80.579
1א / ס"תמ

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

פונקציות מרוכבות (80519)

מועד א' תש"ס

המורים: פרופ' ה. פורסטנברג
פרופ' ג. לוין

הזמן: 3 שעות

I ענה על 3 מתוך 5 השאלות, תן הסבר (30 נק')

1. האם הביטוי i^i מוגדר היטב, ואם כן מה הערך שלו?

2. פונקציה φ בעלת קוטב בנקודה a. מה אופי התנהגות של פונקציה $\frac{\varphi}{\varphi^2+1}$ בנקודה a (סינגולרית סליקה, קוטב, עיקרית)?

3. א. מהו פיתוח טיילור של $f(z)=\frac{z}{z+1}$ סביב הנקודה $z=1$?

ב. נגדיר $f(z)=\int_0^z \frac{\sin u}{u}\,du$ מה ערך הנגזרת $f^{(100)}(0)$?

4. הראה כי $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)}=0$.

5. נתונה פונקציה $f(z)$ הולומורפית בעיגול היחידה $\{z:|z|<1\}$, והמקיימת $f(z)=f(-z)$. הראה שקיימת פונקציה $g(z)$ שגם היא הולומורפית בעיגול היחידה וכך ש- $f(z)=g(z^2)$.

II ענה על 2 מתוך 4 השאלות (40 נקודות).

1. תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בעיגול היחידה $\{z:|z|<1\}$ ונניח $f'(0)=0$. הוכח קיום נקודות z_1, z_2 בעיגול עם $f(z_1)=f(z_2)$.

2. תהי $A=\{z:a<|z|<b\}$ הטבעת.

א. מצא פונקציה הולומורפית φ המוגדרת בתחום Ω המתאים פשוט הקשר כך ש- $\varphi(\Omega)=A$.

ב. הוכח קיום של פונקציה הולומורפית f בעגול $D=\{z:|z|<1\}$ כך שהשווה $f(D)$ הוא הטבעת A.

80.517
תשנ"ז / ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

פונקציות מרוכבות (80519)

מועד ב' תשנ"ז
המורה: ד"ר ג. לוין

הזמן: שעתיים

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות:

1. א. תהי f פונקציה שלמה כך ש- $|f(z)|>1$ עבור כל z. הוכיחו כי f קבועה.

ב. תהי f רציפה בעיגול סגור $\{|z|\le 1\}$. בעזרת משפט קושי הוכיחו כי

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{t-z}dt,\ |z|<1$$

2. תהי f הולומורפית ופשוטה על הספרה של רימן. הוכיחו כי f היא פונקציה מבויס.

3. נסחו והוכיחו את העיקרון של המקסימום.

4. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה שבעלת מספר סופי של האפסים במישור C. הוכיחו כי קיים פולינום $P(z)$ ופונקציה שלמה אחרת $g(z)$ כך שקיים:

$$f(z)=P(z)e^{g(z)}\ ,\ z\in C$$

5. חשבו את

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\Theta}{2+\cos\Theta}d\Theta$$

6. כמה שרשים יש לפולינום

$$p(z)=z^{10}+100z^3-50z+1 \quad \text{בטבעת} \quad 1<|z|<2$$

בהצלחה

80.519
תשנ"ג / ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בפונקציות מרוכבות (80519)

מועד ב' תשנ"ט

המורה: ד"ר ג. לוין

הזמן: 3 שעות

ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות.

1. מצא העתקה הולומורפית וחד-חד-ערכית של הרביע הראשון $P=\{z=x+iy \mid x>0, y>0\}$ על עיגול היחידה.

2. תהי f הולומורפית בתחום פשוט-קשר D ו $f(z)\neq 0$ עבור כל $z\in D$. הוכח כי קיימות שלוש פונקציות הולומורפיות שונות $g(z)$ ב- D כך ש -

$$(g(z))^3=f(z), z\in D.$$

3. א. נסח את משפט ההעתקה הפתוחה ואת עקרון המקסימום.
   ב. תהי γ מסילה פשוטה וסגורה בתחום $A\subset C$. נניח ש- f הולומורפית ב- A, A מכיל את הפנים של γ ו- $|f|$ קבוע על γ. הוכח של- f יש אפס בפנים של γ או ש- f קבועה.

4. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

5. תהי $f:D\to D$ העתקה הולומורפית של עיגול היחידה D לעצמו. אזי $|f'(0)|\le 1$ והשוויון מתקיים אם ורק אם קיים $\lambda, |\lambda|=1$, כך ש-

$$f(z)=\lambda z, z\in D.$$

6. תהי $\varphi(z)$ פונקציה מירומורפית בתחום D והולומורפית על השפה C של D. הוכח כי אם $|\varphi(z)|<1$ על C, אזי המספר השורשים של המשוואה $\varphi(z)=1$ ב- D שווה למספר הקוטבים של φ ב- D.
   רמז: הוכחה של משפט רושה.

בהצלחה

ג.ו. 514
תש"ס / א

3. תהי $f(z)$ הולומורפית בטבעת $1-\delta<|z|<1+\delta$ ונניח שלכל $n\geq 0$

$$\int_{|z|=1} f(z)z^n dz = 0$$

הוכח כי ניתן להמשיך את $f(z)$ לפונקציה הולומורפית בכל העיגול $|z|<1+\delta$.

4. יהי $P(z)$ פולינום ממעלה d.

א. הצג סכום $L(a)=\sum_{P(z)=a} P'(z)$ (הסכום על כל d שורשי המשוואה $P(z)=a$) כאינטגרל על מעגל $|z|=R$ כאשר R מספיק גדול.

ב. הוכח כי $L(a)$ אינו תלוי במספר a.

III הוכח אחד המשפטים הרשומים כאן (30 נק').

1. אם $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום קשיר Ω ואם $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות שונות ב- Ω כך ש- $z_n\to a$ כאשר $a\in\Omega$, ואם $f(z_n)=0$ לכל n, אזי $f\equiv 0$ על Ω.

2. אם $f(z)$ הפונקציה הולומורפית בעיגול היחידה $D=\{z:|z|<1\}$ ואם לכל $z\in D$, $|f(z)|<1$ ואם $f(0)=0$ אזי לכל z, $|f(z)|\leq|z|$ ואם קיים $a\neq 0$ כך ש $|f(a)|=|a|$ אזי $f(z)=cz$ עם קבוע c, $|c|=1$.

בהצלחה!!

80.579
תשס"ב / 1

2. תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית על כל המישור ונניח שכאשר z ממשי אזי גם $f(z)$ ממשי. הוכח ש- $f(-i)=\overline{f(i)}$.

3. תהי $f(z)=\left(e^{z^2}\right)$. הראה שכאשר n מספיק גדול, הנגזרות של f מקיימות
$$\left|f^{(n)}(1)\right|<n!$$

4. א. מצא פונקציה הולומורפית חד-חד-ערכית בעיגול היחידה $D=\{z:|z|<1\}$ כך שהטווח שווה ל-D וכך ש- $f(0)\neq 0$.

ג. תהי $f(z)$ הולומורפית בתחום $\Omega=\{z=x+iy:\ 0<x<2,\ 0<y<2\}$ נניח ש- $f(z)$ חד-חד-ערכית על Ω ו- $f(\Omega)=\Omega$. האם מכאן נובע ש- $1+i=f(1+i)$? הסבר.

III הוכח אחד המשפטים הרשומים כאן (30 נק').

1. תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות הולומורפיות בתחום Ω . אם $f_n\to f$ כאשר ההתכנסות היא במידה שווה על קבוצות קומפקטיות ב- Ω , אזי לכל $a\in\Omega$
$$f'_n(a)\to f'(a)$$

2. יהי Ω_1 תחום פשוט – הקשר עם שפה γ שהיא מסילה סגורה ופשוטה ואם f,g שתי פונקציות הולומורפיות בקבוצה פתוחה Ω המכילה את $\overline{\Omega_1}$ ואם על γ מתקיים $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ אזי לשתי הפונקציות f,g יש אותו מספר אפסים ב- Ω_1 .

ב ה צ ל ח ה !!

תשס"א / א'

4. תהי

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$$

א. מצא פיתוח לטור לורן של $f(z)$ סביב נקודה $z=0$.

ב. איפה הטור הזה מתכנס?

5. חשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(2+x^2)}$.

6. תהי f הולומורפית בקבוצה

$$C=\{z:0\le|z|<1\}$$

ו- $z=0$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של f.

הוכח כי תמונה $f(W)$ של כל סביבה W של $z=0$ היא קבוצה הצפופה ב- C.

7. תהי f הולומורפית ב-

$$,B=\{|z|<1\}$$

$f(0)=0$, ועבור כל $z\in B$ קיים:

$$|u|+|u|<1$$

כאשר $u=\operatorname{Re} f(z)$, $U=\operatorname{Im} f(z)$

הוכח כי $|f'(0)|<1$.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

פונקציות מרוכבות (80519)

מועד א' תשס"א

המורה : פרופ' ג. לוין   הזמן: 3 שעות

ענה על 5 שאלות מתוך 7 השאלות הבאות:

1. חשב:

א. $\cos i$.

ב. כל הערכים של i^i.

2. תהי

$$M(z)=\frac{z+i}{z-i}$$

א. מצא העתקה הפוכה M^{-1} להעתקה M.

ב. הוכח כי

$$M^{-1}(S)=\mathbb{R}$$

כאשר $S=\{|z|=1\}$ ו- $\mathbb{R}$ הוא הציר הממשי.

ג. יהי $S_r=\{|z|=r\}$. האם את התמונה $M^{-1}(S_r)$ כאשר $0<r<1$ היא מעגל או ישר?

3. תהי פונקציה f מוגדרת והולומורפית בעיגול הפתוח

$B=\{|z|<1\}$,

וקיים: עבור כל $z\in B$,

$$|f(z)|<1$$

הוכח כי

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant 1\ ,\ n=1,2,3\ldots$$

המשך מעבר לדף ←

80 519
תשס"א/ב'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

<u>פונקציות מרוכבות (80519)</u>

מועד ב' סמ' ב' תשס"א

המורה : פרופ' ג. לוין
פרופ' ה. פרקש

הזמן: 3 שעות

ענה על 5 שאלות מתוך 7 השאלות הבאות:

1. תאר את קבוצת הנקודות במישור:

$$\left\{ z \;:\; 0<\left|\frac{z+i}{z-i}\right|<1 \right\}.$$

2. חשב את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}.$$

3. תהי פונקציה f רציפה בעיגול הסגור $\overline{B}=\{z:|z|\le 1\}$ והולומורפית בפנים של $\overline{B}$.
הוכח שאם $f(z)\neq 0$ עבור כל z כך ש- $|z|=1$, אזי ל- f ישנו מספר סופי של אפסים.

4. יהי

$$P(z)=z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$

הוכח שקיים

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{z^2P'(z)}{P(z)}\,dz$$

והוא שווה $a_2^2-2a_1$.

המשך מעבר לדף ←

80.544
תשס"ג/ב'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בנושאים בפונקציות מרוכבות (80544)
מועד ב' תשס"ג

שם המורה: פרופ' ג. לוין

משך הבחינה: 2 שעות

ענה על 3 מ- 4 השאלות הבאות:

1. מודולוס של הטבעת $C=\{z \mid r<|z|<R\}$

כאשר $0<r<R<\infty$, מוגדר ע"י $m(C)=\log\frac{R}{r}$

הוכח כי המודולס הוא אינבריאנט קונפורמי:

אם $f:C_1\to C_2$

העתקה פשוטה חד-חד-ערכית בין שתי טבעות C_1,C_2 , אזי $m(C_1)=m(C_2)$.

2. תהיינה U_0,U_1 שני עיגולים כך ש-

$$\bar{U}_0\cap\bar{U}_1=\emptyset\ ,\ \bar{U}_0,\bar{U}_1\subset D$$

כאשר $D=\{|z|<1\}$. תהי

$$f:U_0\cup U_1\to D$$

העתקה פשוטה של כל U_0 ו- U_1 על D. הוכח כי קבוצה

$$K(f)=\{z \mid f^n(z)\in U_0\cup U_1, n=0,1,\ldots\}$$

היא מושלמת (כלומר, קומפקטית וללא נקודות מבודדות) וכל נקודה $z\in K(f)$ היא רכיב קשירות של $K(f)$.

3. יהי Ω תחום פשוט-קשר ב- $\mathbb{C}$ ו- $f:\Omega\to\Omega$

העתקה פשוטה וחד-חד-ערכית. הוכח כי אם קיים $a\in\Omega$ כך ש-

$f(a)=a,\ f'(a)=1$ אזי $f(z)=z$ עבור כל $z\in\Omega$.

4. עיקרון של חסימות במידה שווה.

בהצלחה!

80.519
תשנ"ט א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בפונקציות מרוכבות (80519)

מועד א' תשנ"ט
המורה: ד"ר ג. לוין

הזמן: 3 שעות

ענה על 5 מתוך 6 השאלות הבאות.

1. הראה שלכל פונקציה שלמה f (לא קבועה) הקבוצה $f(C)$ צפופה ב C .

2. א. נסח את משפט השאריות ועקרון הארגומנט.
ב. חשב את האינטגרל

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^2}\,dz}{z^{11}(z-1)(z-3)}$$

3. הוכח שאם $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| < |a_n|$ אזי הפולינום $p(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ בעל n אפסים בעיגול היחידה.

4. הוכח הכללה של למת שוורץ: אם $f: D \to D$ העתקה הולומורפית של עיגול היחידה D לעצמו ו- 0 הוא אפס מסדר m של f אזי $|f(z)| \le |z|^m$ עבור כל $z \in D$ ו $|f^{(m)}(0)| \le m!$.

5. תהי f הולומורפית בסביבה של עיגול היחידה הסגור $\overline{D}=\{|z|\le 1\}$ ו $f(0)=a_0 \neq 0$
הוכח כי $f(z)\neq 0$ בעיגול $\left\{|z| < \frac{|a_0|}{|a_0|+M}\right\}$ כאשר $M=\max_{z\in\partial D}|f(z)|$

6. תהיינה f_+ ו- f_- שתי פונקציות כך ש f_+ הולומורפית ב $H_+=\{z:\mathrm{Im}(z)>0\}$ ורציפה בסגור $\overline{H}_+$ ב C, f_- הולומורפית ב $H_-=\{z:\mathrm{Im}(z)<0\}$ ורציפה ב $\overline{H}_-$ וקיים:

$$f_+(x)=f_-(x),\ x\in R$$

הוכח שהפונקציה

$$f=\begin{cases} f_+(z), & z\in\overline{H}_+ \\ f_-(z), & z\in H_- \end{cases}$$

היא שלמה

רמז: משפט מוררה.

בהצלחה

80. 579
מ / תש"ס

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

פונקציות מרוכבות (80519)

מועד ב' תש"ס

המורים: פרופ' ה. פורסטנברג
פרופ' ג. לוין

הזמן: 3 שעות

I ענה על 3 מתוך 5 השאלות, תן הסבר (30 נק')

1. האם הפונקציה $f(x+iy)=e^{x}(\cos y-i\sin y)$ אנליטית (הולומורפית) בתחום לא ריק של C?

2. האם קיימת העתקה הולומורפית חד-חד-ערכית של $\{z:1<|z|<2\}$ על $\mathrm{C}\setminus\{0\}$?

3. הראה שאם הפונקציה $f(z)$ מרומורפית במישור אזי גם $g(z)=f(z^2+1)$ הינה פונקציה מרומורפית.

4. חשב את ההפרש $\displaystyle\int_{|z|=\frac{101}{2}\pi}\frac{dz}{\sin z}-\int_{|z|=\frac{99}{2}\pi}\frac{dz}{\sin z}$

5. תהי ב פונקציה הולומורפית במישור. נגדיר:

$$\varphi(\omega)=\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-\omega}dz$$

מה ניתן לומר על $\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{3}{2}\right)$?

II ענה על 2 מתוך 4 השאלות (40 נק')

1. יהיו $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ המקדמים של הפיתוח לטור חזקות של $f(z)=(1-z-z^2)^{-1}$ סביב 0:

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots.$$

א. הראה שמתקיים $c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ לכל n.

ב. חשב $\limsup_n\left\{c_n^{1/n}\right\}$

80.519
תשנ"ז/א

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

פונקציות מרוכבות (80519)

מועד א' תשנ"ז
המורה: ד"ר ג. לוין

הזמן: שעתיים

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות:

1. א. תהי f הולומורפית בסביבה מנוקבת של נקודה z=0.
האם הטענות הבאות נכונות:
אם 0 הוא קוטב של f, אז 0 הוא קוטב של 'f.
אם 0 הוא קוטב של 'f, אז 0 הוא קוטב של f.

ב. הראו כי לא קיימת העתקה פשוטה של עיגול היחידה על המישור C.

2. יהי 0 הוא אפס מסדר 2 של פונקציה f(z) ההולומורפית בסביבה של z=0.
הוכיחו כי קיימת פונקציה $\varphi(z)$ הולומורפית סביב z=0 כך ש-0 הוא אפס פשוט של φ וקיים: $f(z)=[\varphi(z)]^2$

3. נסחו והוכיחו את המשפט על פונקציה קדומה ואת המשפט מורירה.

4. יהי טור חזקות $f(z)=z^2+a_3z^3+\dots$
מתכנס בעיגול היחידה $\{|z|<1\}$ וקיים: $|f(z)|<1$ עבור כל z.
הוכיחו כי
$$|f(z)|\le|z|^2$$

5. חשבו את
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^4}$$

6. כמה פתרונות יש למשוואה $z^2=ie^{z-1}$
בעיגול הסגור $\{|z|\le1\}$?

בהצלחה

5. תהי f הולומורפית ב- C, ומקיים: $f(z)\neq 0$ עבור כל $z\in C$. הוכח שקיימת פונקציה g הולומורפית ב- C כך שעבור $z\in C$, $f(z)=e^{g(z)}$.

6. יהי P ריבוע במישור.
   א. הוכח שקיימת העתקה פשוטה (כלומר, הולומורפית וחד-חד-ערכית) של P על חצי המישור העליון.
   ב. האם קיימת העתקה פשוטה של P על המישור? נמק תשובתך.

7. א. ידוע שלכל 3 נקודות z_1, z_2, z_3 או שהן נמצאות על ישר או על מעגל.
   מהו תנאי הכרחי ומספיק ש- 4 נקודות ימצאו על ישר או מעגל?
   ב. הוכח שהתנאי ב- א) אינוריאנטית תחת העתקות מביוס כלומר שהתנאי מתקיים עבור 4 הנקודות $M(z_1), M(z_2), M(z_3), M(z_4)$ כאשר M העתקת מביוס.
   ג. הוכח בעזרת א) שהעתקת מביוס מעבירה ישרים ומעגלים לישרים ומעגלים.

בהצלחה!