגדיר קדומה (ה-$\log f$ שהגדרנו מוגדר עד-כדי קבוע)

הערה: הקדומה שקיבלנו היא אכן $\log f$: אם $g(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{f'}{f}dw$ נתבונן ב-

$$\left(\frac{e^g}{f}\right)'=\frac{fg'e^g-f'e^g}{f^2}=\frac{(fg'-f')e^g}{f^2}=0$$

$$\downarrow$$

$$g'=\frac{f'}{f}$$

$\Rightarrow \frac{e^g}{f}=c=e^\alpha$ ($\neq 0$ כי $e^g\neq 0$) אז נחליף את g ב- $\tilde g=g-\alpha$ ונקבל $e^{\tilde g}=e^g e^{-\alpha}=f$