סיכום: אינפי 2

סשה גולדשטיין, sashag@cs

20 ביוני 2010

תקציר

מסמך זה הוא סיכום ההרצאות של מר איתמר צביק ושיעורי התרגול של מר אורי פרזנצ'בסקי. זהו לא מסמך רשמי של סגל הקורס, והשימוש בו הוא על אחריותכם בלבד. עם זאת, אשמח לקבל הערות, תיקונים והרחבות על מנת לייצג נאמנה את חומר הלימוד, לכתובת sashag@cs.

שימו לב: המקור הרשמי היחיד למסמך זה הוא האתר של דינה זיל, שם גם יפורסמו עדכונים ותיקונים במידת הצורך.

Errors are the portals of discovery.

James Joyce

1 קירובים פולינומיאליים

הפונקציות שעסקנו בהן, כגון האקספוננט e^x, הפונקציות הטריגונומטריות הן מורכבות יחסית. קירובים פולינומיאליים נועדו להקל מעט את החישובים עם פונקציות כאלה. בדרך נרצה גם לדעת מה הטעות של הקירוב שקיבלנו.

ראינו בסמסטר הקודם קירוב ליניארי (דיפרנציאביליות), שם הייתה לנו משוואת המשיק:

$$l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

הקירוב מסדר ראשון הטוב ביותר של הפונקציה בנקודה a. ראינו שמבין כל הישרים העוברים דרך $(a, f(a))$, הישר המקיים:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-mx-n}{x-a} = 0 \tag{1}$$

הוא רק המשיק לפונקציה בנקודה, כלומר לא זו בלבד שמתקיים $f(x)-mx-n \to 0$ אלא אפילו כאשר מחלקים ביטוי זה ב־ $x-a$ הוא עדיין שואף ל־ 0. באופן דומה אפשר לחפש את הפרבולה הקרובה ביותר לפונקציה בסביבת הנקודה, את הפונקציה ממעלה שלישית וכד'. ניתן להכליל את (1) לפולינום כלשהו, ולדרוש שאם $p(x)$ פולינום ממעלה n המקרב את הפונקציה, אז יתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n}=0$$

כיצד ניתן לבנות פולינום כזה? ובכן, אם f בעצמה היא פולינום, אפשר לעשות את זה בקלות באמצעות נגזרות. למשל, נניח:

$$p(x)=\pi+e\cdot x-\sqrt{2}\cdot x^2+\ln 5\cdot x^3$$

נשתמש בנגזרות של p כדי לחשב את המקדמים שלו:

$$\begin{aligned}
p(0)&=\pi\\
p'(x)&=e-\sqrt{2}\cdot 2x+\ln(5)\cdot 3x^2\\
p'(0)&=e\\
p''(x)&=-\sqrt{2}\cdot 2\cdot 1+\ln(5)\cdot 3\cdot 2x\\
p''(0)&=-\sqrt{2}\cdot 2\cdot 1\\
p'''(x)&=\ln(5)\cdot 3\cdot 2\cdot 1\\
p'''(0)&=\ln(5)\cdot 3\cdot 2\cdot 1
\end{aligned}$$

אפשר לשחזר את הפולינום לפי המקדמים האלה באמצעות הנוסחא הבאה, שניתן להוכיח באינדוקציה:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\deg(p)}\frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

אפשר גם לעשות אותו הדבר בנקודה אחרת שאינה 0, על ידי:

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\deg(p)}\frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

1.1 פולינום טיילור

הגדרה 1.1 תהי f פונקציה בעלת נגזרות מסדר n (כאשר $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) בנקודה a. הפולינום

$$T_n(x)=\frac{f(a)}{0!}+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

נקרא פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה f בנקודה a.

הערה 1.2 1. קיום $f^{(n)}(a)$ מניח ש־ $f^{(n-1)}(a)$ מוגדרת בסביבה של a. לעומת זאת, כמובן, $f^{(n)}(a)$ יכולה להיות קיימת רק ב־ a.

2. הפולינום T_n אינו בהכרח ממעלה n. למעשה, $\deg T_n \leq n$. למשל, אם $f^{(n)}(a) = 0$ אז $\deg T_n = \deg T_{n-1}$.

3. אם ניקח את פולינום טיילור מסדר n של f, נסמנו $(T_n f)(x)$ ונגזור אותו, אז נקבל את הזהות:

$$(T_n f)' = T_{n-1} f'$$

למעשה, באופן כללי יותר מתקיים:

$$T_{n-j} f^{(j)} = (T_n f)^{(j)}$$

ואפשר להוכיח את זה ישירות מהגדרת פולינום טיילור ע"י גזירה שלו. זה אומר שבניית פולינום טיילור עבור הפונקציה בסביבת הנקודה תאפשר לנו גם בניית פולינום טיילור עבור הנגזרות של הפונקציה בסביבת הנקודה.

כעת נראה כמה דוגמאות:

1. ניקח $f(x) = e^x$ ב־ $a = 0$. זה כמובן קל מאוד, שהרי הנגזרת היא הפונקציה עצמה, ונקבל:

$$T_n(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1 \cdot x^2}{2!} + \cdots + \frac{1 \cdot x^n}{n!}$$

2. נסמן $f(x) = \cos x$ ב־ $a = 0$. כאן הנגזרת היא מחזורית, וחוזרת להיות $\cos x$ מדי ארבע פעולות גזירה. לכן הפולינומים המתקבלים יהיו:

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = 1 + 0 \cdot x = 1 \quad T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} \quad T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

הגדרה 1.3 נסמן את השארית המייצגת את שגיאת הקירוב:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

משפט 1.4 (משפט טיילור) תהי f פונקציה גזירה n פעמים (כאשר $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) ב־ a, אז מתקיים:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

הוכחה: בעצם עלינו להוכיח שמתקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

נפעל באינדוקציה על n. ראשית נבדוק את המקרה $n=0$. במקרה כזה, נתון ש־ $f^{(0)}(a)$ קיימת. זה אומר (וזו הגדרה שלנו) ש־ f מוגדרת בסביבה של a ורציפה ב־ a (זה לא נובע כמובן מ"הגדרת" $f^{(0)}$ בשום צורה). במקרה זה הפולינום הוא $T_0(x)=f(a)$ וכמובן הוא מקיים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^0}=\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=0$$

בגלל רציפות f ב־ a. נבדוק גם את המקרה $n=1$ לשם בהירות. כאן מניחים ש־ f גזירה ב־ a, כלומר היא מוגדרת בסביבה של a ורציפה ב־ a. כאן הפולינום הוא

$$T_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

ונחשב:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))}{(x-a)^1}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right]=f'(a)-f'(a)=0$$

כאשר המעבר לפני האחרון מתבסס כמובן על ההנחה ש־ f גזירה ב־ a.

כעת נניח שהמשפט נכון לגבי פולינום טיילור עד סדר k של פונקציה כלשהי, ונוכיח שהוא נכון עד סדר $k+1$ של הפונקציה. נכתוב:

$$T_{k+1}(x)=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

ואז כמובן עלינו לחשב את:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_{k+1}(x)}{(x-a)^{k+1}}\tag{2}$$

נרצה להפעיל את כלל לופיטל, וכדי לעשות את זה צריך להראות שהמונה והמכנה שניהם שואפים ל־ 0. ברור שהמכנה שואף ל־ 0, נראה שכך גם המונה:

$$\lim_{x\to a}R_{k+1}(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)-\sum_{i=0}^{k+1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\right)=$$
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\sum_{i=2}^{k+1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\right)=0$$

המעבר האחרון נכון כי כמובן $0 \to (x-a)$ כאשר $x \to a$ ובגלל הרציפות גם $f(x) \to f(a)$ בתנאי זה. לכן אפשר להפעיל את כלל לופיטל. לפי הכלל, נרצה לחשב את:

$$\lim_{x\to a} \frac{R'_{k+1}(x)}{(k+1)(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!}(x-a)^{i-1}}{(k+1)(x-a)^k}$$

זה כמובן פשוט, כי $R'_{k+1}f = R_k f'$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה (שהרי יש לנו פולינום טיילור מסדר k של הפונקציה f'), הגבול הזה הוא 0. לכן גם (2) הוא 0 לפי כלל לופיטל. ■

הגדרה 1.5 נאמר ש־ $f \in \mathcal{C}^k(I)$ אם f בעלת k נגזרות רציפות ב־ I. (עבור $k=0$ המשמעות היא ש־ f רציפה ב־ I).

1.2 שארית לגרנז'

לפי משפט לגרנז' בקטע $[x,a]$ אפשר לקבל הערכה על ערך השגיאה של הקירוב מסדר 0 שבנינו קודם, אם ידוע בנוסף שהנגזרת חסומה. דהיינו, אם f' חסומה בערך מוחלט ע"י איזה M אז נוכל לומר:

$$f(a) - M(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + M(x-a)$$

אם יודעים משהו גם על חסימות הנגזרת השנייה, נוכל לחזור על אותו התהליך עבור פולינום טיילור מסדר ראשון:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{M}{2}(x-a)^2 \leq f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{M}{2}(x-a)^2$$

כאשר ההנחה היא ש־ f'' חסומה בערך מוחלט ע"י איזה M. באופן כללי נוכל לומר:

משפט 1.6 תהי $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ בקטע פתוח, ויהיו $a, x \in I$. אז קיים ξ בין x לבין a המקיים:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

הוכחה: באינדוקציה על n. נתחיל עם $n=0$. במקרה זה ידוע רק שהפונקציה גזירה ברציפות בקטע, ומתקיים:

$$f(x) - T_0(x) = f(x) - f(a)$$

לפי משפט לגרנז', קיימת נקודה ξ כנ"ל כך שמתקיים:

$$f(x)-f(a)=\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1$$

כפי שרצינו. כעת נניח את נכונות המשפט עבור $n \geq 1$, כלומר עבור פונקציות ב־ $\mathcal{C}^{n+1}(I)$.
נבנה את הפונקציות החדשות:

$$h(x)=f(x)-T_n(x) \qquad\qquad k(x)=(x-a)^{n+1}$$

נרצה להשתמש במשפט קושי, ונשים לב שהפונקציה $k(x)$ לא מתאפסת בין x לבין a, וגזירה כמה פעמים שרוצים בתור פולינום, ואילו הפונקציה $h(x)$ גזירה כי $n \geq 1$ בתור סכום של פונקציות גזירות. לכן אנחנו עומדים בתנאי משפט קושי ולפיו:

$$\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{f'(\gamma)-T_n'(\gamma)}{(n+1)(\gamma-a)^n}=$$

כעת הפונקציה f' עומדת בתנאי הנחת האינדוקציה ולכן קיים ξ בקטע בין a לבין η המקיים:

$$=\frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(\gamma-a)^n}{(n+1)(\gamma-a)^n}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

וכעת אם מעבירים אגפים מהביטוי ההתחלתי מקבלים בדיוק:

$$f(x)-T_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

כפי שרצינו, ולכן השלמנו את האינדוקציה. ■

מספר שימושים:

1. נמצא קירוב ל־ $\sqrt{1.1}$. נגזור את הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ ונבחר $a=1$. ע"פ הקירוב מסדר 0, כאשר $1<\xi<1.1$ נוכל לקבל:

$$\sqrt{1.1}-\sqrt{1}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(1.1-1)$$

לפי ההערכה על ξ, נקבל:

$$|\sqrt{1.1}-\sqrt{1}|\leq 0.05$$

2. באופן דומה, נחשב קירוב ל־ $\sin(0.1)$. נגדיר את הפונקציה כמו קודם סביב אותה נקודה, וכעת נקבל:

$$\sin(0.1) - 0.1 = \frac{\sin''(\xi)}{2!}(0.1-0)^2$$

זאת משום ש־ x הוא פולינום טיילור מסדר 1 של $\sin x$ סביב 0. כעת מהערכת השגיאה על ξ נוכל לקבל:

$$|\sin(0.1) - 0.1| \le \frac{1}{2}\frac{1}{100}$$

נשים לב ש־ x הוא לא רק $T_1(x)$ אלא גם $T_2(x)$ במקרה של $\sin x$, ולכן אנחנו אפילו יודעים משהו יותר חזק, דהיינו:

$$|\sin(0.1) - 0.1| \le \frac{1}{6}\frac{1}{1000}$$

שזה קירוב הרבה יותר מדויק.

הגדרה 1.7 (לנדאו) אומרים ש־ $f(x) = o(g(x))$ אם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ כאשר a יכול להיות ממשי או $\pm\infty$.

כמו כן אומרים ש־ $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ אם קיים קבוע $0 < K$ כך ש־ $|f(x)| \le K|g(x)|$ בסביבה מסוימת של נקודה כלשהי, בקרן כלשהי, או בכל הישר.

הערה 1.8 ראינו ש־ $f(x)-T_n(x) = o\big((x-a)^n\big)$ וגם ש־ $f(x)-T_n(x) = \mathcal{O}\big((x-a)^{n+1}\big)$ (המשפט הקודם, תחת ההנחה שהנגזרת חסומה). התנאי השני גורר את התנאי הראשון.

משפט 1.9 יהיו $P(x), Q(x)$ פולינומים ממעלה $\le n$, ומתקיים $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0$ וגם $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. אז $P(x) \equiv Q(x)$ (כלומר הם אותו הפולינום).

הוכחה: כיוון שהגבולות הנ"ל קיימים, נוכל לומר:

$$0 = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} - \frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}\right] = \lim_{x\to a}\frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n}$$

כעת נסמן $R(x) = P(x) - Q(x)$. גם כאן $\deg R \le n$ ולכן נותר להראות שאם $\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$ אז $R(x) \equiv 0$. את זה אפשר להראות באינדוקציה על n. נניח $R(x) = b_0 + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n$. נשים לב שעבור $j = 0, 1, \ldots, n$ מתקיים גם $\lim_{x\to a}(x-a)^j\frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$ בגלל אריתמטיקה של גבולות.

אם ניקח $j = n$ אז יש לנו $0 = \lim_{x\to a} R(x)$ וכיוון שהפולינום הוא פונקציה רציפה, מכאן $0 = R(a) = b_0$. כלומר הראינו ש־ $b_0 = 0$. עכשיו קיבלנו שהפולינום הוא בעצם מן הצורה הבאה, לאחר הוצאת גורם משותף:

$$R(x) = b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n = (x-a)\big[b_1 + b_2(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^{n-1}\big]$$

לכן אנחנו מקבלים:

$$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{b_1 + \ldots + b_n(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}$$

עכשיו אפשר להפעיל את אותו השיקול כמו קודם עם $j = n-1$ ונקבל ש־ $b_1 = 0$. כך נמשיך עד שנראה שכל המקדמים של $R(x)$ חייבים להיות 0 ולכן כמובן $R(x) \equiv 0$ ולכן $P(x) \equiv Q(x)$ כנדרש. ■

מסקנה 1.10 פולינום טיילור הוא יחיד. כלומר, אם נמצא פולינום מדרגה מתאימה כך שהשארית מתנהגת כמו $o\big((x-a)^n\big)$ אז הפולינום הזה הוא פולינום טיילור של הפונקציה.

נראה מספר שימושים. ידוע הטור הגיאומטרי:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

רואים מכאן שאם ניקח $f(x) = \frac{1}{1-x}$ אז הרי יש לנו את פולינום טיילור מסדר n של f סביב 0 ואת השארית שלו. כדי לטעון שאכן מדובר בפולינום טיילור, די להראות שהשארית היא אכן $o(x^n)$ וזה מתקיים במקרה שלנו, שהרי:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

מכאן אפשר לקבל כמה מסקנות. אם נכתוב $-x$ במקום x אפשר לקבל:

$$\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$$

ושוב רואים שמדובר בפולינום טיילור, הפעם של הפונקציה $\frac{1}{1+x}$. הפונקציה הזאת היא בעצם הנגזרת של $\ln(1+x)$ ולכן מהחישובים שלנו קיבלנו את פולינום טיילור שלה סביב 0, שהרי אם נסמן $g(x) = \ln(1+x)$ יש לנו:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \quad g''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad g'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

ורואים כבר:

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

מכאן אפשר לפתח את פולינום טיילור מסדר n של g. כיוון שאת פולינומי טיילור של הנגזרת שלה כבר חישבנו, אנחנו מכירים את כל פולינומי טיילור של הנגזרות של g ולכן אפשר לעשות אינטגרל של פולינום טיילור של $\frac{1}{1+x}$ ולקבל את פולינום טיילור של $\ln(1+x)$.

באופן דומה אפשר להסתכל על $\frac{1}{1+x^2}$ שהיא הנגזרת של $\arctan x$, ולהמשיך לקבל משפחה שמחה של פונקציות נוספות.

טענה 1.11 (ללא הוכחה) אם $f,g \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ ונתון:

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x) \quad g(x) = T_n g(x) + R_n g(x)$$

אז מתקיים:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= (T_n f(x) + T_n g(x)) + (R_n f(x) + R_n g(x)) \\
(a \cdot f)(x) &= a \cdot T_n f(x) + a \cdot R_n f(x) \\
(f \cdot g)(x) &= T_n f(x) \cdot T_n g(x) + \ldots
\end{aligned}$$

כאשר בכל המקרים (סכום פונקציות, מכפלת פונקציה בקבוע, מכפלת פונקציות) פולינום טיילור של התוצאה המורכבת הוא הפעלת הפעולה על פולינומי טיילור של הפונקציות המקוריות.

משפט 1.12 תהי f גזירה n פעמים ב־ a ומקיימת:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad\qquad f^{(n)}(a) \neq 0$$

אז אם n זוגי, ל־ f נקודת קיצון ב־ a, כאשר אם $f^{(n)}(a) > 0$ זו נקודת מינימום ואחרת זו נקודת מקסימום; ואם n אי־זוגי, אז ל־ f אין נקודת קיצון ב־ a.

הוכחה: נכתוב את פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה ב־ a: (נזכור שרוב המקדמים בפולינום הם 0)

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ידוע לנו שמתקיים $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n f(x)}{(x-a)^n} = 0$ ומכאן נסיק:

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left[f(a) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n\right]}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\Big[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\Big]$$

לכן מקבלים:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

כעת קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$ אז הסימן של אגף שמאל שווה לסימן של אגף ימין. כעת אם n זוגי אז המכנה באגף שמאל חיובי, ולכן הסימן של אגף שמאל נקבע לפי הסימן של $f(x)-f(a)$. כלומר, אם הנגזרת (אגף ימין) חיובית אז $f(x)>f(a)$ ולהיפך, מה שמשכנע אותנו שמדובר בנקודת מינימום (מקסימום).
במקרה ש־ n אי־זוגי, מקבלים באופן דומה שהפונקציה עולה ב־ a או יורדת ב־ a, ולכן בוודאי שזו לא נקודת קיצון. ■

1.3 פולינום האינטרפולציה

בהינתן פונקציה ומידע על שתי נקודות על הגרף שלה, אפשר בקלות לבנות ישר העובר דרך שתי הנקודות. אם יש יותר נקודות, נרצה למצוא פולינום העובר דרך כל הנקודות שיקרב את הפונקציה גם בין הנקודות האלה.

הגדרה 1.13 יהיו $x_0,\dots,x_n,y_0,\dots y_n$ מספרים ממשיים כך ש־ $x_0<x_1<\dots<x_n$. פולינום האינטרפולציה (של לגרנז') מסדר n הוא הפולינום הבא, המקבל בכל x_i את הערך y_i:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

הערה 1.14 אפשר לבנות את פולינום האינטרפולציה באופן אינדוקטיבי. נתחיל מפולינום כך ש־ $q_0(x_0)=y_0$, כלומר $q_0(x)\equiv y_0$. נניח שבנינו q_k פולינום כך שלכל $0\le i\le k$ מתקיים $q_k(x_i)=y_i$. עכשיו בונים את q_{k+1}:

$$q_{k+1}(x)=q_k(x)+c(x-x_0)\cdots(x-x_k)$$

צריך לבחור את c כך ש־ $q_{k+1}(x_{k+1})=y_{k+1}$, כלומר:

$$c=\frac{y_{k+1}-q_k(x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_0)\cdots(x_{k+1}-x_k)}$$

טענה 1.15 יהיו $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ מספרים ממשיים. אם הפולינומים $p(x),q(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ וידוע ש־ $p(x_i)=q(x_i)$ לכל i, אזי מתקיים $p(x)\equiv q(x)$.

הוכחה: נתבונן ב־ $f(x)=p(x)-q(x)$. זהו פולינום ממעלה n המתאפס ב־ $n+1$ נקודות שונות (כל x_i). נראה שזה לא ייתכן באמצעות משפט רול.

תחילה נראה שאם $f\in\mathcal{C}^n(I)$ מתאפסת ב־ $n+1$ נקודות שונות, אזי $f^{(n)}$ מתאפסת בקטע הפתוח הקטן ביותר המכיל את כל האפסים של f. נעשה את זה באינדוקציה על n. עבור $n=1$ זהו משפט רול. נניח עבור $n-1$. כעת אם $f\in\mathcal{C}^n(I)$ ו־ $x_0<\ldots<x_n$ השורשים השונים שלה בקטע, אז נפעיל את משפט רול לכל אחד מהקטעים $[x_i,x_{i+1}]$ ונקבל שורשים $t_i\in(x_i,x_{i+1})$ של f'. כעת נשים לב ש־ f' מקיימת את הנחת האינדוקציה ולכן $f'^{(n-1)}$ מתאפסת בקטע הפתוח כנ"ל, אבל הרי $f^{(n)}\equiv f'^{(n-1)}$ ולכן קיבלנו את הדרוש.

כעת נראה שאם $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ מתאפס ב־ $n+1$ נקודות שונות, אזי $p(x)\equiv 0$. שוב נעשה את זה באינדוקציה. עבור $n=0$, כמובן $p(x)=a_0$ ואם קיים x_0 שם $p(x_0)=0$ אז $p(x)\equiv 0$. נניח עבור $n-1$. כעת אם $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ אז לפי ההוכחה הקודמת, $p'(x)$ מתאפס ב־ n נקודות שונות, כלומר לפי הנחת האינדוקציה $p'(x)\equiv 0$. כיוון שכך, $p(x)$ קבועה ולכן חזרנו למקרה $n=0$ שם ראינו כבר ש־ $p(x)\equiv 0$. ■

משפט 1.16 יהיו $a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$ מספרים, ו־ $f\in\mathcal{C}^{n+1}(a,b)$ פונקציה. יהי $L_n(t)$ פולינום לגרנז' מסדר n המקיים לכל i, $L_n(x_i)=f(x_i)$. אזי לכל $x\in I$ קיים $\xi\in I$ המקיים:

$$f(x)=L_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

הוכחה: נתבונן בפונקציה הבאה:

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-c(t-x_0)\cdots(t-x_n)$$

כאשר עבור $x\in I$ נתון וידוע מראש נבחר $c\in\mathbb{R}$ עם התכונה $\varphi(x)=0$, כאשר x שונה מכל x_i. נשים לב ש־ $\varphi\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$ שהרי הפולינומים שחיסרנו גזירים אינסוף פעמים.

כעת φ מתאפסת בכל הנקודות $x,x_0,x_1,\ldots,x_n$, כלומר ב־ $n+2$ נקודות שונות. לכן לפי הוכחת הטענה הקודמת, קיים $\xi\in I$ שם $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$, כלומר:

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-0-(n+1)!c$$

מכאן מקבלים: $c=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, כלומר:

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(t-x_0)\cdots(t-x_n)$$

עכשיו אם נציב את x במקום t נקבל בדיוק את מה שרצינו. ■

משפט 1.17 תהי $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. לכל $a,b \in I$ קיים $\xi \in (a,b)$ המקיים:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

הוכחה: נתבונן בביטוי הבא כתלות ב־ t:

$$f(b) = f(t) + f'(t)(b-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-a)^n + R_n(b,t)$$

ונרצה לראות כיצד משתנה השארית בהתאמה. נשים לב שכאשר $t=b$, כמובן $R_n(b,b)=0$. כש־ $t=a$, מקבלים את $R_n(b,a)$ שהיא השארית שאנחנו מחפשים. אם נגזור את שני האגפים של הביטוי הנ"ל, נקבל:

$$0 = f'(t) + \Big[-f'(t) + f''(t)(b-t)\Big] + \Big[-\frac{2}{2!}(b-t)f''(t) + \frac{f'''(t)}{2!}(b-t)^2\Big] + \cdots +$$
$$+ \Big[-\frac{n}{n!}(b-t)^{n-1}f^{(n)}(t) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\Big] + R_n'(b,t)$$

כלומר, קיבלנו ש:

$$R_n'(b,t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n$$

עכשיו נפעיל את משפט קושי עבור הפונקציה $h(t)=R_n(b,t)$ במונה ו־ $g(t) = (b-t)^{n+1}$ במכנה, בקטע $[a,b]$. כמובן המונה גזיר כהפרש של פונקציות גזירות, והמכנה לא מתאפס בקטע הפתוח כנדרש לפי המשפט:

$$\frac{h(b)-h(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{R_n(b,b)-R_n(b,a)}{0-(b-a)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)(b-\xi)^n}{-(n+1)(b-\xi)^n}\frac{1}{n!}$$

כאשר כאן $\xi \in (a,b)$. אבל כעת לאחר צמצום והעברת אגפים מקבלים בדיוק:

$$R_n(b,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

כפי שרצינו. ■

1.4 שיטת ניוטון (ניוטון־רפסון)

המטרה שלנו כאן היא לקרב שורש של פונקציה ע"י העברת משיק בנקודה שרירותית והסתכלות על הנקודה המקבילה על ציר ה־ x. שיטה זו מהירה משמעותית משיטת החצייה שלמדנו בהוכחת משפט ערך הביניים באמצעות הלמה של קנטור, אולם מצד שני היא לא תמיד תעבוד. כלומר, לא בהכרח נקבל סדרת נקודות המתכנסת ולא בהכרח נקבל סדרת נקודות המתכנסת לשורש של הפונקציה.

משפט 1.18 תהי $f \in \mathcal{C}^2(I)$. הנקודה $r \in I$ מקיימת $f(r) = 0$ ונניח גם ש־ $f' > 0$ בקטע. לכל $x_0 \in I$ נגדיר את הסדרה (לפי משוואת הישר המשיק) הבאה:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

במקרה זה קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x_0 - r| < \delta$ אז $\{x_n\} \subset (r-\delta, r+\delta) \subset I$ והסדרה (x_n) מתכנסת ל־ r.

הוכחה: לפי צורת השארית של לגרנז' עם פולינום טיילור מסדר ראשון של f סביב x_n אפשר לקבל:

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(t_n)}{2}(r - x_n)^2$$

כאשר כאן t_n בין r לבין x_n. לפי הבנייה,

$$x_{n+1} - r = x_n - r - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

לפי צורת לגרנז' הנ"ל,

$$x_n - r = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2}\frac{f''(t_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

משני הביטויים,

$$x_{n+1} - r = \frac{1}{2}\frac{f''(t_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 = \frac{1}{2}\frac{f''(t_n)}{f'(x_n)}(x_n - r)^2$$

אם נסמן $e_n = x_n - r$ אז הרי קיבלנו ש־ $e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(t_n)}{f'(x_n)}e_n$. כעת יהי $\eta > 0$ כך ש־ $[r-\eta, r+\eta] \subset I$ ונקרא לקטע הזה I^*. כעת יהיו $K = \max_{I^*}\{|f''|\}$ ו־ $k = \min_{I^*}\{f'\} > 0$ (לפי ההנחה). מזה נקבל:

$$|e_{n+1}| = \frac{1}{2}\frac{|f''(t_n)|}{f'(x_n)}e_n^2 \leq \frac{1}{2}\frac{K}{k}e_n^2$$

לבסוף יהי $\delta > 0$ כך ש־ $0 < \delta < \eta$ וגם $\frac{K}{k}\delta < 1$. יהי $x_0 \in I$ כך ש־ $|e_0| = |x_0 - r| < \delta$. כעת:

$$\begin{aligned}
|e_1| &\leq \frac{1}{2}\frac{K}{k}e_0^2 \leq \frac{1}{2}\frac{K}{k}\delta|e_0| < \frac{1}{2}e_0 \\
|e_2| &\leq \cdots < \frac{1}{2}|e_1| < \frac{1}{4}e_0 \\
&\vdots \\
|e_n| &\leq \cdots < \frac{1}{2^n}|e_0|
\end{aligned}$$

והמסקנה היא ש־ $e_n \to 0$ כלומר $x_n \to r$ כנדרש. ■

הערה 1.19 המשפט נכון גם אם $f' < 0$ בקטע, ואז כמובן יש להסתכל על $k = \min_{I^*}\{|f'|\}$ שם.

2 אינטגרציה

בהינתן תת־מישור R נרצה להגדיר פונקציית מידה (שטח) μ כך ש־ $\mu(R) \in \mathbb{R}$, ונרצה שיהיו לה התכונות:

1. חיוביות $\mu \geq 0$
2. מונוטוניות $R \subseteq S \implies \mu(R) \leq \mu(S)$
3. אדיטיביות $\mu(R) + \mu(S) = \mu(R \cup S)$ בהנחה ש־ R, S זרים
4. עבור מלבן, פונקציית המידה צריכה להחזיר את אורך המלבן כפול רוחבו

היינו רוצים גם שהזזה וסיבוב ישמרו על המידה μ.

2.1 האינטגרל של רימן, סכומי דרבו

הגדרה 2.1 חלוקה של קטע $[a, b]$ הינה קבוצה סופית סדורה של נקודות $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ המקיימת:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

החלוקה הגסה ביותר היא $\mathcal{P}=\{a,b\}$. נתייחס הרבה גם לחלוקה האוניפורמית (ההומוגנית) עם n קטעים:

$$\mathcal{P}=\{a,a+\frac{b-a}{n},a+2\frac{b-a}{n},\dots,b\}$$

הגדרה 2.2 תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$ ו־ $\mathcal{P}$ חלוקה של הקטע. אזי:

$$\begin{aligned}
M_i &= \sup\{f(t):x_{i-1}\le t\le x_i\}\\
m_i &= \inf\{f(t):x_{i-1}\le t\le x_i\}\\
\mathcal{U}(\mathcal{P}) &= M_1(x_1-x_0)+\ldots+M_n(x_n-x_{n-1})\\
\mathcal{L}(\mathcal{P}) &= m_1(x_1-x_0)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1})
\end{aligned}$$

ולפעמים נסמן גם $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.
הסכומים $\mathcal{U}(\mathcal{P}),\mathcal{L}(\mathcal{P})$ נקראים סכום דרבו העליון והתחתון של הפונקציה ביחס לחלוקה.

הערה 2.3 ברור ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P})\ge\mathcal{L}(\mathcal{P})$, ויתר על כן, אם $m\le f\le M$ בקטע אזי:

$$m(b-a)\le\mathcal{L}(\mathcal{P})\le\mathcal{U}(\mathcal{P})\le M(b-a)$$

כמו כן, נשים לב שאם נגדיר:

$$\begin{aligned}
L(f) &= \{\mathcal{L}(\mathcal{P}):\mathcal{P}\quad \text{partition}\}\\
U(f) &= \{\mathcal{U}(\mathcal{P}):\mathcal{P}\quad \text{partition}\}
\end{aligned}$$

אז $L(f)\neq\emptyset$ וגם $U(f)\neq\emptyset$ ומתקיים $L(f)\le U(f)$ ולכן $\sup L(f)\le\inf U(f)$.

כיוון שיהיה לנו דיון על קבוצות שיוצרות חתך, ניזכר בלמת החתכים מהסמסטר הראשון:

למה 2.4 (למת החתכים, ללא הוכחה) יהיו $L\le U$ שתי קבוצות לא ריקות. אז התנאים הבאים שקולים:

1. קיים c יחיד כך שלכל $l\in L,\ u\in U$ מתקיים $l\le c\le u$
2. $\sup L=\inf U$
3. לכל $\varepsilon>0$ קיימים $l\in L,\ u\in U$ כך ש־ $u-l<\varepsilon$

הגדרה 2.5 פונקציה $f\in\mathcal{B}[a,b]$ תיקרא אינטגרבילית ב־ I אם קיים מספר $I\in\mathbb{R}$ יחיד המקיים $\mathcal{L}(\mathcal{P})\le I\le\mathcal{U}(\mathcal{Q})$ לכל $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ חלוקות של הקטע.
תנאי שקול להגדרה זו (לפי למת החתכים מהסמסטר הקודם) הוא ש־ $\sup L(f)=\inf U(f)$. ל־ $\sup L(f)$ נוהגים לקרוא אינטגרל דרבו התחתון ול־ $\inf U(f)$ נוהגים לקרוא אינטגרל דרבו העליון.

למה 2.6 נניח שהחלוקה $\mathcal{Q}$ מתקבלת מהחלוקה $\mathcal{P}$ ע"י הוספת איבר אחד. אזי מתקיים:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(\mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{P})$$

הוכחה: תהי $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$. קיים אינדקס j יחיד כך ש־ $x_{j-1} < y < x_j$ ו־ $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{y\}$. כעת נכתוב את הידוע לנו:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i + m_j \Delta x_j = \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i + m_j \Big[(y - x_{j-1}) + (x_j - y)\Big]$$

נסמן בתוך הקטע:

$$\begin{aligned} M' &= \sup\{f(t) : x_{j-1} \leq t \leq y\} \\ M'' &= \sup\{f(t) : y \leq t \leq x_j\} \\ m' &= \inf\{f(t) : x_{j-1} \leq t \leq y\} \\ m'' &= \inf\{f(t) : y \leq t \leq x_j\} \end{aligned}$$

אם נמשיך את הסכום שהיה לנו קודם, נקבל:

$$\leq \sum_{i \neq j} m_i \Delta x_i + m'(y - x_{j-1}) + m''(x_j - y)$$

מה שקיבלנו זה הסכום התחתון של $\mathcal{Q}$, כלומר $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$. כלומר, קיבלנו:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(\mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{Q})$$

הצד השני סימטרי באמצעות M', M''. ■

מסקנה 2.7 נאמר שהחלוקה $\mathcal{Q}$ עידון של החלוקה $\mathcal{P}$ אם $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. באינדוקציה, אם $\mathcal{Q}$ עידון של $\mathcal{P}$ מתקיים הא"ש של הלמה.

למה 2.8 יהיו $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ חלוקות של הקטע $[a,b]$. אזי $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{Q})$.

הוכחה: אפשר לבנות את החלוקה $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ שהיא עידון של שתי החלוקות האלה. לכן לפי המסקנה הקודמת,

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{Q})$$

ומכאן הדרוש. ■

משפט 2.9 (משפט רימן, תנאי רימן לאינטגרביליות) $f \in \mathcal{B}[a,b]$ אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ אסם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \varepsilon$.

הוכחה: $(\Rightarrow)$ ניקח $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ ואז לפי למת החתכים, f אינטגרבילית.
$(\Leftarrow)$ לפי הגדרת האינטגרביליות, קיימות חלוקות $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P}') - \mathcal{L}(\mathcal{P}'') < \varepsilon$, לפי למת החתכים. תהי כעת החלוקה $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$ שהיא עידון של שתי החלוקות הנ"ל. לכן:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}') \leq \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}'')$$

כמובן מכאן $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \varepsilon$ כנדרש. ■

הגדרה 2.10 אם f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$ אז נכתוב $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ונסמן $\int_a^b f$ את המספר היחיד מהגדרת האינטגרביליות.

כמה דוגמאות:

1. פונקציות קבועות $f(x) = c$ הן אינטגרביליות בכל קטע $[a,b]$. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה כלשהי, אז הרי:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c x_i = c(b-a)$$

באופן דומה $\mathcal{U}(\mathcal{P}) = c(b-a)$ ולכן כמובן האינטגרל הוא בדיוק $c(b-a)$. עבור $\varepsilon > 0$ נוכל לבחור חלוקה שרירותית כלשהי והיא תעבוד.

2. פונקציית דיריכלה $D(x)$ אינה אינטגרבילית. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה של קטע כלשהו. אזי $M_i = 1$ כי בכל קטע נמצא מספר רציונאלי. באופן דומה, $m_i = 0$. משיקולים אלה $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) = (b-a) - 0 = b-a$ לכל חלוקה, ולכן הפונקציה אינה אינטגרבילית.

3. תהי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת $f(x) = 0$ לכל $x \in [a,b] \setminus \{c\}$ ו־ $f(c) = 1$ כאשר c נקודה פנימית. כעת נשים לב שאם נבחר חלוקה $\mathcal{P} = \{a,d,e,b\}$ כאשר $d < c < e$ אזי:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathcal{P}) &= 0 + 1(e-d) + 0 = e-d \\ \mathcal{L}(\mathcal{P}) &= 0 + 0(e-d) + 0 = 0 \end{aligned}$$

כלומר תמיד $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) = e-d$. ובכן בהינתן $\varepsilon > 0$ ניקח e,d כך ש־ $e-d < \varepsilon$ ודיינו. האינטגרל המתקבל הוא כמובן 0 שהרי $\sup\{\mathcal{L}(\mathcal{P})\} = \sup\{0\} = 0$ על החלוקות שלנו, ולכן גם לכל החלוקות.

4. תהי $f(t) = t^2$ בקטע $[0,1]$. נגדיר את סדרת החלוקות האוניפורמיות $(\mathcal{P}_n)$ של הקטע. כעת נחשב:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{P}_n) &= \frac{1}{n}\Big[0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\Big] \\ \mathcal{U}(\mathcal{P}_n) &= \frac{1}{n}\Big[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2}\Big] \end{aligned}$$

וכעת כמובן $\mathcal{U}(\mathcal{P}_n)-\mathcal{L}(\mathcal{P}_n)=\frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{n}$. ההפרשים שואפים ל־ 0 ולכן הפונקציה אינטגרבילית. נותר רק לחשב את האינטגרל. נשים לב:

$$\int_0^1 t^2=\lim_{n\to\infty}\mathcal{U}(\mathcal{P}_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$$

באופן דומה מאוד אפשר לחשב גם את $\int_0^1 t$.

משפט 2.11 כל פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בו. כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בו.

הוכחה: ראשית נוכיח שאם f עולה ב־ $[a,b]$ אז היא אינטגרבילית. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה, ונשים לב שבסימונים המקובלים שלנו, מתקיים $M_i=f(x_i)$ ו־ $m_i=f(x_{i-1})$ בגלל המונוטוניות. כעת נניח שהחלוקה היא אוניפורמית, אז $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, ואז:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)=\frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)$$

עכשיו בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $n\in\mathbb{N}$ כך ש־ $n>\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ ונקבל חלוקה אוניפורמית המקיימת את תנאי רימן לאינטגרבילית. המקרה שהפונקציה יורדת סימטרי.

כעת נוכיח שאם f רציפה ב־ $[a,b]$ אז היא אינטגרבילית. נשים לב ש־ M_i,m_i מתממשים בכל קטע בגלל משפט ויירשטראס השני (שהרי הפונקציה רציפה), כלומר הם מקסימום ומינימום ולא רק סופרמום ואינפימום. כמו כן, הפונקציה רציפה במ"ש לפי משפט קנטור, כך שבהינתן $\varepsilon>0$ נוכל להפיק $\delta>0$ המקיימת את דרישות הרצבמ"ש. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה עם התכונה: $\max\{\Delta x_i\}<\delta$. במקרה זה,

$$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon(b-a)$$

כעת חסמנו את ההפרש ע"י $\varepsilon(b-a)$, אז לצורך אלגנטיות ניתן מלכתחילה לבחור δ המתאים ל־ $\frac{\varepsilon}{b-a}$. בזאת סיימנו. ■

משפט 2.12 יהיו $f,g\in\mathcal{B}[a,b]$. אזי:

1. אם $0\le f\in\mathcal{R}[a,b]$ אזי $0\le\int_a^b f$ (חיוביות)
2. אם $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ ו־ $f\le g$ אז $\int_a^b f\le\int_a^b g$ (מונוטוניות)
3. אם $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ ו־ $k\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$ וכן $\int_a^b(kf)=k\int_a^b f$ (ליניאריות)

הוכחה: (1) הוא מקרה פרטי של (2) כאשר $f \equiv 0$ ו־ g אינטגרבילית וחיובית.
(2) תהי $\mathcal{P}$ חלוקה, $m_i(f) \leq M_i(g)$ מהנתון, ולכן:

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \sum m_i(f)\Delta x_i \leq \sum M_i(g)\Delta x_i = \mathcal{U}(g,\mathcal{P})$$

ולכן כמובן גם

$$\int_a^b f = \sup_{\mathcal{P}}\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P})\} \leq \inf_{\mathcal{P}}\{\mathcal{U}(g,\mathcal{P})\} = \int_a^b g$$

כפי שרצינו.
(3) תהי $\mathcal{P}$ חלוקה. נשים לב:

$$M_i(f) + M_i(g) \geq M_i(f+g)$$

בגלל תכונות של $\sup$ על קבוצות, שהרי $\{f+g\} \subset \{f\} + \{g\}$ אבל לאו דווקא יש שוויון. באופן דומה,

$$m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f+g)$$

לכן אפשר לקבל:

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) + \mathcal{L}(g,\mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(f+g,\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f+g,\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) + \mathcal{U}(g,\mathcal{P})$$

בהינתן $\varepsilon > 0$ תהי $\mathcal{P}$ חלוקה כך ש־ $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $\mathcal{U}(g,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(g,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}$ בהסתמך על אינטגרביליות f, g. זה מתאפשר כי אם יש $\mathcal{P}_1$ ו־ $\mathcal{P}_2$ המתאימות ל־ f, g בהתאמה אז אפשר לקחת את $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. כעת החלוקה מקיימת את תנאי רימן עבור $f+g$ ולכן $f+g$ אינטגרבילית רימן. נותר רק להראות את השוויון בין האינטגרלים:
לכל חלוקה $\mathcal{P}$, מתקיים $\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P})$.
לכל חלוקה $\mathcal{P}$, מתקיים $\mathcal{L}(g,\mathcal{P}) \leq \int_a^b g \leq \mathcal{U}(g,\mathcal{P})$.
לכל חלוקה $\mathcal{P}$, מתקיים $\mathcal{L}(f+g,\mathcal{P}) \leq \int_a^b (f+g) \leq \mathcal{U}(f+g,\mathcal{P})$.
לפי כל הא"ש הקודמים נוכל לקבל:

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) + \mathcal{L}(g,\mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(f+g,\mathcal{P}) \leq \int_a^b (f+g) \leq \mathcal{U}(f+g,\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) + \mathcal{U}(g,\mathcal{P})$$

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P})+\mathcal{L}(g,\mathcal{P})\le\int_a^b f+\int_a^b g\le\mathcal{U}(f,\mathcal{P})+\mathcal{U}(g,\mathcal{P})$$

כיוון שיש מספר יחיד המקיים את התנאים הנ"ל לכל חלוקה, קיבלנו את השוויון המבוקש: $\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

לבסוף נותר להוכיח את הליניאריות בכפל בסקלר. אם $k=0$ הפונקציה היא 0 וכך גם האינטגרל. אם $0<k$ אז מתקיים $M_i(kf)=kM_i(f)$ ולכן $\mathcal{U}(kf,\mathcal{P})=k\mathcal{U}(f,\mathcal{P})$ וכנ"ל $\mathcal{L}(kf,\mathcal{P})=k\mathcal{L}(f,\mathcal{P})$. כעת לכל חלוקה $\mathcal{P}$ מתקיים:

$$\mathcal{U}(kf,\mathcal{P})-\mathcal{L}(kf,\mathcal{P})=k\big(\mathcal{U}(f,\mathcal{P})-\mathcal{L}(f,\mathcal{P})\big)$$

כעת בהינתן $\varepsilon>0$ די לבחור חלוקה $\mathcal{P}$ עבור f עם $\frac{\varepsilon}{k}$, שהרי $0<k$. במקרה $0>k$ צריך לבצע שיקוף של הפונקציה. ■

משפט 2.13 תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. לכל $a<c<b$ מתקיים: $f\in\mathcal{R}[a,b]$ אםם $f\in\mathcal{R}[a,c]$ וגם $f\in\mathcal{R}[c,b]$, ובמקרה זה גם $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ בהינתן $\varepsilon>0$ תהי $\mathcal{P}$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$. בה"כ ניתן להניח ש־ $c\in\mathcal{P}$, שהרי אפשר לעדן את החלוקה ועדיין לקבל חלוקה המקיימת את תנאי רימן. כעת יהיו $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}\cap[a,c]$ ו־ $\mathcal{P}_2=\mathcal{P}\cap[c,b]$, ואז:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\mathcal{P})&=\mathcal{U}(\mathcal{P}_1)+\mathcal{U}(\mathcal{P}_2)\\ \mathcal{L}(\mathcal{P})&=\mathcal{L}(\mathcal{P}_1)+\mathcal{L}(\mathcal{P}_2)\end{aligned}$$

ולכן

$$\big(\mathcal{U}(\mathcal{P}_1)-\mathcal{L}(\mathcal{P}_1)\big)+\big(\mathcal{U}(\mathcal{P}_2)-\mathcal{L}(\mathcal{P}_2)\big)=\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$$

לכן גם כמובן כל אחד מהמחוברים בנפרד צריך להיות $\varepsilon >$ שהרי סכומם $\varepsilon >$, כלומר הפונקציות $f|_{[a,c]}$ ו־ $f|_{[c,b]}$ מקיימות את תנאי רימן בקטעים החלקיים.

$(\Rightarrow)$ בהינתן $\varepsilon>0$ תהיינה חלוקות $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ בהתאמה של שני הקטעים, כך ש־

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\mathcal{P}_1)-\mathcal{L}(\mathcal{P}_1)&<\frac{\varepsilon}{2}\\ \mathcal{U}(\mathcal{P}_2)-\mathcal{L}(\mathcal{P}_2)&<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

אז החלוקה $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$ היא חלוקה של $[a,b]$ ומתקיים

$$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})=\big(\mathcal{U}(\mathcal{P}_1)-\mathcal{L}(\mathcal{P}_1)\big)+\big(\mathcal{U}(\mathcal{P}_2)-\mathcal{L}(\mathcal{P}_2)\big)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כלומר f אינטגרבילית ב־ $[a,b]$.

נותר רק להראות שאכן $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$, ולאחר שהראינו ששני האגפים מוגדרים היטב, נשתמש בסימונים כמו קודם:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}_1)\leq\int_a^c f\leq\mathcal{U}(\mathcal{P}_1)\qquad\qquad\mathcal{L}(\mathcal{P}_2)\leq\int_c^b f\leq\mathcal{U}(\mathcal{P}_2)$$

ולכן

$$\mathcal{L}(\mathcal{P})=\mathcal{L}(\mathcal{P}_1)+\mathcal{L}(\mathcal{P}_2)\leq\int_a^c f+\int_c^b f\leq\mathcal{U}(\mathcal{P}_1)+\mathcal{U}(\mathcal{P}_2)=\mathcal{U}(\mathcal{P})$$

אבל גם

$$\mathcal{L}(\mathcal{P})\leq\int_a^b f\leq\mathcal{U}(\mathcal{P})$$

ובשני המקרים מדובר במספר אחד ויחיד המקיים את התנאי לגבי כל חלוקה, ולכן כמובן המספרים האלה שווים, כלומר $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$. ■

משפט 2.14 תהי $f\in\mathcal{R}[a,b]$ וכן $m\leq f\leq M$ בקטע זה, ותהי $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי $g\circ f\in\mathcal{R}[a,b]$.

הוכחה: בהינתן $\varepsilon>0$ לפי תנאי רימן עלינו להציג חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ כך שאם $h=g\circ f$ אז $\mathcal{U}(h,\mathcal{P})-\mathcal{L}(h,\mathcal{P})<\varepsilon$. מהיות g רציפה בקטע $[m,M]$ היא גם רצבמ"ש בקטע (משפט קנטור). יהי $\delta>0$ כך שאם $x,y\in[m,M]$ ו־ $|x-y|\leq\delta$ אז $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$.

לפי ההנחה, $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ולכן קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ כך ש־ $\mathcal{U}(f,\mathcal{P})-\mathcal{L}(f,\mathcal{P})<$ $\delta\varepsilon$ (הסיבה לבחירה תתבהר בהמשך). יהיו כעת:

$$\begin{aligned}
M_i &= \sup_{x_{i-1}\leq t\leq x_i}\{f(t)\}\\
m_i &= \inf_{x_{i-1}\leq t\leq x_i}\{f(t)\}\\
L_i &= \sup_{x_{i-1}\leq t\leq x_i}\{h(t)\}\\
l_i &= \inf_{x_{i-1}\leq t\leq x_i}\{h(t)\}
\end{aligned}$$

ולבסוף L,l כך ש־ $l \leq h \leq L$ (קיימים כי h הרכבה של פונקציות חסומות). נכתוב:

$$\mathcal{U}(h,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(h,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(L_i - l_i)\Delta x_i$$

נחלק את האינדקסים $1,\dots,n$ לשתי קבוצות: האינדקסים ה"טובים", G, כך שאם $i \in G$ אז $M_i - m_i \leq \delta$; והאינדקסים ה"רעים", B, כך שאם $i \in B$ אז $M_i - m_i > \delta$. נמשיך את הסכום:

$$= \sum_{i \in G}(L_i - l_i)\Delta x_i + \sum_{i \in B}(L_i - l_i)\Delta x_i$$

נשים לב שאם $i \in G$ אז $L_i - l_i < \varepsilon$ בגלל הרצבמ"ש, ולכן

$$\sum_{i \in G}(L_i - l_i)\Delta x_i < \varepsilon \sum_{i \in G}\Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon(b-a)$$

לעומת זאת, אם $i \in B$ אז לפי הבחירה של $\mathcal{P}$ אנחנו יודעים ש־

$$\delta \sum_{i \in B}\Delta x_i < \sum_{i \in B}(M_i - m_i)\Delta x_i < \delta\varepsilon$$

(שהרי $\delta < M_i - m_i$ וגם בחרנו כך ש־ $\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \delta\varepsilon$)
כלומר קיבלנו לבסוף ש־ $\sum_{i \in B}\Delta x_i < \varepsilon$ ולכן אם חוזרים אחורה מקבלים:

$$\sum_{i \in B}(L_i - l_i)\Delta x_i \leq \sum_{i \in B}(L - l)\Delta x_i = (L-l)\sum_{i \in B}\Delta x_i < (L-l)\varepsilon$$

אם מאחדים את התוצאות עבור ה"טובים" וה"רעים", מקבלים:

$$\mathcal{U}(h,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(h,\mathcal{P}) < \varepsilon(b-a) + \varepsilon(L-l)$$

זוהי קבועה כפולה של ε ולכן השלמנו את הדרוש. ∎

מסקנה 2.15 תהיינה $f,g \in \mathcal{R}[a,b]$. אזי:

1. $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$
2. $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$

3. $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$

4. אם $0 < m \le g \le M$ (חסומה מאפס) אז $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$

5. בתנאים של 4, גם $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$

הוכחה: (1) מיידי כהרכבה של הפולינום הרציף u^2 על הפונקציה f לפי המשפט.
(2) ראינו ש־ $f+g$ אינטגרבילית ולכן לפי (1) גם $(f+g)^2$ אינטגרבילית, ולבסוף גם $(f+g)^2 - f^2 - g^2$ אינטגרבילית אבל היא זהותית $2f\cdot g$ וכמובן לכן גם $f\cdot g$ אינטגרבילית.
(3) מיידי כהרכבה של $|\cdot|$ שהיא רציפה על הפונקציה f לפי המשפט.
(4) מיידי כהרכבה של $\frac{1}{u}$ שהיא רציפה על הפונקציה g.
(5) שילוב של (2) ו־ (4). ■

טענה 2.16 תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$. אזי לכל $c,d \in \mathbb{R}$ הפונקציה $g(x) := f(dx+c)$ היא אינטגרבילית על הקטע $[\frac{a-c}{d}, \frac{b-c}{d}]$, ומתקיים:

$$\int_{\frac{a-c}{d}}^{\frac{b-c}{d}} g = \frac{1}{d}\int_a^b f$$

הוכחה: נסמן $I = \int_a^b f$. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - I < \varepsilon$. אם הנקודות של החלוקה הן $x_0, \ldots, x_n$ אז נגדיר את החלוקה $\tilde{\mathcal{P}} = \{\frac{x_0-c}{d}, \ldots, \frac{x_n-c}{d}\}$ ואז:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(g,\tilde{\mathcal{P}}) &= \sum_{k=1}^{n} \sup\Big\{g(x) : \frac{x_{k-1}-c}{d} \le x \le \frac{x_k-c}{d}\Big\}\Big(\frac{x_k-c}{d} - \frac{x_{k-1}-c}{d}\Big) \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} \sup\big\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\big\}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{d}\mathcal{U}(f,\mathcal{P})
\end{aligned}$$

אז בהנתן $\varepsilon > 0$ ניקח $\mathcal{P}$כך ש־ $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{d}$ ואז $\tilde{\mathcal{P}}$ עונה על הגדרת האינטגרביליות עבור g.
כדי לחשב את האינטגרל, נשים לב:

$$\int_a^b f = \sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_{[a,b]})\} = \sup\{d\mathcal{L}(g,\tilde{\mathcal{P}})\} = d\sup\{\mathcal{L}(g,\tilde{\mathcal{P}})\} = d\int_{\frac{a-c}{d}}^{\frac{b-c}{d}} g$$

■

למה 2.17 תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ורציפה ב־ (a,b) כלומר פרט אולי לנקודות הקצה. אזי $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

הוכחה: נניח ש־ $m \le f \le M$. בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $a < c < d < b$ המקיימים:

$$\begin{aligned} (M-m)(c-a) &< \frac{\varepsilon}{3} \\ (M-m)(b-d) &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

לאחר הבחירה הזאת נשים לב ש־ f רציפה בכל הקטע הסגור $[c,d]$ ולכן אינטגרבילית בו. לפי קריטריון רימן, תהי $\mathcal{Q}$ חלוקה של $[c,d]$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{Q}) - \mathcal{L}(\mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{3}$. כעת נגדיר $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \{a,b\}$ חלוקה של כל הקטע $[a,b]$ וכעת:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) = (M-m)(c-a) + \mathcal{U}(\mathcal{Q}) - \mathcal{L}(\mathcal{Q}) + (M-m)(b-d) < \varepsilon$$

כנדרש. ■

הערה 2.18 השימוש שלנו ברציפות כאן היה רק לשם אינטגרבילית. לכן אפשר להסתפק בדרישה שהפונקציה אינטגרבילית בכל תת־קטע ממש של $[a,b]$ ואז היא תהיה אינטגרבילית במלוא הקטע.

מסקנה 2.19 אם $f \in \mathcal{B}[a,b]$ בעלת מספר סופי של נקודות אי־רציפות, אז $f \in \mathcal{R}[a,b]$.
(למעשה, מסקנה זו נכונה גם אם יש ל־ f מספר בן־מניה של נקודות אי־רציפות, כפי שנראה בפרק 3.6.)

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה לפי הלמה הקודמת. ■

הגדרה 2.20 אם $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$ אז $\lambda(\mathcal{P}) = \max_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$ ייקרא הפרמטר של החלוקה.

הערה 2.21 קיימות חלוקות של $[a,b]$ עם פרמטר קטן כרצוננו, למשל באמצעות החלוקה האוניפורמית.

הגדרה 2.22 תהי f חסומה ו־ $A \subseteq D_f$. התנודה של f ב־ A היא $\omega(f,A) = M - m$ כאשר $M = \sup\{f(t) : t \in A\}$ ו־ $m = \inf\{f(t) : t \in A\}$ וכן מסמנים $\omega(f) = \omega(f, D_f)$.
כאשר הכוונה לפונקציה ברורה, נכתוב ω בלבד.

הערה 2.23 אם $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ו־ $\mathcal{P}$ חלוקה של $[a,b]$ אז:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i$$

כאשר $\omega_i = \omega\big(f, [x_{i-1}, x_i]\big)$.

למה 2.24 תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ו־ $\mathcal{P}$ חלוקה של $[a,b]$ ונניח ש־ $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{y\}$. אז מתקיים:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}') - \mathcal{L}(\mathcal{P}') + \omega\lambda(\mathcal{P})$$

הוכחה: קיים אינדקס j יחיד כך ש־ $x_{j-1} < y < x_j$. נסמן כעת:

$$\begin{array}{rcl} w' & = & (M' - m')(y - x_{j-1}) \\ w'' & = & (M'' - m'')(x_j - y) \\ w_j & = & (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \end{array}$$

כאשר M', m', M'', m'' מתאימים לסופרמום ולאינפימום בקטעי החלוקה סביב y. כעת:

$$w_j - (w' + w'') \leq (M - m)\lambda(\mathcal{P}) = \omega\lambda(\mathcal{P})$$

ולכן

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) = \mathcal{U}(\mathcal{P}') - \mathcal{L}(\mathcal{P}') - (w' + w'') + w_j \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}') - \mathcal{L}(\mathcal{P}') + \omega\lambda(\mathcal{P})$$

כפי שרצינו. ■

משפט 2.25 תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \varepsilon$
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה $\mathcal{P}$ עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ מתקיים $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \varepsilon$

הוכחה: ($2 \Leftarrow 1$): ניקח את $\delta > 0$ כנ"ל ונבחר את החלוקה היוניפורמית בעלת $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ודיינו.

($1 \Leftarrow 2$): בהינתן $\varepsilon > 0$ תהי $\mathcal{Q}$ חלוקה עם הנקודות $y_0, \ldots, y_{l+1}$ המקיימת לפי (1) ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{Q}) - \mathcal{L}(\mathcal{Q}) < \varepsilon' < \varepsilon$. נניח ש־ f אינה קבועה, כלומר $\omega(f) \neq 0$ ונניח ש־ $1 \leq l$. יהי $0 < \delta = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{l\omega}$.

תהי אז $\mathcal{P}$ חלוקה עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ונתבונן ב־ $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. נשים לב שהוספנו לכל היותר l נקודות ל־ $\mathcal{P}$ (כי קצוות הקטע משותפים לשתי החלוקות). כיוון שהחלוקה החדשה היא עידון של $\mathcal{Q}$ אנו יודעים:

$$\mathcal{L}(\mathcal{Q}) \leq \mathcal{L}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(\mathcal{Q})$$

לכן כמובן $\mathcal{U}(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})-\mathcal{L}(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})<\varepsilon$. כעת $\mathcal{P}$ מתקבלת מ־ $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ ע"י השמטת l נקודות לכל היותר, ולכן לפי הלמה נקבל:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})\leq\mathcal{U}(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})-\mathcal{L}(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})+l\omega\lambda(\mathcal{P})<\varepsilon'+l\omega\lambda(\mathcal{P})$$

קודם דרשנו ש־ $\lambda(\mathcal{P})<\delta<\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{l\omega}$ ולכן

$$<\varepsilon'+(\varepsilon-\varepsilon')=\varepsilon$$

כנדרש. ■

2.2 הגדרת האינטגרביליות באמצעות פונקציית מדרגות

הגדרה 2.26 תהי $f\in\mathcal{R}[a,b]$. נאמר ש־ $f\prec s$ אם s פונקציית מדרגות המקיימת $s(x)\leq f(x)$ בכל $x\in[a,b]$.

טענה 2.27 אם $f\in\mathcal{R}[a,b]$ אז $\int_a^b f=\sup\{\int_a^b s:\ s\prec f\}$, כאשר $\int_a^b s$ יכול להיות במובן של שטח המלבנים של פונקציית המדרגות ולא האינטגרל הרגיל של דרבו.

הוכחה: כל סכום דרבו תחתון $\mathcal{L}(f,\mathcal{P})$ הוא שטח של פונקציית מדרגות עם המדרגות המתאימות לחלוקה, ולכן

$$\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P})\}\subseteq\{\int_a^b s:\ s\prec f\}$$

מהיחס בין הקבוצות מתקבל גם היחס בין החסמים העליונים:

$$\int_a^b f=\sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P})\}\leq\sup\{\int_a^b s:\ s\prec f\}$$

כעת מהעובדה ש־ $s\prec f$ כמובן $\int_a^b s\leq\int_a^b f$ בגלל מונוטוניות האינטגרל לפי דרבו. בתור חסם עליון, גם

$$\sup\{\int_a^b s:\ s\prec f\}\leq\int_a^b f$$

ולכן מקבלים שוויון כפי שרצינו. ■

הערה 2.28 ניתן לחזק את הטענה כדי שתהיה שקולה לאינטגרביליות ע"י כך שנדרוש גם את קיום החסם התחתון של פונקציות מדרגות החוסמות את הפונקציה מלעיל, והתלכדות בין חסם תחתון זה לחסם העליון מן הטענה.

טענה 2.29 נשתמש בטענה 2.27 כדי להראות ש־ $\int f+g=\int f+\int g$.

הוכחה: אם $s_1\prec f,\ s_2\prec g$ אזי $s_1+s_2\prec f+g$ (יש להראות שזו פונקציית מדרגות ושאכן $s_1+s_2\le f+g$ שזה ברור). כעת,

$$\begin{aligned}\{\int s_1+\int s_2:\ s_1\prec f,\ s_2\prec g\} &= \{\int s_1+s_2:\ s_1\prec f,\ s_2\prec g\}\\ \{\int s_1+s_2:\ s_1\prec f,\ s_2\prec g\} &\subseteq \{\int s_3:\ s_3\prec f+g\}\end{aligned}$$

וכאשר ניקח שוב sup נקבל

$$\int f+\int g=\sup\{\int s_1\}+\sup\{\int s_2\}=\sup\{\int s_1+\int s_2\}\le\int f+g$$

באופן סימטרי מראים את הא"ש ההפוך ע"י שימוש בפונקציית מדרגות החוסמת את הפונקציה מלמעלה. ■

2.3 סכומי רימן

רימן לקח כקירובים לחישוב השטח את שטחי המלבנים המבוססים על דגימות בקטעים של החלוקה. השטחים הנ"ל נמצאים תמיד בין סכום דרבו העליון לבין סכום דרבו התחתון בכל תת־קטע של החלוקה, וכמובן צריך להראות שהחישוב הנ"ל מתלכד עם החישוב לפי סכומי דרבו.

הגדרה 2.30 תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$ ו־ $\mathcal{P}$ חלוקה עם הנקודות $x_0,\ldots,x_n$. יהיו גם $\{t_i\}$ מספרים כך ש־ $x_{i-1}\le t_i\le x_i$. הביטוי הבא נקרא סכום רימן S של f עבור החלוקה $\mathcal{P}$:

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

הערה 2.31 כל סכום רימן S עבור החלוקה $\mathcal{P}$ מקיים: $\mathcal{L}(\mathcal{P})\le S\le\mathcal{U}(\mathcal{P})$.

למה 2.32 אם $f\in\mathcal{B}[a,b]$ ו־ $\mathcal{P}$ חלוקה, ו־ S קבוצת כל סכומי רימן S עבור החלוקה $\mathcal{P}$, אז מתקיים:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P})=\inf\mathsf{S}\le\sup\mathsf{S}=\mathcal{U}(\mathcal{P})$$

הוכחה: צריך להראות שלכל $\eta > 0$ קיימים S, S' סכומי רימן (ב־ S) כך ש־

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq S < \mathcal{L}(\mathcal{P}) + \eta \\ \mathcal{U}(\mathcal{P}) - \eta < S' \leq \mathcal{U}(\mathcal{P})\end{aligned}$$

כעת נגדיר:

$$M_i = \sup\{f(t) :\ x_{i-1} \leq t \leq x_i\}$$

כמו תמיד, ונבחר $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ כך ש־

$$M_i - \frac{\eta}{b-a} < f(t_i) \leq M_i$$

וזה אפשרי כי M_i הוא חסם עליון. כעת:

$$\begin{aligned} S' = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i &> \sum_{i=1}^{n}\big(M_i - \frac{\eta}{b-a}\big)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \frac{\eta}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\ &= \mathcal{U}(\mathcal{P}) - \frac{\eta}{b-a}(b-a) = \mathcal{U}(\mathcal{P}) - \eta \end{aligned}$$

ובאופן סימטרי מגדירים m_i כחסם תחתון ומתקבלת התוצאה עבור $\mathcal{L}(\mathcal{P})$. ■

משפט 2.33 תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$. אזי לכל סדרה $(\mathcal{P}_n)$ של חלוקות עם סדרת פרמטרים $\big(\lambda(\mathcal{P}_n)\big)$ השואפת ל־ 0, והסדרה (S_n) של סכומי רימן של f עבור $\mathcal{P}_n$ בהתאם, מתקיים: $S_n \to \int_a^b f$ (מתכנסת, ולאינטגרל הנ"ל).

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $\delta > 0$ המקיים את התנאי השקול ממשפט 2.25. נתון ש־ $\lambda(\mathcal{P}_n) \to 0$ ולכן עבור δ זה קיים גם $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\lambda(\mathcal{P}_n) < \delta$. אם כך, כאשר $n > N$ מתקבל:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{P}_n) \leq S_n \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}_n) \\ \mathcal{L}(\mathcal{P}_n) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}_n) \\ \mathcal{U}(\mathcal{P}_n) - \mathcal{L}(\mathcal{P}_n) < \varepsilon\end{aligned}$$

כלומר, שני המספרים $S_n, \int_a^b f$ נמצאים בין הסכום העליון לסכום התחתון, שהמרחק ביניהם קטן מ־ ε. כיוון שאנו יכולים להקטין את ε כרצוננו, משמעות הדבר היא ש־ $S_n \to \int_a^b f$ כפי שרצינו. ■

משפט 2.34 תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. התנאים הבאים שקולים:

(1) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ והאינטגרל הוא $\int_a^b f$

(2) קיים מספר אחד ויחיד J המקיים:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathcal{P}: \ \lambda(\mathcal{P}) < \delta \quad |S_{\mathcal{P}} - J| < \varepsilon$$

כאשר כאן $S_{\mathcal{P}}$ מסמן סכום רימן של f עבור החלוקה $\mathcal{P}$.

במקרה זה גם מתקיים $J = \int_a^b f$.

הוכחה: (1 $\Leftarrow$ 2) יהי $J = \int_a^b f$. לכל $\varepsilon > 0$ נבחר $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה $\mathcal{P}$ בעלת $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ מתקיים $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \varepsilon$. תהי $\mathcal{P}$ חלוקה אחת כזאת, ו־ S סכום רימן של f המתאים לה. כעת,

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(\mathcal{P})$$
$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq S \leq \mathcal{U}(\mathcal{P})$$

וכיוון שההפרש בין הסכומים קטן מ־ ε, גם $|S - \int_a^b f| < \varepsilon$ כפי שרצינו.

(2 $\Leftarrow$ 1) בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $\delta > 0$ המקיים את התנאי של המשפט. יהיו $\mathcal{P}$ חלוקה עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ו־ S סכום רימן כלשהו של f עבור חלוקה זו. כעת כמובן $J - \varepsilon < S < J + \varepsilon$. לפי למה 2.32 מתקיים:

$$J - \varepsilon \leq \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq S \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}) \leq J + \varepsilon$$

שהרי $J - \varepsilon$ חסם מלרע על כל סכומי רימן ו־ $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ החסם העליון שלהם, וכך גם מלעיל. לכן,

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq 2\varepsilon$$

וזה תנאי רימן לאינטגרביליות (ניתן לבחור מראש δ עבור $\frac{\varepsilon}{3}$ כדי לקבל את ההגדרה במדויק). עדיין נותר להראות ש־ $J = \int_a^b f$. ובכן, בהנתן $\varepsilon > 0$ ו־ $\delta > 0$ בהתאם כמו קודם עם חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$, נקבל:

$$J-\varepsilon \leq \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(\mathcal{P}) \leq J+\varepsilon$$

ומותר לנו כמובן לכתוב $\int_a^b f$ כי כבר גילינו ש־ f אינטגרבילית. אבל כעת פשוט קיבלנו

$$-\varepsilon \leq \int_a^b f - J \leq \varepsilon$$
$$|\int_a^b f - J| \leq \varepsilon$$

וזה מתקיים לכל $\varepsilon > 0$. לכן $J = \int_a^b f$ כנדרש. ■

הערה 2.35 לסיכום, ראינו חמישה תנאים שקולים לגבי פונקציה $f \in \mathcal{B}[a,b]$:

1. קיים $I \in \mathbb{R}$ יחיד כך שלכל חלוקה $\mathcal{P}$, מתקיים $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq I \leq \mathcal{U}(\mathcal{P})$
2. מתקיים $\sup\{\mathcal{L}(\mathcal{P})\} = \inf\{\mathcal{U}(\mathcal{Q})\}$ כאשר $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ חלוקות
3. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \varepsilon$
4. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mathcal{P}$ מקיימת $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ אז $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \varepsilon$
5. קיים J יחיד כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל סכום רימן S של חלוקה $\mathcal{P}$ עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ מתקיים $|S-J| < \varepsilon$

נתבונן בדוגמה הקלאסית של פונקציית רימן $R:[0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad (p,q)=1 \end{cases}$$

נרצה להראות ש־ $R \in \mathcal{R}[0,1]$. לפני כן, אם נגדיר את הפונקציה $\varphi:[0,1] \to \mathbb{R}$ ע"י

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

אז הפונקציה $\varphi \circ R$ היא בדיוק D, פונקציית דיריכלה, שאינה אינטגרבילית. כך קיבלנו שהרכבה של שתי פונקציות אינטגרביליות לאו דווקא אינטגרבילית, וזו דוגמה נגדית חשובה.

על מנת להראות ש־ R אינטגרבילית, נראה ש־ $\inf\{\mathcal{U}(\mathcal{P})\} = 0$. כדי לעשות זאת, צריך לכל $\varepsilon > 0$ למצוא חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P}) < \varepsilon$. יש לשים לב שבהנתן $\varepsilon > 0$ ישנו רק מספר סופי של q טבעיים כך ש־ $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{q}$. עבור כל q כזה יש מספר סופי של נקודות רציונאליות $\frac{p}{q}$ בקטע $[0,1]$ ורק בנקודות אלה $\varepsilon \leq R(\frac{p}{q})$.

ובכן יהי $\varepsilon > 0$ ו־ $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. נניח ש־ $c_1, \ldots, c_N$ הם כל המספרים הרציונאליים בקטע $[0,1]$ עם $\varepsilon' \leq R(c_i)$. עבור מספרים אלה, נבחר $c_{j-1} < u_{j-1} < c_j < u_j < c_{j+1}$ עם התנאי $u_j - u_{j-1} \leq \frac{\varepsilon'}{N+2}$. כעת תהי

$$\mathcal{P} = \{0, u_0, u_1, \ldots, u_N, u_{N+1}\}$$

חלוקה, ונתבונן ב־

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) \leq \sum_G M_i \Delta x_i + \sum_B 1(u_j - u_{j-1}) < \varepsilon' + \varepsilon'$$

ולבסוף נקבל שאכן $\mathcal{U}(\mathcal{P}) < \varepsilon$ ולכן האינטגרל הוא פשוט 0.

הגדרה 2.36 תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$. אזי:

$$\int_b^a f := -\int_a^b f$$

(המטרה היא לשמור על אדיטיביות, כדי ש־ $\int_a^a f = 0$ תמיד)

הערה 2.37 זה מאפשר להראות שלכל a, b, c (והפונקציה אינטגרבילית בכל הקטעים ביניהם) מתקיים:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

כמו כן, אם $|f| \leq M$ אז $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f| \leq M|b-a|$.

הגדרה 2.38 תהי f מוגדרת בקטע $[a,b]$. נאמר ש־ f אינטגרבילית לפי סכומי רימן (או אינטגרבילית רימן) אם קיים $J \in \mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל S סכום רימן של f עבור החלוקה $\mathcal{P}$ עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$, מתקיים $|S - J| < \varepsilon$.

הערה 2.39 יש לשים לב שאין כאן צורך להניח שהפונקציה חסומה. ראינו כבר שההגדרה שקולה לאינטגרבילית אם הפונקציה חסומה, אז עכשיו נרצה להראות שהחסימות נובעת מההגדרה.

כמו כן יש להוכיח (תרגיל) שאם ההגדרה מתקיימת, J הזה הוא יחיד.

למה 2.40 תחת תנאי ההגדרה, f חסומה ב־ $[a,b]$.

הוכחה: נניח ש־ f עומדת בתנאי ההגדרה, אז נמצא עבור $\varepsilon = 1$ את ה־ $\delta > 0$ המתאים וניקח $\mathcal{P}$ מסוימת עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ו־ S סכום רימן של f המתאים לה. כעת, אם החלוקה היא באמצעות המספרים $x_0, \ldots, x_n$ הסכום מוסיף את $t_1, \ldots, t_n$ ביניהם. כיוון ש־ $S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$, אנו יודעים ש־ $-1 < S - J < 1$ כלומר $-1 + J < S < 1 + J$.

כעת נבחר נקודה כלשהי בקטע, ונשייך לה את האינדקס j של הקטע שבתוכו היא נופלת, ונסמנה $s_j \in [x_{j-1}, x_j]$. נגדיר גם

$$S_j := \sum_{i \neq j} f(t_i)\Delta x_i + f(s_j)\Delta x_j$$

נשים לב ש־ S_j גם הוא סכום רימן המתאים לאותה חלוקה $\mathcal{P}$, ועל כן מתקיים גם $-1 + J < S_j < 1 + J$ באותו האופן כמו קודם. לכן כמובן $|S - S_j| < 2$. מצד שני,

$$\begin{gathered}
|S - S_j| = |f(t_j)\Delta x_j - f(s_j)\Delta x_j| \implies \\
-2 + f(t_j)\Delta x_j < f(s_j)\Delta x_j < 2 + f(t_j)\Delta x_j \\
\frac{-2 + f(t_j)\Delta x_j}{\Delta x_j} < f(s_j) < \frac{2 + f(t_j)\Delta x_j}{\Delta x_j}
\end{gathered}$$

בחרנו את s_j שרירותית בקטע $[x_{j-1}, x_j]$ ולכן f חסומה בו וגם בכל $[a, b]$ מאותו שיקול, שהרי מספר הקטעים בחלוקה הוא סופי ולכן נוכל לקחת $\max$ ו־ $\min$ על החסמים שקיבלנו בכל קטע j. ■

משפט 2.41 תהי f מוגדרת ב־ $[a, b]$. f אינטגרבילית לפי רימן אםם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל שני סכומי רימן S, S' המתאימים לחלוקות $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ בעלות פרמטר $< \delta$ מתקיים $|S - S'| < \varepsilon$.

הוכחה: ($\Leftarrow$) בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר את ה־ $\delta > 0$ המבטיח שלסכום רימן S המתאים לחלוקה $\mathcal{P}$ עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ מתקיים $|S - J| < \frac{\varepsilon}{2}$. יהיו כעת S, S' סכומי רימן כנ"ל ואז

$$|S - S'| \leq |S - J| + |S' - J| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Rightarrow$) נבחר סדרה (S_n) של סכומי רימן של f המתאימים לסדרה $(\mathcal{P}_n)$ של חלוקות בהתאם עם $\lambda(\mathcal{P}_n) < \frac{1}{n}$. כעת בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $\delta > 0$ המבטיח את התנאי של המשפט. אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\frac{1}{N} < \delta$. עבור כל $n > N$ כמובן גם $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$. לכן אם $n, m > N$ אזי $\lambda(\mathcal{P}_n) < \delta, \lambda(\mathcal{P}_m) < \delta$ ולכן יתקיים $|S_n - S_m| < \varepsilon$. מכאן (S_n) סדרת קושי ולכן מתכנסת, ונסמן J הגבול שלה.

די להראות ש־ J מקיים את תנאי הגדרת האינטגרביליות לפי רימן. בהינתן $\varepsilon > 0$ יהי $\delta > 0$ המתאים ל־ $\frac{\varepsilon}{2}$ לפי קריטריון רימן. נבחר כעת אינדקס M כך ש־ $\lambda(\mathcal{P}_M) < \delta$ וגם $|S_M - J| < \frac{\varepsilon}{2}$. עכשיו יהי S סכום רימן של f עבור חלוקה $\mathcal{P}$ עם $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$, אזי

$$|S - J| \leq |S - S_M| + |S - J| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כלומר קיימנו את תנאי רימן לאינטגרביליות. ■

2.4 המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי

משפט 2.42 תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ותהי $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ עבור $a \le x \le b$. אזי F רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה בכל $x \in [a,b]$ שבה f רציפה, ובנקודות אלה מתקיים $F'(x) = f(x)$.

הוכחה: יהיו $x, y \in [a,b]$. נשים לב ש־

$$|F(y) - F(x)| = |\int_a^y f - \int_a^x f| = |\int_x^y f| \le \int_x^y |f| \le M|y-x|$$

כאשר M חסם על $|f|$ בקטע. זה אומר ש־ F ליפשיצית, כלומר רציפה במידה שווה בקטע ולכן רציפה.

כעת תהי $c \in [a,b]$ ונניח ש־ f רציפה ב־ c. ובכן, עבור $x \neq c$,

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = \frac{\int_a^x f - \int_a^c f}{x-c} = \frac{\int_c^x f}{x-c}$$

כעת על מנת להראות שהפונקציה גזירה ונגזרתה היא $f(c)$, די להראות ש־ $|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)| \to 0$. ובכן,

$$\begin{aligned} |\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)| &= |\frac{\int_c^x f}{x-c} - f(c)\frac{x-c}{x-c}| = |\frac{\int_c^x f}{x-c} - f(c)\frac{\int_c^x 1}{x-c}| \\ &= |\frac{\int_c^x f}{x-c} - \frac{\int_c^x f(c)}{x-c}| = \frac{1}{|x-c|}|\int_c^x \big[f(t)-f(c)\big]dt| \\ &\le \frac{1}{|x-c|}|f(t)-f(c)||x-c| = |f(t)-f(c)| \end{aligned}$$

כעת כאשר $t \to c$ קיבלנו בדיוק שהביטוי שרצינו $0 \leftarrow$, כלומר הפונקציה F גזירה ב־ c ונגזרתה שם $f(c)$. ■

משפט 2.43 (המשפט היסודי–הגרסה מהתיכון) תהי f רציפה ב־ $[a,b]$ ו־ g גזירה ב־ $[a,b]$ וכן $G' = f$, אז מתקיים:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

(נוסחת ניוטון־לייבניץ, או "הנוסחה היסודית")

הוכחה: תהי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ כמו קודם, ואז כמובן

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a)$$

כי הרי $F(a)=0$. כעת כיוון ש־ f רציפה בכל נקודה, F גזירה בכל נקודה (מהמשפט הקודם) וגם G גזירה לפי ההנחה. לכן גם הפונקציה $G-F$ גזירה בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$$

לכן $G-F$ קבועה, כלומר $G-F=C$ עבור קבוע C כלשהו. לכן,

$$G(b) - G(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

■

הגדרה 2.44 נאמר ש־ F קדומה של f ב־ $[a,b]$ אם F רציפה, גזירה פרט אולי למספר סופי של נקודות, ומקיימת $F'=f$ בכל שאר הנקודות.

משפט 2.45 (המשפט היסודי–נוסח מת"פ) תהי $f\in\mathcal{R}[a,b]$ ו־ F קדומה שלה בקטע זה. אזי $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$.

הוכחה: נראה שלכל חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ מתקיים $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \le F(b)-F(a) \le \mathcal{U}(\mathcal{P})$.
בה"כ ניתן להניח ש־ $\mathcal{P}$ מכילה את כל הנקודות שבהן f לא רציפה, אחרת נוכל להוסיף אותן ולקבל עידון שלא מפריע לא"ש הנ"ל. בסימונים כרגיל, $\mathcal{P}=\{x_0,\ldots,x_n\}$ מתקיים:

$$F(b)-F(a) = [F(x_1)-F(x_0)] + \ldots + [F(x_n)-F(x_{n-1})]$$

כיוון ש־ F רציפה ב־ $[x_{i-1},x_i]$ וגזירה ב־ (x_{i-1},x_i), לפי משפט לגרנז' קיימים $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ כך ש־

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = F'(t_i) = f(t_i)$$

לכן,

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

וזהו סכום רימן S של f עבור החלוקה $\mathcal{P}$, והוא מקיים $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \le S \le \mathcal{U}(\mathcal{P})$ כנדרש. ■

משפט 2.46 (משפט ערך הביניים של האינטגרציה) תהי f רציפה ב־ $[a,b]$. אזי קיים $c\in(a,b)$ כך ש־ $\int_a^b f(t)dt=f(c)(b-a)$.

הוכחה: תהי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ גזירה בקטע. לפי המשפט היסודי,

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)=f(c)(b-a)$$

כאשר המעבר השני הוא לפי משפט לגרנז' ביחס ל־ F בקטע $[a,b]$. ■

משפט 2.47 (הכללה למשפט ערך הביניים של האינטגרציה) תהי g פונקציה אינטגרבילית אי־שלילית בקטע $[a,b]$ ו־ f רציפה בו. אז קיימת $c\in[a,b]$ כך ש־

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$$

הוכחה: נסמן $C=\int_a^b g(x)dx\geq 0$. כיוון ש־ f רציפה בקטע חסום וסגור, היא מממשת מינימום ומקסימום בנקודות c_1,c_2. לכן מתקיים

$$f(c_2)\cdot C=\int_a^b f(c_2)g(x)dx\geq\int_a^b f(x)g(x)dx\geq\int_a^b f(c_1)g(x)dx=f(c_1)\cdot C$$

כיוון ש־ f רציפה, לפי משפט ערך הביניים קיים c בין c_1 ל־ c_2 כך ש־ $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\cdot C$, כפי שרצינו. ■

משפט 2.48 (משפט ערך הביניים השני של האינטגרציה) תהי f רציפה ב־ $[a,b]$ ו־ $\Phi\in\mathcal{C}^1(c,d)$ מונוטונית כך ש־ $[a,b]\subseteq(c,d)$. אזי קיימת $\xi\in[a,b]$ כך ש־

$$\int_a^b f(x)\Phi(x)dx=\Phi(a)\int_a^\xi f(x)dx+\Phi(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

הוכחה: נניח ש־ $\Phi'\geq 0$ (אחרת נתבונן ב־ $-\Phi$). נסמן $F(t)=\int_a^t f(x)dx$. כיוון ש־ F רציפה ו־ Φ' אי שלילית ואינטגרבילית, קיים ξ כך ש־

$$\int_a^b F(x)\Phi'(x)dx=F(\xi)\int_a^b\Phi'(x)dx=F(\xi)\big(\Phi(b)-\Phi(a)\big)$$

לפי המשפט היסודי, שהרי Φ גזירה ברציפות. לכן,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\Phi(x)dx &= F(x)\Phi(x)|_a^b - \int_a^b F(x)\Phi'(x)\\ &= F(b)\Phi(b) - F(a)\Phi(a) - F(\xi)\big(\Phi(b)-\Phi(a)\big)\\ &= \Phi(a)\big(F(\xi)-F(a)\big) + \Phi(b)\big(F(b)-F(\xi)\big)\\ &= \Phi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \Phi(b)\int_\xi^b f(x)dx\end{aligned}$$

כפי שרצינו. ■

הגדרה 2.49 מעתה והלאה, נאמר ש־ F קדומה של f בקטע I אם $F' = f$ בקטע.

הערה 2.50 אם f רציפה ב־ $[a,b]$ ו־ $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, אז לכל $c \in [a,b]$,

$$G(x) := \int_c^x f(t)dt = \int_c^a f(t)dt + F(x)$$

כלומר, G היא הזזה קבועה של F. להיפך, אם $G'(x) = F'(x) = f(x)$ אז הרי $G = F + C$ כאשר C קבוע, ואז כמובן

$$G(b) - G(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

כלומר, חישוב אינטגרל מסוים לא תלוי בפונקציה הקדומה שבחרנו.

2.5 האינטגרל הלא מסוים

הגדרה 2.51 האינטגרל הלא מסוים של f הוא <u>הקבוצה</u> $\int f(x)dx = \{F : F' = f\}$.

הערה 2.52 בספרים לעתים קרובות מציגים את הקבוצה הזאת בתור $F+C$ כאשר C קבוע, וזה אכן נכון כאשר f רציפה, כי שתי קדומות נבדלות רק בקבוע. כשלא מציינים את התחום ו־ f לא רציפה בכל $\mathbb{R}$, זה עשוי לגרום לבעיות. למשל, $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$ רק כאשר $x > 0$. כלומר, בשביל $x < 0$ זה בעצם $\ln(-x)$. הדבר המדויק ביותר יהיה

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases}\ln x + C_1 & 0 < x\\ \ln(-x) + C_2 & x < 0\end{cases}$$

טענה 2.53 (ללא הוכחה)

$$\int (f+g) = \int f + \int g \qquad\qquad \int kf = k\int f$$

2.5.1 אינטגרציה לפי הצבה

רוצים לחשב אינטגרלים מהצורה:

$$\begin{aligned} e^{x^2}+C &= \int e^{x^2}2xdx \\ e^{\sin x}+C &= \int e^{\sin x}\cos xdx \\ e^{\ln x}+C &= \int e^{\ln x}\frac{1}{x}dx \\ 2e^{\sqrt{x}}+C &= 2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \end{aligned}$$

המשותף לכל המקרים האלה הוא שהם מהצורה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

וכעת אם חישבנו $F(t)+C=\int f(t)dt$ אז כמובן מתקיים

$$F(g(x))+C=\int f(g(x))g'(x)dx$$

שהרי,

$$\frac{dF(g(x))}{dx}=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

כלומר, כדי למצוא פונקציה קדומה ל־ $f(g(t))g'(t)$ די למצוא פונקציה קדומה ל־ $f(x)$.

משפט 2.54 (אינטגרציה לפי הצבה עבור האינטגרל המסוים) תהי $g\in\mathcal{C}^1[c,d]$ ו־ $f\in\mathcal{C}^0\Big(g\big([c,d]\big)\Big)$ (תמונת g היא כמובן קטע סגור וחסום). בתנאים אלה, $(f\circ g)\cdot g'$ אינטגרבילית בקטע $[c,d]$ ומתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

כאשר $a=g(c),\ b=g(d)$.

הוכחה: $f\circ g$ רציפה ב־ $[c,d]$ וגם g' רציפה בו, ולכן $f\circ g,\ g'$ אינטגרביליות ב־ $[c,d]$ וכן $(f\circ g)\cdot g'$ אינטגרבילית בו. על כן, שני האינטגרלים מהמשפט קיימים ונותר רק להראות שוויון ביניהם.

תהי $F(u)=\int_a^u f(x)dx$, F רציפה וגזירה ב־ $[a,b]$ ועל כן קדומה של f ומתקיים $F'=f$. כעת לפי כלל השרשרת,

$$(F\circ g)'=(F'\circ g)\cdot g'=(f\circ g)\cdot g'$$

נשים לב שזוהי פונקציה רציפה, שהרי $f\circ g$ רציפה ו־ g' רציפה. לכן $F\circ g$ קדומה של $(f\circ g)\cdot g'$. כעת לפי המשפט היסודי,

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt=(F\circ g)|_c^d=F(g(d))-F(g(c))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

כאשר המעבר האחרון הוא שוב לפי המשפט היסודי, כי F קדומה של f. ■

נראה כמה דוגמאות:

1. נמצא את $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. אנחנו יודעים מראש שהקדומה היא $\arcsin x$, אבל רוצים לעשות זאת באמצעות הצבה. ובכן הפונקציה $\sqrt{1-x^2}$ מייצגת את החצי העליון של מעגל היחידה (זו האינטואיציה שלנו). אם נציב $x=g(t)=\cos t$ ואז כמובן $g'(t)=-\sin t$ אז לפי ההצבה,

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}(-\sin t)dt=\int -1dt=-t+C$$

כעת אם $x=\cos t$ אז כמובן $t=\arccos x$ ולכן:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\arccos x+C$$

התוצאה אולי מפתיעה, אבל $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ולכן $(\arccos x+\arcsin x)'=0$. כלומר, הפונקציות נבדלות בקבוע ועל כן התוצאה שקיבלנו אכן נכונה.

הערה 2.55 ההצבה צריכה להיות הפיכה (במקרה האחרון, $x=\cos t \iff t=\arccos x$) ובדרך כלל זה מכריח אותנו להתמקד בקטע מסוים. למשל במקרה האחרון, $\arccos x$ מוגדרת ב־ $(0,\pi)$ שם $\sin$ חיובית, ולכן כשהוצאנו את השורש מ־ $\sqrt{\sin^2 t}$ קיבלנו $\sin t$ ולא $-\sin t$.

2. דוגמא אחרת: נחשב $\int\sqrt{1-x^2}$. כאן נציב $x=g(t)=\cos t$ ו־ $g'(t)=-\sin t$ כמו קודם, וכעת:

$$\int\sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin t)dt=-\int\sin^2 t\,dt=$$

ניזכר ש־ $\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t$ ולכן $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$. לכן נמשיך:

$$= \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{1}{2}\Big[\int 1dt - \int \cos 2t\, dt\Big]$$

וכעת המשקל נופל על חישוב $\int \cos 2t\, dt$. נציב $u = 2t$ ואז:

$$\frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\sin u + C$$

וכמובן מכאן $\int \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\sin 2t + C$ כצפוי. זה מאפשר לנו לחזור אחורה:

$$\int \sqrt{1-\cos^2 t} = -\frac{1}{2}\Big[t - \frac{1}{2}\sin 2t\Big] + C = \frac{1}{2}[\sin t \cos t - t] + C$$

וכעת עלינו לחזור לאינטגרל המקורי במונחי x:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{1-x^2} - \arccos x] + C$$

שכן $t = \arccos x$, $x = \cos t$, ו־ $\sin t = \sqrt{1-x^2}$. אפשר גם כאן כמו שראינו, להחליף את $-\arccos x$ ב־ $\arcsin x$.
ניתן לתאר את המסלול כך:

$$\begin{array}{ccc} \int f(g(t))g'(t)dt & =_4 & F(g(t)) + C \\ \downarrow_1 & & \uparrow_3 \\ \int f(x)dx & =_2 & F(x) + C \end{array}$$

כלומר, תחילה הופכים את הבעיה לבעיה פשוטה יותר באמצעות הצבה, מחשבים את האינטגרל הלא מסוים לאחר ההצבה, ומבצעים הצבה הפוכה כדי לחזור לאינטגרל הלא מסוים המקורי.

אפשר גם לעשות את הדרך ההפוכה–לחשב $\int f(x)dx$ ע"י הצבת $x = g(t)$ וחישוב $\int f(g(t))g'(t)dt$. כלומר,

$$\begin{array}{ccc} \int f(x)dx & =_4 & H(g^{-1}(x)) + C \\ \downarrow_1 & & \uparrow_3 \\ \int f(g(t))g'(t)dt & =_2 & H(t) + C \end{array}$$

קל לבדוק זאת:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}H(g^{-1}(x)) &= H'(g^{-1}(x))(g^{-1}(x))' \\ &= H'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \\ &= f(g(g^{-1}(x)))g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

כפי שרצינו.

2.5.2 אינטגרציה לפי חלקים

אנו יודעים כמובן ש־ $(fg)' = f'g + fg'$ ולכן $f'g = (fg)' - fg'$. לכן,

$$\int f'g = \int (fg)' - \int fg' = fg - \int fg'$$

משפט 2.56 יהיו $f, g \in \mathcal{C}^1[a,b]$. אזי:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

הוכחה: $(fg)', f'g, fg'$ כולן רציפות ב־ $[a,b]$ ולכן אינטגרביליות שם. כמו כן, fg קדומה של $(fg)'$ בקטע, ולכן

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = (fg)(x)|_a^b$$

לפי המשפט היסודי. מצד שני, מכלל הגזירה:

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b \big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

כעת מהעברת אגפים מתקבל המשפט. ■

דוגמאות:

1. הדוגמא הבסיסית ביותר:

$$\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x 1\,dx = e^x x - e^x + C$$

2. להיפך,

$$\int x\,e^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

לכאורה, זה לא הקל עלינו בכלל, אבל היות ופתרנו את הבעיה הקודמת, אנחנו יודעים עכשיו גם את $\int \frac{x^2}{2}e^x dx$.

3.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\,dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \\ &= e^x \sin x - [e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx] \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx\end{aligned}$$

השתמשנו פעמיים באינטגרציה לפי חלקים, וכעת קיבלנו:

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + C$$

ומכאן האינטגרל.

4.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 t\,dt &= \int \sin t \sin t\,dt = -\cos t \sin t - \int -\cos t \cos t\,dt \\ &= -\cos t \sin t + \int \cos^2 t\,dt = -\cos t \sin t + \int (1-\sin^2 t)dt \\ &= -\cos t \sin t + \int 1dt - \int \sin^2 t\,dt\end{aligned}$$

ומכאן שוב כמו קודם,

$$2\int \sin^2 t\,dt = -\cos t \sin t + t + C$$

ומכאן האינטגרל.
.5

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$$

6. בכלל, אפשר לעשות טריקים נחמדים עם פונקציות הפוכות:

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1 \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

כעת נשתמש באינטגרציה לפי הצבה עם $t = 1 - x^2$ ונקבל:

$$-\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = -2\sqrt{t} + C$$

וכאשר חוזרים אחורה,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -2\sqrt{1-x^2} + C$$

וזה נותן את $\int \arcsin x\,dx$.

2.5.3 על האינטגרל הלא מסוים ופונקציות קדומות

הגדרה 2.57 תהי $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ו־ $c \in [a,b]$. מעתה ואילך נאמר ש־ $F_c(x) := \int_c^x f(t)dt$ תיקרא אינטגרל לא מסוים של f בקטע $[a,b]$.

הערה 2.58 עד כה בדרך כלל השתמשנו ב־ $c = a$.
נשים לב לכמה עובדות:

$$F_c(x) = \int_c^x f = \int_a^c f + \int_a^x f$$

כלומר אם נסמן $F = F_a$ אז כל האינטגרלים הלא מסוימים הם אותה F בהזזה של קבוע כלשהו.
כמו כן, אם f רציפה אז F גם קדומה של f בקטע. למשל, אם $f \equiv 1$ אז:

$$F_c(x) = \int_c^a f + (x - a)$$

כמובן $\int_a^c f$ הוא לכל הפחות $a-b$ ולכל היותר 0. כלומר, הקבוע המבדיל בין האינטגרלים הלא מסוימים לא יכול להיות שרירותי, אלא הוא תלוי בקטע ובפונקציה.

להבדיל, פונקציות קדומות יכולות להיבדל בקבוע שרירותי, שהרי הוא ייעלם בגזירה.

אם נחזור למשפט היסודי, אז הרי אם f רציפה הפונקציה F_a מקיימת $F_a' = f$. אבל אותו הדבר נכון לכל אינטגרל לא מסוים בקטע, כי הקבוע נעלם בגזירה. אבל באופן כללי, החלק של המשפט לגבי $\int_a^b f = G(b) - G(a)$ כאשר $G' = f$ נכון לכל פונקציה קדומה, ולאו דווקא לפונקציה קדומה שהיא גם אינטגרל לא מסוים.

כעת אפשר לעשות חזרה קצרה לפולינום טיילור:

משפט 2.59 (צורת האינטגרל של שארית פולינום טיילור) אם $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$ ו־ $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a,x]$ אז מתקיים:

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

הוכחה: בהוכחה של משפט טיילור קיבלנו ש־ $R_n(x,t) = S(t)$ מקיימת:

$$S'(t) = \frac{-f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

כלומר S קדומה של הביטוי מימין, ולכן:

$$S(x) - S(a) = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

כעת נשים לב ש־ $S(x) = R_n(x,x) = 0$ ו־ $S(a) = R_n(x,a) = R_n(x)$ השארית המקורית שאותה אנו מחפשים. מכאן הטענה. ■

2.5.4 דוגמאות נוספות

1. ניתן דוגמא לפונקציה גזירה שנגזרתה לא אינטגרבילית:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

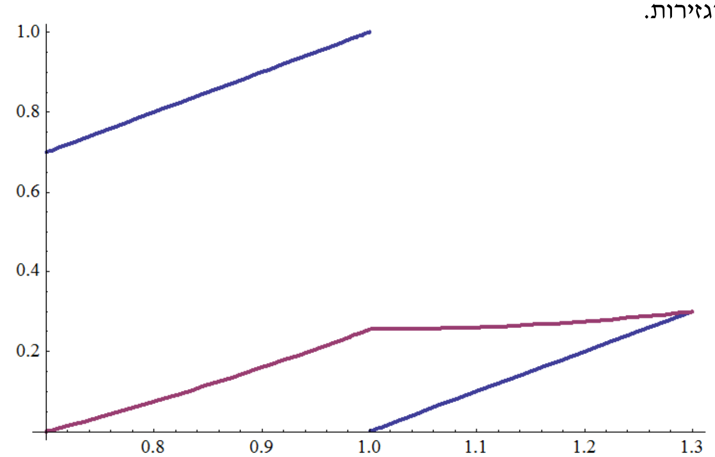
זוהי פונקציה גזירה בכל הישר, ונגזרתה:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

וכאן הנגזרת לא חסומה בסביבת 0 ולכן כמובן לא אינטגרבילית בקטע שמכיל את 0.

2. ניתן דוגמא לפונקציה אינטגרבילית שאין לה קדומה:

ניקח את הפונקציה $f(x) = x - [x]$. בקטע כמו $[0.7, 1.3]$ אין לה קדומה. אם הייתה לה קדומה F, זה אומר שהנגזרת של F (שהיא f) בקטע $[0.7, 1.3]$ מדלגת על הערך 0.5 אבל מקבלת את הערכים 0.7 ו־ 0.3, בסתירה למשפט דרבו (משפט ערך הביניים לנגזרות). בציור, הפונקציה מוצגת בכחול והפונקציה המצטברת מוצגת בסגול, והיא בעלת "שפיץ" של אי־גזירות.



באופן דומה, גם לפונקציית רימן אין קדומה למרות שהיא אינטגרבילית, מאחר שהפונקציה מקבלת רק ערכים רציונאליים (למעשה, רק ערכים מהצורה $\frac{1}{n}$ ל־ $n \in \mathbb{N}$) ולכן אינה בעלת תכונת ערך הביניים.

מצד שני, לפונקציית רימן יש פונקציה מצטברת, כלומר אינטגרל לא מסוים, $F(x) = \int_a^x R(t)dt \equiv 0$, וכמובן $F' \equiv 0$ כלומר האינטגרל הלא מסוים אינו פונקציה קדומה. למרות שהאינטגרל הלא מסוים הוא רציף ואף גזיר, הוא אינו פונקציה קדומה.

תזכורת:

$$\begin{aligned}
\arcsin'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\
\arctan'(z) &= \frac{1}{1+z^2} \\
\operatorname{arcsinh}(y) &= \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \\
\operatorname{arctanh}(z) &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} \\
\operatorname{arcsinh}'(y) &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\
\operatorname{arctanh}'(z) &= \frac{1}{1-z^2}
\end{aligned}$$

כעת כמה דוגמאות:

3. ברור ש־ $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C$, אבל מה לגבי $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$?

ובכן, ראשית נעשה השלמה לריבוע:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx$$

כעת נציב $t=x-1$ ועברנו לבעיה:

$$\int \frac{1}{t^2+4}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}$$

ושוב נציב $u=\frac{1}{2}t$ ועברנו לבעיה המוכרת:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\arctan u + C$$

ואחרי שחוזרים אחורה מקבלים:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C$$

4. נוסיף גם שורש–מהו $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$? תחילה נעשה השלמה לריבוע, נציב כמו קודם $t=x-1$ ונקבל $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}dt$. כעת נכניס גם $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$ לשורש עם הצבת u כמו קודם ונקבל $\frac{1}{2}2\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du$. מכאן כבר אפשר היה להשתמש ישירות בנגזרת של arcsinh, אבל במקום זה נמשיך ונציב $u=\tan\theta$, ואז $du=(1+\tan^2\theta)d\theta$ ומקבלים:

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$

כאשר במעבר הראשון (הוצאת השורש) השתמשנו בכך שההצבה מלכתחילה מניחה ש־tan הפיכה ולכן אנחנו בקטע שבו cos חיובי ממש. בביטוי שקיבלנו לבסוף אפשר שוב להציב $z=\sin\theta$ ולקבל:

$$\int \frac{1}{1-z^2}dz = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+z}{1-z}| + C$$

ועכשיו צריך ללכת חזרה:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + C\\ \int \frac{1}{u^2+1}du &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\arctan u}{1-\sin\arctan u} + C =\end{aligned}$$

עכשיו צריך לשים לב ש־ $\sin\arctan\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ ולכן אפשר לפשט עוד:

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}}{1-\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{u^2+1}+u}{\sqrt{u^2+1}-u} + C$$

כעת מציבים $u = \frac{x-1}{2}$ וקיבלנו את התוצאה הסופית.
בדרך אחרת, אפשר להסתכל על $x^2 - y^2 = 1$ כמשוואה של היפרבולה, ואז $x^2 = y^2+1$, ולפי הפרמטר $x = \cosh t,\ y = \sinh t$. במקרה שלנו אם מציבים $u = \sinh t$ אז עוברים לבעיה הקלה:

$$\int \frac{1}{\cosh t}\cosh t\, dt = t + C$$

וחוזרים דרך $t = \arcsin u$ ומקבלים:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du = \operatorname{arcsinh}(u) + C$$

כפי שידענו כבר מראש.
.5

$$\begin{aligned}
(\sin^{n-1}x\cos x)' &= (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x + \sin^{n-1}x(-\sin x)\\
&= (n-1)\sin^{n-2}x - (n-1)\sin^n x - \sin^n x\\
&= (n-1)\sin^{n-2}x - n\sin^n x\\
\sin^n x &= \frac{n-1}{n}\sin^{n-2}x - \frac{1}{n}(\sin^{n-1}x\cos x)'
\end{aligned}$$

לכן,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\, dx - \frac{1}{n}(\sin^{n-1}x\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

זה מאפשר לנו לקבל נוסחת נסיגה:

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx \qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

כאשר כמובן

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \qquad I_1 = 1$$

ובאופן כללי:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} \\ I_{2n+1} &= 1\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} \end{aligned}$$

היות ו־ $0 \le \sin x \le 1$ בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$, גם $0 \le \sin^{n+1} x \le \sin x \le 1$ בקטע זה, כלומר $0 \le I_{n+1} \le I_n \le 1$, ומקבלים:

$$0 < I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$$

ולכן

$$1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \le 1 + \frac{1}{2n}$$

ולכן קיבלנו סנדוויץ'–היחס באמצע שואף ל־ 1. ניתן לכתוב את המנה שקיבלנו בתור:

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n})(\frac{3}{2}\frac{5}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n}) = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}\frac{3}{2})(\frac{3}{4}\frac{5}{4})\cdots(\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}) \to 1$$

ומכאן מקבלים נוסחא על שם Wallis:

$$\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots} \to \frac{\pi}{2}$$

6. ניתן דוגמא למקרה המדגים שלא ניתן להחליף בין גבול לאינטגרל בצורה חופשית. ראינו שהאינטגרל מתנהג כמו פונקציה רציפה על גבולות האינטגרציה, למשל:

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

אבל לאו דווקא ניתן להכניס את הגבול לתוך האינטגרל. למשל, נתבונן במשפחת הפונקציות $f_n(x) = (n+1)x^n$. לכל n מתקיים כאן $\int_0^1 f_n(x)dx = x^{n+1}|_0^1 = 1$

לפי המשפט היסודי. כלומר, הסדרה $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)$ היא קבועה 1 ולכן גבולה 1 (כאשר $n \to \infty$). לעומת זאת, אם מתבוננים בפונקציה עצמה, אז הרי:

$$f_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \begin{cases} \infty & x=1 \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

לכן ניתן לומר ש־ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)|_{[0,1)} \equiv 0$. ממשפט שראינו, הנקודה האחת לא מפריעה לחישוב האינטגרל, ולכן

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

קיבלנו שני ערכים שונים.

2.5.5 נוסחת סטירלינג

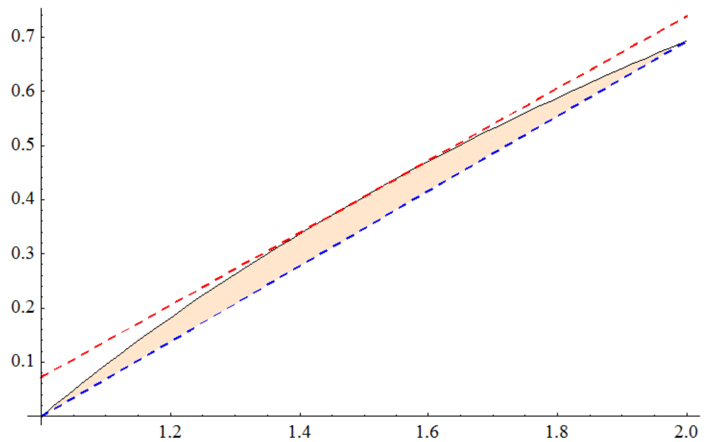
נרצה להעריך את $n!$, ולשם כך נעריך את $\log n!$ שהרי זו פונקציה הפיכה על החיוביים, ואז נצטרך רק לחשב $e^{\log n!}$. נשים לב ש־ $\log n! = \log 2 + \ldots + \log n$. אחת הדרכים לקרב את $\log$ היא באמצעות שיטת הטרפז, וזה יהיה קירוב מלרע (שכן הפונקציה קמורה, ולכן הישר המחבר שתי נקודות $(k, \log k)$, $(k+1, \log(k+1))$ יהיה מתחת לגרף הפונקציה).

שטח הטרפז הנכלא מתחת לגרף במקטע זה הוא $\frac{1}{2}(\log k + \log(k+1))$, ואפשר לכתוב:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\log 1 + \log 2) + \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) + \ldots + \frac{1}{2}(\log(n-1) + \log n) &= \\ \log 2 + \log 3 + \ldots + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log n &= \log((n-1)!) + \frac{1}{2}\log n \end{aligned}$$

עכשיו נסמן $A_n = \int_1^n \log x dx$ ו־ T_n את הביטוי הנ"ל. נרצה להבין את גודל השגיאה, $A_n - T_n$. הטענה הבסיסית היא שאם נסמן $a_n = A_n - T_n$ אז הסדרה (a_n) מונוטונית עולה וחסומה, ולכן בעלת גבול, ולכן ההפרשים האלה ניתנים להערכה די טובה.

נשים לב שבכל קטע $[k, k+1]$ המשיק לגרף הפונקציה באמצע הקטע נמצא מעל גרף הפונקציה (קמירות), ואילו כפי שראינו הצלע של הטרפז נמצאת מתחת לגרף. לכן, בבואנו לחשב את $A_n - T_n$, הפרש זה יהיה קטן יותר מאשר ההפרש בין השטח שנמצא מתחת למשיק לבין השטח שנמצא מתחת לצלע הטרפז.



בציור הנ"ל, הקו השחור הוא גרף הפונקציה $\log$, השטח הצבוע הוא הערכת השגיאה, הקו המקווקו באדום הוא המשיק, והקו המקווקו בכחול הוא צלע הטרפז העליונה.
משוואת המשיק היא

$$y = \log(k+\frac{1}{2}) + \frac{1}{k+\frac{1}{2}}(x-(k+\frac{1}{2}))$$

ערכי הפונקציה בנקודות הקצה הם $y(k) = \log(k+\frac{1}{2}) - \frac{\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}$ ו־ $y(k+1) = \log(k+\frac{1}{2}) + \frac{\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}$. השטח הכלוא מתחת למשיק הוא $\log(k+\frac{1}{2})$.
כעת נוכל להעריך את ההפרש בין שטחי הטרפזים בקטע $[k,k+1]$ ע"י:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - a_k &\leq \log(k+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}[\log k + \log(k+1)] \\
&= \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2k}) - \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2(k+\frac{1}{2})}) \\
&< \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2k}) - \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2(k+1)})
\end{aligned}$$

כעת נתבונן בסכום

$$(a_n - a_{n-1}) + \ldots + (a_2 - a_1) = a_n - a_1 \leq \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2n}) < \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

כיוון שקיבלנו סכום טלסקופי. בכל מקרה, קיבלנו ש־ (a_n) חסומה. קל לראות גם שהיא מונוטונית שכן

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + \ldots + a_1$$

וכל ביטוי בסכום הוא חיובי. לכן $a_n \nearrow a$ כלשהו. כמו כן,

$$a - a_n = \sum_{k=n}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) \leq \frac{1}{2}\log(1 + \frac{1}{2n})$$

כי $a = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)$ משיקולי טורים (גבול של סדרת הסכומים החלקיים). אבל כעת

$$A_n - T_n = a_n \implies \log n! = 1 - a_n + (n + \frac{1}{2})\log n - n$$

שהרי $A_n = \int_1^n \log x dx = (x\log x - x)|_1^n = n\log n - n + 1$. עכשיו נעלה את e בחזקת שני האגפים ונקבל

$$n! = e^{1-a_n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

נשים לב ש־ $(1-a_n)$ מונוטונית יורדת, ולכן $\alpha_n = e^{1-a_n}$ גם כן יוצרת סדרה מונוטונית יורדת. ובכן, $\alpha_n \searrow \alpha$ ובגלל הרציפות של e^x מתקיים $\alpha = e^{1-a}$. לכן $1 < \frac{\alpha_n}{\alpha}$ אבל $\frac{\alpha_n}{\alpha} = e^{a-a_n}$ ולפי ההערכה שעשינו קודם על $a - a_n$ מקבלים:

$$e^{a-a_n} \leq e^{\frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2n})} = \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} \leq 1 + \frac{1}{4n}$$

מכאן $1 < \frac{\alpha_n}{\alpha} \leq 1 + \frac{1}{4n}$ ולכן

$$\alpha n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! \leq \alpha n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1 + \frac{1}{4n})$$

זה נחמד, אבל α עדיין מרחף באוויר. אפשר לחשב אותו מתוך נוסחת Wallis ולקבל $\alpha = \sqrt{2\pi}$, ומכאן את נוסחת סטירלינג:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

2.6 פונקציות רציונאליות

אם $R(x)$ פונקציה רציונאלית (מנה של פולינומים) והמונה מדרגה גבוהה מהמכנה, תמיד אפשר לחלק ולקבל:

$$R(x) = P_\infty(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

כאשר $\deg P < \deg Q$. אם רוצים לחשב אינטגרל, הקושי כמובן נופל על חישוב $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

כל פולינום מעל $\mathbb{R}$ אפשר לפרק לצורה:

$$P(x) = C(x-a_1)^{n_1} \cdots (x-a_r)^{n_r} \cdot (x^2+2b_1x+c_1)^{m_1} \cdots (x^2+2b_sx+c_s)^{m_s}$$

כאשר כל הפולינומים הריבועיים המופיעים כאן הם אי־פריקים, כלומר $b_j^2 - c_j < 0$. זה אומר שכל מנה של פולינומים אפשר לכתוב כמנה של שני ביטויים מהצורה הנ"ל, וכאשר פותחים את המנה המקדמים m_i, n_i יכולים גם להיות שליליים.

יתר על כן, כל פונקציה רציונאלית אפשר להציג כסכום של שברים פשוטים, כלומר סכום של ביטויים מהצורה:

$$\begin{cases} \frac{A_1}{(x-a)} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \\ \frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)} + \ldots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+bx+c)^m} \end{cases}$$

וכעת הבעיה היא בסה"כ למצוא אינטגרלים של הצורות הנ"ל. כיוון שבמכנה אפשר לעשות השלמה לריבוע, נותרנו עם הצורך לחשב את האינטגרל:

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

ובכן נרצה לכתוב נוסחא רקורסיבית:

$$I_{n-1} = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)dx} + a^2 I_n$$

וכעת,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} x \, dx$$

וכעת נרצה לבצע אינטגרציה לפי חלקים, כאשר $f'(x) = (x^2+a^2)^n$ ו־ $g(x) = x$. ראשית נשים לב ש־

$$\int \frac{1}{u^n} du = \frac{u^{-n+1}}{-u+1} + C$$

ולכן

$$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\frac{1}{(-n+1)}\frac{1}{2}+C$$

וכעת האינטגרציה לפי חלקים נותנת:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}x\,dx &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-n}\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}x-\int \frac{1}{2}\frac{1}{1-n}\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx \\ &= \frac{1}{2-2n}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2-2n}I_{n-1}\end{aligned}$$

ולכן קיבלנו פתרון לנוסחא הרקורסיבית:

$$I_{n-1} = \frac{1}{2-2n}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2-2n}I_{n-1}+a^2I_n$$

ומכאן אפשר לחלץ את I_n ולחשב את הכל ברקורסיה.

למעשה, ראינו סקיצה של הוכחה לכך שלכל פונקציה רציונאליות אפשר למצוא אינטגרל בצורה אנליטית. זה כמובן משפט קיום–למצוא שורשים של פולינום זו בעיה קשה בפני עצמה, ואינה סגורה בנוסחא עבור מעלות גבוהות.

הערה 2.60 הצבות שנות לבצע בפונקציות רציונאליות (מתוך תרגיל 8):

אם $f(x)=R(\sin x,\cos x)$ כדאי להציב $t=\tan\frac{x}{2}$.

אם $f(x)=R(x,\sqrt{a^2-x^2})$ כדאי להציב $x=a\sin t$ ואז את ההצבה הקודמת.

אם $f(x)=R(x,\sqrt{a^2+x^2})$ כדאי להציב $x=a\tan t$ ואז את ההצבה הראשונה.

2.7 פונקציות מדרגות

הגדרה 2.61 נאמר ש־ φ המוגדרת בקטע $[a,b]$ היא פונקציית מדרגות אם קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ של הקטע לפי הנקודות $x_0,\ldots,x_n$ וקיימים קבועים $c_1,\ldots,c_n$ כך ש־ $\varphi|_{(x_{i-1},x_i)}\equiv c_i$ לכל i.

כמו כן, נסמן ב־ $\mathcal{S}[a,b]$ את קבוצת פונקציות המדרגות בקטע $[a,b]$. הקבוצה הזאת היא מרחב וקטורי, ולמעשה אפילו חוג (קומוטטיבי). כמו כן, כמובן, $\mathcal{S}[a,b]\subset\mathcal{R}[a,b]$ שהרי לכל פונקציית מדרגות מספר סופי של נקודות אי־רציפות.

הערה 2.62 תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. אזי לכל חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathcal{S}[a,b]$ כך ש־ $\varphi\le f\le\psi$ וגם:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P})=\int_a^b\varphi \qquad\qquad \mathcal{U}(\mathcal{P})=\int_a^b\psi$$

הוכחה: נגדיר את הפונקציות כך:

$$\begin{aligned}\varphi|_{(x_{i-1},x_i)} &\equiv M_i=\sup\{f(t):\ x_{i-1}\le t\le x_i\}\\ \psi|_{(x_{i-1},x_i)} &\equiv m_i=\inf\{f(t):\ x_{i-1}\le t\le x_i\}\\ \varphi(x_i) &= f(x_i)\\ \psi(x_i) &= f(x_i)\end{aligned}$$

ואלה הפונקציות הדרושות. ■

משפט 2.63 תהי $f\in\mathcal{B}[a,b]$. התנאים הבאים שקולים:

0. f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$
1. לכל $\varepsilon>0$ קיימות $\varphi,\psi\in\mathcal{S}[a,b]$ כך ש־ $\varphi\le f\le\psi$ וגם $\int_a^b\psi-\int_a^b\varphi<\varepsilon$
2. לכל $\varepsilon>0$ קיימות $g,h\in\mathcal{R}[a,b]$ כך ש־ $g\le f\le h$ וגם $\int_a^b h-\int_a^b g<\varepsilon$

הוכחה: ($1 \Leftarrow 0$) לפי קריטריון רימן לאינטגרביליות, לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P})-\mathcal{L}(\mathcal{P})<\varepsilon$. לפי ההערה קיימות פונקציות מדרגות φ,ψ כך ש־ $\mathcal{L}(\mathcal{P})=\int_a^b\varphi$, $\mathcal{U}(\mathcal{P})=\int_a^b\psi$ וגם $\varphi\le f\le\psi$. לכן הטענה.

($2 \Leftarrow 1$) טריוויאלי כי בפרט $\mathcal{S}[a,b]\subset\mathcal{R}[a,b]$.

($0 \Leftarrow 2$) אנו יודעים ש־ $\int_a^b h=\inf\{\mathcal{U}(h,\mathcal{Q})\}$ על כל החלוקות $\mathcal{Q}$. לכן בהינתן $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}_h$ כך ש־ $\mathcal{U}(h,\mathcal{P}_h)<\int_a^b h+\varepsilon$. בצורה אנלוגית, $\int_a^b g=\sup\{\mathcal{L}(g,\mathcal{P})\}$ ולכן בהינתן $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}_g$ כך ש־ $\mathcal{L}(g,\mathcal{P}_g)>\int_a^b g-\varepsilon$.

עכשיו נגדיר $\mathcal{P}=\mathcal{P}_g\cup\mathcal{P}_h$, ומתקיים:

$$\int_a^b g-\varepsilon<\mathcal{L}(g,\mathcal{P}_g)\le\mathcal{L}(g,\mathcal{P})\quad;\quad\mathcal{U}(h,\mathcal{P})\le\mathcal{U}(h,\mathcal{P}_h)<\int_a^b h+\varepsilon$$

כיוון ש־ $g\le f\le h$ ובפרט $g\le h$ מתקיים גם:

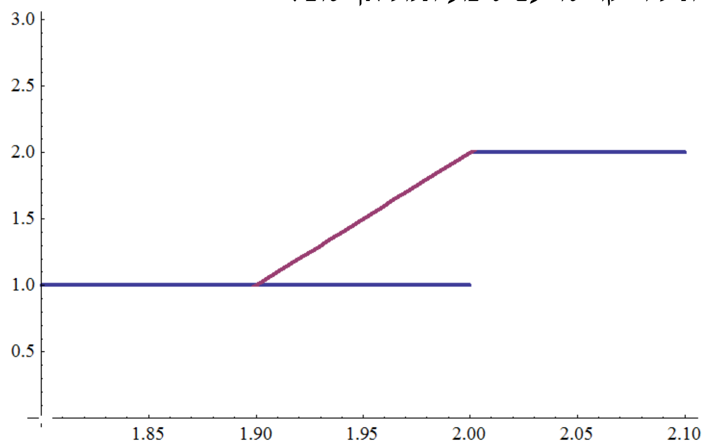
$$\mathcal{L}(g,\mathcal{P})\le\mathcal{L}(f,\mathcal{P})\le\mathcal{U}(f,\mathcal{P})\le\mathcal{U}(h,\mathcal{P})$$

ולכן

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P})-\mathcal{L}(f,\mathcal{P})<\int_a^b h-\int_a^b g+2\varepsilon<3\varepsilon$$

וקיבלנו קבועה כפולה של ε ולכן סיימנו. (עלינו לבחור את g,h בהתאם.) ■

הערה 2.64 באופן דומה, ניתן לחסום כל פונקציה אינטגרבילית ע"י שתי פונקציות רציפות שהפרש האינטגרלים שלהן יהיה $< \varepsilon$. כדי לעשות זאת, יש לקחת את פונקציות המדרגות שחוסמות את הפונקציה (לפי המשפט) ולתקן את נקודות אי־הרציפות שבהן יש אסימפטוטה אנכית לידי קו ישר עם שיפוע תלול אך סופי.



2.8 אינטגרלים לא אמיתיים

עד כה הדיון היה תמיד על פונקציות חסומות בקטע חסום וסגור. כעת נרצה להתבונן באינטגרל על קטעים לא חסומים ועל פונקציות לא חסומות.

2.8.1 אינטגרלים בקטעים לא חסומים

הגדרה 2.65 תהי f מוגדרת בקטע $I = [a, \infty)$. נניח ש־ f אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a, b]$. אז נאמר ש־ f אינטגרבילית ב־ I אם קיים $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ ובמקרה זה נסמן את הגבול באמצעות $\int_a^\infty f(x)dx$ ונאמר שהאינטגרל מתכנס. אחרת, נאמר שהאינטגרל מתבדר.

נראה כמה דוגמאות:

1. נתבונן ב־ $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$. בכל קטע סופי,

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_0^b = \arctan b$$

לכן

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$$

2.

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = 0-(-1) = 1$$

.3

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

כלומר זהו אינטגרל שלא מתכנס.

.4

$$\int_0^\infty \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty} \cos b - \cos 0$$

הגבול הזה לא קיים, ולכן האינטגרל לא מתכנס.

הערה 2.66 (תכונות האינטגרל הלא אמיתי) יהיו f,g אינטגרביליות בקטע $[a,\infty)$. אזי:

1. אם $0\le f$ אז $0\le\int_a^\infty f$
2. אם $f\le g$ אז $\int_a^\infty f\le\int_a^\infty g$
3. $\int_a^\infty f+\int_a^\infty g=\int_a^\infty (f+g)$
4. $k\int_a^\infty f=\int_a^\infty kf$
5. לכל $c\in\mathbb{R}$, $a<c<\infty$, מתקיים $\int_a^\infty f=\int_a^c f+\int_c^\infty f$

כל התכונות האלה נובעות מתכונות שהוכחנו קודם על אינטגרלים אמיתיים (ליניאריות, אדיטיביות) ומתכונות הגבול (חיוביות, מונוטוניות).

משפט 2.67 (קריטריון קושי) תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ כאשר a קבוע, $a<b$. אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס אסם

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B\in\mathbb{R})(\forall b,b'\in\mathbb{R})(B<b<b' \implies |\int_b^{b'} f|<\varepsilon)$$

הוכחה: נגדיר $F(x):=\int_a^x f(t)dt$. עלינו להראות את השקילות של קיום גבול $\lim_{x\to\infty}F(x)$ לתנאי

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists B\in\mathbb{R})(\forall b,b'\in\mathbb{R})(B<b<b' \implies |F(b')-F(b)|<\varepsilon)$$

ותנאים אלה שקולים לפי תנאי קושי לקיום גבול של פונקציה כאשר $x\to\infty$. ■

כעת נראה עוד קריטריונים להתכנסות:

משפט 2.68 (קריטריון ההשוואה) יהיו f,g אינטגרביליות בכל תת קטע סגור וחסום מהקטע $I=[a,\infty)$. נניח שקיים $0<k\in\mathbb{R}$ כך ש־ $0\le f(x)\le kg(x)$ לכל $x\in I$. אזי:

1. אם $\int_a^\infty g$ מתכנס, אז $\int_a^\infty f$ מתכנס
2. אם $\int_a^\infty f$ מתבדר, אז $\int_a^\infty g$ מתבדר

הוכחה: במקרה שלנו, אם $\int_a^\infty f$ מתכנס אז הפונקציה $F(b)=\int_a^b f$ עולה, שהרי f חיובית. לכן האינטגרל מתכנס אסם הפונקציה F חסומה. לפי ההערה, נוכיח כעת:

תחילה (1)–אם $\int_a^\infty g$ מתכנס אז מליניאריות $\int_a^\infty kg$ מתכנס. לכן:

$$F(b):=\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b kg(x)dx=:G(b)$$

לפי ההערה, G חסומה ולכן F חסומה ולכן $\int_a^\infty f$ מתכנס.

כעת (2)–אילו $\int_a^\infty g$ היה מתכנס, אז לפי (1) $\int_a^\infty f$ היה מתכנס בסתירה להנחה. ■

נראה כעת כמה דוגמאות:

1. נתבונן במשפחה $0<\alpha$, $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx$. ובכן,

$$\int_1^b\frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases}\ln b & \alpha=1\\ -\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}|_1^b & \alpha\neq 1\end{cases}$$

קל לראות ש־ $\int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}dx$ מתכנס אסם $0<\alpha-1$ כלומר $1<\alpha$. במקרה זה, $\int_1^\infty\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{\alpha-1}$.

2. נתבונן ב־ $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ עם הרחבה רציפה ל־ 0. אנחנו נראה שהאינטגרל הזה מתכנס, ובדרך נשים לב שהכללים לגבי אינטגרציה לפי הצבה ואינטגרציה לפי חלקים תקפים גם עבור אינטגרלים לא אמיתיים (פשוט מכיוון שההגדרה היא באמצעות גבול על אינטגרלים אמיתיים).

ובכן, האינטגרל המסוים הוא:

$$\int_1^b\frac{\sin x}{x}dx=(-\cos x)\frac{1}{x}|_1^b-\int_1^b(-\cos x)(-\frac{1}{x^2})dx$$

עכשיו נשים לב ש־ $|\frac{\cos x}{x^2}|\le\frac{1}{x^2}$. כיוון ש־ $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ מתכנס, גם $\int_1^\infty\frac{|\cos x|}{x^2}dx$ מתכנס ומכאן גם $\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx$ מתכנס (ר' משפט 2.70). עכשיו אפשר לנסות לחשב את הגבול:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\Big[(-\cos x)\frac{1}{x}\Big]_1^b-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx$$

וראינו שהמחובר הימני מתכנס, ולכן גם כל האינטגרל מתכנס. לבסוף גם $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס.

הגדרה 2.69 נאמר ש־ f אינטגרבילית בהחלט בקטע $I=[a,\infty)$ אם $\int_a^\infty |f|$ מתכנס.

משפט 2.70 אם f אינטגרבילית בהחלט ב־ I אז f אינטגרבילית בו.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי (משפט 2.67). בהינתן $\varepsilon > 0$, קיים $B\in\mathbb{R}$ כך שאם $B<b<b'$ אז $|\int_b^{b'}|f||=\int_b^{b'}|f|<\varepsilon$. כעת

$$|\int_b^{b'} f| \leq \int_b^{b'} |f| < \varepsilon$$

וסיימנו. ■

הגדרה 2.71 נאמר ש־ f אינטגרבילית בתנאי בקטע $I=[a,\infty)$ אם $\int_a^\infty f$ מתכנס אבל $\int_a^\infty |f|$ מתבדר.

למשל, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס בתנאי. ראינו כבר שהוא מתכנס, אז צריך להראות ש־ $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ מתבדר. ובכן נשים לב:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &\leq |\sin x| \\ \frac{\sin^2 x}{x} &\leq \frac{|\sin x|}{x} \end{aligned}$$

כלומר די שנראה ש־ $\int_1^b \frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר. ניזכר בזהות $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ שממנה $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ ונקבל:

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\Big]$$

ע"י חיקוי של ההוכחה עבור $\frac{\sin x}{x}$ מקבלים ש־ $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$ מתכנס, אבל כמובן $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר ולכן ההפרש מתבדר.

עוד שתי דוגמאות:

1. נתבונן ב־ $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$. ובכן:

$$\int_2^b \frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln x|_2^b \longrightarrow_{b\to\infty} \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר (המעבר הראשון הוא באמצעות הצבה $t=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx$ והקדומה בקטע $[2,\infty)$).

2. מה לגבי $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx$? ובכן,

$$\int_2^b \frac{1}{x\ln^2 x}dx = (-\frac{1}{\ln x})|_2^b \longrightarrow_{b\to\infty} 0-(-\frac{1}{\ln 2}) = \frac{1}{\ln 2}$$

כלומר האינטגרל הזה מתכנס (המעבר הראשון הוא באמצעות הצבה כמו בדוגמא הקודמת).

הערה 2.72 אם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס, לאו דווקא $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. למשל, נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\notin\mathbb{N}\\ x & x\in\mathbb{N}\end{cases}$$

וכאן כמובן $\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx < \infty$ אבל הפונקציה לא חסומה. זאת משום שנקודות אי־רציפות מבודדות לא משפיעות על האינטגרל.

יש לציין שגם בהינתן הדרישה ש־ f רציפה, אין כורח ש־ $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. למשל, נבנה פונקציה כך שבכל קטע $[k,k+1]$ עם $k\in\mathbb{N}$ יש לה משולש בגובה 2^k וברוחב $\frac{1}{4^k}$, ובשאר המקטע היא זהותית 0. היא כמובן רציפה, וקל לראות שהאינטגרל שלה בקטע $[k,k+1]$ הוא פשוט $\frac{1}{2}\frac{1}{2^k}$, וכמובן הסכום של האינטגרלים האלה (טור גיאומטרי) הוא 1. בכל זאת, הפונקציה לא חסומה.

2.8.2 אינטגרלים של פונקציות לא חסומות

הגדרה 2.73 תהי f מוגדרת בקטע $I=(a,b]$, ונניח ש־ f אינטגרבילית בכל תת קטע סגור של I. נאמר ש־ f אינטגרבילית ב־ I אם קיים $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ ובמקרה זה נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס ונסמן ב־ $\int_a^b f(x)dx$ את הגבול הנ"ל. אחרת, נאמר שהאינטגרל מתבדר.

הערה 2.74 ראינו בלמה 2.17 שכל פונקציה חסומה בקטע ואינטגרבילית בכל תת קטע היא אינטגרבילית בכל הקטע. כאן אין לנו את הנחת החסימות ולכן לא ניתן להשתמש בלמה, ובאמת קיימים מקרים שבהם האינטגרל לא מתכנס למרות שהפונקציה אינטגרבילית בכל תת קטע (מפני שאין לנו את דרישת החסימות).

נראה כמה דוגמאות:

.1

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln 1-\ln\varepsilon)=\infty$$

כלומר האינטגרל הזה לא מתכנס.

2. מהו $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$? הפונקציה אינה חסומה ב־ $[0,1)$ ובכל זאת:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\arcsin 1-\arcsin\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$$

וקיבלנו שהאינטגרל מתכנס למרות שהפונקציה לא חסומה.

3. נתבונן ב־ $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$. היות ובקטע $(0,1]$ מתקיים $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$, ו־ $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ מתבדר, ניתן לצפות מקריטריון ההשוואה (שטרם הוכחנו עבור אינטגרלים של פונקציות לא חסומות) שגם האינטגרל הזה מתבדר.

4.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln x}dx =^? \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln\ln\frac{1}{2} - \ln\ln\varepsilon] = -\infty$$

כלומר האינטגרל מתבדר.

5. לעומת זאת,

$$\int_0^1 x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

וכאן יכולנו להגדיר הרחבה רציפה ב־ 0 ולכן בעצם חישבנו אינטגרל אמיתי, שכן הפונקציה חסומה ואינטגרבילית בכל תת־קטע של $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו.

6.

$$\int_0^1 \ln x\,dx = x\ln x|_0^1 - \int_0^1 1dx = 0 - 1 = -1$$

וכדאי לשים לב שזה סימטרי לחלוטין ל־ $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$.

הערה 2.75 התכונות והטענות, לרבות קריטריון ההשוואה, ליניאריות, קריטריון קושי וכד', שהוכחנו עבור אינטגרלים לא אמיתיים על קטעים לא חסומים מתקיימות גם לגבי אינטגרלים לא אמיתיים על פונקציות לא חסומות.

הערה חשובה נוספת: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ <u>אינו</u> $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx$! אנחנו מאבדים אינפורמציה אם שני גבולות האינטגרציה שואפים לאינסוף באותו הקצב, למשל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx \neq \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \sin x dx = 0$$

הגדרה 2.76 נגדיר את $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ בתור הגבול הבא, אם הוא קיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty, b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

למען הנוחות, אפשר גם לבחור נקודה $c \in \mathbb{R}$ כלשהי (ולהראות שהבחירה לא משפיעה על התוצאה) ואז:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

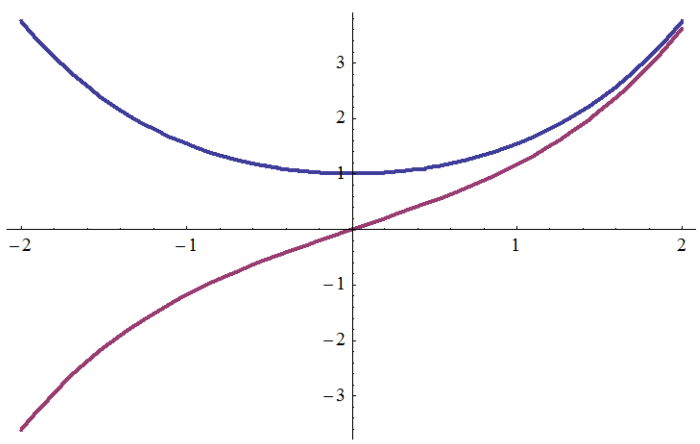
למשל,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} = \pi \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

2.9 סיור סביב הפונקציות ההיפרבוליות והגדרה אנליטית של הפונקציות הטריגונומטריות

נרצה לסקור בקצרה את הפונקציות ההיפרבוליות ולהבין כיצד ניתן להשתמש באינטגרציה כדי להגדיר בצורה אנליטית את הפונקציות הטריגונומטריות המוכרות.
ראשית ההגדרות:

$$\begin{aligned} \cosh u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} \\ \sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2} \end{aligned}$$



קל לבדוק שמתקיים:

$$\cosh' u = \sinh u \qquad\qquad \sinh' u = \cosh u$$

כמו כן רואים בנקל ש־ $\cosh u$ תמיד חיובי, ולכן $\sinh u$ עולה ממש (חח"ע).
לבסוף כמו בטריגו,

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

כיוון ש־ $\cosh u \neq 0$, $\tanh u$ מוגדרת על כל $\mathbb{R}$, ומתקיים:

$$\tanh' u = 1 - \tanh^2 u = \frac{1}{\cosh^2 u}$$

וכן מתקיים

$$-1 < \tanh u < 1$$

וגם זו פונקציה עולה ממש (חח"ע).
למעט הקוסינוס ההיפרבולי, הפונקציות כולן הפיכות, למשל:

$$\text{arctanh} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$$

ולגבי cosh, מקובל להצטמצם לגבי החצי הימני שלה, שם $\text{arccosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$, ואז:

$$\begin{aligned} \text{arcsinh} u &= \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) \\ \text{arccosh} u &= \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) \end{aligned}$$

עבור אינטגרציה, חשוב לחשב את הנגזרות של הפונקציות האלה:

$$\begin{aligned} \text{arccosh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \text{arcsinh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ \text{arctanh}' x &= \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

כתוצאה מזה, אנחנו יודעים לטנגרל כל פולינום ריבועי או פונקציה רציונאליות של פולינום ריבועי.
כעת אנו מוכנים להגדרה אנליטית של הפונקציות הטריגונומטריות.

אנו יודעים שהפונקציה $\frac{1}{1+t^2}$ אינטגרבילית בכל קטע סגור וחסום ב־ $\mathbb{R}$ שכן היא רציפה. לכן אפשר להגדיר:

$$\arctan z := \int_0^z \frac{1}{1+t^2}dt$$

וכמובן $D_{\arctan} = \mathbb{R}$. לפי המשפט היסודי, $\arctan' z = \frac{1}{1+z^2}$ והביטוי הזה חיובי, לכן הפונקציה $\arctan$ עולה ממש והפיכה. כמו כן הנגזרת זוגית ולכן הפונקציה אי־זוגית.

מכאן אפשר להגדיר:

$$\tan x := \arctan^{-1}(x)$$

כעת נשים לב ש־ $\frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$ ולכן

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt < \infty$$

ואנו יכולים להגדיר:

$$\pi := 2\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt$$

כעת יש לנו $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ואנחנו רוצים שהיא תהיה מחזורית, אז נבצע הרחבה מחזורית כדי לעשות זאת (וכיוון שבקצוות יש אסימפטוטות, אין חשש מאי־רציפות ההדבקה כי היא במילא לא תהיה רציפה). מתוך כך אפשר יהיה להגדיר את סינוס וקוסינוס:

$$\cos\theta := \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \sin\theta := \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

ושוב לעשות הרחבה מחזורית.

אפשר להמשיך כך עוד הרבה, למשל אפשר להגדיר גם את $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}dt$ (עבור x חיוביים), ועוד.

3 טורים

בהנתן קבוצה סופית $X \subset \mathbb{R}$ אפשר להתבונן בסכום $\sum_{x\in X} x$. כדי לחשב את הסכום, אנו יודעים אינדוקטיבית לחבר מספר סופי של מספרים ממשיים אם מסדרים אותם לפי הסדר ומבצעים חיבור אסוציאטיבי $((((x_1 + x_2) + x_3) + \ldots + x_{n-1}) + x_n)$.

אנחנו גם יודעים שבהנתן תמורה כלשהי על המספרים עדיין מתקיימת קומוטטיביות, כלומר $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}$ עבור כל תמורה σ. אפשר להוכיח את האסוציאטיביות והקומוטטיביות באינדוקציה.

אך אנו רוצים לייחס משמעות לסכימה על קבוצה אינסופית.

3.1 התכנסות טורים

הגדרה 3.1 תהי (x_n) סדרה ב־ $\mathbb{R}$. נכנה בשם הטור המתאים לסדרה (x_n) את הסדרה (s_n) של הסכומים החלקיים המוגדרת ע"י:

$$s_n := x_1 + \ldots + x_n$$

סדרה זו תכונה גם סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה המקורית.

נאמר ש־ (x_n) ניתנת לסכימה אם (s_n) מתכנסת. במקרה זה נאמר שהטור מתכנס, ונכתוב $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = S$ כאשר $S = \lim_{n\to\infty} s_n$. אחרת, נאמר שהסדרה לא ניתנת לסכימה, או שהטור מתבדר.

נראה כמה דוגמאות:

1. $x_n \equiv 1$, כאן $s_n = n$ מתבדרת ולכן הסדרה לא סכימה.
2. $x_n = n$ שוב אינה סכימה.
3. $q \neq 1$, $q \in \mathbb{R}$, $x_n = q^n$ וכאן $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ והסדרה סכימה אםם $-1 < q < 1$.
במקרה זה הטור מתכנס, וזה הטור הגיאומטרי: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$.
4. נראה בהמשך שהטור המתאים ל־ $x_n = \frac{1}{n}$ (הטור ההרמוני) מתבדר.
5. נראה בהמשך שהטור המתאים ל־ $x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ מתכנס.

טענה 3.2 (תכונות של טורים מתכנסים) יהיו $(x_n), (y_n)$ שתי סדרות סכימות. אזי:
אם $0 \le x_n$ אז $0 \le \sum x_n$ (חיוביות);
אם $x_n \ge y_n$ אז $\sum x_n \ge \sum y_n$ (מונוטוניות);
לכל $k, l \in \mathbb{R}$ מתקיים $\sum (kx_n + ly_n) = k\sum x_n + l\sum y_n$ (ליניאריות).

הוכחה: תוצאה ישירה של משפטים על אריתמטיקה של גבולות של סדרות (ההתייחסות כאן היא לגבולות סדרות הסכומים החלקיים, שמקיימים חיוביות, מונוטוניות, וליניאריות). ■

הגדרה 3.3 אם (x_n) סדרה ו־ $m \in \mathbb{N}_0$ אז נגדיר $x^{(m)}$ הזנב ה־ m של הסדרה המקורית, וכמובן $x^{(m)} \lhd (x_n)$.

משפט 3.4 (אדיטיביות) תהי (x_n) סדרה, (s_n) סדרת הסכומים החלקיים שלה. הטור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ מתכנס אםם לכל m מתכנס הטור $\sum_{i=m+1}^{\infty} x_i$. במלים אחרות, (x_n) סכימה אםם כל זנב $x^{(m)}$ סכימה, ובמקרה זה נסמן $r_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i$ ומתקיים $S = \sum x_i = s_m + r_m$.

הוכחה: תהי (t_n) סדרת הסכומים החלקיים של הזנב $x^{(m)}$, וכמובן $t_n = s_{n+m} - s_m$.

$(\Leftarrow)$ אם $\sum x_n$ מתכנס אז (s_n) מתכנסת ולכן כל תת־סדרה שלה גם כן מתכנסת לאותו הגבול, בפרט (t_n) מתכנסת לאותו הגבול, וגבולה מקיים:

$$r_m = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} (s_{m+n} - s_m) = \lim_{n\to\infty} s_{m+n} - s_m = S - s_m$$

כאשר S סכום הטור.

$(\Rightarrow)$ אם קיים m־זנב שמתכנס, אז $(t_n) \to r_m$. כמו קודם, $s_{m+n} = t_n + s_m$ מתכנסת ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} s_{m+n} = \lim_{n\to\infty} (t_n + s_m) = r_m + s_m$$

אבל כמובן (s_{m+n}) סדרה חלקית של (s_n) ולכן גם (s_n) מתכנסת לאותו הגבול S.
הערה: אפשר היה להסתפק בכך שעבור הזנב $m = 0$ קיבלנו את הדרוש. ■

משפט 3.5 (תנאי הכרחי להתכנסות) אם $\sum x_n$ מתכנס אז $(x_n) \to 0$.

הוכחה: אם $\sum x_n$ מתכנס אז (s_n) מתכנסת וגם $(s_{n+1}) \triangleleft (s_n)$ מתכנסת לאותו הגבול. לכן נוכל לכתוב $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ וכמובן $a_{n+1} \to 0$ ולכן $a_n \to 0$ גם כן. ■

אנטי־דוגמא: $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר <u>למרות</u> ש־ $\frac{1}{n} \to 0$. כלומר, זה אכן תנאי הכרחי אך אינו תנאי מספיק.

משפט 3.6 (קריטריון קושי להתכנסות) הטור $\sum x_n$ מתכנס אסם

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}: \quad N < n < m \implies |s_m - s_n| < \varepsilon$$

הוכחה: במילים אחרות, (s_n) סדרת קושי, וכמובן מתכנסת לפי התנאי של קושי לסדרות.■

הגדרה 3.7 תהי (x_n) סדרה ו־ $\sum x_n$ הטור המתאים לה. נאמר שהטור מתכנס בהחלט אם $\sum |x_n|$ מתכנס. אם הוא מתכנס אך לא בהחלט, נאמר שהוא מתכנס בתנאי.

הערה 3.8 כמובן, לאו דווקא $\sum |x_n|$ שווה ל־ $|\sum x_n|$.

משפט 3.9 אם הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אזי הוא מתכנס.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי. בהנתן $\varepsilon > 0$ קיים N כך שאם $m > n > N$ אז

$$\Big| |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| \Big| < \varepsilon$$

אבל לכן כמובן

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| \le |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| = \Big| |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| \Big| < \varepsilon$$

■

3.2 טורים חיוביים

הערה 3.10 בהנתן $\sum x_n$ טור חיובי, (s_n) סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת אםם $\{s_n\}$ חסומה (שכן היא מונוטונית עולה). במקרה של התכנסות, $\sup\{s_n\} = \lim s_n = \sum x_n$.

משפט 3.11 (קריטריון ההשוואה) יהיו $(d_n), (a_n), (c_n)$ סדרות.
אם $|a_n| \leq c_n$ אזי אם $\sum c_n$ מתכנס, $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
אם $0 \leq d_n \leq a_n$ אזי אם $\sum d_n$ מתבדר, $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה: מיידית, נובעת מחסימות סדרות הסכומים החלקיים. ■

נראה כמה דוגמאות:
1. תהי (a_n) סדרה עם $a_0 \in \mathbb{N}_0$ ו־ $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$. אז אפשר לפרש את המספר העשרוני $a_0.a_1a_2\ldots$ בתור הטור

$$a_0 + a_1\frac{1}{10} + a_2\frac{1}{10^2} + \ldots + a_n\frac{1}{10^n} + \ldots$$

והטור הזה מתכנס, שכן לכל $n \geq 1$ מתקיים $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$ ולכן

$$s_n = a_0 + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq a_0 + 9(\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n})$$

וכמובן באגף ימין יש לנו זנב של טור גיאומטרי עם $-1 < q = \frac{1}{10} < 1$ שמתכנס, ולכן הסכום הזה חסום:

$$\leq a_0 + (\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1) = a_0 + 1$$

היות וזה טור חיובי, החסימות מספיקה להתכנסות ולכן הטור מתכנס. על כן ניתן יהיה לסמן בתור $a_0.a_1a_2\ldots$ את סכום הטור המתאים כפי שראינו.
2. הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר. נראה זאת:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots$$

וכעת נחליף בתוך כל סוגריים את האיברים באיבר הקטן ביותר:

$$> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

וכמובן סדרת הסכומים החלקיים של הטור שקיבלנו לא מתכנסת, ולפי קריטריון ההשוואה גם הטור ההרמוני לא מתכנס. פורמלית, אם (s_n) סדרת הסכומים החלקיים אז קיבלנו ש־ $s_{2^k} \geq 1 + k\frac{1}{2}$ וכמובן אגף ימין מתבדר.

משפט 3.12 (קריטריון ההשוואה הגבולי, limit test) יהיו $(a_n),(c_n)$ סדרות חיוביות ממש. אם $\lim \frac{a_n}{c_n}$ קיים וגדול ממש מ־ 0 אז הטור $\sum c_n$ מתכנס אםם הטור $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה: יהיו p,q כך ש־ $0<p<\frac{a_n}{c_n}<q$ כמעט תמיד. זה שקול לכך ש־ $pc_n<a_n<qc_n$. כעת אם $\sum c_n$ מתכנס אז סדרת הסכומים החלקיים של (qc_n) חסומה ולכן סדרת הסכומים החלקיים של (a_n) חסומה ולכן $\sum a_n$ מתכנס. להיפך, אם סדרת הסכומים החלקיים של (a_n) חסומה אז כך גם סדרת הסכומים החלקיים של (pc_n) ולכן של (c_n) ולכן $\sum c_n$ מתכנס. ∎

לדוגמא, נתבונן בטור $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. נשים לב:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

וכעת

$$\sum_{n=1}^{k} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{k+1} \longrightarrow_{k\to\infty} 1$$

כלומר הטור מתכנס ל־ 1.
לכן הטור $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס לפי קריטריון הגבול, שכן:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

ואנו עומדים בתנאי הקריטריון. לא נוכיח כאן, אבל $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

מסקנה 3.13 באותם התנאים, אם $\lim \frac{a_n}{c_n} = 0$ אז כמעט תמיד מתקיים $0<\frac{a_n}{c_n}<q$ כלומר $a_n<qc_n$ ולכן מקבלים תנאי חד־כיווני: אם $\sum c_n$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס.

משפט 3.14 (קריטריון המנה, ratio test) תהי (x_n) סדרה חיובית. נתבונן בשני המספרים:

$$u = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad l = \liminf \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

אזי אם $u<1$, הטור $\sum x_n$ מתכנס, ואם $l>1$ הטור מתבדר.

הוכחה: נניח $u<1$. לכל $\varepsilon>0$ יש אינסוף x_n כך ש־ $u-\varepsilon<x_n$ ויש מספר סופי בלבד של x_n כך ש־ $x_n>u+\varepsilon$. במקרה שלנו, יהי $u<q<1$ ואז $\frac{x_{n+1}}{x_n}<q$ כמעט תמיד. במלים אחרות, קיים N כך שאם $n>N$ אז $x_{n+1}<x_n q$. אז כמובן מתקיים:

$$\begin{array}{rcl} x_{N+1} & < & x_N q \\ x_{N+2} & < & x_N q^2 \\ & \ldots & \\ x_{N+k} & < & x_N q^k \end{array}$$

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} x_N q^k = x_N \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ מתכנס (טור גיאומטרי, $q<1$) ולכן גם $\sum_{k=1}^{\infty} x_{N+k}$ מתכנס, והוא זנב של הטור המקורי. כיוון שהזנב מתכנס, גם הטור המקורי מתכנס, כנדרש.

באופן דומה, אם $l > 1$ אזי $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ כמעט תמיד. כלומר, $x_{n+1} > x_n$ כמעט תמיד ולכן כמובן $x_n \nrightarrow 0$ כלומר הטור לא מתכנס, כנדרש. ■

נראה דוגמא חשובה מאוד לקריטריון הזה: יהי $x \in \mathbb{R}$ ונתבונן בסדרה $(\frac{x_n}{n!})$. אם $x = 0$ הסדרה היא $(1,0,0,\dots)$ וכמובן הטור המתאים לה מתכנס. אחרת,

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

כלומר, אנחנו במקרה שבו הגבול העליון קטן מ־ 1 ולכן הטור מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס). אגב, אם נסמן ב־ $E(x)$ את סכום הטור, מסתבר ש־ $E(x) = e^x$ (ברור שעבור n סופי זהו פיתוח טיילור של e^x סביב 0). שקול לומר, קיבלנו הצגה אחרת של e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

משפט 3.15 (קריטריון השורש, root test) תהי (a_n) סדרה חיובית. נסמן $u = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. אם $u < 1$, הטור $\sum a_n$ מתכנס; אם $u > 1$, הטור מתבדר.

הוכחה: יהי $u < q < 1$, אז כמו קודם $\sqrt[n]{a_n} < q$ כמעט תמיד, כלומר $a_n < q^n$ כמעט תמיד, וזה כמובן מספיק כי $\sum q^n$ מתכנס במקרה זה. באופן דומה, אם $u > 1$ אז יהי $1 < p < u$ ואז $1 \leq p^n < a^n$ באופן שכיח ולכן $a_n \nrightarrow 0$, כלומר הטור מתבדר. ■

טענה 3.16 תהי (a_n) סדרה חיובית, אזי מתקיים:

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

כלומר, קריטריון השורש חזק יותר מקריטריון המנה. המסקנה היא שתמיד כדאי לבדוק קודם את קריטריון המנה.

הוכחה: נוכיח רק את הצד הימני. יהי $u = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. אם $u = \infty$ אז הא"ש מתקיים. אחרת, $u \in \mathbb{R}$. ניקח $u < q$, ונקבל שמתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ כמעט תמיד, כלומר קיים N כך שאם $n > N$ אז $a_{n+1} < qa_n$. כלומר, $a_{N+m} < q^m a_N$, ואם נחליף אינדקסים $N + m = n$ אז מקבלים:

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{q^{n-N}}\, \sqrt[n]{a_N} = q^{\frac{n-N}{n}} a_N^{\frac{1}{n}} = q(\frac{a_N}{q^N})^{\frac{1}{n}}$$

לכן אותו יחס מתקיים גם לגבי $\limsup$ בגבול:

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup q(\frac{a_N}{q^N})^{\frac{1}{n}} = q$$

זה נכון עבור כל $u < q$, ולכן $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq u$ כפי שרצינו. הצד השמאלי סימטרי. ■

לדוגמא, נתבונן בסדרה $a_n = \begin{cases} q^{n-1} & n \,(\mathrm{mod} 2) \equiv 0 \\ q^{n+1} & n \,(\mathrm{mod} 2) \equiv 1 \end{cases}$ עבור $0 < q < 1$ כלשהו. אם ננסה להפעיל את קריטריון המנה, נקבל:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{q^n}{q^{n+1}} = \frac{1}{q} & n \text{ is even} \\ \frac{q^{n+2}}{q^{n-1}} = q^3 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

ולכן $1 < \frac{1}{q} = \max\{\frac{1}{q}, q^3\} = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$, כלומר אין לנו אפשרות להכריע האם הטור מתכנס.

לעומת זאת,

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} q^{\frac{n-1}{n}} = qq^{-\frac{1}{n}} & n \text{ is even} \\ q^{\frac{n+1}{n}} = qq^{\frac{1}{n}} & n \text{ is odd} \end{cases}$$

ומכאן, $\lim \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ והטור מתכנס. כלומר, קריטריון השורש קבע שהטור מתכנס אך קריטריון המנה לא מכריע האם הטור מתכנס.

מסקנה 3.17 נתבונן בסדרה $a_n = \frac{n^n}{n!}$. אזי

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \lim \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim(1 + \frac{1}{n})^n = e$$

במקרה זה קיים לסדרה גבול, כלומר הגבול העליון שווה לגבול התחתון, ולכן לפי הטענה $\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$. מכאן אפשר להסיק ש־ $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, או $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ (נוסחת סטרלינג הקטנה).

נוסחת סטרלינג הרגילה היא $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ ואותה כבר ראינו ב־ 2.5.5.

משפט 3.18 (קריטריון האינטגרל) תהי $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ חיובית ומונוטונית יורדת. תהי $a_n := f(n)$ סדרה. אזי $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס אםם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס, ובמקרה של התכנסות מתקיים $\int_{n+1}^\infty f(x)dx \leq S - s_n \leq \int_n^\infty f(x)dx$, כאשר S סכום הטור ו־ s_n האיבר המתאים בסדרת הסכומים החלקיים.

הוכחה: נשים לב שהפונקציה אינטגרבילית בכל תת־קטע של $[1, \infty)$ כי היא מונוטונית, ומתקיים:

$$\begin{aligned} a_2 &\leq \int_1^2 f(x)dx \leq a_1 \\ &\cdots \\ a_n &\leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq a_{n-1} \end{aligned}$$

ואם מסכמים,

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq s_{n-1} - a_1$$

כעת אם $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס, אז לכל n מתקיים

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq \int_1^\infty f(x)dx$$

כלומר סדרת הסכומים החלקיים חסומה, ולכן הטור מתכנס.
להיפך, אם הטור מתכנס אז $\{s_n\}$ חסומה ו־ S סכום הטור, ולכן

$$\int_1^n f(x)dx \leq s_{n-1} - a_1 \leq S - a_1$$

לכל n, ולכן האינטגרל מתכנס.
כעת נרצה לקבל את ההערכה על גודל השגיאה. ובכן, לכל k, $a_k > a_{k+1}$ כי הפונקציה יורדת. בקטע $[k, k+1]$ יש לנו את היחס הבא בין שלוש פונקציות:

$$a_{k+1} \leq f \leq a_k$$

לכן כמובן גם

$$\int_k^{k+1} a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} a_k$$

כלומר,

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k$$

כעת נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים, עבור $n < m$ על s_n, s_m. כיוון שהסכומים החלקיים הם מתחת לגרף הפונקציה, מתקיים ש־ $s_m - s_n \leq \int_n^m f(x)dx$. אם נרצה לחסום את האינטגרל מלמעלה, נוכל להזיז את (a_n) באיבר אחד ימינה:

$$s_m - s_n \leq \int_n^m f(x)dx \leq s_{m-1} - s_{n-1}$$

וכעת

$$\int_{n+1}^{m+1} f(x)dx \leq s_m - s_n \leq \int_n^m f(x)dx$$

וכאשר $m \to \infty$, מקבלים את הא"ש בין הגבולות:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq S - s_n \leq \int_n^{\infty} f(x)dx$$

כפי שרצינו. ■

הערה 3.19 הקריטריון מאפשר לקבל הערכה על גודל השגיאה בחישוב סכום הטור ע"י n האיברים הראשונים ע"י חישוב האינטגרל הלא אמיתי (או הערכה שלו).

זה פותח פתח לכמה דוגמאות פשוטות:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר כי האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$ מתבדר.
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס כי האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס.
3. הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ מתבדר שכן

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x}dx = \lim_{b\to\infty} \log\log x|_2^b = \infty$$

4. הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ מתכנס שכן

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2 x}dx = \lim_{b\to\infty} (-\frac{1}{\log x})|_2^b = \frac{1}{\log 2}$$

למעשה, לכל $1 < p$ נקבל ש־ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$ מתכנס.

משפט 3.20 (קריטריון העיבוי, condensation test) תהי (a_n) סדרה חיובית מונוטונית יורדת ל־ 0. אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס אםם הטור $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

הוכחה: נסמן:

$$t_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} \qquad\qquad s_n = a_1 + \ldots + a_n$$

נניח $n \le 2^k$ ואז מתקיים:

$$s_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \ldots + a_n \le a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k}$$

נשים לב ש־ $\sum 2^n a_{2^n}$ אסם $\{t_k\}$ חסומה. אם הוא אכן מתכנס, אז $\{s_n\}$ חסומה ולכן $\sum a_n$ מתכנס.
בכיוון השני, נניח $2^k < n$ ואז:

$$s_n \ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + a_{2^k} \ge \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k}$$

ומכאן

$$2s_n \ge a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k$$

כעת אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\{s_n\}$ חסומה ואז $\{2s_n\}$ חסומה ולכן גם $\{t_k\}$ חסומה ו־ $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס. ■

הערה 3.21 הבחירה של 2 בקריטריון היא שרירותית. באותה מידה אפשר היה לבחור 17.

דוגמאות:
1. $\sum \frac{1}{n}$, זהו טור על סדרה חיובית מונוטונית יורדת ל־ 0, והטור $\sum 2^n \frac{1}{2^n} = \sum 1$ כמובן מתבדר ולכן גם הטור הזה מתבדר.
2. באופן כללי, $\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס אסם $\sum 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ מתכנס, כלומר אסם $\sum (\frac{2}{2^p})^n$ מתכנס, וזה קורה אסם $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, כלומר $p > 1$ כפי שידענו כבר.
3. $\sum \frac{1}{n \log n}$ מתכנס אסם $\sum 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum \frac{1}{n \log 2}$ מתכנס, וזו כפולה של הטור ההרמוני ולכן מתבדר.
4. $\sum \frac{1}{n \log^2 n}$ מתכנס אסם $\sum 2^n \frac{1}{2^n \log^2 2^n} = \sum \frac{1}{n^2 \log^2 2}$ מתכנס, וזו כפולה של $\sum \frac{1}{n^2}$ ולכן מתכנס.

3.3 טורים כלליים

משפט 3.22 (קריטריון לייבניץ לטורים עם סימנים מתחלפים) תהי (x_n) סדרה מונוטונית חיובית יורדת ל־ 0 במובן החזק. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ מתכנס, ו־ $0 < S < x_1$ כאשר S סכום הטור. יתר על כן, מתקיים $0 < (-1)^{m+1} S - s_m < x_{m+1}$.

הוכחה: נגדיר $a_n = s_{2n},\ b_n = s_{2n-1}$. נראה ש־ $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ וכן $b_n - a_n = x_{2n}$.
ובכן,

$$a_{n+1} - a_n = s_{2n+2} - s_n = s_{2n} + x_{2n+1} - x_{2n+2} - s_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n+2} > 0$$

ממונוטוניות (x_n). הצד השני סימטרי.

כעת $(x_{2n}) \triangleleft (x_n)$ ולכן $x_{2n} \to 0$ ולכן $b_n - a_n \to 0$. אנו עומדים בתנאי הלמה של קנטור, ויהי S הגבול של $(a_n),(b_n)$ ביחד, וכמובן $s_n \to S$ בעצמה כי היא מורכבת מהסדרות $(a_n),(b_n)$.

מכאן נובעות גם כל שאר הטענות של המשפט. ■

לדוגמא, הטור $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ מתכנס. זהו טור מתכנס בתנאי.

אנטי־דוגמא: אם הסדרה לא מונוטונית יורדת, המשפט לא נכון. למשל,

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$$

זו סדרה השואפת ל־ 0 עם סימנים מתחלפים אך שאינה מונוטונית. אם מקבצים את האיברים בזוגות, מקבלים

$$\frac{2}{2-1} + \frac{2}{3-1} + \ldots + \frac{2}{n-1} + \ldots$$

וזו כפולה של זנב הטור ההרמוני, שמתבדר. דהיינו, חשוב לדרוש שהסדרה יורדת מונוטונית ל־ 0.

הערה 3.23 במישור המעשי, המשפט נותן הערכה על גודל השארית. אם חישבנו את s_m ואיננו יודעים את S, אז אפשר להעריך את הזנב ה־ m באמצעות האיבר הראשון שלו: $|S - s_m| < |x_{m+1}|$.

דבר נוסף: אם (x_n) יורדת במובן החלש, אזי המסקנות נכונות גם כן, עם אי־שוויונות חלשים במקום חזקים.

משפט 3.24 (דיריכלה) תהי (a_n) סדרה חיובית מונוטונית יורדת ל־ 0. יהי $\sum b_n$ טור חסום (כלומר סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה). אזי הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה: נגדיר $B_0 = 0,\ B_n = b_1 + \ldots + b_n$. אזי (B_n) סדרה חסומה, ונניח $|B_n| \le B$ לכל n. כעת נשים לב:

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + \ldots + a_nb_n &= a_1(B_1 - B_0) + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}) \\
&= a_1B_1 + a_2B_2 - a_2B_1 + a_3B_3 - a_3B_2 + \ldots + a_nB_n - a_nB_{n-1} \\
&= B_1(a_1 - a_2) + B_2(a_2 - a_3) + \ldots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_nB_n
\end{aligned}$$

וכעת מספיק להראות ש־ (a_nB_n) מתכנסת וש־ $(\sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k+1}))$ מתכנסת. אז כמובן (a_nB_n) מתכנסת ל־ 0 כי (a_n) מתכנסת ל־ 0 ו־ (B_n) חסומה. וכן,

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_k - a_{k+1}||B_k| \leq B \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = B(a_1 - a_n) \to Ba_1$$

כאשר המעבר הראשון מוצדק מחסימות (B_n) ומונוטוניות, המעבר השני הוא סכימת טור טלסקופי, והמעבר האחרון משום ש־ $a_n \to 0$. זה אומר ש־ $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})B_k$ מתכנס בהחלט (חסימות שקולה להתכנסות כי זה טור חיובי) ולכן מתכנס, ולכן כמובן הסדרה $(\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k)$ מתכנסת כפי שרצינו. ■

לדוגמא, ראינו שהאינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ מתכנס. באופן דומה, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$. נסמן כאן $a_n = \frac{1}{n}$ ו־ $b_n = \sin nx$ וניזכר ש־

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

(עבור $x \neq k\pi$ לכל k שלם, ואילו עבור $x = k\pi$ הטור הוא 0 ולכן מתכנס) בערך מוחלט,

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| = |\frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

ולכן מתכנס. לכן הטור המקורי מתכנס כי $(a_n) \to 0$ מונוטונית וחיובית, והראינו שהטור השני חסום. אפשר להראות טענה דומה גם לגבי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

הערה 3.25 משפט לייבניץ הוא מקרה פרטי של קריטריון דיריכלה, עם $\sum b_n = \sum(-1)^{n+1}$, שהוא כמובן חסום.

משפט 3.26 (קריטריון אבל) תהי (a_n) סדרה מונוטונית יורדת ל־ a. יהי $\sum b_n$ טור מתכנס. אזי הטור $\sum a_nb_n$ מתכנס.

הוכחה: נתבונן ב־ $(a_n - a)$ ו־ $\sum b_n$. כמובן $(a_n - a)$ מונוטונית יורדת ל־ 0 ו־ $\sum b_n$ מתכנס ולכן חסום. לכן לפי משפט דיריכלה, הטור $\sum(a_n - a)b_n$ מתכנס. אבל $(a_n - a)b_n = a_nb_n - ab_n$, כלומר $a_nb_n = (a_n - a)b_n + ab_n$, ולכן $\sum a_nb_n$ מתכנס כי הוא שווה ל־ $\sum(a_n - a)b_n + \sum ab_n$, ששניהם מתכנסים. ■

הגדרה 3.27 לכל x נגדיר

$$P(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad N(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

וכמובן מתקיים $x = P(x) - N(x),\ |x| = P(x) + N(x)$.
כמו כן, בהינתן (a_n) סדרה, נגדיר $P_n = P(a_n)$ ו־ $N_n = N(a_n)$ סדרות מתאימות, ואפשר גם לכתוב ישירות:

$$P_n = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad N_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

משפט 3.28 הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אםם הטורים $\sum P_n, \sum N_n$ מתכנסים; ובמקרה של התכנסות מתקיים $S = P - N$ כאשר S סכום הטור $\sum a_n$, P סכום הטור $\sum P_n$ ו־ N סכום הטור $\sum N_n$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ אם $\sum |a_n|$ מתכנס, נשים לב ש־ $P_n, N_n \leq |a_n|$ ולכן $\sum P_n, \sum N_n$ מתכנסים שניהם לפי קריטריון ההשוואה. לכן לפי אריתמטיקה של טורים מתכנסים, $\sum P_n - \sum N_n = \sum (P_n - N_n)$ מתכנס, $\sum (P_n - N_n) = \sum a_n$ מתכנס וכן $S = P - N$ כפי שרצינו.

$(\Rightarrow)$ להיפך, אם $\sum P_n, \sum N_n$ מתכנסים אזי לפי אריתמטיקה של טורים מתכנסים גם $\sum (P_n + N_n)$ מתכנס, והוא בדיוק $\sum |a_n|$ ולכן $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, ובכל מקרה $S = P - N$. ■

3.4 החלפת סדר והכנסת סוגריים

הגדרה 3.29 נאמר שהסדרה (b_n) מתקבלת מן הסדרה (a_n) ע"י שינוי סדר אם קיימת תמורה $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש־ $b_n = a_{\sigma(n)}$. באופן דומה נוכל לדבר על טור המתקבל מטור אחר ע"י שינוי סדר.

משפט 3.30 יהי $\sum a_n$ טור חיובי, ויהי $\sum b_n$ טור המתקבל ממנו ע"י שינוי סדר. אזי $\sum a_n$ מתכנס אםם $\sum b_n$ מתכנס, ובמקרה של התכנסות, סכומי הטורים שווים.

הוכחה: נגדיר כרגיל $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$. בהנתן $n \in \mathbb{N}$ יהי $N \in \mathbb{N}$ עם התכונה $\sigma(i) \leq N$ לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$. כעת:

$$t_n = a_{\sigma(1)} + \ldots + a_{\sigma(n)} \leq a_1 + \ldots + a_N$$

משום שהטור חיובי. כעת אם $\sum a_n$ מתכנס אז $t_n \leq s_N \leq \sum a_n$, כלומר $\sum a_n$ חסם מלעיל של $\{t_n\}$. אם כך, $\sum b_n$ מתכנס (חסימות טור חיובי שקולה להתכנסות) ומתקיים $\sum b_n = \sup\{t_n\} \leq \sum a_n$.
אך נשים לב שגם (a_n) מתקבלת מ־ (b_n) ע"י שינוי סדר ע"י התמורה ההפכית σ^{-1}, ולכן מאותם שיקולים $\sum a_n \leq \sum b_n$ ומכאן השוויון בין הסכומים. ■

מסקנה 3.31 אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט ו־ $\sum b_n$ מתקבל ממנו ע"י שינוי סדר, אז $\sum b_n$ מתכנס בהחלט וסכומי הטורים שווים.

הוכחה: כאן מתקיים $\sum b_n = \sum a_{\sigma(n)} = \sum(P_{\sigma(n)} - N_{\sigma(n)})$ בסימוני הגדרה 3.27. אבל $\sum P_n$ חיובי ומתכנס, ולכן לפי המשפט גם $\sum P_{\sigma(n)}$ מתכנס וכנ"ל $\sum N_{\sigma(n)}$. לכן לפי אריתמטיקה של טורים מתכנסים,

$$\begin{aligned}
\sum(P_{\sigma(n)} - N_{\sigma(n)}) &= \sum P_{\sigma(n)} - \sum N_{\sigma(n)} \\
\sum b_n &= \sum P_{\sigma(n)} - \sum N_{\sigma(n)} = \sum P_n - \sum N_n = \sum a_n
\end{aligned}$$

כפי שרצינו. כמו כן,

$$\begin{aligned}
\sum |b_n| &= \sum |a_{\sigma(n)}| = \sum(P_{\sigma(n)} + N_{\sigma(n)}) \\
&= \sum P_{\sigma(n)} + \sum N_{\sigma(n)} = \sum P_n + \sum N_n = \sum |a_n|
\end{aligned}$$

מאותו השיקול. ■

הערה 3.32 המשפט דורש את חיוביות הטור. כלומר, אם טור מתכנס בתנאי, החלפת סדר עלולה להשפיע על ההתכנסות (בהמשך נראה זאת–משפט רימן).

משפט 3.33 אם $\sum a_n$ מתכנס וסכומו S, אזי כל טור המתקבל ממנו ע"י הכנסת סוגריים יתכנס לאותו הסכום.

הוכחה: נתבונן בטור $\sum b_n$ שהתקבל ע"י הכנסת סוגריים, כלומר קיימת סדרה עולה ממש (n_k) ב־ $\mathbb{N}$ כך ש־

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1},\ \ldots,\ b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$$

כאשר הכנסת הסוגריים התבצעה במקומות ה־ (n_k). אבל כעת,

$$t_k = b_1 + \ldots + b_k = a_1 + \ldots + a_{n_k} = s_{n_k}$$

מאסוציאטיביות של סכום סופי. וכן, $(s_{n_k}) \triangleleft (s_n)$ ולכן מתכנסת לאותו הגבול, ולכן (t_k) מתכנסת ל־ S ולכן הטור $\sum b_n$ מתכנס ל־ S. ■

הערה 3.34 אזהרה: אם טור מתכנס, הכנסת סוגריים משאירה טור מתכנס לאותו הסכום, אבל אם הטור לא מתכנס, הכנסת הסוגריים עלולה להשפיע על ההתכנסות. כלומר, אם לאחר הכנסת סוגריים טור מתכנס, אין משמעות הדבר שהטור מתכנס גם לפני הכנסת הסוגריים.

לדוגמא, הטור $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ לא מתכנס, אבל אם מכניסים סוגריים, מתקבל הטור $(1-1) + (1-1) + \ldots = 0$ שמתכנס.

כמו כן יש לשים לב שהכנסת סוגריים בטור שקולה למעבר לתת־סדרה של סדרת הסכומים החלקיים. לכן, לכל טור ניתן להוסיף סוגריים וליצור טור מתכנס (במובן הרחב), שהרי לכל סדרה יש תת־סדרה מתכנסת במובן הרחב.

זה גם נותן קריטריון להתבדרות: אם ישנן שתי דרכים שונות להכניס סוגריים המובילות לסכומים שונים, אזי הטור המקורי לא מתכנס (שכן לסדרת הסכומים החלקיים שלו שני גבולות חלקיים שונים לפחות, ועל כן היא לא מתכנסת).

למה 3.35 יהי $\sum a_n$ טור המתכנס בתנאי. אזי הטורים המתאימים $\sum P_n, \sum N_n$ מהגדרה 3.27 מתבדרים שניהם[1].

הוכחה: ראשית נשים לב שב־ (a_n) אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים. אחרת, הטור המקורי היה בעל אותו סימן כמעט תמיד, ואז היה מתכנס בהחלט בניגוד להנחה. יתר על כן, $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N P_n - \sum_{n=1}^N N_n$ ולכן אם $\sum a_n$ מתכנס, שני הטורים מתבדרים או שני הטורים מתכנסים (שכן אם אחד מתבדר והשני מתכנס, סכומם, שהוא הטור המקורי, היה מתבדר בסתירה להנחה). אבל כעת אם שניהם מתכנסים אזי $\sum |a_n| = \sum P_n + \sum N_n$ היה מתכנס בסתירה להנחה, ולכן אין מנוס מלהסיק ששניהם מתבדרים, וכיוון שהם חיוביים, הם מתבדרים לאינסוף. ■

משפט 3.36 (רימן) יהי $\sum a_n$ טור המתכנס בתנאי. אזי לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים טור $\sum b_n$ המתקבל מהטור המקורי ע"י החלפת סדר כך ש־ $\sum b_n = x$.

הוכחה: בה"כ נניח $a_n \neq 0$, אחרת נוכל להשמיט את האפסים מבלי לשנות את הטור. כמו כן נבנה סדרות חדשות, $(p_k) \lhd (P_n), (q_l) \lhd (N_n)$ שמתקבלות מהסדרות המקוריות ע"י השמטת האפסים בסדרות אלה. כמובן גם $(p_k) \lhd (a_n), (-q_l) \lhd (a_n)$.

עתה נניח $0 \leq x$ (המקרה האחר דומה). יהי כעת k_1 האינדקס <u>הראשון</u> כך ש־

$$x < p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} = s_1$$

וכמובן $p_1 + \ldots + p_{k-1} \leq x$. זה אפשרי כי $\sum p_k = \infty$. כמו כן יתקיים $0 \leq s_1 - x \leq p_{k_1}$.

כעת נוכל לבחור l_1 האינדקס הראשון המקיים

$$t_1 = s_1 - (q_1 + \ldots + q_{l_1}) < x$$

וזה שוב אפשרי שכן $\sum q_l = \infty$, וכן $0 \leq x - t_1 < q_{l_1}$.

נמשיך בצורה אינדוקטיבית כך שבצעד ה־ m בוחרים אינדקסים כך ש־ $0 \leq s_m - x <$ p_{k_m} ו־ $0 \leq x - t_m < q_{l_m}$. נשים לב שהטור $\sum a_n$ מתכנס ולכן $(a_n) \to 0$ וגם $(p_k), (q_l) \to 0$. גם תת־הסדרות $(p_{k_m}), (q_{k_l})$ מתכנסות ל־ 0. ואז מקבלים סנדוויץ', שהרי $(s_m) \to x, (t_m) \to x$.

אי אפשר לעצור כאן כי אלה רק חלק מהסכומים החלקיים של הטור החדש שאנו בונים. אם כך יהי u_n סכום חלקי כלשהו של הטור לאחר הסידור מחדש שמוביל לסדרת הסכומים החלקיים $(s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots)$.

[1] בהרצאה, למה זו ניתנה כהערה במסגרת הוכחת המשפט, ולכן היא חלק אינטגרלי הימנו.

אם u_n הוא סכום שהאיבר האחרון בו הוא חיובי, אזי קיים m כך ש־ $t_{m-1} \le u_n \le s_m$ (כאשר לצורך העניין נניח $t_0 = 0$). באופן דומה, אם $\underline{u_n}$ הוא סכום שהאיבר האחרון בו הוא שלילי, אזי קיים אינדקס m כך ש־ $t_m \le u_n \le s_{m-1}$ (ושוב $s_0 = 0$). אבל כאשר $n \to \infty$ גם $m \to \infty$ ולכן מקבלים שוב סנדוויץ' ובגללו $(u_n) \to x$ כפי שרצינו. ■

נתבונן בדוגמא מפורסמת מאוד, שהיא הטור ההרמוני בעל סימנים מתחלפים, כלומר הטור

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ראינו שהטור הזה מתכנס, נניח ל־ L. ראינו גם שהכנסת סוגריים לטור מתכנס לא משנה את ההתכנסות, ולכן נקבץ אותו בתור

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = L$$

כעת נתבונן בטור המתקבל ע"י החלפת סדר האיברים, כך שיהיו שניים שליליים ואחד חיובי. את הטור המתקבל אפשר לכנס באמצעות

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n})$$

נשים לב שהביטוי הנסכם שווה ל־ $\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n})$ ולכן כל הסכום הוא מחצית מהסכום המקורי, כלומר $\frac{L}{2}$. באופן דומה ניתן להראות שאם מחליפים את סדר האיברים כך שיהיו שניים חיוביים ואחד שלילי, סכום הטור משתנה להיות $\frac{3L}{2}$. (כל זאת ועוד בתרגיל 10.)

3.5 מכפלת טורים[2]

נציין שקיימות דרכים רבות להציג מכפלת טורים, שהרי לא ברור בצורה חד־משמעית כיצד יש לכפול שני סכומים אינסופיים. אנו נשתמש בהגדרת המכפלה של קושי, שמאפשרת את התוצאה הנוחה הבאה:

משפט 3.37 יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט. יהי $\sum c_n$ הטור כך ש־

$$c_n = \sum_{0 \le i,j \le n}^{i+j=n} a_i b_j$$

אזי הטור $\sum c_n$ מתכנס ומתקיים $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$.

[2] פרק זה נלמד רק בהרצאה של מר איתמר צביק, ולכן ככל הנראה אינו מהווה חומר לבחינה.

הוכחה: נבנה את הסדרה $(a_0b_0, a_1b_0, a_0b_1, a_2b_0, a_1b_1, a_0b_2, \dots)$, וכעת נראה שהטור המתאים לסדרה הזאת מתכנס בהחלט. נתבונן בסכום חלקי כלשהו s. יהי N המקסימלי מבין האינדקסים i, j המופיעים בסכום חלקי זה. אזי סכום האיברים המוחלטים שמופיעים בסכום זה חסום מלמעלה ע"י $(\sum^N |a_i|)(\sum^N |b_j|)$, כלומר:

$$\sum_{0\leq i,j\leq N} |a_ib_j| \leq (\sum^N |a_i|)(\sum^N |b_j|) \leq (\sum^\infty |a_n|)(\sum^\infty |b_n|) < \infty$$

בזאת הראינו שהטור מתכנס בהחלט, שהרי סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה. ראינו שמותר לנו להכניס סוגריים ולשנות את סדר הסכימה מבלי לשנות את סכום הטור, ולקבל שהטור $\sum c_n = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + \dots$ מתכנס.

על מנת לחשב את סכומו, נתבונן בסכומים "לפי ריבועים":

$$a_0b_0 + (a_1b_0 + a_1b_1 + a_0b_1) + (a_0b_0 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_0b_2) + \dots$$

תהי (t_n) סדרת הסכומים החלקיים של טור זה, ו־ u_n, s_n הסכומים החלקיים של הטורים המקוריים $\sum a_n, \sum b_n$. אזי מתקיים $t_n = s_nu_n$ וזו מכפלה של סדרות מתכנסות, כלומר $t_n = s_nu_n \to (\sum a_n)(\sum b_n)$. כיוון שכך, הטור "לפי ריבועים" מתכנס למכפלת סכומי הטורים המקוריים, והוא בעצמו בסה"כ מתקבל מהטור $\sum c_n$ ע"י הכנסת סוגריים והחלפת סדר, ולכן גם $\sum c_n$ מתכנס למכפלת סכומי הטורים המקוריים, כנדרש. ■

דוגמא: ראינו כבר שהטור $E(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ מתכנס בהחלט. כעת נתבונן ב־ $E(x)E(y)$ עבור $x, y \in \mathbb{R}$ כלשהם. ובכן,

$$E(x)E(y) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}\frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \sum_{n=0}^\infty \binom{n}{i}\frac{x^iy^{n-i}}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y)$$

אנטי־דוגמא: הטור $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ מתכנס בתנאי. נכפול אותו בעצמו לפי קושי:

$$|c_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(\frac{n}{2}+1)^2 - (\frac{n}{2}-k)^2}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} \geq \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2$$

כלומר, האיבר הכללי של טור המכפלה אינו שואף ל־ 0, ולכן טור המכפלה בכלל לא מתכנס (וזאת משום שהטור המקורי מתכנס בתנאי ולא בהחלט).

3.6 אפיון לֶבֶּג לאינטגרביליות

ראינו בעבר ששינוי מספר סופי של נקודות לא פוגע באינטגרביליות של פונקציה וגם לא בערך האינטגרל. השאלה היא האם שינוי של מספר אינסופי של נקודות בהכרח פוגע באינטגרביליות. הזכרנו קודם ששינוי של מספר בן־מניה של נקודות לא משפיע על אינטגרביליות, כלומר למשל פונקציה בעלת מספר בן־מניה של נקודות אי־רציפות היא עדיין אינטגרבילית. כאן נרצה להגיע לתוצאה אפילו יותר חזקה.

הגדרה 3.38 קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא בת מניה אם קיימת התאמה חח"ע ועל בין $\mathbb{N}$ לבין A. במילים אחרות, אם קיימת סדרה (x_n) שהיא על A, כלומר $\{x_n\} = A$.

אין לנו עניין במושג המידה הכללי, אבל מעניינת אותנו מידה אפס:

הגדרה 3.39 קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא בעלת מידה אפס אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרה (I_n) של קטעים פתוחים כך ש־ $A \subseteq \bigcup I_n$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$.

דוגמאות:

1. כל קבוצה סופית $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$ היא בעלת מידה אפס. בהינתן $\varepsilon > 0$ לכל i נמצא $x_i \in I_i$ כך ש־ $l(I_i) < \frac{\varepsilon}{N}$. החל מ־ N, נגדיר $I_n = \emptyset$ וקיימנו את ההגדרה. (למען ההגינות, דרשנו ש־ I_n תמיד יהיו קטעים, וקבוצה ריקה היא קטע באופן ריק...)
2. כל קבוצה בת מניה היא בעלת מידה אפס. נסדר את הקבוצה בסדרה (x_n). בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $x_i \in I_i$ כך ש־ $l(I_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. כמובן, $\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) < \varepsilon$ משיקולי טור גיאומטרי. מכאן ניתן להסיק למשל ש־ $\mathbb{Q}$ בעלת מידה אפס (אם מקבלים את הקביעה שהיא בת מניה).
3. נתבונן בקבוצה $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, איחוד בן מניה של קבוצות בעלות מידה אפס. כאן, אפשר לכסות את A_1 באמצעות קטעים פתוחים $\ldots, I_{11}, \ldots, I_{1n}$ ונדרוש ש־ $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_{1n}) < \frac{\varepsilon}{2}$. באופן דומה, לכל A_j נדרוש $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_{jn}) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. זה ייתן לנו סדרה כפולה, וראינו שאפשר לבנות ממנה סדרה רגילה. לא הוכחנו, אבל אפשר לסכום לפי שורות ואז לפי העמודה של הסכומים ואם מתקבלת תוצאה מתכנסת, אז אפשר לשנות סדר ללא שינוי התכנסות. הסדרה המתקבלת, מאותם שיקולים של טור גיאומטרי, תקיים $\sum\sum l(I_{ij}) < \varepsilon$ כנדרש מההגדרה.
4. אם $B \subseteq A$ ו־ A בעלת מידה אפס, אז גם B בעלת מידה אפס.
5. לא כל קבוצה בעלת מידה אפס היא בת מניה. למשל, אפשר לקחת את הקטע $[0,1]$ ולהוציא מתוכו את השליש האמצעי $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ואז מתוך שני הקטעים הנותרים שוב להוציא את השליש האמצעי, וכד'. אפשר להראות שבסה"כ סכום האורכים של הקטעים שהוצאנו הוא 1, כלומר מה שנשאר הוא בעל מידה אפס, על אף שהקבוצה אינה בת מניה (שגם את זה כמובן צריך להראות). ר' למשל בויקיפדיה, Cantor set.

הגדרה 3.40 קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא בעלת תכולה אפס אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרה סופית $(I_1, \ldots, I_N)$ כך ש־ $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ וכן $\sum_{n=1}^{N} l(I_n) < \varepsilon$.

הערה 3.41 כמובן, כל קבוצה סופית היא בעלת תכולה אפס, וכל קבוצה בעלת תכולה אפס היא בעלת מידה אפס.

הגדרה 3.42 תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ויהי $\alpha > 0$. נאמר ש־ f היא α־רציפה ב־ $x \in [a,b]$ אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ מתקיים $|f(y) - f(z)| < \alpha$. (במונחי תנודה, $\omega_f(x) < \alpha$.)

טענה 3.43 f רציפה ב־ x אםם לכל $\alpha > 0$, f היא α־רציפה ב־ x.

הוכחה: ($\Leftarrow$) בהנתן $\alpha > 0$ נמצא מהרציפות $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{2}$. כעת בהנתן $x, y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, כלומר גם $|y-x_0| < \delta$ וגם $|x-x_0| < \delta$, מתקיים

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Rightarrow$) בהנתן $\varepsilon > 0$ נמצא מה־ α־רציפות עבור $\alpha = \varepsilon$ את $\delta > 0$ כך שאם $x, y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ אז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. כעת אם $|x-x_0| < \delta$ אז כמובן $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ וגם x_0 באותה סביבה, ולכן $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. ■

הגדרה 3.44 בהנתן $f \in \mathcal{B}[a, b]$ נסמן לכל $\alpha > 0$ את הקבוצה D_α של הנקודות שבהן f אינננה α־רציפה.

הערה 3.45 0. אם $x \in D_\alpha$, זה אומר שלכל $\delta > 0$ קיימים $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ כך ש־ $|f(y) - f(z)| \geq \alpha$.

1. אם $0 < \alpha < \beta$ אזי $D_\beta \subseteq D_\alpha$, שהרי $|f(y) - f(z)| \geq \beta > \alpha$.
2. אם f איננה רציפה ב־ x, אז קיים $\alpha > 0$ כך ש־ $x \in D_\alpha$. זה נובע מהטענה הקודמת, שכן אם לא היה קיים α כזה, הפונקציה הייתה רציפה ב־ x.
3. כמסקנה מסעיף 2, $D = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}^+} D_\alpha$. יתר על כן, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}$ שזהו איחוד בן מניה של הקבוצות $\{D_{\frac{1}{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (בגלל סעיף 1, בהנתן $\alpha > 0$ די ש־ $\alpha > \frac{1}{n}$).

למה 3.46 תהי $f \in \mathcal{R}[a, b]$. אזי לכל $\alpha > 0$, הקבוצה D_α בעלת תכולה אפס.

הוכחה: בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. כיוון ש־ f אינטגרבילית, קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ כך ש־ $\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < \alpha\varepsilon'$, כלומר $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i < \alpha\varepsilon'$.

כעת נאמר ש־ $i \in B$ אם $D_\alpha \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset$ וכמובן $D_\alpha \subseteq \bigcup_{i \in B}[x_{i-1}, x_i]$ וייתכן רק שפספסנו את הקצוות. לכן, נאמר ש־

$$D_\alpha \subseteq \Big(\bigcup_{i \in B} (x_{i-1}, x_i)\Big) \bigcup \{x_0, \ldots, x_n\}$$

יתר על כן, אם $i \in B$ אז בקטע (x_{i-1}, x_i) יש זוג נקודות שעליהן ערך הפונקציה $\leq \alpha$, ולכן כמובן $M_i - m_i \geq \alpha$. לכן,

$$\alpha\varepsilon' > \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta x_i \geq \alpha \sum_{i \in B} \Delta x_i$$

לכן קיבלנו $\sum_{i \in B} \Delta x_i < \varepsilon'$ ע"י צמצום ב־ $\alpha > 0$. יש גם מספר סופי של נקודות (נקודות החלוקה) שעלינו לכסות בקטעים פתוחים שאורכם הכולל $< \varepsilon - \varepsilon'$. זה כמובן לא קשה, יהיו $x_i \in I_i$ קטעים פתוחים כך ש־ $l(I_i) < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{n+1}$ ואז נקבל את הכיסוי הסופי הנדרש,

$$D_\alpha \subseteq \Big(\bigcup_{i \in B} (x_{i-1}, x_i)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i=0}^{n+1} I_i\Big)$$

ומתקיים גם

$$\varepsilon = (\varepsilon - \varepsilon') + \varepsilon' > \sum_{i=0}^{n+1} l(I_i) + \sum_{i \in B} d(x_{i-1}, x_i)$$

כפי שרצינו. ■

מסקנה 3.47 אם $f \in \mathcal{R}[a,b]$ אז D בעלת מידה אפס. (איחוד בן מניה של קבוצות בעלות תכולה אפס, ובפרט מידה אפס.)

הגדרה 3.48 תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. נאמר ש־ f היא α־רציפה במידה שווה ב־ $[a,b]$ אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $y,z \in [a,b]$ אם $|y-z| \leq \delta$ אז $|f(y)-f(z)| < \alpha$.

טענה 3.49 f רציפה במ"ש בקטע אםם לכל $\alpha > 0$ היא α־רציפה במ"ש בקטע.

הוכחה: הנה המשמעות של שתי הטענות:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \in I \quad |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \in I \quad |x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \alpha$$

כלומר, הן זהות לחלוטין. ■

משפט 3.50 תהי $f \in \mathcal{B}[a,b]$. אם f היא α־רציפה בכל נקודה $x \in [a,b]$ אז f היא α־רציפה במ"ש ב־ $[a,b]$.

הוכחה: ■

הגדרה 3.51 הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא סגורה אם כל סדרה (x_n) ב־ A שמתכנסת, מתכנסת לגבול ב־ A.

למשל, כל קטע סגור ב־ $\mathbb{R}$ מהווה קבוצה סגורה, לרבות $\mathbb{R}$ עצמו.

למה 3.52 לכל $\alpha > 0$ הקבוצה D_α סגורה.

הוכחה: תהי (x_n) סדרה ב־ D_α המתכנסת ל־ x. נניח בשלילה ש־ $x \notin D_\alpha$, כלומר קיים $\delta > 0$ כך שאם $y,z \in (x-\delta, x+\delta)$ אז $|f(y)-f(z)| < \alpha$. אבל אז $D_\alpha \cap (x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2}) = \emptyset$. מדוע? כי אם $x' \in D_\alpha \cap (x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2})$ אז עבור $\delta' = \frac{\delta}{2}$ מתקיים התנאי של α־רציפות בנקודה x'.
אבל זה אומר שבקטע $(x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2})$ אין אף איבר של (x_n), בסתירה לכך ש־ x הוא הגבול שלה. לכן $x \in D_\alpha$, כלומר הקבוצה סגורה. ■

למה 3.53 (הלמה של היינה־בורל, קומפקטיות) תהי $B \subseteq [a,b]$ קבוצה סגורה. נניח ש־ B ניתנת לכיסוי ע"י הקטעים הפתוחים והחסומים $\{I_i\}$, כלומר $B \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j$. אזי קיים תת־כיסוי סופי, כלומר קיימים אינדקסים $j_1,\ldots,j_n \in J$ כך ש־ $B \subseteq I_{j_1} \cup \cdots \cup I_{j_n}$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיים כיסוי $C = \{I_j\}_{j\in J}$ כזה שכל תת־קבוצה שלו אינה מכסה את B. נתבונן בקטעים $[a, \frac{a+b}{2}]$ ו־ $[\frac{a+b}{2}, b]$. יהי Q_1 תת קטע כך ש־ $B \cap Q_1$ אינו ניתן לכיסוי ע"י תת־קבוצה סופית של C. קיים כזה, כי אילו שני החצאים היו ניתנים לכיסוי סופי, גם הקטע כולו היה ניתן לכיסוי סופי.

באופן דומה, נבנה סדרה של קטעים כך ש־ $Q_{n+1} \subset Q_n$, $Q_0 = [a,b]$, ו־ $|Q_n| = \frac{b-a}{2^n}$ כך שהקבוצה $B \cap Q_n \neq \emptyset$ אינה ניתנת לכיסוי ע"י תת־קבוצה סופית של C.

לפי הלמה של קנטור, יהי $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. נשים לב ש־ $x \in B$! מדוע? ובכן, יהי $x_n \in B \cap Q_n$. אזי כמובן $|x_n - x| \leq \frac{b-a}{2^n}$ כי $x, x_n \in Q_n$. לכן $x \to (x_n)$ כסדרה, אבל B סגורה ולכן $x \in B$ בתור גבול של סדרה ב־ B (שהרי $x_n \in B$).

אם כך, קיים $j \in J$ כך ש־ $x \in I_j$ (בהיות $x \in B$). כעת קיים $0 < \delta$ כך ש־ $[x-\delta, x+\delta] \subset I_j$, וקיים גם n כך ש־ $l(Q_n) < \delta$ וכמובן $x \in Q_n$. לכן $Q_n \subset I_j$, וזו סתירה, כי הצלחנו לכסות את Q_n ע"י קטע אחד בלבד, שהוא תת־קבוצה סופית של C. ■

למה 3.54 אם D בעלת מידה אפס, אז לכל $0 < \alpha$ הקבוצה D_α בעלת תכולה אפס.

הוכחה: ראינו ש־ $D_\alpha \subseteq D$, ולכן D_α גם כן בעלת מידה אפס. כלומר, בהינתן $0 < \varepsilon$ קיים כיסוי של D_α ע"י קטעים שסכום אורכיהם קטן מ־ ε. אבל כיוון ש־ D_α סגורה, לפי הלמה של היינה־בורל קיימת תת־קבוצה סופית של כיסוי זה שמהווה כיסוי סופי של D_α, וכמובן סכום אורכי הקטעים בתת־כיסוי זה קטן גם הוא מ־ ε.

למעשה, אפשר לדרוש גם שהכיסוי יהיה איחוד זר: אם יש בכיסוי שני קטעים שנחתכים, נחליף אותם באיחוד שלהם, מה שייתן לנו קטע חדש עם אורך שלא יעלה על סכום אורכי שני הקטעים המקוריים. ■

משפט 3.55 אם $f \in \mathcal{B}[a,b]$ ו־ D בעלת מידה אפס, אז $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

הוכחה: בהינתן $0 < \varepsilon$ יהי $0 < \alpha < \varepsilon$. הקבוצה D_α בעלת תכולה אפס, ולכן ניתן להציג אותה בתור $D_\alpha \subseteq \biguplus_{i=1}^n I_i$ איחוד זר של קטעים פתוחים כך ש־ $\sum_{i=1}^n l(I_i) < \varepsilon$. נתבונן במשלים $[a,b] \setminus \biguplus_{i=1}^n I_i$ שהוא איחוד זר של מספר סופי של קטעים סגורים $J_1,\ldots,J_m$.

נתבונן בכיסוי של $[a,b]$ המורכב מהקטעים הסגורים $J_1,\ldots,J_m$ והקטעים $\overline{I_1},\ldots,\overline{I_n}$ שהם הקטעים הפתוחים לאחר שסגרנו אותם בקצוות. כיסוי זה משרה חלוקה $\mathcal{P}$ של $[a,b]$. אבל כעת,

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m (M_j - m_j)\Delta x_j + \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i$$

כאשר האינדקסים השמאליים מתאימים ל־ $J_1,\ldots,J_m$ והאינדקסים הימניים ל־ $\overline{I_1},\ldots,\overline{I_n}$. יהיו $m < f < M$ חסמים על f, ואז:

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i \leq (M-m)\sum_{i=1}^n \Delta x_i < (M-m)\varepsilon$$

יתר הקטעים $\{J_j\}$ לא שייכים ל־ D_α, כלומר הפונקציה α־רציפה בהם. הקטעים האלה סגורים, ובכל אחד מהם הפונקציה α־רציפה במ"ש ולכן היא α־רציפה במ"ש ב־ $J_1 \cup \cdots \cup J_m$. עבור $\varepsilon > 0$ שאנו עובדים איתו, קיים $\delta > 0$ כך ש־

$$\forall y, z \in \bigcup_{i=1}^{m} J_i \quad |y - z| \le \delta \implies |f(y) - f(z)| < \alpha < \varepsilon$$

נעדן את $\mathcal{P}$ אם צריך, כך ש־ $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ואז

$$\sum_{j=1}^{m} (M_j - m_j) \Delta x_j \le \alpha \sum_{j=1}^{m} \Delta x_j < \varepsilon(b - a)$$

(מאחר שאורכי הקטעים קטנים מ־ δ, הרצבמ"ש מספקת את החסם) ובסה"כ קיבלנו

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) - \mathcal{L}(\mathcal{P}) < (M - m)\varepsilon + (b - a)\varepsilon$$

כלומר כפולה קבועה וחיובית של ε, ולכן סיימנו. ∎

מסקנה 3.56 (אפיון לבג לאינטגרביליות) $f \in \mathcal{B}[a, b]$ אינטגרבילית אםם קבוצת נקודות האי־רציפות שלה (D) בעלת מידה אפס.

4 סדרות וטורי פונקציות

4.1 סדרות פונקציות

הגדרה 4.1 תהי $X \subseteq \mathbb{R}$. סדרה של פונקציות ממשיות (f_n) ב־ X הינה סדרה כך ש־ $f_n : X \to \mathbb{R}$ פונקציה.

נאמר שסדרת הפונקציות (f_n) מתכנסת ב־ $x \in X$ אם סדרת המספרים $(f_n(x))$ מתכנסת. נאמר שסדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית ב־ X אם היא מתכנסת לכל $x \in X$. במקרה זה, נגדיר $f : X \to \mathbb{R}$ המקיימת $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ והיא תיקרא הפונקציה הגבולית של הסדרה.

דוגמאות:

1. $f_n(x) = \frac{1}{n}x$, והפונקציה הגבולית היא 0.
2. $g_n(x) = x^n,\ X = [0, 1]$, והפונקציה הגבולית היא 0 בכל הקטע למעט 1, שם היא 1. זו דוגמא לכך שגבול של סדרת פונקציות רציפות אינו בהכרח פונקציה רציפה.
3.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x < -\frac{1}{n} \\ -1 + n(x + \frac{1}{n}) & -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

וכאן הפונקציה הגבולית היא $\mathrm{sgn}(x)$.

4. הפונקציה ה־ n יוצרת משולש בגובה $2n$ וברוחב $\frac{1}{n}$ ברביע הראשון.
במקרה זה, האינטגרל של הפונקציה הגבולית (שהוא 0) לא מתלכד עם הגבול של האינטגרלים (שהוא 1).

5. $k_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ בקטע $[0,1]$, וכאן הפונקציה הגבולית היא זהותית 0 על כל הקטע.

6. $h_n(x) = \frac{1}{x^n}$ בקרן $[1,\infty)$ וכאן הפונקציה הגבולית היא 0 למעט ב־ 1 שם היא 1.

7. $d_n(x) = \lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2m}$ ב־ $[0,1]$.
זאת פונקציה שניתן להגדיר גם בתור

$$d_n(x) = \begin{cases} 1 & n!x \in \mathbb{Z} \iff x \in "\frac{\mathbb{Z}}{n!}" \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כלומר, $d_n(x) = 0$ לכל $x \notin \mathbb{Q}$. לכל n, ל־ $d_n(x)$ יש מספר סופי של נקודות אי־רציפות. זאת משום שאנו מחפשים $x = \frac{p}{q}$ עם $0 \le p \le q$ כך ש־ $n!\frac{p}{q}$ הוא שלם, ויש רק מספר סופי של q־ים שמתקזזים עם $n!$ בקטע $[0,1]$. לכן הפונקציות האלה כולן אינטגרביליות.

מאידך ניתן להראות ש־ $\lim d_n(x) = D(x)$, פונקציית דיריכלה, שאינה אינטגרבילית. זאת משום שלכל $x = \frac{p}{q}$ יהיה לנו n מספיק גדול כך ש־ $\frac{n!}{q}$ שלם, למשל עבור $n = q$. כלומר אכן $(\lim d_n)(x) = 1$ לכל $x \in \mathbb{Q}$.

הגדרה 4.2 תהי (f_n) סדרה של פונקציות ב־ X, ו־ f פונקציה המוגדרת ב־ X. נאמר שהסדרה (f_n) מתכנסת ב־ X במידה שווה (במ"ש) ל־ f אם

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad N < n \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(בדומה לרציפות במ"ש, ההבדל הוא שאותו ה־ N צריך להתאים לכל איברי X.)

הערה 4.3 אם סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש, היא כמובן מתכנסת נקודתית. נשים לב לסתירה של התכנסות במ"ש: (f_n) אינה מתכנסת במ"ש ל־ f ב־ X אם

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad N < n \land |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon$$

דוגמאות ואנטי־דוגמאות:

1. הסדרה $k_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ מקודם מתכנסת ל־ $g \equiv 0$ במ"ש בקטע $[0,1]$. זאת משום ש־ $|\frac{1}{x^2+n} - 0| = \frac{1}{x^2+n} \le \frac{1}{n}$ ללא תלות ב־ x, כך שבהנתן $\varepsilon > 0$ די לבחור N המקיים $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

2. נראה ש־ $f_n(x) = x^n$ לא מתכנסת במ"ש ב־ $[0,1]$ לפונקציה $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.
למשל, נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ונגדיר את סדרת הנקודות $x_1 = \frac{1}{2}, \dots, x_k = \frac{1}{\sqrt[k]{2}}$. נשים לב ש־ $0 \le x_k < 1$ ונשים לב ש־

$$|f_k(x_k) - f(x_k)| = |(\sqrt[k]{\frac{1}{2}})^k - 0| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

וכך שללנו את ההתכנסות במ"ש.

הערה 4.4 דרך אחרת לנסח התכנסות במ"ש היא באמצעות הקריטריון:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \sup_{x \in I}\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$$

זה נותן כלי מעשי להערכת ההתכנסות אם ניתן לחשב בקלות את הסופרמום הנ"ל. הנ"ל שקול לטענה

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in I}\{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$$

טענה 4.5 אם $f_n \to f$ במ"ש ו־ $g_n \to g$ במ"ש, אזי $f_n + g_n \to f + g$ במ"ש ו־ $f_n g_n \to fg$ נקודתית אך לאו דווקא במ"ש.

הוכחה: לגבי הסכום,

$$\sup_{x \in I}\{|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)|\} \leq \sup_{x \in I}\{|f_n(x) - f(x)|\} + \sup_{x \in I}\{|g_n(x) - g(x)|\}$$

ולכן כמובן $0 \leftarrow$ כאשר $n \leftarrow \infty$.

לגבי המכפלה, התוצאה נובעת מאריתמטיקה של גבולות בכל נקודה. כדי להראות שההתכנסות היא לאו דווקא במ"ש די להביא דוגמא אחת:

$$g_n(x) = x \qquad\qquad f_n(x) = x + \frac{1}{n}$$

שתי הסדרות מתכנסות במ"ש על $\mathbb{R}$ לפונקציה הגבולית x, אבל המכפלה $x^2 + \frac{x}{n}$ מתכנסת נקודתית ל־ x^2 אבל לא במ"ש. בנקודות $x_n = n$ מתקיים

$$|f_n(x_n)g_n(x_n) - f(x_n)g(x_n)| = |n^2 + \frac{n}{n} - n^2| = 1$$

כלומר הסופרמום לא שואף ל־ 0 ולכן ההתכנסות היא לא במ"ש. ■

הערה 4.6 אילו הפונקציות f, g היו חסומות, התכנסות המכפלה הייתה במ"ש.

משפט 4.7 (קריטריון קושי להתכנסות במ"ש) תהי (f_n) סדרה של פונקציות ב־ X. אזי (f_n) מתכנסת במ"ש ב־ X לפונקציה גבולית אםם

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad N < m, n \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

הוכחה: $(\Leftarrow)$ בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $m, n > N$ אז $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ וכנ"ל לגבי $f_m(x)$. אזי

$$n, m > N \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כנדרש.

$(\Rightarrow)$ נניח את קיום הקריטריון. נשים לב שלכל $x \in X$, סדרת המספרים $(f_n(x))$ הנה סדרת קושי ולכן מתכנסת. נגדיר את הפונקציה הגבולית $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ונרצה להראות שההתכנסות אליה היא במ"ש ב־ X. בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ ולפי הקריטריון יהי $N_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m > N$ מתקיים $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon'$ לכל $x \in X$.

אך כעת נקבע את n וניתן ל־ m לשאוף לאינסוף, ונקבל:

$$|f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon' < \varepsilon$$

כנדרש (יש לשים לב שהא"ש הפך לחלש כיוון שלקחנו גבול באגף שמאל). ■

משפט 4.8 תהי (f_n) סדרה של פונקציות רציפות המתכנסות במידה שווה לפונקציה f ב־ X. אזי f רציפה.

הוכחה: נוכיח את הרציפות בנקודה $x \in X$ כלשהי. בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n > N$ מתקיים $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ בקטע. נתבונן בפונקציה f_N שהיא רציפה ב־ X, בפרט בנקודה x. לכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|y - x| < \delta$ אז $|f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. אבל כעת,

$$|y-x| < \delta \implies |f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

■

הערה 4.9 נשים לב ש־

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

במקרה זה, כלומר בגלל ההתכנסות במ"ש ניתן להחליף את סדר הגבולות.

משפט 4.10 תהי (f_n) סדרת פונקציות אינטגרביליות ב־ $[a,b]$ המתכנסת במ"ש לפונקציה f באותו קטע. אזי f אינטגרבילית בקטע. יתר על כן, אם $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ ו־ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ אזי (F_n) מתכנסת במ"ש ל־ F בקטע.

הוכחה: בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $n \geq N$ אז $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. כעת נתבונן ב־ f_N. מתקיים

$$f_N - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f < f_N + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

כיוון ש־ f_N אינטגרבילית בקטע, הצלחנו לחסום את f באמצעות שתי פונקציות אינטגרביליות וכמובן

$$\int_a^b (f_N + \frac{\varepsilon}{2(b-a)})(x)dx - \int_a^b (f_N - \frac{\varepsilon}{2(b-a)})(x)dx = \varepsilon$$

וזה מספיק על מנת ש־ f תהיה אינטגרבילית מתוקף משפט 2.63. לכן ניתן באמת להגדיר את הפונקציה המצטברת F כנ"ל. כעת נשים לב ש־

$$|F_n(x) - F(x)| = |\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = |\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt$$

ובהנתן $\varepsilon > 0$ יהי N כך ש־ $|f_N(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ ואז אם $n \geq N$ מקבלים

$$|F_n(x) - F(x)| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon$$

כלומר (F_n) מתכנסת ל־ F במ"ש. ■

הערה 4.11 לא נכון לומר באופן כללי ש־

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

כלומר ההתכנסות צריכה להיות במ"ש כדי שזה יתקיים. ראינו דוגמה קודם לכך שגבול האינטגרלים הוא 1 אבל האינטגרל של הפונקציה הגבולית הוא 0. יתר על כן, הפונקציה הגבולית לאו דווקא אינטגרבילית–ראינו סדרת פונקציות אינטגרביליות שמתכנסות לפונקציית דיריכלה, שכמובן אינה אינטגרבילית.

כמו כן, המשפט הנ"ל לא עובד לגבי אינטגרלים לא אמיתיים:

$$\int_0^\infty \frac{1}{n} dx = \infty \neq 0 = \int_0^\infty 0$$

למרות ש־ $\frac{1}{n} \to 0$ במ"ש.

משפט 4.12 תהי (f_n) סדרה של פונקציות גזירות ברציפות בקטע I. אם קיים $a \in I$ כך ש־ $(f_n(a))$ מתכנסת וגם הסדרה (f'_n) מתכנסת במ"ש ב־ I לפונקציה g, אזי (f_n) מתכנסת במ"ש בקטע לפונקציה f המקיימת $f' = g$ בקטע.

הוכחה: נשים לב שלכל $x \in I$ הפונקציות (f'_n) אינטגרביליות בקטע $[a,x]$ כי לפי ההנחה הן רציפות. לפי משפט ההתכנסות במ"ש של פונקציות אינטגרביליות, גם $g \in \mathcal{R}[a,x]$ ו־ $(\int_a^x f'_n)$ מתכנסת במ"ש ב־ $[a,x]$ ל־ $\int_a^x g$. לפי המשפט היסודי,

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(a) &= \int_a^x f'_n \\ f_n(x) &= \int_a^x f'_n + f_n(a) \end{aligned}$$

וכאן לפי ההנחה $(f_n(a))$ מתכנסת ו־ $(\int_a^x f'_n)$ מתכנסת ולכן גם (f_n) מתכנסת לפונקציה גבולית f ומתקיים

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^x g + \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \int_a^x g + f(a)$$

למעשה, ההתכנסות היא במ"ש בקטע $[a,x]$.

המשקל בנוגע לגזירות נופל על $\int_a^x g$, וכיוון ש־ g היא גבול במ"ש של פונקציות רציפות, גם היא רציפה. לכן $\int_a^x g$ גזירה בכל $[a,x]$ ונקבל $f'(x) = g(x) + 0$ כפי שרצינו. ■

הערה 4.13 ללא הדרישה על ההתכנסות במ"ש של סדרת הנגזרות, לא ניתן היה לטעון את המשפט.

למשל, הסדרה $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ מתכנסת במ"ש לפונקציית האפס כי $|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ והחסם לא תלוי ב־ x. כמו כן, הפונקציות עצמן גזירות וגם הפונקציה הגבולית גזירה. עם זאת, הנגזרות $f'_n(x) = \sqrt{n}\cos nx$ לא מתכנסות בכלל כי עבור $x \neq 0$ לא קיים הגבול $\lim \sqrt{n}\cos nx$. לכן דרושים התנאים החזקים יותר שנתונים במשפט.

טענה 4.14 תהי (f_n) סדרה של פונקציות חסומות בקטע I המתכנסות במ"ש ב־ I לפונקציה f. אזי f חסומה.

הוכחה: קיים N כך ש־ $|f_N(x) - f(x)| < 1$ לכל $x \in I$, כלומר

$$f_N(x) - 1 < f(x) < f_N(x) + 1$$

ולכן גם f חסומה. ■

למה 4.15 יהי $x \in \mathbb{R}$ ו־ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)$$

ובקטע $[0,1]$ הביטוי הנ"ל גם $\frac{n}{4} \geq$.

הוכחה: נגזור את הביטוי

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

לפי x ונקבל

$$n(x+y)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k}k$$

ואם מציבים $y=1-x$ אז מקבלים

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ nx &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k}(1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k}(1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

ואם גוזרים שוב לפי x אז מקבלים

$$n(n-1)(x+y)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}y^{n-k}$$

ועבור $y=1-x$ נקבל

$$n(n-1)x^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k}(1-x)^{n-k}$$

ומשלושת הביטויים האלה מקבלים אלגברית את הנדרש-צביק הבטיח לשים הוכחה באתר. ■

משפט 4.16 (ברנשטיין־ויירשראס) תהי $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$. אזי קיימת סדרה (B_n) של פולינומים אשר מתכנסים במ"ש ב־ $[0,1]$ ל־ f.

הוכחה: נגדיר את פולינום ברנשטיין של f מסדר n להיות

$$B_n f(x) := \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

נראה שאלה הפולינומים שמתכנסים במ"ש ל־ f בקטע.

נשים לב שלפי הבינום של ניוטון, $1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ ולכן $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. מכאן:

$$\begin{aligned} |B_n f(x) - f(x)| &= |\sum_{k=0}^{n}[f(\frac{k}{n}) - f(x)]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}|f(\frac{k}{n}) - f(x)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

כעת, בהנתן $\varepsilon > 0$, כיוון ש־ f רציפה בקטע חסום וסגור היא גם רצבמ"ש ולכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $x, y \in [0,1]$. נחלק את האינדקסים לשתי קבוצות (הטובים G והרעים B) כך ש־

$$k \in G \iff |\frac{k}{n} - x| < \delta$$
$$|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$k \in B \iff |\frac{k}{n} - x| \geq \delta$$
$$(\frac{k}{n} - x)^2 \geq \delta^2$$
$$n^2\delta^2 \leq (nx-k)^2$$

זה מאפשר לפרק את האי־שוויון מקודם:

$$
\begin{aligned}
=\sum_{k\in G}+\sum_{k\in B} \quad &\le \quad \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in G}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in B}\\
&\le \quad \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in B}\\
&= \quad \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k\in B}
\end{aligned}
$$

נשים לב שהפונקציה f רציפה בקטע חסום וסגור ולכן חסומה בו ע"י M $m \le f \le M$.
לכן,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in B} \quad &\le \quad \sum_{k\in B}(M-m)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \quad (M-m)\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\le \quad (M-m)\sum_{k\in B}\frac{(nx-k)^2}{n^2\delta^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \quad \frac{M-m}{n^2\delta^2}\sum_{k\in B}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\le \quad \frac{M-m}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\le \quad \frac{M-m}{n^2\delta^2}\frac{n}{4}=\frac{M-m}{4n\delta^2}
\end{aligned}
$$

(המעבר האחרון הוא בזכות הלמה), וכעת אם $M=m$ סיימנו, כלומר הפונקציה קבועה והפולינומים שווים לה בדיוק. אחרת, יהי $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $N>\frac{1}{2}\frac{M-m}{\delta^2\varepsilon}$ ואז לכל $n>N$ נקבל ש־ $\sum_{k\in B}<\frac{\varepsilon}{2}$. לכן כל הסכום כולו $<\varepsilon$ ונשים לב שה־ N הנ"ל וה־ δ הנ"ל לא תלויים ב־ x ולכן אכן קיבלנו התכנסות במ"ש. ■

4.2 טורי פונקציות

הגדרה 4.17 תהי (f_n) סדרת פונקציות בקטע I. נגדיר סדרה חדשה (s_n) של פונקציות באותו קטע כך ש־

$$s_n(x) := f_0(x)+\ldots+f_n(x)$$

ונכנה את (s_n) בשם הטור המתאים לסדרה (f_n).
נאמר שהטור מתכנס נקודתית לפונקציה S המוגדרת ב־ I אם $s_n(x)\to S(x)$ נקודתית בכל $x\in I$. נאמר שהטור מתכנס במ"ש ב־ I אם $s_n\to S$ במ"ש ב־ I.

דוגמא: יהי $I=(-1,1)$ ו־ $f_n(x)=x^n$. אזי $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\frac{1}{1-x}$ וזו הפונקציה הגבולית ("סכום הטור").

משפט 4.18 (קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של טורים) תהי (f_n) סדרה של פונקציות ב־ I. הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב־ I אסם

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall x\in I \quad \forall n,m\in\mathbb{N} \quad N<n<m \implies |f_{n+1}(x)+\ldots+f_m(x)|<\varepsilon$$

הוכחה: מיידית מקריטריון קושי להתכנסות במ"ש של סדרות פונקציות (משפט 4.7). ■

הערה 4.19 כמובן שכל המשפטים לגבי רציפות, אינטגרביליות, וגזירות של הפונקציה הגבולית נכונים גם בהקשר של טורי פונקציות–שהרי (s_n) יוצרת סדרה של פונקציות בעלת אותן התכונות כמו (f_n).

משפט 4.20 (קריטריון M של ויירשטראס) תהי (f_n) סדרה של פונקציות ב־ I ו־ (M_n) סדרה של מספרים חיוביים כך ש־ $|f_n(x)|\le M_n$ לכל $x\in I$, והטור $\sum M_n$ מתכנס. אזי הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב־ I.

הוכחה: נשתמש בקריטריון קושי לטורי מספרים. הטור $\sum M_n$ מתכנס, ולכן הוא מקיים את קריטריון קושי. בהנתן $\varepsilon>0$ יהי N כך שאם $N<n<m$ אז $|M_{n+1}+\ldots+M_m|<\varepsilon$, ואפשר כמובן לוותר על הערך המוחלט. אז לכל $x\in I$ נקבל

$$N<n<m \implies |\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)| \le \sum_{i=n+1}^{m} |f_i(x)| \le \sum_{i=n+1}^{m} M_i<\varepsilon$$

כלומר קיבלנו את קריטריון קושי לטורי פונקציות (המשפט הקודם). ■

מסקנה 4.21 בתנאי המשפט, $\sum f_n$ מתכנס <u>בהחלט</u>, שכן התבוננו ב־ $\sum_{i=n+1}^{m}|f_i(x)|$.

דוגמאות:

1. $\sum \frac{1}{x^2+n^2}\le\sum\frac{1}{n^2}$ והטור הימני מתכנס, ולכן הטור השמאלי מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.
2. מאידך, נתבונן על הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{x^2+n}$ בקטע $[0,1]$. זהו טור לייבניץ לכל x בקטע, אבל הטור לא מתכנס בהחלט, שכן בערך מוחלט זהו "מעין זנב" של הטור ההרמוני שמתבדר, כי

$$|(-1)^n\frac{1}{x^2+n}|\ge|(-1)^n\frac{1}{1+n}|$$

בקטע $[0,1]$ וההתבדרות היא מקריטריון ההשוואה.
אך האם ההתכנסות היא במ"ש? לכל x,

$$|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{1}{x^2+i}-S(x)|\leq\frac{1}{x^2+(n+1)}\leq\frac{1}{n+1}$$

לפי הקריטריון של משפט לייבניץ. זהו חסם שלא תלוי ב־ x ולכן ההתכנסות היא במ"ש. זו הייתה דוגמא לטור שמתכנס במ"ש אבל לא בהחלט.

3. נתבונן בטור $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ בקטע $[0,1]$. ראינו שב־ $[0,1)$ הטור $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)=1$ בקטע זה. לעומת זאת עבור $x=1$ הטור הוא קבוע 0 ולכן מתכנס ל־ 0, כלומר הטור מתכנס נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1)\\0 & x=1\end{cases}$ שאינה רציפה, בעוד שהפולינומים היוצרים אותה רציפים. לכן ההתכנסות היא לא במ"ש.

4. נתבונן בטור $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n(1-x)$. הטור מתכנס במ"ש כי זהו טור לייבניץ, ולפי משפט לייבניץ מתקיים

$$|\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(1-x)-S|\leq x^{n+1}(1-x)$$

ולפונקציה $g_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ יש מקסימום ב־ $\frac{n+1}{n+2}$ ולכן

$$\leq(\frac{n+1}{n+2})^{n+1}(1-\frac{n+1}{n+2})$$

והחסם הזה לא תלוי ב־ x, וכמובן $0 \leftarrow$ כי הנכפל השמאלי חסום והימני שואף ל־ 0.
אם כן זהו טור שמתכנס בהחלט (דוגמא 3) ומתכנס במ"ש, אך לא מתכנס בהחלט במ"ש (דוגמא 3).

5. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\arctan(x^2)}}{n^2+x^2}$ מתכנס במ"ש ב־ $\mathbb{R}$ כי הוא חסום ע"י $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{n^2}$ שמתכנס.

6. (פונקציית ζ של רימן) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ מתכנס נקודתית בקרן $(1,\infty)$ ובמ"ש לכל תת־קטע $[a,\infty)$ כאשר $a>1$. זאת משום ש־

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\leq\int_1^{\infty}\frac{1}{t^x}dt=\frac{t^{1-x}}{1-x}|_1^{\infty}=0-\frac{1}{1-x}<\infty$$

ההתכנסות הנקודתית היא לפונקציה הלא־חסומה $\frac{1}{x-1}$ בקטע $(1,\infty)$, ולכן אין התכנסות במ"ש כי סדרת פונקציות חסומות לא יכולה להתכנס במ"ש לפונקציה לא חסומה.

4.3 טורי חזקות

הגדרה 4.22 תהי (c_n) סדרה של מספרים. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ ייקרא טור חזקות. באופן כללי יותר, נכנה גם טור מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ טור חזקות (עבור a ממשי).

דוגמאות:

1. הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ מתכנס לכל x והסכום הוא e^x.
2. הטור $\sum x^n$ מתכנס עבור $-1 < x < 1$.
3. הטור $\sum n!x^n$ מתכנס עבור $x = 0$ בלבד.
4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ מתכנס עבור $-1 < x < 1$ שכן האיבר הכללי חסום ע"י $|x|^n$ והוא מתכנס. כמו כן, ב־ $x = 1$ יש התכנסות (לייבניץ) וב־ $x = -1$ לא (הטור ההרמוני). לכן ההתכנסות היא ב־ $x \in (-1,1]$.
5. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$ מתכנס ב־ $-1 \le x \le 1$ (ברור מהדוגמא הקודמת).

למה 4.23 (לייבניץ) אם הטור $\sum c_n x^n$ מתכנס עבור $r \in \mathbb{R}$ אזי הוא גם מתכנס עבור כל x כך ש־ $|x| < |r|$.

הוכחה: הטור $\sum c_n r^n$ הוא טור מתכנס של מספרים. לכן $(c_n r^n)$ שואפת ל־ 0 ובפרט חסומה, ויהי M כך ש־ $|c_n r^n| \le M$ לכל n. נשים לב שאם $r = 0$ אין מה להוכיח, ואחרת,

$$\sum|c_n x^n| = \sum|c_n r^n (\frac{x}{r})^n| \le \sum|c_n r^n||\frac{x}{r}|^n \le \sum M|\frac{x}{r}|^n \le M\sum|\frac{x}{r}|^n < \infty$$

כי $|\frac{x}{r}| < 1$ לפי ההנחה. קיבלנו שהטור $\sum c_n x^n$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס. ■

משפט 4.24 יהי $\sum c_n x^n$ טור חזקות. אזי מתקיים אחד מהבאים:

הטור מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}$;

קיים $0 < R < \infty$ כך שהטור מתכנס לכל $|x| < R$ ומתבדר עבור $R < |x|$;

הטור מתכנס רק עבור $x = 0$.

הוכחה: יהי $I = \{x \in \mathbb{R} : \sum c_n x^n < \infty\}$. כמובן $I \neq \emptyset$ כי $0 \in I$. נניח ש־ I אינה חסומה מלמעלה. בהנתן $x_0 \in \mathbb{R}$, יהי $r \in I$ עם $r > |x_0|$. אזי $\sum c_n r^n$ מתכנס ולפי הלמה הקודמת $\sum c_n x_0^n$ מתכנס.

אחרת, I חסומה ויהי $0 < R = \sup I$ (אם $R = 0$ אין מה להוכיח). כעת אם $|x_0| < R$ אז הטור $\sum c_n x_0^n$ מתכנס, שכן קיים $r \in I$ כך ש־ $|x_0| < r \le R$ לפי הלמה. להיפך, אם $|x_0| > R$ אזי אם $\sum c_n x_0^n$ היה מתכנס, הרי שיש $|x_0| > r > R$ כך ש־ $\sum c_n r^n$ מתכנס לפי הלמה, וזאת בסתירה לכך ש־ $R = \sup I$. ■

הגדרה 4.25 מן המשפט הקודם, ניתן לדבר על קטע ההתכנסות של הטור–הקטע שבו הטור מתכנס. R יכונה רדיוס ההתכנסות (ויכול להיות גם 0 או ∞).

משפט 4.26 (נוסחת קושי־הדמרד) יהי $\sum c_n x^n$ טור חזקות. יהי

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

אזי R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור, והכוונה היא ש־ $\frac{1}{0} = \infty$ ו־ $\frac{1}{\infty} = 0$ לצורך הנוסחא.

הוכחה: באמצעות קריטריון השורש. אם $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}|x| < 1$ אז הטור מתכנס, ואם $\limsup \sqrt[n]{|c_n|}|x| > 1$ אז הטור מתבדר. למשל, במקרה הראשון, הטור מתכנס עבור $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{|x|}$ וזה בדיוק שקול לטענה לגבי רדיוס ההתכנסות. ■

מסקנה 4.27 יהי $\sum c_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R וקטע התכנסות I. תהי $f(x) := \sum c_n x^n$ עבור $x \in I$. אזי הפונקציה f רציפה ב־ I שכן היא גבול במ"ש של פולינומים שיוצרים את טור החזקות.

יתר על כן, לכל קטע $[a,b] \subset I$ הפונקציה f אינטגרבילית בו (מאותו שיקול–גבול של סדרת פולינומים שהם רציפים ולכן אינטגרביליים על כל קטע סגור).

משפט 4.28 יהי $\sum c_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R וקטע התכנסות I. יהיו גם

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

טורי הנגזרת והאינטגרל (שניהם טורי חזקות). אזי לשניהם אותו רדיוס התכנסות כמו לטור המקורי.

הוכחה: נשתמש בנוסחת קושי־הדמרד לגבי הטור של הנגזרת:

$$\limsup \sqrt[n-1]{|c_n|n} = \limsup \sqrt[n-1]{|c_n|}\,\sqrt[n-1]{n} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

לכן רדיוס ההתכנסות נשמר. באופן דומה, גם הרדיוס של טור האינטגרל נשמר. ■

הערה 4.29 רדיוס ההתכנסות נשמר תחת המשפט הקודם, אבל קטע ההתכנסות עשוי להתרחב לקצוות. בפרט, כאשר עוברים לטור הנגזרות הקצוות עשויים "להתקלקל" וכאשר עוברים לטור האינטגרל הקצוות עשויים "להשתפר".

הגדרה 4.30 תהי g פונקציה גזירה אינסוף פעמים בקטע I ויהי $a \in I$. הטור

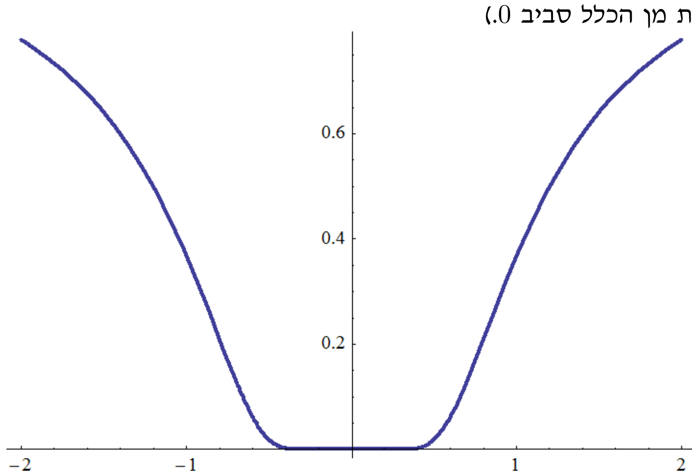
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

נקרא טור טיילור של g סביב a (או: בחזקות של $x-a$).

הערה 4.31 אם $f(x) := \sum c_n x^n$ אז $f(0) = c_0, \ldots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = c_n$. לכן טור החזקות מהווה טור טיילור של הפונקציה הגבולית שלו בקטע ההתכנסות. במלים אחרות, מקדמי טור טיילור יהיו זהים לטור החזקות שיצר את הפונקציה.

אבל אי אפשר לעשות את המסלול ההפוך–אם לוקחים את טור הטיילור של הפונקציה, אז הפונקציה הגבולית של טור הטיילור היא לאו דווקא הפונקציה המקורית. לדוגמא,

$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ עם $g(0) = 0$ היא פונקציה רציפה, גזירה אינסוף פעמים, ומתקיים ש־ $g^{(n)}(0) = 0$ לכל n. לכן טור טיילור שלה הוא $Tg(x) \equiv 0$ וכמובן הפונקציה הגבולית שלו לא מתלכדת עם הפונקציה המקורית. (הציור מראה את הפונקציה: היא "שטוחה" בצורה יוצאת מן הכלל סביב 0.)



מסקנה 4.32 אם $\sum b_n x^n = \sum a_n x^n$ מתלכדים על $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ אזי $a_n = b_n$ לכל n מיחידות הטור.

נראה מספר דוגמאות לבנייה של פונקציה מטור חזקות:

1. $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ היא פונקציה המוגדרת בכל $\mathbb{R}$ כי ראינו שהטור המתאים בעל רדיוס התכנסות ∞. כמו כן, מתקיים

$$E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = E(x)$$

וכעת נראה ש־ $E(x) = e^x$. נתבונן ב־ $\frac{E(x)}{e^x}$:

$$(\frac{E(x)}{e^x})' = \frac{E'(x)e^x - E(x)e^x}{(e^x)^2} = 0$$

כלומר $\frac{E(x)}{e^x} = C$ כאשר C קבוע. במלים אחרות, $E(x) = Ce^x$ ונציב $x = 0$ ונקבל $E(0) = C$, וכמובן קל לבדוק לפי הטור מהו $E(0)$ והוא כמובן 1, ולכן $E(x) \equiv e^x$.

2. הטורים הבאים הופיעו בתרגיל 11:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad\qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

שתי הפונקציות מוגדרות על כל הישר כי לטורים המגדירים אותן יש רדיוס התכנסות ∞. אפשר לבדוק ולראות שהפונקציות גזירות אינסוף פעמים ומתקיים $C'(x) = -S(x),\ S'(x) = C(x)$ מהתבוננות על הטורים המתאימים. אם כך,

$$(C^2(x)+S^2(x))' = 2C(x)(-S(x)) + 2S(x)C(x) \equiv 0$$

ולכן שוב מקבלים ש־ $C^2(x)+S^2(x) = C$ כאשר C קבוע, ואפשר לבדוק מה ערכו ע"י הצבה $x=0$ ומקבלים ש־ $C=1$. באופן דומה, ע"י גזירת הביטוי $(C(x)-\cos x)^2 + (S(x)-\sin x)^2$ אפשר להראות ש־ $C(x)=\cos x$ ו־ $S(x)=\sin x$ כצפוי.

אפשר להמשיך מן הטורים האלה לפתח את הפונקציות הטריגונומטריות במלואן, להראות את הרציפות שלהן, להעריך את π, לקבל את המחזוריות שלהן, ועוד[3].

משפט 4.33 (אבל) יהי $\sum c_n$ טור מתכנס. אם נגדיר $f(x) := \sum c_n x^n$ בקטע $[0,1)$ ו־ $f(1) := \sum c_n = S$ אז מתקיים

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

הוכחה: בקטע $(-1,1)$ אנו יודעים ש־ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, או $1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$. כמו כן,

$$\frac{1}{1-x} f(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)$$

זו מכפלה של טורי מספרים, ובקטע $0 \le x < 1$ הטור הראשון מתכנס בהחלט והשני מתכנס בהחלט בכל קטע ההתכנסות. לכן לפי משפט המכפלה של טורים מתכנסים בהחלט, הסכום הנ"ל הוא $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ כאשר $d_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i x^{n-i}$. כלומר, $d_n = \sum_{i=0}^{n} c_i x^n = x^n \sum_{i=0}^{n} c_i$, וכמובן $s_n = \sum_{i=0}^{n} c_i$ הוא סכום חלקי של הטור המקורי, ולכן

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \implies f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

היות ו־ $f(x)$ מייצגת טור מתכנס, גם $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ מתכנס. (זו תוצאה מעניינת בפני עצמה.)

ניזכר בכך ש־ $1 = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ עבור $-1 < x < 1$ ולכן

$$f(1) = S = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S x^n$$

כלומר,

[3] הדבר נעשה בהרצאה של מר איתמר צביק במהלך שיעור רשות.

$$f(x)-f(1)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-S)x^n$$

כעת בהנתן $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>N$ אז $|s_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}$, שהרי $s_n\to S$.
לכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-S)x^n=\sum_{n=0}^{N}(s_n-S)x^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}(s_n-S)x^n$$

כעת נתבונן בזנב הזה:

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty}(s_n-S)x^n|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|s_n-S|x^n\le\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}x^n=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{1-x}$$

וכעת נחזור בחזרה:

$$|f(x)-f(1)|\le(1-x)\sum_{n=0}^{N}|s_n-S|x^n+(1-x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{1-x}$$

כעת נסמן

$$g(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{N}|s_n-S|x^n$$

זהו פולינום רציף ב־ 1 וכמובן $g(1)=0$. לכן עבור אותו $\varepsilon>0$ יהי $\delta>0$ מן הרציפות כך שאם $|x-1|<\delta$ אז $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. עבור $\max\{0,1-\delta\}<x<1$ נקבל $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$ והראינו את הרציפות. ■

מסקנה 4.34 אם $\sum_{n=0}^{\infty}c_nR^n=S$ טור מתכנס עם $R>0$ אזי f המוגדרת באמצעות הטור כמו קודם רציפה משמאל ב־ R ומתקיים $\lim_{x\to R^-}f(x)=S$.

הוכחה: תהי $g(x):=f(Rx)$ מוגדרת בקטע $(-1,1]$ ועומדת בתנאי המשפט הקודם, ולכן רציפה משמאל ב־ 1. אבל כמובן $f(x)=g(\frac{x}{R})$ ולכן רציפה משמאל ב־ R. ■

מסקנה 4.35 אם $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-R)^n=S$ טור מתכנס עם $R>0$ אז הפונקציה $f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ רציפה מימין ב־ $-R$ ומתקיים $\lim_{x\to -R^+}f(x)=S$.

הוכחה: תהי $g(x) := f(-x)$ והיתר כמו קודם. ■

נראה מספר דוגמאות:

1. ראינו שההתכנסות של הטור $\sum x^n$ היא לא בקצוות, אלא רק ב־ $(-1,1)$.
2. גם הטור $\sum(-1)^n x^n$ לא מתכנס בקצוות.
3. טור האינטגרל של הדוגמא הקודמת, $\sum(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ מתכנס כמובן ב־ $(-1,1)$. נשים לב שהפונקציה המוגדרת ע"י הטור החדש, נסמנה g, מקיימת שהנגזרת שלה שווה לפונקציה המוגדרת ע"י הטור מהדוגמה הקודמת, f. כיוון שאנו יודעים ש־ $f(x) = \frac{1}{1+x}$, אנו גם יודעים ש־ $g(x) = \ln(1+x) + C$. את הקבוע אפשר לחשב ע"י הצבה $x = 0$ ומקבלים ש־ $C = 0$, כלומר $g(x) = \ln(1+x)$.

נשים לב שב־ $x = 1$ מקבלים טור הרמוני עם סימנים מתחלפים, ויש התכנסות–מה שמראה שהאינטגרציה יכולה להרחיב את ההתכנסות והגזירה יכולה לצמצם את ההתכנסות (בקצוות). בפרט, קיבלנו ש־

$$\ln 2 = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

וזו למעשה הפעם הראשונה שבה הוכחנו שהטור ההרמוני בעל הסימנים המתחלפים אכן מתכנס ל־ $\ln 2$.

4. הטור $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ מתכנס ב־ $-1 < x < 1$. טור האינטגרל, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ מתכנס גם בקצה הימני, כי ב־ $x = 1$ מקבלים טור לייבניץ, וקיבלנו:

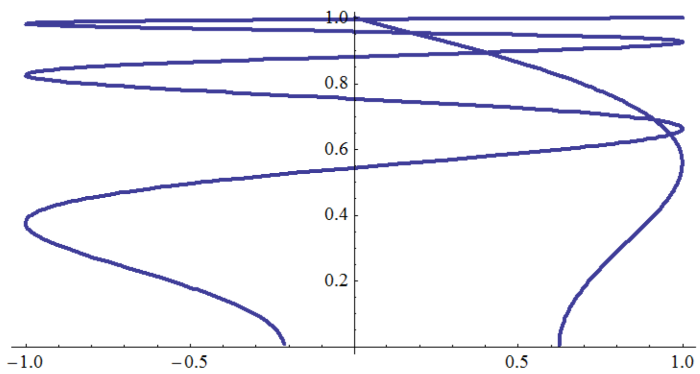
$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x \to 1^-} \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

הגדרה 4.36 פונקציה נקראת אנליטית בקטע אם לכל a בקטע קיים טור חזקות ב־ $(x-a)$ כך שהפונקציה מתלכדת בסביבה של a עם טור החזקות הנ"ל.

למשל, אם $\lim_{n\to\infty}(f(x) - T_n f(x)) = 0$ אז טור טיילור של f מתלכד עם f.

5 מסילות במישור

נרצה להתבונן בגרפים במישור שאינם מייצגים פונקציה (למשל, כי אינם חד־ערכיים). זוהי דוגמה למסילה המוזרה $\binom{\sin t^2}{\sqrt{\cos t}}$ כש־ $t \in [0, 2\pi]$:



הגדרה 5.1 יהי I קטע פתוח. מסילה ב־ $\mathbb{R}^2$ הנה פונקציה $P: I \to \mathbb{R}^2$, כך ש־ $P: t \mapsto \binom{x}{y}$.

לעתים נרצה להגדיר $x = f(t),\ y = g(t)$ ההיטלים של המסילה על שני הצירים, ואף להתבונן במסילה בתור זוג הטלות אלה $P = \binom{f}{g}$.

נציין גם שהפרמטר t הוא משמעותי, כלומר לא נעסוק רק במקום הגיאומטרי במישור של כל הנקודות שהמסילה דורכת עליהן, אלא נתעניין גם בציר הזמן–עבור איזה t המסילה דרכה על נקודות אלה.

דוגמאות:

1. $P(t) = \binom{a}{b}$ היא המסילה המשעממת מכולן.
2. $P(t) = \binom{1}{0} + t\binom{2}{3}$ עם $t \in \mathbb{R}$. כלומר, $P(t) = \binom{1+2t}{0+3t}$ וזהו ישר בהצגה פרמטרית.
3. $P(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$ והנקודות שהמסילה דורכת עליהן מקיימות $x^2 + y^2 = 1$, כלומר הן חלק ממעגל היחידה.
4. $H(t) = \binom{\cosh t}{\sinh t}$ והנקודות שהמסילה דורכת עליהן מקיימות $x^2 - y^2 = 1$, כלומר הן חלק מהיפרבולת היחידה.
5. $P(t) = \binom{t^2}{t^2}$ וכאן המסילה מטיילת על הישר $x = y$ בקרן החיובית (הרביע הראשון).
5. $Q(t) = \binom{\sin t}{\sin t}$ וכאן המסילה מטיילת על הישר $x = y$ באופן מחזורי בין -1 ל־ 1.

5.1 נגזרת של מסילה, מהירות ותאוצה

הגדרה 5.2 נגדיר את הגבול של המסילה בנקודה בתור הביטוי הבא, אם הוא קיים:

$$\lim_{t\to a}\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t)\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\lim_{t\to a} f(t) \\ \lim_{t\to a} g(t)\end{pmatrix}$$

כעת אפשר לדון גם על נגזרת של מסילה, כדי לקבל את הוקטור המשיק–וקטור המהירות על המסילה.

הגדרה 5.3 תהי P מסילה, נגדיר $P'(a) = \lim_{t\to 0}\frac{P(a+t)-P(a)}{t}$ אם קיים, הנגזרת של המסילה בזמן a. לפי ההגדרה הקודמת, אם f, g גזירות ב־ a, אזי $P'(a) = \binom{f'(a)}{g'(a)}$.

באופן דומה, נגדיר את המסילה המשיקה $L(t) = P(a) + P'(a)(t-a)$.

לדוגמא, נתבונן במסילה $P(t)=\binom{\cos t}{\sin t}$ ואז $P'(t)=\binom{-\sin t}{\cos t}$. זה לא מפתיע שהוקטור המשיק (המהירות) ניצב לוקטור הדרך, $\overline{OP(a)}$, שהוא כמובן רדיוס במעגל. ואכן, ממכפלה סקלרית, $\binom{\cos t}{\sin t}\cdot\binom{-\sin t}{\cos t}=0$.

הגדרה 5.4 תהי P מסילה גזירה. נגדיר $v(t)=|P'(t)|=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$ סקלר המהירות (גודל וקטור המהירות).

במקרה של הדוגמה הקודמת, $v(t)\equiv 1$, כלומר גודל המהירות קבוע. אבל, כמובן, הכיוון של וקטור המהירות משתנה.

הגדרה 5.5 תהי P מסילה גזירה פעמיים. נגדיר $P''(t)$ וקטור התאוצה, ו־ $a(t)=|P''(t)|$ סקלר התאוצה.

במקרה של הדוגמא הקודמת, $a(t)\equiv 1$, כלומר גודל המהירות קבוע אך גודל התאוצה אינו אפס (זאת משום שוקטור המהירות משנה כיוון: יש לו מהירות <u>סיבובית</u>).

דוגמא נוספת: המסילה $P(t)=\binom{t}{-t^2+9}$ כאשר $-3\leq t\leq 3$. המסילה היא חלק מהפרבולה $y=-x^2+9$, וכאן $P'(t)=\binom{1}{-2t}$. כלומר, התנועה האופקית על המסילה היא במהירות קבועה ימינה, אך התנועה האנכית משתנה כתלות ב־ t. המהירות היא $v(t)=\sqrt{1+4t^2}$ והמינימום מתקבל ב־ 0. התאוצה היא $a(t)=2$, קבועה.

5.2 אורך של מסילה

דרך אחת לחשב אורך של עקום היא לקחת מספר נקודות על העקום, לחבר אותן בקווים ישרים, ולמדוד את סך האורכים של הקווים הישרים. התקווה היא שאם העקום "חלק", לאחר שניקח הרבה מאוד נקודות נגיע להערכה די מדויקת של אורך העקום.

אפשרות אחרת שמתקבלת על הדעת היא לחשב את האינטגרל של המהירות, אך יש להצדיק את השימוש ב"מהירות" למדידת ה"דרך".

הגדרה 5.6 המרחק בין שתי נקודות $P=\binom{a}{b},\ Q=\binom{c}{d}$ מוגדר ע"י:

$$d(P,Q)=\sqrt{(c-a)^2+(b-d)^2}$$

נרצה לבנות חלוקה של הקטע עליו המסילה מוגדרת, להגדיר אורך המתאים לחלוקה, ולדבר על החסם העליון של אורכי כל החלוקות האפשריות.

הגדרה 5.7 בהינתן חלוקה $\mathcal{P}$ של תחום ההגדרה של המסילה, נסמן $l(\mathcal{P})=\sum_{i=1}^n d(P_{i-1},P_i)$, כאשר $P_i:=\binom{f(t_i)}{g(t_i)}$.

עכשיו אפשר לדבר על החסם, בתנאי שהמסילה לא חוזרת על עצמה:

הגדרה 5.8 תהי P מסילה כך שלכל $a\leq t<t'\leq b$ מתקיים $P(t)\neq P(t')$. נאמר ש־ P בעלת אורך סופי אם הקבוצה $\{l(\mathcal{P})\}$ על כל החלוקות $\mathcal{P}$ חסומה מלעיל. אם זה המצב, נגדיר $l(P)=\sup\{l(\mathcal{P})\}$.

בכל זאת, נרצה גם קריטריון נוח יותר לחישוב האורך, באמצעות אינטגרל של המהירות. על מנת להצדיק מעבר זה, דרושה הגדרה נוספת:

הגדרה 5.9 נאמר שהמסילה P חלקה אם הפונקציות f, g המרכיבות אותה גזירות ברציפות ומתקיים $0 < (f')^2 + (g')^2$ בכל תחום ההגדרה. (כלומר, וקטור המהירות לא מתאפס.)

אך לפני שנוכל להוכיח את מה שאנחנו רוצים, אנו זקוקים למספר טענות עזר:

טענה 5.10 אורך של מסילה הינו אדיטיבי, כלומר אם $P : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ בעלת אורך ו־ $c \in [a,b]$ כלשהו, אז מתקיים $l(P|_{[a,b]}) = l(P|_{[a,c]}) + l(P|_{[c,b]})$.

הוכחה: כדי להקל קצת, נסמן $T = P|_{[a,c]},\ S = P|_{[c,b]}$. ראשית צריך להראות שהביטויים באגף ימין מוגדרים בכלל. למשל, נראה שהקבוצה $\{l_T(\mathcal{Q})\}$ כאשר $\mathcal{Q}$ חלוקה של $[a,c]$ היא קבוצה חסומה. ובכן, תהי $\mathcal{Q} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ חלוקה של $[a,c]$, אז

$$l_T(\mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^{n} d(T(x_i), T(x_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{n} d(T(x_i), T(x_{i-1})) + d(T(c), P(b))$$

אבל הביטוי באגף ימין מייצג $l(\mathcal{Q}')$ כאשר $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cup \{b\}$ חלוקה של $[a,b]$ ולכן כל הביטוי חסום ע"י $l(P)$, כלומר הקבוצה $\{l_T(\mathcal{Q})\}$ אכן חסומה. באופן דומה גם אורכי החלוקות של $[c,b]$ חסומים.

נסמן $l_1 = \sup\{l_T(\mathcal{Q})\}$ כאשר $\mathcal{Q}$ חלוקה של $[a,c]$ ו־ $l_2 = \sup\{l_S(\mathcal{W})\}$ כאשר $\mathcal{W}$ חלוקה של $[c,b]$, וכן $l = l(P)$.

נראה ש־ $l_1 + l_2 \leq l$.

מהיות l_1, l_2 חסמים עליונים ניתן למצוא סדרות $(\mathcal{Q}_n), (\mathcal{W}_n)$ של חלוקות של הקטעים המצומצמים בהתאמה, כך ש־ $l_1 \to (l(Q_n))$ ו־ $l_2 \to (l(\mathcal{W}_n))$. מתוך שתי סדרות אלה נבנה סדרה $(\mathcal{Q}_n \cup \mathcal{W}_n)$ של חלוקות של הקטע $[a,b]$.

ברור שלכל n מתקיים $l(\mathcal{Q}_n \cup \mathcal{W}_n) = l(\mathcal{Q}_n) + l(\mathcal{W}_n)$. מאריתמטיקה של סדרות מתכנסות, מתקיים $l_1 + l_2 \to (l(\mathcal{Q}_n \cup \mathcal{W}_n))$. מאידך, החלוקות $(\mathcal{Q}_n \cup \mathcal{W}_n)$ הן חלוקות של הקטע $[a,b]$ ולכן חסומות ע"י l. ממונוטוניות הגבול, $l_1 + l_2 \leq l$.

כעת נראה ש־ $l_1 + l_2 \geq l$.

תהי $(\mathcal{P}_n)$ סדרת חלוקות של $[a,b]$ המתכנסת ל־ l. נסמן $\mathcal{Y}_n = \mathcal{P}_n \cup \{c\}$. זהו עידון של $\mathcal{P}_n$ ולכן מתקיים $l(\mathcal{Y}_n) \geq l(\mathcal{P}_n)$ לכל n. אבל כיוון שגם $(\mathcal{Y}_n)$ היא סדרת חלוקות של $[a,b]$, מתקבל

$$l \geq l(\mathcal{Y}_n) \geq l(\mathcal{P}_n)$$

ולכן $l \to (l(\mathcal{Y}_n))$ ממשפט הסנדוויץ'. כעת נגדיר $\mathcal{Q}_n = \mathcal{Y}_n \cap [a,c]$ ו־ $\mathcal{W}_n = \mathcal{Y}_n \cap [c,b]$ חלוקות של $[a,c]$ ו־ $[c,b]$ בהתאמה. ברור ש־

$$l(\mathcal{P}_n) \leq l(\mathcal{Y}_n) = l(\mathcal{Q}_n) + l(\mathcal{W}_n) \leq l_1 + l_2$$

וממונוטוניות הגבול, $l \leq l_1 + l_2$. מכאן, $l = l_1 + l_2$ כפי שרצינו. ■

הגדרה 5.11 אם $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה עם $F(t)=\binom{f_1(t)}{f_2(t)}$ והפונקציות f_1,f_2 אינטגרביליות ב־ $[a,b]$ אז נגדיר גם את האינטגרל של המסילה, $\int_a^b F:=\binom{\int_a^b f_1}{\int_a^b f_2}$.

טענה 5.12 אם $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה ו־ $C=\binom{c}{d}$, אז מתקיים:

$$C\cdot\int_a^b F(t)dt=\int_a^b C\cdot F(t)dt$$

כאשר $\cdot$ מכפלה סקלרית, ושני הצדדים הם סקלרים.

הוכחה: מליניאריות האינטגרל (לפונקציות ממשיות רגילות) והמכפלה הסקלרית, שהרי:

$$C\cdot\begin{pmatrix}\int_a^b f_1\\ \int_a^b f_2\end{pmatrix}=c\int_a^b f_1+d\int_a^b f_2=\int_a^b(cf_1+df_2)=\int_a^b C\cdot F$$

■

טענה 5.13 אם $F:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ אינטגרבילית, אז מתקיים $||\int_a^b F||\le\int_a^b||F||$, כאשר $||\cdot||$ אורך וקטור.

הוכחה: נסמן $C=\int_a^b F$. אז מתקיים $C\cdot C=\int_a^b C\cdot F(t)dt$ מהטענה הקודמת. כעת נתבונן באורך הוקטור:

$$||C||\cdot||C||=|C\cdot C|=|\int_a^b C\cdot F(t)dt|\le\int_a^b|C\cdot F(t)|dt$$

כאשר המעבר האחרון נכון מפני שמדובר באינטגרלים של פונקציות ממשיות רגילות. כעת אם $C=0$ הטענה מתקיימת, ואם $C\neq 0$ נשתמש באי־שוויון קושי־שוורץ (מאלגברה ליניארית 2):

$$|C\cdot F(t)|\le||C||\cdot||F(t)||$$

ולכן,

$$\int_a^b|C\cdot F(t)|dt\le\int_a^b||C||\cdot||F(t)||dt=||C||\int_a^b||F(t)||dt$$

כלומר,

$$||C||\cdot||C||\leq||C||\int_a^b||F(t)||dt$$

ומחלקים ב־ $||C||>0$ ומכאן המסקנה. ■

טענה 5.14 אם P מסילה חלקה ובעלת אורך על קטע $[a,b]$, ו־ $v(t)$ כמו קודם, אז לכל חלוקה $\mathcal{P}$ של הקטע מתקיים $l(\mathcal{P})\leq\int_a^b v$.

הוכחה: נשתמש בטענה הקודמת עבור P':

$$||\int_a^b P'(t)dt||\leq\int_a^b||P'(t)||dt=\int_a^b v(t)dt$$

אבל מהמשפט היסודי,

$$||\int_a^b P'(t)dt||=||P(b)-P(a)||=d(P_b,P_a)$$

וקיבלנו את הא"ש $\int_{t-1}^t v(t)dt\geq d(P_i,P_{i-1})$ לכל i. מכאן כמובן גם $\int_a^b v\geq l(\mathcal{P})$.■

משפט 5.15 אם $P:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה חלקה, ו־ $v(t)$ כמו קודם, אז $l(P)=\int_a^b v(t)dt$.

הוכחה: v רציפה ולכן אינטגרבילית. לכן די להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $\mathcal{P}$ המקיימת ש־ $|\int_a^b v-l(\mathcal{P})|<\varepsilon$. למעשה, לאור הטענה, די להראות $\int_a^b v-l(\mathcal{P})<\varepsilon$.

נשים לב ש־

$$\begin{aligned}l(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n d(P_{i-1},P_i)\\ &= \sum_{i=1}^n\sqrt{(f(t_i)-f(t_{i-1}))^2+(g(t_i)-g(t_{i-1}))^2}=\\ &= \sum_{i=1}^n\sqrt{\Big(\frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\Big)^2+\Big(\frac{g(t_i)-g(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\Big)^2}(t_i-t_{i-1})\end{aligned}$$

כעת לפי משפט לגרנז' עבור f,g בכל קטע $[t_{i-1},t_i]$ קיימים $t_{i-1}<c_i<t_i$ ו־ $t_{i-1}<d_i<t_i$ כך שהביטוי הנ"ל מקיים

$$=\sum_{i=1}^n\sqrt{(f'(c_i))^2+(g'(d_i))^2}(t_i-t_{i-1})$$

נשים לב שאם $c_i = d_i$ אז היינו מקבלים סכום רימן של v. זה לא המצב, אז נרצה לבחור נקודה משותפת שלא תקלקל יותר מדי.
אם $t_{i-1} < u_i < t_i$ אז

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} v(u_i)(t_i - t_{i-1}) - (\sum_{i=1}^{n} v(u_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2}(t_i - t_{i-1})$$

נתבונן בכל מחובר שנכפל ב־ $(t_i - t_{i-1})$:

$$\begin{aligned} |\sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2} - \sqrt{(f'(u_i))^2 + (g'(u_i))^2}| &\leq \\ \sqrt{(f'(u_i) - f'(c_i))^2 + (g'(u_i) - g'(d_i))^2} &\leq \\ \sqrt{2}\max\{|f'(u_i) - f'(c_i)|, |g'(u_i) - g'(d_i)|\} & \end{aligned} \tag{3}$$

כאשר (3) מתקבל משיקולי א"ש המשולש ההפוך אם $|\cdot|$ מתפקד כאורך וקטור, שהרי $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
כעת אנו רוצים לראות שהחסם שקיבלנו לא תלוי בקטע i. למרבה המזל, f', g' רציפות במ"ש (כי הן רציפות בקטע סגור וחסום). לכן, עבור אותו $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - y| < \delta$ אז בו־זמנית $|g'(x) - g'(y)| < \varepsilon$ ו־ $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$.
כעת, הביטוי מקודם $\sum_{i=1}^{n} v(u_i)(t_i - t_{i-1})$ הוא סכום רימן של v עבור החלוקה $\mathcal{P}$.
נדאג לכך שהחלוקה עדינה מספיק כדי ש־ $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ וגם שיתקיים

$$|\int_a^b v - \sum_{i=1}^{n} v(u_i)(t_i - t_{i-1})| < \varepsilon$$

(אינטגרביליות לפי סכומי רימן).
לבסוף נקבל:

$$
\begin{aligned}
|\int_a^b v - l(\mathcal{P})| &\le |\int_a^b v - \sum_{i=1}^n v(u_i)(t_i - t_{i-1})| + \\
&\quad |\sum_{i=1}^n v(u_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2}(t_i - t_{i-1})| \\
&\le |\int_a^b v - \sum_{i=1}^n v(u_i)(t_i - t_{i-1})| + \\
&\quad |\sum_{i=1}^n (v(u_i) - \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2})(t_i - t_{i-1})| \\
&< \varepsilon + |\sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2} - \sqrt{(f'(u_i))^2 + (g'(u_i))^2}| \\
&\le \varepsilon + \sum_{i=1}^n \sqrt{2}\max\{|f'(u_i) - f'(c_i)|, |g'(u_i) - g'(d_i)|\}(t_i - t_{i-1}) \\
&< \varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon(b-a)
\end{aligned}
$$

וזו קבועה כפולה חיובית של ε ולכן סיימנו. (המעבר האחרון מתקיים בגלל הרציפות במ"ש, שהרי $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ולכן $|u_i - c_i| < \delta,\ |u_i - d_i| < \delta$.) ■

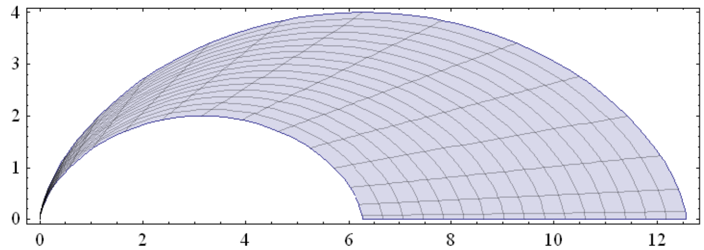
נראה מספר דוגמאות:

1. $P(t) = \binom{a_1}{a_2} + t\binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}$, המסילה המחברת שתי נקודות. כאן, $v(t) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ ואז לפי המשפט $l(P) = \int_0^1 v(t)dt = d(\binom{a_1}{a_2}, \binom{b_1}{b_2})$. כלומר, אורך הקטע הוא בדיוק המרחק בין הנקודות.
2. $P(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$ עבור $0 \le t \le 2\pi$, כלומר סיבוב אחד סביב מעגל היחידה. כאן, $l(P) = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$ (ראינו כבר קודם ש־ $v(t) \equiv 1$). אם הרדיוס היה r, היינו מקבלים ש־ $l(P) = 2\pi r$.
3. $E(t) = \binom{a\cos t}{b\sin t}$ עם $0 < a, b$ ו־ $0 \le t \le 2\pi$. מתקיים $\frac{x}{a} = \cos t,\ \frac{y}{b} = \sin t$ כלומר $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ וזוהי משוואה של אליפסה. אם מסמנים $e = \frac{b}{a}$ אז מתקבל

$$L(E) = \int_0^{2\pi} a\sqrt{\sin^2 t + e^2\cos^2 t}dt$$

ומסתבר שאין קדומה אלמנטרית לפונקציה זו, אז אפשר רק לעשות חישוב נומרי.

4. ציקלואיד ברדיוס a מתאר מעגל שמסתובב ללא החלקה על ציר ה־ x. נסמן θ הזוית של הנקודה לעומת נקודת ההשקה, ומתקיים $x = a(\theta - \sin\theta)$ ו־ $y = a(1 - \cos\theta)$. המסילה שמציירת הנקודה שמתחילה בראשית שנסמנה Q מקיימת $Q'(\theta) = \binom{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$ ובכל נקודה פרט להתחלה ולסוף יש תנועה ימינה כי $1 - \cos\theta > 1$. בכל מקרה מתקיים $v(\theta) = a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$ ואפשר למצוא אינטגרל: $l(Q) = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = 4a(-\cos\frac{\theta}{2})|_0^{2\pi} = 8a$.



(ציקלואידים ברדיוסים מ־ 1עד 2 בתחום $[0,2\pi]$.)

5. מהו השטח הכלוא מתחת לציקלואיד? ובכן, זהו אינטגרל של y כפונקציה של x... בחצי השמאלי, y הוא אכן פונקציה של x, ושם:

$$t(y)=\arccos(1-\frac{y}{a}) \implies x(y)=a(\arccos(1-\frac{y}{a})-\sin(\arccos(1-\frac{y}{a})))$$

כעת אפשר לעשות אינטגרל לפי y, אבל זה ייתן לנו את השטח הלא נכון, כי עשינו אינטגרל של x לפי y. ע"י חיסור משטח המלבן $(0,0,2\pi a,2a)$ אפשר יהיה לחשב מחצית מהשטח שבו אנו מעוניינים.

אפשר היה לעשות הכל גם דרך $y(x)$. נניח שיש לנו פונקציה $x^{-1}(\xi)$ כך ש־ $x(x^{-1}(\xi))=\xi$, והיא קיימת כי $x(t)$ הפיכה (מהחלקות). אז כעת,

$$y(\xi)=y(t(x))=y(x^{-1}(\xi))$$

לכן, השטח המבוקש הוא האינטגרל

$$\int_0^{2\pi} y(x^{-1}(\xi))d\xi=\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt$$

לפי חילוף משתנה $\xi=x(t),d\xi=x'(t)dt$. במקרה שלנו,

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=3\pi a^2$$

5.3 מסילות שקולות

הגדרה 5.16 שתי מסילות $P:[a,b]\to\mathbb{R}^2,\ Q:[c,d]\to\mathbb{R}^2$ ייקראו שקולות אם קיימת $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ גזירה ברציפות המקיימת $\varphi'>0$ וגם $\varphi(c)=a,\varphi(d)=b$ יחד עם $Q=P\circ\varphi$.

ההגדרה הנ"ל היא הגדרה של שקילות ששומרת על כיוון, כי דרשנו $\varphi'>0$. הרעיון הוא ששתי המסילות מציירות את אותו העקום, בעל אותו אורך, וכד'. זו תהיה ממש אותה "תמונה", אבל אולי "נצייר" אותה מהר יותר.

הערה 5.17 קל לראות שההגדרה הקודמת משרה יחס שקילות: כל מסילה שקולה לעצמה, φ חח"ע ולכן הפיכה (סימטריות), ומתקיימת גם טרנזיטיביות.

טענה 5.18 אם P, Q מסילות שקולות וחלקות אזי $l(P) = l(Q)$.

הוכחה: אם

$$v_P(t) = \sqrt{(f_P'(t))^2 + (g_P'(t))^2}$$

אז

$$v_Q(t) = \sqrt{\left(\varphi'(t)(f_P'(\varphi(t))\right)^2 + \left(\varphi'(t)(g_P'(\varphi(t))\right)^2} = \varphi'(t)v_P(\varphi(t))$$

ולכן

$$l(Q) = \int_c^d v_Q(t)dt = \int_c^d \varphi'(t)v_P(\varphi(t))dt = \int_a^b v_P(u)du = l(P)$$

כאשר השתמשנו בהחלפת משתנה, $u = \varphi(t)$ ו־ $du = \varphi'(t)dt$. ■

5.4 פרמטריזציה באמצעות האורך

הגדרה 5.19 תהי $P : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ מסילה חלקה. נגדיר לכל $t \in [a,b]$ את $s(t) := \int_a^t v$. ("אורך הטיול" מההתחלה ועד t.)

הערה 5.20 כמובן מתקיים $s(a) = 0$ ו־ $s(b) = L = l(P)$, וכן לפי המשפט היסודי, $s'(t) = v(t)$. למעשה, הפונקציה s היא חח"ע $[a,b] \to [0,L]$, כי $s' = v > 0$ מדרישת החלקות. על כן, אפשר להשתמש בפונקציה s^{-1}.

הגדרה 5.21 ההרכבה $Q = P \circ s^{-1}$ נקראת פרמטריזציה באמצעות אורך המסילה, והיא מסילה בפני עצמה השקולה למסילה המקורית. פרמטר הזמן של P הופך לפרמטר הדרך (אורך) של Q.

טענה 5.22 בתנאי ההגדרה, $||Q'(t)|| = 1$ לכל t.

הוכחה: אם $P(t) = \binom{f(t)}{g(t)}$ אז $Q(t) = \binom{f(s^{-1}(t))}{g(s^{-1}(t))}$. לכן,

$$Q'(t) = \begin{pmatrix} f'(s^{-1}(t))(s^{-1})'(t) \\ g'(s^{-1}(t))(s^{-1})'(t) \end{pmatrix}$$

אבל $\frac{1}{v(s^{-1}(t))} = \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} = (s^{-1})'(t)$, כלומר

$$Q'(t) = \frac{1}{v(s^{-1}(t))} P'(s^{-1}(t))$$

ומכאן

$$||Q'(t)|| = \frac{1}{v(s^{-1}(t))}||P'(s^{-1}(t))|| = \frac{1}{v(s^{-1}(t))}v(s^{-1}(t)) = 1$$

■

5.5 עקמומיות ורדיוס עקמומיות

בהינתן מסילה חלקה, נרצה לאפיין את מידת העקמומיות של המסלול–עד כמה המהירות הסיבובית משפיעה על התנועה לאורך המסילה. ניתן לאפיין את הזווית של וקטור המהירות המשיק לפי פרמטר הזמן, ולקבל פונקציה $\theta(t)$.[4]

הגדרה 5.23 תהי P מסילה חלקה. העקמומיות של המסילה בזמן t מוגדרת ע"י

$$\kappa(t) = \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{\left(\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\right)^3}$$

לדוגמה, נתבונן במסילה המציירת מעגל ברדיוס r, $P(t) = \binom{r\cos t}{r\sin t}$. העקמומיות:

$$\kappa(t) = \frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

כלומר, העקמומיות קבועה על כל המעגל ולא תלויה ב־ t.

הגדרה 5.24 תהי P מסילה חלקה. רדיוס העקמומיות של המסילה בזמן t מוגדר ע"י $\rho(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}$.

[4]בהרצאה ראינו אפיון ארוך ולא מאוד קוהרנטי של וקטור היחידה המשיק, התאוצה הנורמלית, התאוצה המשיקית, ועוד כמה מושגים כאלה. למיטב הבנתי אין צורך בהם על מנת לקבל את ההגדרות.