

פונקציות מרוכבות (80519)

מועד א' תשס"ח

המורה: פרופ' גנאדי לויין

הזמן: שעתיים וחצי

חלק א'. ענו על שאלות 1 ו-2. כל שאלה 15 נק'.

1. ✓ תהי f פונקציה הולומורפית בתחום Ω כך ש- $\inf_{z \in \Omega} |f(z)| = \mu > 0$ הוכיחו שמתקיים אחד מן השניים: $f(z) \equiv \mu e^{i\theta}$ (ל- θ ממשי קבוע) או $|f(z)| > \mu$ לכל $z \in \Omega$.

2. ✓ מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות של הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$ סביב הנקודה $z=0$.

חלק ב'. ענו על שלוש מתוך שאלות 3 – 6. כל שאלה 20 נקודות.

3. ✓ מצא את מספר השורשים של הפולינום $z^4 - 3z + 1$ בעיגול היחידה $\{|z| < 1\}$.

4. ✓ תהי f פונקציה הולומורפית במישור. הוכיחו כי $\sum_{k=-n}^n f(\pi k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_n} f(z) \frac{\cos z}{\sin z} dz$ כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו- $R_n = \pi n + \frac{\pi}{2}$.

5. תהי $z=0$ נקודה סינגולרית מבודדת של פונקציה f ההולומורפית בטבעת $C = \{0 < |z| < r\}$ וחד חד ערכית ב- C . הוכח כי 0 היא או נקודה סינגולרית סליקה, או קוטב מסדר 1.

6. ✓ תהי f פונקציה הולומורפית במישור דו-מחזורית:

$$f(z+1) = f(z)$$

$$f(z+i) = f(z)$$

לכל z , הוכיחו כי f קבועה.

חלק ג'. ענו על השאלה הבאה (10 נק')

7. יהי Ω תחום פשוט קשר שמכיל את 0. התבוננו במשפחה A של כל הפונקציות f ההולומורפיות ב- Ω ומקיימות $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

הוכיחו ש- $\inf_{f \in A} \sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \frac{1}{R'(0)}$ כאשר $R: \Omega \rightarrow D$ העתקת רימן של Ω על עיגול היחידה D המקיימת $R(0) = 0, R'(0) > 0$.

בהצלחה!