קומבינטוריקה

על פי הרצאות מאת פרופ' גיל קלעי

19 ביולי 2010

רשם: שיר פלד, באמצעות LyX גרסה 1.6.1
תיקונים יתקבלו בברכה במהלך ההפסקות או בכתובת מייל *shirpeled@cs*

1 שיעור 1

1.1 מבוא

נעסוק בבעיות קיצוניות ובבעיות מניה.

שאלה 1

נתונה משפחה של F תת קבוצות של $\{1,...,n\}$, שמקיימת לכל $S,T\in F$ ש $S\cap T\neq\emptyset$.
כמה קבוצות לכל היותר יש ב F?

באופן כללי מספר תתי הקבוצות הוא 2^n, דרך מהירה לראות זאת היא להתאים לכל קבוצה S וקטור $(x_1,...,x_n)$ של 0 ו 1, כאשר $x_i=1$ אם"ם $i\in S$, וזה משרה התאמה חח"ע ועל בין קבוצות חלקיות של $[n]$ לוקטורים בינאריים באורך n, ומספר הוקטורים מסוג זה הוא 2^n באופן טריוויאלי.

מכך נובעת הזהות

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

שאלה אחרת:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

ומשמעות הדבר שלכל קבוצה לא ריקה יש אותו מספר של תת קבוצות בגודל זוגי ושל תת קבוצות בגודל אי זוגי.

הוכחה קומבינטורית לאותה טענה: לבחור איבר קבוע, נאמר 1, ולכל קבוצה S, אם $1\in S$ אז נתאים לה את $S\setminus\{1\}$ ואחרת נתאים לה את $S\cup\{1\}$, וכך בנינו התאמה חח"ע ועל מהקבוצות הזוגיות לאי־זוגיות.

נחזור לשאלתנו על גדלה המקסימלי של F.

דוגמא: נבחר את F להיות כל הקבוצות S כך ש $1\in S$, בפרט כל שתיים נחתכות על 1, ולכן גודל הקבוצה שהגענו אליה הוא 2^{n-1}.

זה בעצם הכי טוב שאפשר לעשות, מדוע? כי לכל קבוצה שנכניס ל F, את המשלים שלה לא נוכל להכניס ל F (כי חיתוכן יהיה טריוויאלי), ולכן לא נוכל לעבור ממילא את $\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$.

ולכן הוכחנו בדיוק מהו הגודל המקסימלי של F.

האם יש דרך אחרת לבנות משפחות בגודל 2^{n-1} שיקיימו זאת?

כן, למשל עבור n אי זוגי אפשר לבחור:

$$F=\left\{S:|S|>\frac{n}{2}\right\}$$

שאלה 1'

נתונה משפחה $F \subseteq 2^n$ כך שלכל $S,T \in F$ מתקיים ש $S \cup T \neq [n]$, מה הגודל המרבי של F?
מדה מורגן רואים שזה אס"ם $S^C \cap T^C \neq \emptyset$, ולכן התשובה דומה לשאלה 1.

שאלה 2

מה המספר המירבי של קבוצות S במשפחה $F \subseteq 2^n$, כך שמתקיימים שני התנאים יחד, לכל $S,T \in F$:

1. $S \cup T \neq [n]$
2. $S \cap T \neq \emptyset$

אפשר לקחת בתור דוגמא את $F = \{S : 1 \in S \wedge 2 \notin S\}$. ואז $|F| = 2^{n-2}$.
השערה: $|F| \leq 2^{n-2}$
לא כל כך פייר לתת את זה בתור תרגיל, שכן זה נכון, אבל ההוכחה לא טריוויאלית, ולקח כמה שנים לפתור זאת.

שאלה 3

מה מספר הצלעות המירבי בגרף עם n קודקודים ללא משולשים?
דוגמאות: עץ, גרף דו צדדי... ועוד.
כדוגמא - נוכל לקחת גרף דו צדדי שלם ולקוות לטוב.
מספר צלעות מקסימלי בגרף דו צדדי יתקבל כאשר בכל צד מספר שווה של קודקודים (זה די קל להוכחה). עבור n קודקודים במקרה הזוגי זה יתן $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ ובמקרה האי־זוגי נקבל $\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

משפט 1.1 טורן־מנטל: בגרף חסר משולשים על n קודקודים יש לכל היותר $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ צלעות. יש לכל היותר מספר צלעות כמו בגרף דו צדדי עם $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ קודקודים בצד אחד.

הוכחה: (יש דרכים רבות, נראה אחת) נתבונן בקודקוד כלשהו בעל דרגה מקסימלית, נתבונן בכל שכניו (נכנה קבוצה זו A) - אשר לא יכולים להיות שכנים אלו של אלו (שכן זה היה יוצר משולש). כעת נתבונן באלו שאינם שכנים של הקודקוד הראשון, נכנה קבוצה זו B. נסיר את כל הצלעות מ B ונחבר כל קודקוד ב B לכל קודקודי A. הדרגה של הקודקוד שהתחלנו איתו לא השתנתה, הדרגות של קודקודי A לא קטנה, וכך גם הדרגות של קודקודי B. קיבלנו מהגרף הקודם גרף חדש שבו מספר הצלעות הוא לפחות כמקודם, ואילו הגרף החדש הוא דו צדדי (צד אחד A והקודקוד הראשון, צד שני B). ומכאן שמכל גרף חסר משולשים ניתן לייצר גרף דו"צ בעל אותו מספר צלעות, ובפרט מגרף חסר משולשים עם מספר צלעות מקסימלי. ■

שאלה 4

מטרה: לשאול שאלה דומה על אוספים של שלשות מתוך $\{1...n\}$. במקום זוגות (כלומר צלעות) נבחר שלשות.
ניסוח: מה המספר המירבי של שלשות מתוך $\{1...n\}$ שניתן לקחת מבלי לקבל את ארבע השלשות של רביעיה. כלומר אין אנו מרשים את ארבע הבאות שיופיעו יחד:

$$\{137\},\{139\},\{379\},\{179\}$$

רעיון להתחיל איתו - נחלק את ההיפר גרף שלנו לשלושה צדדים, ונחבר שלשות שהן בצדדים שונים. נקבל בערך $\frac{n^3}{27} = \left(\frac{n}{3}\right)^3$, מספרן של כלל השלשות הוא $\frac{n^3}{6} \approx \binom{n}{3}$.
תרגיל לבית - לנצח את הבניה הזו.

משולשים מונוטוניים

רוצים לבנות משולש כך שבכל שורה הסדרה מונוטונית עולה, וכל תא הוא בין שני התאים שמעליו, כך למשל:

1 2 3

13

2

הוא משולש שמקיים זאת.
שאלו כמה משולשים מונוטוניים יש?
זו בעיה קשה שנחזור אליה בהמשך.

2 שיעור 2

3 שיעור 3

משפט 3.1 אם $A \subseteq \mathbb{R}^+$ קבוצה של ממשיים חיוביים

$$A + A = \{a + a' : a, a' \in A\}$$

$$A \cdot A = \{a \cdot a' : a, a' \in A\}$$

אז:

$$|A + A| \cdot |A \cdot A| \geq C \cdot n^{\frac{5}{2}}$$

מסקנה 3.2

$$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq C' \cdot n^{\frac{5}{4}}$$

וההשערה היא שזה בעצם גדול מ $C' \cdot n^2$

משפט 3.3 טרוטר סמרדי: אם נתונה קבוצה P של s נקודות במישור. וקבוצה L של t ישרים. חילה היא זוג (p,l) כך ש $p \in P$ ו $l \in L$ כך ש $p \in l$. נסמן ב I את מספר החילות, אז :

$$|I| \leq C \cdot \max\left\{s, t, s^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}\right\}$$

אם $s = t$ אז $|I| \leq s^{\frac{4}{3}}$

הערה 3.4 ניתן להגדיר גרף דו צדדי $V = P \cup L$ ויש צלע בין p, l אם $p \in l$. בגרף אין מרובעים, כיוון שמכך ינבע שיש שני ישרים שונים שמסכימים על שתי נקודות שונות (בסתירה לאקסיומה של גיאומטריה אוקלידית - שדרך כל שתי נקודות עובר קו ישר יחיד).

תרגיל: גרף דו צדדי חסר מרובעים בעל s קודקודים בכל צד - מכיל לכל היותר $C \cdot s^{\frac{3}{2}}$ צלעות. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ קבוצה של ממשיים חיוביים, Z קבוצה של נקודות במישור: $Z = (A + A) \times (A \cdot A) = \{(x, y) : x \in A + A,\ y \in A \cdot A\}$ וכמובן:

$$|Z| = s = |A + A| \cdot |A \cdot A|$$

נגדיר:

$$L=\{y=(x-a_i)\,a_j:1\le i,j\le n\}$$

ואז:

$$|L|=t=n^2$$

טענה 3.5 $|I|\ge n^3$

הוכחה: על הישר l שמתואר ע"י $y=(x-a_i)\cdot a_j$ נציב $x=a_i+a_k$, נקבל:

$$y=a_k\cdot a_j$$

ואז $(x,y)\in Z$
ולכן לכל a_i,a_j,a_k ניתן למצוא חילה, ומתקיימת הטענה. ■

נשתמש בטרוטר סמרדי:

$$n^3\le C\cdot\max\left\{s,t,s^{\frac{2}{3}}t^{\frac{2}{3}}\right\}$$

אם $n^3\le C\cdot t$ אז מקבלים $n^3\le C\cdot n^2$, לא יתכן.
אם $n^3\le C\cdot s$ אז על פי הבניה $s=|A+A|\cdot|A\cdot A|$ ואז $s\ge\frac{1}{C}\cdot n^3\ge\frac{1}{C}\cdot n^{\frac{5}{2}}$, ואם נבחר $D=\frac{1}{C}$ נקבל את הקבוע שמוכיח את המבוקש.
ולכן נותר לטפל במקרה ש:

$$n^3\le C\cdot s^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{2}{3}}=C\cdot s^{\frac{2}{3}}\cdot n^{\frac{4}{3}}$$

ולכן:

$$n^{\frac{5}{3}}\le C\cdot s^{\frac{2}{3}}\quad\underbrace{\Rightarrow}_{raise\,to\,the\,power\,of\,\frac{3}{2}}\quad n^{\frac{5}{2}}\le C's$$

ומכאן:

$$s\ge C''n^{\frac{5}{2}}$$

קיבלנו שהחל מ n מסויים מתקיים אחד משני המקרים לעיל, אם נבחר את הקבוע המינימלי מביניהם (כלומר D או C'') יתקבל הדרוש לנו.

3.0.1 גרפים מישוריים

G גרף עם nקודקודים ו e צלעות.

הגדרה 3.6 גרף יקרא מישורי אם ניתן לצייר אותו במישור כך שצלעות אינן נחתכות בפנימיהן (כלומר מתירים להן להיחתך בקודקודים).

משפט 3.7 בגרף מישורי קשיר, מספר הצלעות e מקיים:

$$e\le 3\cdot v-6$$

כאשר $v\ge 3$ מספר הקודקודים.

למעשה ־ אפשר לקחת כל גרף מישורי, להוסיף לו צלעות באופן כזה שיתקבל מספר הצלעות לעיל והגרף יוותר מישורי.
הוכחה: ניקח גרף מישורי כלשהו, על פי נוסחת אוילר מתקבל $v-e+f=2$ כאשר f מספר ה"מדינות" או "פיאות", כלומר מספר השטחים הרציפים שנוצרים במישור ע"י הגרף.

נוסיף צלעות עד שכל הפאות הן משולשים. כל צלע משתתפת בשתי פאות בדיוק. כל פאה מכילה 3 צלעות. ולכן $3f=2e$, כי נספור את הזוגות (a,b) כך ש a צלע, b פאה, ו $a\in b$. מספר הזוגות הוא $2e$ כי כל צלע תורמת 2 פאות, ומנימוק דומה מספר הזוגות הוא גם $3f$.

ממשפט אוילר יש לנו את הנוסחה, נכפיל בשלוש ונקבל:

$$\begin{aligned}3v-3e+3f&=6\\ &=3v-3e+2e\\ &\Rightarrow 3v-6=e\end{aligned}$$

■

משפט 3.8 (משפט החיתוכים) אם מציירים גרף G במישור ול G יש vקודקודים ו e צלעות, ואם $e>5v$ אז מספר החיתוכים C מקיים $C\geq\frac{1}{61}\cdot\frac{e^3}{v^2}$, כאשר חיתוך הוא זוג צלעות על 4 קודקודים, שבציור הן נחתכות.

.

משפט 3.9 (משפט החיתוכים החלש) אם מציירים גרף G עם v קודקודים ו e צלעות, אז מספר החיתוכים, הוא לפחות $e-(3v-6)$.

הוכחה: ממשפט קודם ־ מספר הצלעות בגרף קשיר מישורי מקסימלי הוא $3v-6$ ולכן כל צלע שנוסיף ־ תוסיף חיתוך אחד לפחות (אחרת היינו יכולים לשפר את מספר הצלעות המקסימלי מלכתחילה). ■

4 שיעור 4

תכנית פעולה: משפט החיתוכים החלש $\Leftarrow$משפט החיתוכים $\Leftarrow$משפט טרוטר סמרדי.

4.1 הוכחת משפט החיתוכים

נניח ש G גרף מצויר במישור, נניח ש $e\geq 5v$.

נבחר גרף חדש G' ע"י כך שניקח כל קודקוד ב G ל G' בהסתברות p (באופן בלתי תלוי). עבור הקודקודים שנבחרו ־ ניקח את כל הצלעות מ G ל G'.

התוחלת של מספר הקודקודים ב G' היא $p\cdot v$, תוחלת מספר הצלעות היא (מאי תלות) p^2e. אם מספר החיתוכים ב G הוא c אז מספר החיתוכים ב G' יהיה $c\cdot p^4$.

ממשפט החיתוכים החלש יש לנו: $c\geq e-3v$.

וכך גם לכל תת גרף G' יתקיים $c'\geq e'-3v'$. כיוון שזה נכון לכל תת גרף, בפרט זה מתקיים בתוחלת, כלומר $p^4c\geq p^2e-3pv$ (אם זה מתקיים לכל מאורע במרחב, בפרט הוא מתקיים בתוחלת).

ולכן לכל $0\leq p\leq 1$:

$$c\geq\frac{e}{p^2}-\frac{3v}{p^3}$$

נמצא p כזה שיתן לנו חסם גדול ככל האפשר, נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{-2e}{p^3}+\frac{9v}{p^4}=0\Rightarrow 2e=\frac{9v}{p}\Rightarrow\frac{9v}{2e}=p$$

כיוון שהנחנו ש $e\geq 5v$ ־ הביטוי הנ"ל קטן מ 1 ולכן נוכל להציבו.

קיבלנו מכך:

$$\begin{aligned} c &\geq \frac{e}{\frac{81v^2}{4e^2}} - \frac{3v}{\frac{9^3v^3}{8e^3}} = \frac{4e^3}{81v^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{3\cdot 8e^3}{81v^2} \\ &= \frac{e^3}{v^2}\left(\frac{4}{81}-\frac{8}{243}\right) = \frac{4}{243}\cdot\frac{e^3}{v^2} \geq \frac{1}{61}\cdot\frac{e^3}{v^2} \end{aligned}$$

4.2 הוכחת משפט טרוטר סמרדי

משפט 4.1 טרוטר סמרדי: אם נתונה קבוצה P של s נקודות במישור. וקבוצה L של t ישרים. חילה היא זוג (p,l) כך ש $p \in P$ ו $l \in L$ כך ש l $.p \in l$ נסמן ב I את מספר החילות, אז :

$$I \leq K \cdot \max\left\{s, t, s^{\frac{2}{3}}t^{\frac{2}{3}}\right\}$$

הוכחה: נגדיר גרף מצויר במישור, $V = P$. בתור הצלעות ניקח את כל זוגות הנקודות שהן עוקבות על אותו ישר. לכן $v = s$.

כמה צלעות יש בגרף? מספר החילות פחות מספר הישרים, מדוע? כי מספיק לעבור על כל הישרים, ולספור את מספר החילות שהם משתתפים בהן, פחות 1 (שכן אם יש 4 נקודות עוקבות, נקבל מכך 3 צלעות). ואז $e = I - t$.

כל זוג ישרים תורם לכל היותר חיתוך אחד לגרף, יכול שלא לתרום דבר אפילו אם הישרים נחתכים, אבל במידה שיש חיתוך בגרף ־ בהכרח שני הישרים שעליהם שתי הצלעות שהגדרנו ־ נחתכים.

ולכן:

$$c \leq \binom{t}{2} \leq \frac{t^2}{2}$$

נשתמש במשפט החיתוכים.

או ש $e < 5v$ או שמתקיים $c \geq \frac{1}{61}\cdot\frac{e^3}{v^2}$.

אם $e < 5v$ אז:

$$I - t < 5s \Rightarrow I < 5s + t \Rightarrow I < 6\cdot\max\{t, s\}$$

ונוכל לבחור $K = 6$

כעת אם $I < 6t$ אז טרוטר סמרדי מתקיים

אם $e \geq 5v$ אז נציב:

$$\frac{t^2}{2} \geq \frac{1}{61}\cdot\frac{(I-t)^3}{s^2}$$

על פי הנחתנו $I \geq 6t$ ולכן:

$$\frac{t^2}{2} \geq \frac{1}{61}\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}I\right)^3}{s^2}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} &\frac{125}{216}I^3 \leq \frac{61t^2s^2}{2} \Rightarrow I^3 \leq \frac{61\cdot 216}{2\cdot 125}\cdot t^2s^2 \\ &\Rightarrow I^3 \leq 61\cdot t^2s^2 \\ &\Rightarrow I \leq 4\cdot t^{\frac{2}{3}}\cdot s^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

■

משפט 4.2 בהנתן n נקודות במישור, מספר מרחקי 1 ביניהם הוא לכל היותר $K\cdot n^{\frac{4}{3}}$

הוכחה: נתבונן בנקודות וב n מעגלי יחידה סביבן.

יש קבוצה של n נקודות, קבוצה של n מעגלי יחידה סביבן, I מספר החילות (כלומר צמדים של מעגל ונקודה על שוליו). מספר מרחקי 1 הוא מחצית מספר החילות, כי בכל פעם שיש שתי נקודות המרוחקות 1 זו מזו - מעגל סביב הראשונה יתן חילה עם השניה ולהיפך.

נוכל להתעלם מכל המעגלים שיש עליהם 3 נקודות או פחות, כיוון שהחסם שנקבל בסופו של דבר יהיה יותר חזק מליניארי, ולכן בדיעבד הוא נכון גם לפני הסרה של חלק מהנקודות.

נגדיר גרף במישור שקודקודיו הם הנקודות, ולכל שתי עוקבות נקודות על אותו מעגל נתאים צלע.

הקודקודים n

מספר צלעות I

נחשוב על ציור המעגלים כעל ציור הגרף שלנו (בקירוב), כיוון שכל צלע מתקבלת בין שתי נקודות עוקבות על מעגל, נוכל לחשוב על הקטע המתאים במעגל המתאים כעל ציור הצלע. זה לא בדיוק נכון, כיוון שבדרך כלל אנחנו דורשים שהצלעות תהיינה קוים ישרים, אבל במקרה זה מה שיתקבלו יהיו מצולעים קמורים, והחלפתם במעגלים לא משנה לדידנו.

כיוון שכל שני מעגלים (או מצולעים קמורים) כנ"ל נחתכים פעמיים לכל היותר - מספר החיתוכים יהיה לכל היותר כפול ממספר זוגות המעגלים. מספר המעגלים הוא גם מספר הנקודות, ולכן מספר החיתוכים מקיים:

$$c\leq 2\binom{n}{2}$$

במשפט החיתוכים אנחנו מניחים שהגרף פשוט, ואילו כאן - נוכל לקבל מצב ששתי נקודות תהיינה על שני מעגלים שונים (אך לא יותר מכך) ולכן נקבל אולי צלעות כפולות. נוכל לזרוק עותק אחד מכל צלע כפולה, ובמקרה הגרוע הקטנו את מספר הצלעות בחצי. ולכן $\frac{I}{2}$ הוא לכל היותר מספר הצלעות כעת.

ממשפט החיתוכים נקבל או ש $\frac{I}{2}\leq 5n$ או:

$$2\binom{n}{2}\geq\frac{1}{61}\frac{\left(\frac{I}{2}\right)^{3}}{n^{2}}$$

$$61n^{4}\geq(1\,distances\,number)^{3}$$

ונקבל מכך שמספר מרחקי אחד קטן או שווה ל $4n^{\frac{4}{3}}$. ■

4.3 בעיות קיצוניות על קבוצות

מה המספר המירבי של קבוצות חלקיות של $\{1,...,n\}$ כך שאף קבוצה לא מכילה את רעותה?

תהי $F\subseteq 2^{[n]}$ משפחה של קבוצות כך שלכל $S,T\in F$ מתקיים $S\nsubseteq T$, מה הגודל המירבי של $|F|$?

אם לוקחים את כל הקבוצות בגודל $\frac{n}{2}$ נקבל $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ קבוצות שאף אחת מהן לא מכילה את רעותה.

משפט 4.3 (שפרנר) $|F|\leq\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$

הוכחה: תהי F משפחה של קבוצות מתוך $[n]$ כך שלכל $S,T\in F$ מתקיים $S\nsubseteq T$.

נסמן ב a_k את מספר הקבוצות במשפחה בגודל k.

תהי π תמורה על $1,..,n$

נאמר שקבוצה S היא רישא של π אם $S=\{\pi(1),\pi(2),...,\pi(k)\}$ עבור k כלשהו. נבחין כי עבור שתי רישות שונות, הרישה הגדולה יותר מכילה את הקטנה ממנה.

לכל תמורה יש $n+1$ רישות (סופרים גם את הקבוצה הריקה).

נספור זוגות π,S כך ש π תמורה ו $S\in F$ רישא של π. נעשה זאת בשתי דרכים.

בהנתן π - מכיוון שרישות של אותה תמורה מכילות זו את זו נובע בהכרח שקיימת לכל היותר קבוצה אחת ב F שהיא רישא של π, אזי מספר הזוגות הוא לכל היותר כמספר התמורות, שהוא $n!$.

בהנתן S ־ נשאל עבור כמה תמורות π, S מהווה רישא? נניח ש $|S| = k$, אז התשובה $k! \cdot (n-k)!$, כי הרישא של התמורה מוגדרת, ורק נבחר פרמוטציה עליה, וכעת הסיפא שלה (המכיל $n-k$ איברים) ניתן לסידור בכל דרך שנרצה. ואז מספר הזוגות הכולל הוא לכל היותר: $\sum_{k=1}^{n} a_k k! \cdot (n-k)!$

וכעת קיבלנו מהנ"ל את אי השוויון:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k! \cdot (n-k)! \leq n!$$

(זהו אי שוויון LYM) ולכן:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k k! \cdot (n-k)!}{n!} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

כיוון שהמקדם הבינומי האמצעי הוא הגדול ביותר, מהצבתו במכנה רק נקטין את אגף שמאל ולכן:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq 1$$

ולכן:

$$|F| = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

כנדרש. ■

5 שיעור 5

הוכחנו כי אם a_k מספר הקבוצות ב F בגודל k אז $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$ ע"י ספירת זוגות של תמורות וקבוצות שהן רישא שלהן.

נשתמש בשיטה דומה (של ספירת זוגות) להוכחת משפט ארדש־קו־רדו (1960):

משפט 5.1 (ארדש, קו, רדו, 1960) תהי $F \subseteq \binom{[n]}{k}$ ונניח $2k \leq n$
נניח גם שלכל $S, T \in F$ מתקיים $S \cap T \neq \emptyset$
אזי $|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$

(מדוע דרשנו $2k \leq n$? שכן אם $n < 2k$ אזי כל שתי קבוצות בגודל k נחתכות לא טריוויאלית משובך יונים, ואפשר לבחור את כל הקבוצות בגודל k)

למצוא קבוצה ספציפית זה קל ־ בוחרים איבר שיהיה בחיתוך של כולן, ואז עבור כל קבוצה נותר לבחור $k-1$ איברים מתוך $n-1$, ומהמקדם הבינומי המתאים מתקבל הגודל הרצוי. **הוכחה:** 1. נביט בתמורות מעגליות (=ציקליות, כלומר מושיבים את 1 במקום קבוע בשולחן עגול, ומתבוננים בכל הפרמוטציות שמתקבלות מהחלפת מקומות האיברים האחרים). יש $(n-1)!$ תמורות שכאלה.

2. נגיד שקבוצה S היא קטע ביחס לתמורה המעגלית π אם היא תופסת קבוצה
דוגמא: אם ניקח את התמורה המעגלית (1354672), אזי $\{135\}$וגם $\{456\}$ הן קטעים, אך $\{145\}$ איננו קטע.
כמה קטעים באורך k יש לתמורה ספציפית? אם $0 < k < n$ אז יש n קטעים באורך k.

3. בתנאי המשפט נספור זוגות (π, S) כך ש π תמורה מעגלית ו S קטע ביחס ל π, ו $S \in F$.
־ לכל תמורה π, כמה Sים לכל היותר הם קטע ב π?
טענה: לכל היותר k.

ניקח S קטע בתמורה מעגלית, אזי נוכל להתחיל בקטע ש"נכנס" אליו משמאל, למשל עבור הקטע $1,2,3,4,5$ לקחת (נניח $n=11$) $8,9,10,11,1$ ואז את $9,10,11,1,2$ וכן הלאה עד $5,6,7,8,9$. קל להתרשם שבאופן כללי יש $2k-1$ קטעים כאלה שאחד מהם הוא S עצמה. (לי זה מזכיר קונבולוציה בין שתי סדרות בדידות באורך k). עם זאת - נבחין כי נוכל לבחור זוגות של קטעים זרים מתוך קבוצת הקטעים הנ"ל (מלבד S עצמה) שהם זרים זה לזה. בכל זוג יש קטע שהאיבר הימני ביותר שלו הוא i וקטע שהאיבר השמאלי ביותר שלו הוא $i+1$, בדוגמה שלעיל $9,10,11,1,2$ ו $3,4,5,6,7$ הם זוג שכזה. כיוון שדרשנו שכל שני קטעים יחתכו - אזי מכל זוג שכזה נוכל לקחת רק נציג אחד. יש $k-1$ זוגות שכאלו ועוד S עצמה, ולכן סך הכל אי אפשר לקחת יותר מ k קטעים באורך k באותה תמורה, שתהיה להם התכונה המבוקשת (שכל שניים יחתכו לא טריוויאלית).

ולכן מספר הזוגות (π, S) כנ"ל הוא לכל היותר מספר התמורות המעגליות בכלל כפול k, מספר התמורות המעגליות, כפי שסיכמנו הוא $(n-1)!$ ולכן נקבל $k\cdot(n-1)!$

- נקבע את S, בכמה תמורות מעגליות S קטע?

יש $k!$ אפשרויות לסדר את האיברים ש S "מכסה: ו $(n-k)!$ לסדר את שאר האיברים.

מצירוף שתי המסקנות קיבלנו שמספר הזוגות הוא בדיוק

$$|F|\cdot k!\cdot(n-k)!$$

והוא קטן מ

$$(n-1)!\cdot k$$

ומצירוף אלו קיבלנו כי:

$$|F|\leq\frac{(n-1)!\cdot k}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n-1}{k-1}$$

כנדרש. ■

6 שיעור 6

6.1 המשך משפט ארדש קו רדו

האם דוגמאות מהצורה $\left\{S\in\binom{[n]}{k}|1\in S\right\}$ הן הדוגמאות היחידות למשפחה F שהיא נחתכת (דהיינו כל שתי קבוצות בה נחתכות לא טריוויאלית)?

תשובה: כאשר $n>2k$ התשובה היא כן, כאשר $n=2k$ אז לא. למשל:

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{2k-1}{k-1}=\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$$

כלומר - אם גודל הקבוצה הכולל הוא $2k$, אז אפשר לחלק את הקבוצות בגודל k לזוגות של קבוצה ומשלימתה, וכעת אפשר לקבל משפחה כנדרש ע"י בחירה של נציג מכל זוג, וקל לראות שנובע מכך שהמשפחה היא נחתכת.

מה קורה אם נדרוש במקום ש F תהיה נחתכת כמקודם, שכל $S,T\in F$ מקיימים $|S\cap T|\geq 2$?

ארדש, קו ורדו שאלו, אך לא ידעו להשיב על כך (עבור r כלשהו).

אפשר לקחת בתור דוגמה טבעית את: $\left\{S\in\binom{[n]}{k}|1,2\in S\right\}$, (כאשר ברור שאם $n<2k-1$ אז כל שתי קבוצות בגודל k מקיימות זאת).

מהרעיון הזה, באופן דומה לרעיון הקודם, נקבל $|F|=\binom{n-2}{k-2}$ אבל ארדש, קו ורדו שמו לב שאפשר לבחור, עבור $n=8$ ו $k=4$:

$$G=\{S:|S\cap\{1,2,3,4\}|\geq 3\}$$

כמה קבוצות כאלו יש? יש 4 דרכים לבחור איברים מתוך $\{1,2,3,4\}$ ויש 4 דרכים לבחור את האיבר הנוסף מתוך $\{5,6,7,8\}$, ומלבד זאת יש את $\{1,2,3,4\}$ עצמה, סך הכל - 17 אפשרויות.

אז השאלה הזו קצת יותר מסובכת, והיא נפתרה רק שנים מאוחר יותר.

6.2 .

נניח שיש משפחה של קבוצות $F \subseteq 2^{[n]}$ כך שלכל $S, T \in F$ מתקיים $|S \cap T| = 1$.

באופן פשוט אפשר לקחת את הזוגות $\{1,n\}, ..., \{1,3\}, \{1,2\}$, להוסיף להם את $\{1\}$או את $\{2,3,...,n\}$ ולקבל $|F| = n$.

אפשר גם ללכת באופן הבא:

$$\{1,2,6\}, \{1,3,5\}, \{2,3,4\}, \{1,4,7\}, \{2,5,6\}, \{3,6,7\}, \{2,5,6\}$$

ואז עבור $n = 7$ אנחנו מקבלים שוב $|F| = n$.

משפט 6.1 ארדש דברוין פישר

אם F משפחה של קבוצות מתוך $[n]$ וכל שתי קבוצות במשפחה נחתכות בדיוק על איבר 1, אז $|F| \leq n$.

מסקנה 6.2 m נקודות במישור שאינן כולן על ישר אחד - קובעות לפחות m ישרים.

נניח שהנקודות הן $p_1, ..., p_m$ והישרים $l_1, ..., l_n$

ואנחנו יודעים ש $n > 1$ וכל ישר מכיל 2 נקודות או יותר.

נבחר קבוצות $S_1, S_2, ..., S_m$ מתוך $[n]$, כך ש $S_j = \{i \,|\, p_j \in l_i\}$

כלומר כל קבוצה מתאימה לנקודה ומכילה את האינדקסים של הישרים שהנקודה עליהם.

כיוון שדרך שתי נקודות עובר רק קו ישר אחד, אז כל שתי קבוצות נחתכות בדיוק על איבר 1.

כלומר לכל i, j מתקיים $|S_j \cap S_i| = 1$.

ממשפט ארדש דברוין נקבל:

$$m \leq n$$

ולכן מספר הישרים הוא לפחות כמספר הנקודות, כנטען.

משפט 6.3 גלאי סילבסטר: בהנתן nנקודות במישור שאינן כולן על ישר אחד, יש ישר שמכיל בדיוק 2 מהנקודות.

הערה 6.4 זה לא בהכרח נכון אם לוקחים רק את האקסיומה הראשונה של אוקלידס, וצריך הנחות יותר חזקות, כיוון שניתן לקחת מישור פרוייקטיבי שמקיים את האקסיומה הזו, אך לא אחרות.

מדוע משפט גלאי סילבסאר גורר את ארדש דברוין פישר?

מסקנה באינדוקציה על n, קל להראות זאת עבור $n = 3$.

כעת בהנתן n נקודות, ניקח ישר המכיל בדיוק 2 מהן, נשמיט אחת מהן, כעל פי הנחת האינדוקציה יש לפחות $n - 1$ ישרים שנקבעים, וכעת בתוספת הנקודה שהשמטנו - מתקבל הישר בן שתי הנקודות שהתחלנו איתו, וכעת מספר הישרים לפחות n כנדרש.

(יש מקרה שבו כל הקודקודים מלבד זה שהשמטנו נמצאים על ישר אחד, ואז לא ניתן להשתמש במשפט גלאי סילבסטר, אפשר לטפל בזה מכיוון שבמקום להשמיט את הקודקוד שהשמטנו על הישר בן שתי הנקודות, נשמיט את השני.) **הוכחה:** (גלאי סילבסטר)

נביט בכל הזוגות (p, l) p נקודה מתוך n הנקודות ו l ישר שנקבע ע"י הנקודות, $p \notin l$, ומתוכם נבחר את הזוג שבו המרחק בין p ו l מינימלי. העובדה שקבוצת הזוגות אינה ריקה נובעת מהנחות המשפט. אם היו 3 נקודות או יותר על הישר בזוג הנבחר, אזי ניתן להוריד אנך מ p ל l, כעת באחד הצדדים של האנך יש בהכרח 2 נקודות לפחות. נמתח ישר מ p אל הנקודה הרחוקה יותר ונוריד אליו אנך מהנקודה הקרובה, נבחין כי אנך זה קצר יותר מהאנך שהורדנו מ p ל l, בסתירה למינימליות המרחק מ p ל l. ■

הוכחה: (ארדש דברוין פישר) .

עבור הקבוצות $S_1, S_2, ..., S_m \subset [n]$ נחליף כל קבוצה בוקטור של 0 ו 1 באורך n כך שבוקטור v^j המתאים ל S_j יהיה 1 במקום ה k אם $k \in S_j$ ו 0 אחרת.

טענה: אם כל שתי קבוצות נחתכות בדיוק על איבר אחד, אזי הוקטורים הללו בלתי תלויים לינארית. נסיק מכך ש $m \leq n$ שכן מספר הוקטורים הבת"ל המקסימלי במרחב ממימד n הוא כמובן n.

נניח:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v^i = 0$$

ונראה שהמקדמים מתאפסים.
כמובן:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v^k, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v^j \right\rangle = 0$$

וכיוון שמכפלה פנימית לינארית בשני המשתנים מתקיים שהנ"ל שווה ל:

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \alpha_k \left\langle v^j, v^k \right\rangle$$

כיוון ש v^j מסכים עם v^k בדיוק על קואורדינטה אחת לכל $k \neq j$ נקבל כי אז $\left\langle v^k, v^j \right\rangle = 1$
אם $v^j = v^k$ אז $\left\langle v^j, v^k \right\rangle = \left| v^j \right|$
ולכן נוכל לרשום סכום זה כך:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\langle v^j, v^j \right\rangle + \sum_{j \neq k} \alpha_j \alpha_k \left\langle v^j, v^k \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_i^2 |S_j| + \sum_{j \neq k} \alpha_i \alpha_j$$

כעת נעביר מכל מחובר בסכום השמאלי α_j^2 אחד למחובר הימני ונקבל:

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 (|S_j| - 1) + \sum_{1 \leq j,k \leq m} \alpha_j \alpha_k$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^2 (|S_j| - 1) + \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \right)^2$$

נניח כי אין יחידון במשפחה (שכן אז זה מכתיב גודל n ממילא, שכן כולם צריכים להחתך עם איבר אחד), ואז תמיד $|S_j| - 1$ הוא חיובי, וכל שאר האיברים לעיל הם ריבועים, וכיוון שהכל =0 נקבל כי כל המקדמים α_i הן אפס, ולכן הוקטורים בלתי תלויים כנדרש.
מכאן נובע, לפי הערה קודמת ש $m \leq n$ ולכן המשפט. ■

6.3 מישור פרוייקטיבי סופי

הגדרה 6.5 מישור פרוייקטיבי סופי זו מערכת של "נקודות" $p_1, ..., p_n$ ו"ישרים" $l_1, ..., l_m$ שמקיימת את האקסיומות הבאות:

1. כל שתי נקודות שונות מוכלות בישר יחיד
2. לכל שני ישרים שונים יש נקודה אחת ויחידה שמוכלת בשניהם
3. לכל ישר יש 2 נקודות לפחות שאינן על הישר.

אפשר לראות את הישרים כתתי־קבוצות של קבוצת הנקודות.

יהי l ישר ונניח שהוא מכיל $q+1$ נקודות, אזי כל נקודה נמצאת ב $q+1$ ישרים בדיוק, כל ישר מכיל $q+1$ נקודות בדיוק, ומספר הנקודות הכולל הוא q^2+q+1 וזה גם מספר הישרים הכולל.

תהי p נקודה שאינה על הישר, אזי היא נמצאת על לפחות $q+1$ ישרים, שכן כל נקודה על הישר l יוצרת ישר שונה עם p. בנוסף - כל ישר אחר שיעבור דרך p מאקסיומה 2 נחתך עם l בנקודה כלשהי, ולכן כבר מנינו אותו במניה הראשונה של $q+1$ הישרים.

נבחין כי כל האקסיומות הן סימטריות במובן זה שאפשר להחליף את המילה "ישר" ב"נקודה" ולהיפך ואת יחס ההכלה, ולקבל טענה אמיתית (זו תכונה של האקסיומות). ולכן גם הוכחה דומה לקודמת תעבוד כדי להראות שלכל נקודה שמוכלת ב $q+1$ ישרים, אז כל ישר l שאינו מכיל את p - מכיל $q+1$ נקודות.

נסכם זאת l ישר עם $q+1$ נקודות, כל נקודה שאינה על l מוכלת ב $q+1$ ישרים.

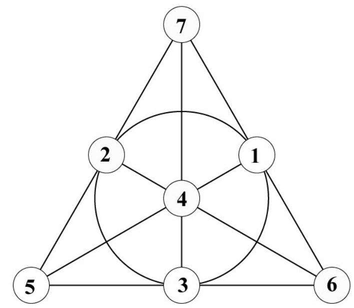
לכל p נקודה שאינה על l, לכל ישר l' שאינו מכיל את p יש על l' לפחות $q+1$ נקודות.

התחלנו עם ישר, מובטח מהאקסיומות שיש 2 נקודות לפחות שאינן על הישר, ולכן הוכחנו את הטענה לכל הישרים פרט אולי לישר אחד (שמכיל את כל הנקודות שאינן על l).

כעת אפשר להמשיך ולהראות עבור כל הישרים ולהרחיב עבור כל הנקודות (נפנופי ידיים פראיים בשלב זה).

ומקבלים מכך שמספר הנקודות (וגם מספר הישרים) הוא q^2+q+1.

דוגמא - מישור פאנו:



7 שיעור 7

עובדה: אפשר לבנות מישורים פרוייקטיבים לכל q שהוא חזקה של ראשוני בעזרת מרחבים וקטוריים מעל שדות סופיים.

אנחנו מכירים שדות סופיים מסדר ראשוני, ומסדרים שהם חזקות של ראשוניים (ע"י חוג מנה של חוג פולינומים).

בנוסף - כל שדה סופי הוא מגודל שהוא חזקה של ראשוני.

נעשה שימוש בזה על מנת לבנות מישור פרוייקטיבי.

7.1 בניה של מישור פרוייקטיבי סופי מסדר חזקה של ראשוני

יהי $\mathbb{F}_q$ שדה, ניקח $V=\mathbb{F}_q^3$ מרחב וקטורי ממימד 3 .

נקודה במישור הפרוייקטיבי היא תת מרחב ממימד 1 .

כל ישר במישור הפרוייקטיבי הוא תת מרחב ממימד 2.

אלו מישורים פפוסיאניים

נבדוק את קיום האקסיומות:

1. אכן כל שני מרחבים שונים ממימד 1 פורשים מ"ו ממימד 2, ולכן כל שני מרחבים שונים מגדירים מ"ו יחיד.

2. בהנתן שני ת"מ שונים ממימד 2, שהם ת"מ של V- חיתוכם הוא ממימד 1.

3. ב V יש q^3 וקטורים, בכל ת"מ ממימד 2 יש q^2 וקטורים, מחוץ לו יש q^3-q^2 וקטורים. על כל נקודה (=ת"מ 1 מימדי) יש $q-1$ נקודות שאינן 0 , כלומר סך הכל מחוץ לת"מ ממימד 2 יש $\frac{q^3-q^2}{q-1}=q^2$ נקודות.

בעיקרון לא מוכרחים שדה, אפשר גם להתבסס על חוג חילוק כדי לבנות מישור פרוייקטיבי, אבל יש משפט שאומר שכל חוג חילוק סופי הוא שדה, ולכן אי אפשר בעצם להחליש את דרישותינו.

הערה 7.1 נניח P מישור פרויקטיבי עם $n = q^2 + q + 1$ נקודות אזי:

1. מספר החילות של נקודות וישרים הוא $\left(q^2 + q + 1\right)(q + 1) = q^3 + 2q^2 + 2q + 1$
כאשר זה בערך $n^{\frac{2}{3}}$, כאשר q גדול. וזה יותר ממה שמובטח ע"י משפט טרוטר־סמרדי (שמדבר על חסם של $n^{\frac{4}{3}}$).
2. יש גם מישורים פרויקטיביים אחרים (משפט דזרג מבחין בין מישורים פרויקטיביים שבנויים מעל שדה ובין כאלו שאינם). לא ידועים מישורים פרויקטיביים מסדר ראשוני שאינם מעל שדה.
3. לא ידוע שום מישור פרויקטיבי מסדר שאינו חזקה של ראשוני.

משפט 7.2 בהנתן n נקודות ו m קטעים ביניהן כך ששום קטע לא מכיל את חברו וכך שכל שני קטעים נחתכים, אז $m \leq n$.

הוכחה: בעזרת כינים. חושבים על הנקודות בתור קודקודים, ועל הקטעים שביניהם בתור שערות.
כל כינה שנמצאת על קודקוד "רוצה" להטיל ביצה במרחק קטן מהקודקוד על השערה שאליה הקודקוד מחובר. כל הכינים ימניות קיצוניות במובן זה שלפני הטלת ביצה ־ היא בודקת האם 180 מעלות מימין לשערה אין אף שערה אחרת.

א. לכל קודקוד נותנים כינה
ב. כל כינה מטילה ביצים
ג. אוספים את הכינים.

נבחין כי כל כינה תטיל ביצה אחת לכל היותר.
נניח בשלילה ש $m > n$ ואז תהיה שערה שלא הוטלה עליה אף ביצה. נתבונן בשערה זו ונשאל את עצמנו ־ מדוע לא הוטלה שם ביצה? מקודקוד אחד שלה (ה"ימני") יצאה כנראה שערה שיוצאת ב $180 > \alpha$ מעלות ימינה ממנה, מהקודקוד השני יוצאת שערה ב $180 > \beta$ מעלות שמאלה, ושתי שערות אלו הן קטעים זרים. ■

8 שיעור 8

נזכיר שלפי משפט שפרנר אם $F \subseteq 2^{[n]}$ ולכל $S, T \in F$ מתקיים $S \nsubseteq T$, F במקרה כזה תהיה אנטי שרשרת (הגדרה בהמשך) מקסימלית.

הגדרה 8.1 קבוצה סדורה חלקית (קס"ח) היא זוג $(X, \leq)$ כך ש $\leq$יחס סדר חלקי על X (רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי).

נבחין כי $\left(2^{[n]}, \subseteq\right)$ קס"ח.

הגדרה 8.2 אם $(X, \leq)$ קס"ח אז נאמר ש $F \subseteq X$ אנטי־שרשרת אם לכל $s, t \in F$ מתקיים $s \nleq t$

.

הגדרה 8.3 $C \subseteq X$ היא שרשרת אם לכל $s, t \in C$ מתקיים ש $s \leq t$ או $t \leq s$

קל לראות ששרשרת מקסימלית ב $\left(2^{[n]}, \subseteq\right)$היא באורך $n + 1$ ע"י:

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset ... \subset \{1, 2, ..., n\}$$

קל לוודא כי אם A אנטי שרשרת ו C שרשרת אז $|A \cap C| \leq 1$

הגדרה 8.4 תהי X סופית, נגדיר $a(X)$ גודל האנטי שרשרת המקסימלית ב X, ובאופן דומה $c(X)$גודל השרשרת המקסימלית ב X.

8.1 משפט דילוורת'

משפט 8.5 (דילוורת') אם X קס"ח סופית אז אפשר לכסות את X ב $a\left(X\right)$ שרשראות.

מכיוון שב X יש אנטי שרשרת בגודל $a\left(X\right)$, וכל שרשרת נחתכת איתה על איבר אחד לכל היותר, אז ברור שלא ניתן לכסות את X בפחות מ $a\left(X\right)$ שרשראות.
באופן דואלי אפשר לטעון:

משפט 8.6 אם X קס"ח סופית, אז אפשר לכסות את X ב $c\left(X\right)$ אנטי שרשראות.

הוכחה: ניקח את A_1 להיות כל האיברים המינימליים ב X, כלומר $Min\,X=\left\{ x\in X:\,\neg\exists y\in X\,s.t.\,y<x\right\}$
נבחין כי ממינימליות נובע שכל $Min\,X$ אם X קס"ח, היא אנטי־שרשרת.
נגדיר:

$$A_1=Min\,X\quad X_1=X\setminus A_1$$

$$A_2=Min\,X_1\quad X_2=X_1\setminus A_2$$

$$...$$

$$A_c=Min\,X_{c-1}\quad X_c=X_{c-1}\setminus A_c$$

יש כאן c אנטי שרשראות (כי כולן הוגדרו כמינימום של קבוצות)
טענה: $X_c=\emptyset$ (כלומר הכיסוי שלם).
נניח בשלילה שיש $z\in X_c$, ומכך נובע ש $z\notin Min\,X_{c-1}$ ולכן יש $z_2\in Min\,X_{c-1}$ כך ש $z_2<z$ ואז $z_2\in X_{c-1}$ בגלל ש $z_2\notin Min\,X_{c-2}$ולכן יש $z_3\in X_{c-2}$ כך ש $z_3<z_2$ וכך הלאה נקבל:

$$\underbrace{z}_{\in X_c}>\underbrace{z_2}_{\in X_{c-1}}>\underbrace{z_3}_{\in X_{c-2}}>...>\underbrace{z_c}_{\in X}$$

ולכן מצאנו שרשרת באורך $c+1$, בסתירה לכך ש $c\left(X\right)=c$. ■

. **הוכחה:** (דילוורת')
נוכיח באינדוקציה על גודל הקבוצה.
תהי X קס"ח, ונגדיר כמקודם $Min\,X=\left\{ x\in X:\,\neg\exists y\in X\,s.t.\,y<x\right\}$
נגדיר גם: $Max\,X=\left\{ x\in X:\,\neg\exists y\in X\,s.t.\,y>x\right\}$
המינימום והמקסימום הם אנטי־שרשראות.
יתכן שיש אנטי שרשרת מקסימלית שונה משני אלו, ויתכן שאין, נטפל בשני המקרים הללו להלן ־
אם אין (מקרה א'):
אז כל אנטי שרשרת שאיננה $Min\,X$ או $Max\,X$, גודלה קטן ממש מ $a\left(X\right)$.
במקרה כזה נבחר $x\in Min\,X$, $y\in Max\,X$ כך ש $x\leq y$.
מדוע זה אפשרי? לכל איבר בקס"ח סופית יש איבר בקב' המקסימום שהוא גדול או שווה לו (מדוע? אם אין גדול ממש ־ אז האיבר עצמו מקסימלי, והוא גדול שווה מעצמו...) ובפרט זה נכון לכל איבר בקב' המינימום. (יתכן אפילו ש $x=y$)
כעת נסיר את השרשרת $C_1=\left\{ x,y\right\}$, ומכיוון שהמינימום והמקסימום קטנו שניהם באיבר אחד, אזי כעת השרשרת המקסימלית היא בגודל $a\left(X\right)-1$. מהנחת האינדוקציה ניתן לכסות ע"י $a\left(X\right)-1$ שרשראות. נוסיף לאוסף זה את C_1 לכיסוי ונקבל כיסוי של X ע"י $a\left(X\right)$שרשראות.
אם יש (מקרה ב'):
נניח שיש אנטי שרשרת $A\subseteq X$ מקסימלית (שגודלה $a\left(X\right)$), שאיננה $Min\,X$ ואיננה $Max\,X$. הרעיון יהיה לחלק את X לשתי קבוצות קטנות יותר ־ זו ש"מעל" A וזו ש"מתחת" ל A ־ ולהפעיל על שתיהן את הנחת האינדוקציה.

נגדיר:

$$X^{+}=\{x\in X:\exists a\in A\,s.t.\,a\leq x\}$$

$$X^{-}=\{x\in X:\exists a\in A\,s.t.\,x\leq a\}$$

טענה 1:
$X^{+}\neq X$ וגם $X^{-}\neq X$
הוכחה:
נניח $X=X^{+}$ ואז כיוון שלכל $x\in X$ יש $a\in A$ כך ש $a\leq x$, נטען ש $A\subseteq Min\,X$. מדוע? אחרת יש $b\in A$ כך ש $b\notin Min\,X$, כלומר יש $z\in X$ כך ש $z<b$ ואז $b>a$ בסתירה.
כמו כן $X=X^{-}\Rightarrow A\subseteq Max\,X$
ומכיוון ש A מקסימלית ־ אז היא ממש שתיהן, בסתירה להנחתנו, שהיא שונה מכך.
טענה 2:
$X^{+}\cup X^{-}=X$
הוכחה:
נניח בשלילה שי $z\in X$ כך ש $z\notin X^{+}\cup X^{-}$ אז zאינו גדול או שווה משום איבר ב A, ו z אינו קטן או שווה לשום איבר ב A, ולכן $A\cup\{z\}$ אנטי שרשרת, בסתירה למקסימליות.
טענה 3:
$X^{+}\cap X^{-}=A$
הוכחה:
כי אם $x\in A$ אז $x\leq x$ ולכן $x\in X^{+}$ וגם $x\in X^{-}$
אם $z\notin A$ מדוע לא יתכן ש $z\in X^{+}\cap X^{-}$? כי אז קיים $a\in A$ כך ש $z>a$ (גדול ממש כי $z\notin A$ ולכן לא שווה ממש ל a)
מאותו נימוק קיים $b\in A$ כך ש $b>z$ ומטרנזיטיביות נובע מכך $b>a$, בסתירה להיות A אנטי שרשרת.
$a\left(X^{+}\right)=a\left(X\right)=a\left(X^{-}\right)$ שכן A אנטי שרשרת מקסימלית ב X, והשאר הן תתי קבוצות של X.
נסמן $A=\{a_{1},...,a_{m}\}$ ו $a\left(x\right)=m$.
לפי הנחת האינדוקציה, מכיוון ש $|X^{+}|<|X|$ אז אפשר לכתוב:

$$X^{+}=C_{1}^{+}\cup C_{2}^{+}\cup...\cup C_{m}^{+}$$

כך ש C_{i}^{+} שרשרת לכל i. בה"כ נניח $a_{i}\in C_{i}^{+}$ (כל שרשרת נחתכת בנקודה אחת בדיוק עם A, ולכן יש חיתוך יחיד, ובה"כ הכוונה לכך שגם האינדקסים מתאימים).
מנימוק דומה ניתן לכתוב את X^{-} כאיחוד של m שרשראות:

$$X^{+}=C_{1}^{-}\cup C_{2}^{-}\cup...\cup C_{m}^{-}$$

ושוב נניח בה"כ ש $a_{i}\in C_{i}^{-}$.
נגדיר:

$$C_{i}=C_{i}^{-}\cup C_{i}^{+}$$

ברור ש

$$X=C_{1}\cup...\cup C_{m}$$

מטענה 2.
נותר להראות ש C_{i} היא שרשרת.
טענה ־ a_{i}איבר מקסימלי ב C_{i}^{-} ומינימלי ב C_{i}^{+}.
הוכחה: אם $a_{i}\neq x\in C_{i}^{-}$ אז או ש $x<a_{i}$ (ואז אכן a_{i} מקסימלי) או $a_{i}<x$, כיוון שמדובר בשרשרת, היות ש $x\in X^{-}$ אז יש $b\in A$ כך ש $x\leq b$, ומטרנזיטיביות נקבל $a_{i}<b$ ושניהם ב A בסתירה להיותה אנטי שרשרת.

משיקולים דומים a_i איבר מינימלי ב C_i^+, ולכן לכל שני איברים ב $x \neq y \in C_i$ מתקיים שאו ששניהם מוכלים באחת מהשרשראות C_i^+, C_i^- ואז ברור שהם מקיימים יחס ביניהם, ואחרת בה"כ - $x \in C_i^-$ ו $y \in C_i^+$ משימוש בטענה לעיל מקבלים $x < a_i < y$ ולכן מטרנזיטיביות x, y מקיימים יחס כנדרש ואכן C שרשרת והוכחת המשפט הושלמה. ■

8.2 גרפים מושלמים

יהי G גרף.

$c(G)$ - גודל תת גרף שלם מקסימלי (Clique), מספר צביעה $\chi(G)$ הוא מספר הצבעים המינימלי הדרוש כדי לצבוע את קודקודיו כך ששכנים אינם צבועים באותו צבע.

באופן כללי $\chi(G) \geq c(G)$.

הגדרה 8.7 גרף G יקרא מושלם אם לכל תת גרף מושרה H מתקיים $\chi(H) = c(H)$.

תהי X קס"ח.

הגדרה 8.8 גרף ההשוואה $G = \langle X, E \rangle$ הוא גרף כך ש $x, y \in E$ אם $x < y$ או $y < x$.

.

הגדרה 8.9 גרף אי ההשוואה $G' = \langle X, E' \rangle$ מקיים $x, y \in E$ אם $x \not< y$ וגם $y \not< x$.

(כמובן G' הוא גרף משלים של G)

מהו $c(G)$ כאשר G גרף השוואה?

$c(X)$ הוא גודל השרשרת המקסימלית, תת גרף שלם של G מתאים לשרשרת ב X.

צביעה של G היא חלוקה של X לאנטי שרשראות.

המשפט הקל בנוסח דילוורת' אומר לפיכך:

$$\chi(G) = c(G)$$

זה נכון גם לכל תתי הגרפים המושרים, שכן גם הם קבוצות סדורות חלקיות.

מהמשפט הקל נקבל כי גרף ההשוואה הוא גרף מושלם.

$c(G') = a(X)$ הוא גודל האנטי שרשרת המקסימלית, $\chi(G')$ הוא מספר השרשראות המינימלי הנדרש כדי לכסות את G'. ומשפט דילוורת' נותן לנו $\chi(G) = c(G') = a(X)$ וזה נכון לכל תת גרף מושרה, ולכן G' הוא גרף מושלם גם כן.

מכאן - משפט דילוורת' ניתן לניסוח כמשפט על גרפי השוואה וגרפי אי השוואה.

אפשר לשאול לפיכך האם תמיד השלמה של גרף מושלם תיתן גרף מושלם? זו היתה השערת הגרף המושלם.

בשנות השבעים לובאס הוכיח שאכן כך הוא!

דוגמא לגרף בלתי מושלם - מחומש, וכך גם כל מעגל אי־זוגי גדול מחמש, שכן הגרף השלם המקסימלי שהוא יכיל יהיה מגודל 2, ועם זאת לא ניתן לצבוע מעגלים אי זוגיים בשני צבעים. גם המשלים של זה הוא גרף בלתי מושלם.

לכן היתה השערה שגרף הוא מושלם אם"ם הוא אינו מכיל תת גרף מושרה שהוא מעגל אי זוגי או משלים של מעגל אי־זוגי, וזה אכן הוכח ב 2003.

כזכור - משפט שפרנר אמר לנו כי גודל האנטי־שרשרת המקסימלית ב $2^{[n]}$ הוא $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

מסקנה 8.10 ממשפט דילוורת' ומשפט שפרנר - אפשר לכסות את $2^{[n]}$ על ידי $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ שרשראות.

אם היינו מציגים שרשראות כנ"ל, היינו מקבלים הוכחה למשפט שפרנר מיד.

ואז עולה השאלה - האם אפשר להוכיח את משפט שפרנר ע"י חלוקה לשרשראות כנ"ל?

עבור $n = 1$ אפשר את $\emptyset, \{1\}$

עבור $n = 2$ אפשר את $\{1\}$ כשרשרת אחת ואת $\emptyset, \{2\}, \{1,2\}$ כשרשרת שניה.

אפשר גם את $n = 3$.

תרגילון לבית - איך אפשר לחלק את $2^{[n]}$ לשרשראות כנ"ל?

9 שיעור 9

9.1 הוכחת משפט שפרנר בעזרת כיסוי ע"י שרשראות

ניקח $x_1,...,x_n$ ממשיים כך ש $x_i \geq 1$
נביט בסכומים

$$\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + ... + \varepsilon_n x_n$$

כאשר $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$
אפשר לבחור סדרה של אפסילונים ב 2^nדרכים, ונשאלה כמה לכל היותר מבין הסדרות הללו יתנו סכום שנמצא בקטע $(-1,1)$.
ברור שאם ה $x_1,...,x_n$ מתפרעים מאד - אז לא בטוח שיהיה אפילו אחד.
אם $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ ו n אי־זוגי - אזי שום סכום לא נופל בקטע $(-1,1)$, אבל אם n זוגי - אז הסכומים הטובים יהיו בדיוק 0 ויתאימו לכל הבחירות של מספר שווה של 0 ו 1, וזהו כמובן $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.

משפט 9.1 מספר הסכומים שנמצאים ב $(-1,1)$ קטן או שווה ל $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.

הוכחה: כל סכום מתאים לתת קבוצה (ניקח את האינדקסים i כך ש $\varepsilon_i = 1$).
נטען כי לא יתכן ששני סכומים שמתאימים ל S,T כך ש $S \subsetneq T$ שניהם בקטע $(-1,1)$.
מדוע? מכיוון שהמעבר מ S ל T משמעו שהחלפנו חלק מאפסילונים שהיו -1 ב 1, ולכן הגדלנו לפחות ב 2 את הסכום הכולל - ולכן לו התחלנו עם סכום שנמצא ב $(-1,1)$ - כעת יצאנו מתחום זה.
ולכן קבוצת הסכומים שנמצאים בתחום המבוקש מתאימה לאנטי־שרשרת, וכמסקנה ממשפט שפרנר נקבל את המבוקש. ■

הגדרה 9.2 נקבע n, ונתבונן ב $2^{[n]}$. שרשרת $S_i \subseteq S_{i+1} \subseteq ... \subseteq S_{n-i}$ נקראת רוויה וסימטרית אם $|S_k| = k$ לכל $i \leq k \leq n-i$

שרשרת C היא רוויה אם כאשר $S,T \in C$ מקיימים $S \subseteq T$ ו $|T| - |S| > 1$ אז קיים $R \in C$ כך ש $S \subset R \subset T$ ו $|R| = |S| + 1$.
מושג הרוויה והסימטריה משמעו שהקבוצות תופסות "רדיוס" מסויים סביב $\frac{n}{2}$.

משפט 9.3 לכל n קיימת חלוקה של $2^{[n]}$ לשרשראות רוויות סימטריות.

הוכחה: עבור $n = 1$ אפשר לכסות ע"י $\{\emptyset, \{1\}\}$ ו $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor = 0$ והצגנו שרשרת יחידה ואכן $\binom{1}{0} = 1$.
עבור $n = 2$ נוכל לבחור בשרשראות

$$\{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\{\{2\}, \{1,2\}\}$$

נבחין כי השרשרת השניה התקבלה מהוספה של האיבר 2 לאיברי השרשרת שלפניה.
השרשראות הללו אכן רוויות, אך אינן סימטריות, וכדי לתקן זאת - נעביר את הקבוצה $\{1,2\}$ לשרשרת הראשונה ואז נקבל שתי שרשראות סימטריות ורוויות.
נבנה עבור $n = 3$ בדרך דומה ע"י הוספת האיבר 3 לאיברי השרשראות הקודמות ונקבל בסך הכל:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\{2\}$$

$$\{\{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\{\{2,3\}\}$$

נעשה שימוש באותו כלל ־ נעביר את האיבר המקסימלי $\{1,2,3\}$ ונעבירו לשרשרת הארוכה הישנה, ומהשרשרת הקצרה החדשה נעביר את האיבר לשרשרת הקצרה הישנה, ונקבל סך הכל:

$$\{\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$$

$$\{2,\{2,3\}\}$$

$$\{\{3\},\{1,3\}\}$$

באופן פורמלי ־ מעבר האינדוקציה הוא זה:
בהנתן חלוקה לשרשראות רוויות וסימטריות $C_1,C_2,...,C_m$ עבור $2^{[n]}$ נגדיר עבור $2^{[n+1]}$:

$$\forall i: C_i^0=\left\{s\in 2^{[n+1]}: s\in C_i\right\}$$
$$C_i^1=\{s\cup\{n+1\}: s\in C_i\}$$

קיבלנו $2m$ שרשראות רוויות שמכסות את $2^{[n+1]}$ אבל הן לא סימטריות.
נחליף כעת את C_i^0 ו C_i^1 בC_i^+ ו C_i^- באופן הבא:
אם $C_i=\{s_i,s_{i+1},...,s_{n-i}\}$ (זה אכן המבנה שלה מסימטריות, כלומר ־ הנחת האינדוקציה)
אז נגדיר:

$$C_i^+=C_i^0\cup\{s_{n-i}\cup\{n+1\}\}$$

$$C_i^-=\{s_i\cup\{n+1\},s_{i+1}\cup\{n+1\},...,s_{n-i-1}\cup\{n+1\}\}=C_i^1\setminus\{s_{n-i}\cup\{n+1\}\}$$

כל השרשראות C_i^+ ו C_i^- הלא ריקות הן רוויות וסימטריות ואיחודן הזר הוא $2^{[n+1]}$. ■

הוכחה: (שפרנר בהנתן המשפט לעיל) נתבונן בחלוקה כמו זו המובטחת. נבחין כי אם נסמן $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, כל שרשרת רוויה וסימטרית תמיד תכיל קבוצה מגודל זה (מרכז הרדיוס), וקבוצה אחת בלבד מגודל זה (כי זו שרשרת). כל מכיוון שזוהי חלוקה ־ אז בפרט כל קבוצה מסוג זה מוכלת בשרשרת אחת ויחידה, ולכן מספר השרשראות הרוויות הסימטריות הוא כמספר הקבוצות בגודל m שהוא $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$. ■

10 שיעור 10

נתבונן בקבוצת הוקטורים $\{-1,1\}^n$
נתעניין מה הקבוצה הגדולה ביותר שנוכל להרכיב כך שמכפלת שני איברים בתוכה (מכפלה פנימית) לא תתאפס.
מתוך כלל הוקטורים נתבונן במשפחה $G=\{(x_1,...,x_n)\in\{-1,1\}^n: x_1=1,\#i:x_i=1\, is\, even\}$ (זו הקטנה טכנית של תחום הפעולה, ואפשר בלעדיה, אבל זה קצת פחות אסתטי)
בחירת $x_1=1$ מקטין את הבחירה למחצית מכלל הוקטורים, מתוכם בחירת כל הוקטורים באורך $n-1$ שבהם מספר הקוא' החיוביות הוא זוגי, תקטין זאת בחצי ובסה"כ נקבל ש $|G|=2^{n-2}$.
$G'\subseteq G$ = כל הוקטורים שבהם יש בדיוק $\frac{n}{2}$ 1ים.
G' מתאימה לכל הקבוצות בגודל $\frac{n}{2}$ מתוך $\{1,...,n\}$
תהי $F\subseteq G'$ כלשהי המקיימת לכל $x,y\in F$ מתקיים $\sum_i x_iy_i=\langle x,y\rangle\neq 0$
באופן שקול אפשר לדרוש שאם ניקח שני איברים ב F ואת ה S,T (קבוצות) המתאימות להם, יתקיים $|S\cap T|\neq\frac{n}{4}$.

משפט 10.1 (פרנקל וילסון) אם $n=4p$ ו p ראשוני, ו $F\subseteq G$ מקיים שלכל $x,y\in F$ מתקיים $\langle x,y\rangle\neq 0$ אז:

$$|F|\leq\sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i}$$

נביט על כל הוקטורים $(x_1,...,x_n)\in G$ כך שמספר ה 1 ים קטן מ p או גדול מ $3p$
כשמביטים במכפלה הפנימית של x ו y:
נסמן ב a את מספר הקוא' שבהן ב x יש 1 וב y יש 1
נסמן ב b את מספר הקוא' שבהן ב x יש 1 וב y יש -1
נסמן ב c את מספר הקוא' שבהן ב x יש -1 וב y יש 1
נסמן ב d את מספר הקוא' שבהן ב x יש -1 וב y יש -1
ולכן:

$$a+b+c+d=n=4p$$

וגם:

$$\langle x,y\rangle=a+d-b-c$$

ולכן אם מספר ה 1 ים קטן מ p אז נובע:

$$a+b<p$$

$$a+c<p$$

$$d>2p$$

ולכן המכפלה הפנימית לא תתאפס, ובפרט - קבוצת הוקטורים ב G שמספר ה 1ים בהם קטן מ p - נקבל קבוצה חלקית לקבוצה שאנחנו רוצים, טיעון סימטרי מראה שאפשר להשתמש גם באלו שבהם יש פחות מ p פעמים -1 .
בסכום $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{p-1}$ (אם $p\leq\frac{n}{4}$) המקדם האחרון הוא המשמעותי ביותר, ולכן אסימפטוטית כל העסק מתנהג כמו $\binom{n}{\frac{n}{4}}$, שאסימפטוטית הוא $2^{nH\left(\frac{1}{4}\right)}\approx 2^{n\cdot 0.8...}$ וזהו חלק אקספוננציאלית קטן מסך הקבוצות הכולל 2^n.

למה 10.2 $x,y\in G$ אז $\langle x,y\rangle=0\,(mod\,4)$ ולכן אם ל $x,y\in G$ מתקיים $\langle x,y\rangle=0\,(mod\,p)$ אז $\langle x,y\rangle=0$

הוכחה: כזכור:

$$\langle x,y\rangle=a+d-b-c$$

כזכור $a+b+c+d=4p$ ולכן זה מתחלק ב 4.
ולכן מספיק להראות ש $4p-\langle x,y\rangle=2b+2c$ מתחלק ב 4 או ש $b+c$ מתחלק ב 2.
מספר ה 1ים ב x וב y זוגי ולכן $a+b$ זוגי ו $a+c$ זוגי וכאן $2a+b+c$ זוגי ולכן אכן $\langle x,y\rangle$ מתחלק ב 4.
ואז אם $\langle x,y\rangle=0\,(mod\,p)$ אז מזרות מתקיים $\langle x,y\rangle=0\,(mod\,4p)$ ■

כמו כן נבחין כי (חידה לילדים):

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,...(x-z)=0$$

(שכן בדרך מופיע $(x-x)$ כגורם....)
נביט כעת בפולינומים מעל השדה $\mathbb{F}_p$ במשתנים $(x_1,...,x_n)$.

לכל $y\in F=(y_1,...,y_n)$ נתאים פולינום:

$$P_y(x)=P_y(x_1,...,x_n)$$

$$P_y(x)=(\langle x,y\rangle-1)(\langle x,y\rangle-2)(\langle x,y\rangle-3)...(\langle x,y\rangle-(p-1))$$

כאשר $x_1,...,x_n$ כאן יהיו על תקן משתנים וה $y_1,...,y_n$יתקבלו מהוקטור y.
זהו אכן פולינום במשתנים הנדרשים מעל השדה.
נניח $y,z\in F$, אזי המכפלה הפנימית שלהם היא לא אפס מודולו p (מההערה הראשונה) ולכן הפולינום הנ"ל יתאפס (מתוך הטריק לילדים) שכן:

$$P_y(x)=(\langle x,y\rangle-1)(\langle x,y\rangle-2)(\langle x,y\rangle-3)...(\langle x,y\rangle-\langle x,y\rangle)...(\langle x,y\rangle-(p-1))$$

ואם $y=z$ נקבל שהדבר לא יתאפס, ובפרט מנוסחת וילסון יתקבל מכך $-1\cdot-2\cdot...\cdot-(p-1)=-1\,(mod\,p)$ כלומר:

$$P_y(z)=\begin{cases}0 & y\neq z\\ -1 & y=z\end{cases}$$

טענה 10.3 הפולינומים $\{P_y(x)\}$כאשר $y\in F$, הם בלתי תלויים ליניארית.

הוכחה: נניח:

$$\sum_{y\in F}\lambda yP_y=0$$

אז נציב $z\in F$

$$\sum_{y\in F}\lambda yP_y(z)=0$$

ומהטענה הקודמת לגבי אפיון $P_y(z)$ מתקבל מכך:

$$\lambda_zP_z(z)=-\lambda_z=0$$

ולכן λ_z לכל $z\in F$. ■

נשנה את $P_y(x)$ ל $\tilde{P}_y(x)$ לפי הכלל הבא:
כל חזקה x_i^{2k} נחליף ב 1 וכל חזקה x_i^{2k+1}נחליף ב x_i, וכעת קיבלנו פולינום לינארי בכל משתניו (המעריך של כל משתנה הוא 1 או 0)

טענה 10.4 אם $x\in\{-1,1\}^n$ אז $P_y(x)=\tilde{P}_y(x)$

הוכחה: מכיוון ש $x^{2k}=1$ ו $x^{2k+1}=x$ אם $x\in\{-1,1\}$ ■

נחליף את הטענה הקודמת שלנו (זו לגבי האי־תלות) ולכן הפולינומים $\tilde{P}_y(x)$ בת"ל כאשר $y\in F$.
ולכן יש לנו פולינומים מולטיליניארים מדרגה $p-1$ לכל היותר, שהם בלתי תלויים ליניארית, ולכן מספרם קטן או שווה למימד המרחב שבו הם חיים, כלומר הפולינומים המולטיליניאריים ב $x_1,...,x_n$ מדרגה $p-1$ לכל היותר. כל פולינום מולטילינ' מדרגה $p-1$ הוא קומב' ליניארית של מונומים מדרגה לכל היותר $p-1$, וכאלו יש $\sum_{i=1}^{p-1}\binom{n}{i}$(למשל $x_1x_2,x_1x_{16}x_9,...$)
וכיוון שלכל איבר ב F התאמנו פולינום כזה - אזי גודל F חסום ע"י גודל הבסיס - ומכאן המבוקש.

11 שיעור 11

משפט 11.1 (פרנקל וילסון) גרסה אחרת (במעט) ממה שהראינו - אם $n = 4p$ ו p ראשוני, ויש לנו $F \subseteq \{0,1\}^n$ עם התכונה שלכל $x, y \in F$ מתקיים $\langle x, y\rangle \neq 0$
אז:

$$|F| \leq 4\sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i}$$

הוכחה: בשיעור הקודם הראינו את זה בלי ה 4, משום שהצטמצמנו ל $F \subseteq G$ כאשר ב G מספר ה 1ים היה זוגי, והקוא' הראשונה היא 1. אפשר לטעון שהצימצום הזה היה מלאכותי ונוכל לשחזר את ההוכחה עם הפיכת כל אחד מהתנאים הללו בנפרד, ולכן נקבל 4 הוכחות לאותו גדול, ובסה"כ נקבל את המשפט בניסוחו הנוכחי. ■

נניח $X \subseteq S^{n-1}$, כך של X יש נפח במימד $n-1$, שהוא $\mu(X)$.
כאשר

$$S^{n-1} = \left\{(x_1, ..., x_n) : \sum x_i^2 = 1\right\}$$

נניח גם שלכל $x, y \in X$ מתקיים $\langle x, y\rangle \neq 0$

מסקנה 11.2

$$\mu(X) \leq \frac{\sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i}}{2^{n-2}}$$

הערה 11.3 יודעים שהחסם הזה לא הדוק, ההשערה היום היא שהכי טוב שאפשר לעשות הוא לבחור רצועות סביב שני קטבי הספירה, כך שהגזרה שהן מכסות היא קטנה מ $\frac{\pi}{4}$, ולכן שום שתי נקודות באותה כיפה אינן ניצבות וכך גם נכון לגבי שתי נקודות שהן בכיפות השונות.
זה נותן חסם של $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ שהוא טוב בהרבה.

מה הרעיון של המסקנה שהראינו?
נורמל את הוקטורים ב G ע"י כך שכל איבר ב G יראה כך: $\left(\frac{x_1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) : x_1, ..., x_n \in \{-1, 1\}$ ואז נקבל שהנורמה של כל וקטור ב G היא 1, ולכן אלו נקודות על הספירה.
קבוצה במידה $\mu(X)$ (המידה מנורמלת כך ששטח פני הספירה הוא 1), תוחלת החיתוך של סיבוב מקרי שלה עם G היא $\mu(X) \cdot 2^{n-2}$, ולכן מהמשפט הקומבינטורי נקבל את המבוקש.
.
הניסוח המקורי של פרנקל וילסון היה: F משפחה של קבוצות בגודל $\frac{n}{2}$ מתוך $[n]$ כך שלכל $S, T \in F$ כך ש $|S \cap T| \neq \frac{n}{4}$ אז $|F| \leq 2\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}$

11.1 השאלה של לרמן

נניח ש F משפחה של קבוצות בגודל r מתוך $[d]$ ונניח שלכל $S, T \in F$ מתקיים $|S \cap T| \geq k$.
האם אפשר לחלק את F ל $F_1, ..., F_d$ כך שלכל $S, T \in F_j$ מתקיים ש $S \cap T \geq k+1$?
מסתבר שבעזרת משפט פרנקל וילסון אפשר לענות על השאלה הזו בשלילה. **הוכחה:** נניח ש $n = 4p$ ונביט על כל הגרפים הדו צדדיים השלמים על n קודקודים מסומנים כך שבכל צד יש $\frac{n}{2}$.
נתבונן בכל הצלעות האפשריות בגרף כלשהו על n קודקודים ונסמנן $\left\{1, ..., d = \binom{n}{2}\right\}$ והמשפחה שנבנה F תהיה קבוצת אוספי הצלעות, כלומר כל $S \subseteq [d]$ המקיים שהוא אוסף כל הצלעות של גרף דו צדדי שלם כלשהו עם $\frac{n}{2}$ קודקודים בכל צד. נבחין כי $|F| = \frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2}$ כי כדי להגדיר גרף דו צדדי מספיק לבחור מחצית מהקודקודים, כיוון שאין אנחנו מבדילים בין בניית גרף ע"י בחירת קבוצה כלשהי לגרף הנוצר מבחירת משלימתה.

כל גרף דו"צ הוא מהצורה $K\left(A,B\right)$ כך ש A,B קב' קודקודים בגודל $\frac{n}{2}$.

נשאל איזו בחירה של C,D קב' קוד' כנ"ל גורמת לכך ש $K\left(A,B\right)$ ו $K\left(C,D\right)$ יחלקו מספר מינימלי של צלעות, בכפוף לכך ש $1\in A\cap C$?

נסמן:

$$X=A\cap C$$
$$Y=A\cap D$$
$$Z=B\cap C$$
$$U=B\cap D$$

ואז בחיתוך יהיו כל הצלעות שהן בין Xו U או בין Y ל Z, לכן זה:

$$|X|\cdot|U|+|Y|\cdot|Z|$$

אם נגדיר $|X|=t$, נקבל $|Y|=\frac{n}{2}-t$ וכן $|Z|=\frac{n}{2}-t$ ו $|U|=t$ ולכן מספר הצלעות בחיתוך יהיה:

$$t^{2}+\left(\frac{n}{2}-t\right)^{2}=k\left(t\right)$$

זה מינימלי כאשר $t=\frac{n}{4}$, ולכן אם נייצג כל גרף דו"צ על ידי ה A שלו, נרצה חלוקה ל d אוספים שבכל אוסף נדרוש שכל Aים שכאלה יחתכו על מספר שונה מ $\frac{n}{4}$ קודקודים, וכך אנחנו בתנאי משפט פרנקל וילסון, שאומר שמספר הגרפים בכל אוסף הוא קטן מ $2\sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i}$ ולכן מספר האוספים יהיה גדול מ $\frac{|F|}{2\sum_{i=0}^{p-1}\binom{n}{i}}$ וזה אקספוננציאלי ב n, וגדול מ d, ולכן זה מפריך את שאלת לרמן. ■

השערת בורסוק: כל קבוצה בקוטר 1 ב $\mathbb{R}^{d}$ אפשר לכסות ע"י $d+1$ קבוצות בקוטר קטן מ 1.

זה גורר את השערת לרמן. מדוע?

(לא לגמרי הבנתי, אנסה להשלים בהזדמנות)

11.2 בחזרה לבעיות קיצוניות בקבוצות

חמנית היא אוסף של קבוצות $S_{1},...,S_{r}$, כך שכל איבר שנמצא בשתיים מהן נמצא בכולן.

במילים אחרות ־ אם $X=S_{1}\cap S_{2}\cap...\cap S_{n}$ אז $S_{1}\setminus X,S_{2}\setminus X,...,S_{n}\setminus X$ זרות.

משפט 11.4 ארדש־רדו קיים מספר $f\left(k,r\right)$ כך שלכל משפחה F של קבוצות בגודל k ובה יותר מ $f\left(k,r\right)$ איברים ־ הקבוצה מכילה חמנית בגודל r.

הוכחה: נראה באינדוקציה על k. עבור $k=1$ זה טריוויאלי כי בכל אוסף יחידונים בגודל r תהיה חמנית, שכן כל שני יחידונים יהיו זרים...

נניח ש F משפחה של קבוצות בגודל k ללא חמנית בגודל r, נראה שמספר האיברים ב F חסום מלעיל ע"י $f\left(k,r\right)$.

נניח עבור $k-1$ ונוכיח עבור k.

נתבונן באוסף מקסימלי של קבוצות זרות ב F, $A_{1},...,A_{m}$, זו חמנית (באופן ריק) ולכן על פי הנחת אי קיום חמנית בגודל r מתקיים $m\leq r-1$.

נגדיר $Y=\bigcup A_{i}$, $Y=\{y_{1},...,y_{s}\}$ ולכן (כיוון שבכל קבוצה ב F יש k איברים) מתקיים $s\leq\left(r-1\right)k$

נגדיר:

$$F_{j}=\{A\in F:y_{j}\in A\}$$
$$F_{j}'=\{A\setminus\{y_{j}\}:y_{j}\in A\}$$

F_{j} גם היא לא מכילה חמנית בגודל r, וכך גם F_{j}' (והן שוות בגדלן), אבל ב F_{j}' הקבוצות הן בגודל $k-1$ ולכן עפ"י הנחת האינדוקציה $|F_{j}|\leq f\left(k-1,r\right)$.

נבחין כי $\bigcup F_j = F$, מדוע? נניח שיש קבוצה $S \in F$ שאינה נמצאת באיחוד, משמעות הדבר שהיא אינה שייכת לאף F_j, כלומר אינה מכילה שום y_j, ולכן זרה ל Y, אבל זו סתירה למקסימליות של האוסף $A_1, ..., A_m$ כיוון שבמצב כזה נוכל להוסיף את S לאוסף ולקבל אוסף גדול יותר של קבוצות זרות.
ולכן בסך הכל:

$$|F| \leq \bigcup |F_j| \leq s \cdot f(k-1,r) \leq k \cdot (r-1) \cdot f(k-1,r)$$

נקבל נוסחת נסיגה:

$$f(k,r) \leq k \cdot (r-1) \cdot f(k-1,r)$$

ומכאן:

$$f(k,r) \leq k! \, (r-1)^k$$

ולכן אם נבחר אוסף בגודל העולה על גודל זה - נקבל בהכרח חמנית בגודל r. ■

הגדרה 11.5 משפחה F של קבוצות מנתצת קבוצה S אם לכל $R \subseteq S$, קיים $T \in F$ כך ש $T \cap S = R$.

למשל - קבוצה של שתי נקודות במישור אפשר לנתץ על ידי חצאי מישור.
יש קבוצות של 3 נקודות במישור שאפשר לנתץ על ידי חצאי מישור (למשל, אם הן במצב כללי, אך לא אם הן בקו ישר)
האם יש קבוצות של 4 נקודות במישור שאפשר לנתץ על ידי חצאי מישור?
(לא)

משפט 11.6 הניתוץ (סאוור שלח): אם F משפחה של קבוצות מתוך $[n]$ ואם $|F| > \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$ אז F מנתצת קבוצה של $k+1$ איברים.

12 שיעור 12

הגדרה 12.1 מימד VC הוא מספר האיברים המקסימלי בקבוצה שמנותצת על ידי המשפחה

משפט 12.2 אם $F \subseteq 2^{[n]}$ אז F מנתצת לפחות מספר קבוצות כגודלה.
נסמן G = כל הקבוצות ש F מנתצת
אז במילים אחרות $|F| \leq |G|$

הוכחה: של סאוור שלח בהנתן המשפט לעיל: לכן ידוע לנו $|G| > \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$ וזה מספר הקבוצות שגודלן קטן מ k, ולכן בהכרח יש ב G קבוצה גדולה ממש מ k. ■

הוכחה: (המשפט הקודם) באינדוקציה, כלומר נפרק למשפחות קטנות יותר ונשתמש בהנחת האינדוקציה לגביהן. .

$$F_0 = \{S \subseteq F : 1 \notin S\}$$
$$F_1 = \{S \subseteq F : 1 \in S\}$$
$$F_1' = \{S \setminus \{1\} : S \in F_1\}$$

נבחין כי $S \subseteq \{2, ..., n\}$ מנותצת על ידי F_1 אס"ם S מנותצת ע"י F_1'.
G_0 = תת קבוצות של $\{2, ..., n\}$ ש F_0 מנתצת
G_1= תת קבוצות של $\{2, ..., n\}$ ש F_1' מנתצת (ולכן גם F_1)

$$|G_0| \geq |F_0|$$
$$|G_1| \geq |F_1|$$

ולכן:

$$|G_0|+|G_1|\geq|F_0|+|F_1|=|F|$$

ומכאן:

$$|G_0|+|G_1|\geq|F|$$

מצאנו תת קבוצות של $\{2,...,n\}$ מנותצות על ידי F שמספרן לפחות $|G_0\cup G_1|$. נותר להראות שלכל קבוצה $S\in G_0\cap G_1$ מתקיים ש $S\cup\{1\}$ מנותצת על ידי F.

F_0 מנותצת קבוצות של $\{2,...,n\}$ שמספרן לפחות $|F_0|$ (הנחת אינדוקציה), ו F_1 מנותצת תת קבוצות של $\{2,...,n\}$ שמספרן לפחות $|F_1|$.

טענה: נניח $S\subseteq\{2,...,n\}$ מנותצת גם על ידי F_0 וגם על ידי F_1, אז $S\cup\{1\}$ מנותצת על ידי F.

הטענה גוררת שמספר הקבוצות שמנותצות על ידי F הוא לפחות:

$$|G_0\cup G_1|+|G_0\cap G_1|=|G_0|+|G_1|\geq|F_0|+|F_1|=|F|$$

וזה הדרוש...

הוכחת הטענה:

S מנותצת על ידי F_0, כלומר לכל $R\subseteq S$ יש $T\in F_0$ כך ש $T\cap S=R$, נבחין ש $T\in F_0$ ולכן $1\notin T$ ואז $T\cap(S\cup\{1\})=R$

באותו אופן יש $T'\in F_1$ כך ש $T'\cap S=R$

מכיוון ש $T'\in F_1$ אז $1\in T'$ ולכן $T'\cap(S\cup\{1\})=R\cup\{1\}$

ומכאן - לכל $R\subseteq S$ קיים $T\in F$ כך ש $T\cap(S\cup\{1\})=R$ וקיים $T'\in F$ כך ש $T'\cap(S\cup\{1\})=R\cup\{1\}$

ולכן F מנותצת את $S\cup\{1\}$

(איך בעצם יעבוד הניתוץ? כל תת קבוצה של S שלא מכילה את 1 מתקבלת באמצעות קבוצה מ F_0 וכל תת קבוצה שכן מכילה את 1 תתקבל על ידי קבוצה מ F_1) ∎

12.1 טכניקת ההזזה

דומה לטכניקת הסימטריזציה בגיאומטריה.

משפט איזופרימטרי: מכל הקבוצות עם שטח פנים נתון, לכדור יש נפח מקסימלי, ולכל הקבוצות במישור עם היקף נתון, לעיגול יש שטח מקסימלי.

(אפשר להחליף במשפט הקודם להחליף "שטח פנים" ב "קוטר" ולקבל משפט נכון גם כן)

משפחה F נקראת סגורה כלפי מטה, אידאל או קומפלקס סימפליציאלי (כל אלו שמות שונים לאותו הדבר) אם לכל $S\in F$ ו $R\subseteq S$ מתקיים $R\in F$.

(זה סוג של ההיפך מפילטר)

א. נוכיח את משפט סאוור שלח למשפחות סגורות כלפי מטה

ב. נגדיר פעולה ש"מזיזה" משפחות עד שהופכת אותן לסגורות כלפי מטה

ג. נראה שהפעולה שהגדרנו לא משנה את גודל המשפחה

ד. הפעולה לא משנה את G (כלומר הקבוצות המנותצות על ידי המשפחה)

עבור משפחה $F\subseteq 2^{[n]}$ ו $1\leq i\leq n$ נגדיר $s_i(F)$ באופן הבא:

$$\forall T\in F:\ s_i(T)=\begin{cases}T & i\notin T\\ T & i\in T\ \wedge\ (T\setminus\{i\})\in F\\ T\setminus\{i\} & i\in T\ \wedge\ (T\setminus\{i\})\notin F\end{cases}$$

ואז:

$$s_i(F)=\{s_i(T):T\in F\}$$

(יש פה קצת abuse of notation שכן אנחנו פעם מתייחסים לפונקציה כאילו היא פועלת על קבוצות ב F ופעם על F, איבר־איבר)

טענה 12.3

$$|s_i(F)| = |F|$$

הוכחה: זה פשוט כיוון שכל קבוצה שאינה מכילה את i לא שינינו, אם יש קבוצות שמכילות את i וגם יש קבוצה "אחות" שלהן (כלומר כזו שמסכימה איתן בדיוק על כל האיברים מלבד i) - לא עשינו דבר, הדבר היחיד שעשינו היה במקרה שיש לנו קבוצה T שמכילה את i ואין לה אחות, ובמקרה כזה - סילקנו ממנה את i וכך קיבלנו את אחותה חסרת ה i. ההתאמה הזו היא חח"ע באופן ברור ולכן לא שינינו את גודל הקבוצה. ■

טענה 12.4 אם חוזרים ומבצעים את הפעולה $F \to s_i(F)$, מקבלים בסופו של דבר אידאל

הוכחה: אם $s_i(F) \neq F$ אז סכום גדלי הקבוצות ב $s_i(F)$ קטן ממש מסכום גדלי הקבוצות ב F, וכיוון שהכל סופי - לא נוכל לבצע את הפעולות לנצח, ולכן בשלב כלשהו נקבל $s_i(F) = F$, ובמקרה כזה F תהיה אידאל. מדוע? כי משמעות הדבר שאין $T \in F$ ו $i \in [n]$ כך ש $i \in T$ וגם $T \setminus \{i\} \notin F$, וזו הגדרה שקולה להגדרה של אידאל. ■

משפט 12.5 אם S מנותצת על ידי $s_i(F)$ אז S מנותצת גם על ידי F

הוכחה: למשפט סאוור שלח בהנתן המשפט האחרון

נתחיל ממשפחה F כך ש $|F| > \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}$ ונבצע את ההזזה $F \to s_i(F)$ עד שנקבל את האידאל $\hat{F}$.

לפי טענה קודמת $\left|\hat{F}\right| = |F|$ וכל קבוצה ש $\hat{F}$ מנותצת, גם F מנותצת.

נבחין כי כל אידיאל מנתץ בדיוק את כל הקבוצות שמוכלות בו (קצת חושבים על זה וזה די ברור)

וכעת כיוון שב $\hat{F}$ יש יותר מ $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}$ קבוצות, משובך יונים - חייבת להיות בו קבוצה שיש בה k איברים לפחות, והיא בפרט מנתצת אותה. ■

נותר לנו להוכיח שהפעולה לא מגדילה את מספר הקבוצות המנותצות. **הוכחה:** נניח ש S מנותצת על ידי $s_i(F)$

לכל $R \subseteq S$ יש $T \in s_i(F)$ כך ש $T \cap S = R$

צריך למצוא $T' \in F$ המקיימת $T' \cap S = R$.

אפשרות א': $i \notin S$

אם $T \in F$ סיימנו

אחרת T התקבלה מאחותה גדולה $T' \in F$ המקיימת $T' = T \cup \{i\}$ והיא תקיים את המבוקש (כי $i \notin S$)

אפשרות ב': $i \in S$

אם $i \in R$, אז $i \in T$ ו T היא קבוצה שלא עברה שינוי בהזזה, ולכן $T \in F$ וסיימנו.

אם $i \notin R$, אז נובע ש $i \notin T$. אם $T \in F$ סיימנו, ואחרת היא התקבלה בפעולת ההזזה. כיוון ש $s_i(F)$ מנתצת את S אז יש $T_2 \in s_i(F)$ כך ש $T_2 \cap S = (R \cup \{i\})$, וכיוון ש T_2 מכילה את i, היא לא עברה שינוי בפעולת ההזזה. אילו קבוצות שמכילות את i לא הוזזו? רק אלו שאחותן כבר קיימת ב F! כלומר $T_2 \setminus \{i\} \in F$ ולכן קבוצה זו היא ה T' שביקשנו. ■

13 שיעור 13

נזכיר את משפט ארדש קו רדו: אם $F \subseteq \binom{[n]}{k}$ כאשר $2k \leq n$ ואם לכל $S, T \in F$ מתקיים $S \cap T \neq \emptyset$ אז $|F| \leq \binom{n-1}{k-1}$

נדון במשפט שונה.

נניח שיש בידינו אוסף סופי F של קבוצות של טבעיים בגודל קבוע, כלומר $F \subseteq \binom{\mathbb{N}}{k}$ כך ש $|F| < \infty$.

הגדרה 13.1 הצל של F הוא:

$$\partial F = \left\{R \in \binom{\mathbb{N}}{k-1} : \exists S \in F\, s.t.\, R \subseteq S\right\}$$

אם נתון $|F|$, עד כמה קטן יכול להיות $|\partial F|$?

למה 13.2 לכל k ו n יש דרך יחידה להציג את n בצורה הבאה:

$$n = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + ... + \binom{n_1}{1}$$

נניח את קיום הלמה (אולי נוכיח אותה בהמשך)

הגדרה 13.3 בהנתן ההצגה היחידה של n דנן, נגדיר:

$$\partial_k \left(n\right) = \binom{n_k}{k-1} + \binom{n_{k-1}}{k-2} + ... + \binom{n_1}{0}$$

משפט 13.4 (קרוסקל קטונה) אם $F \subseteq \binom{\mathbb{N}}{k}$ ו $|F| = n$ אז

$$\partial_k \left(n\right) \leq |\partial F|$$

הוכחה: (הלמה) נגדיר את n_k כמספר המקסימלי כך ש $\binom{n_k}{k} \leq n$, אם ממש $\binom{n_k}{k} = n$ אז סיימנו, אחרת נציג את $n' = n - \binom{n_k}{k}$ בעזרת הנחת האינדוקציה עבור $k-1$.

$$n = \binom{n_k}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n'_i}{i}$$

עד עכשיו לא הגבלנו את n_k ויכולנו לעשות זאת לכל בחירה של n_k כך ש $\binom{n_k}{k} \leq n$,
נשאר להראות $n_k > n'_{k-1}$.
אם $n_k \leq n'_{k-1}$ כך ש $\binom{n_k}{k} \leq n$ אז:

$$\binom{n_k}{k} + \binom{n_k}{k-1} \leq n$$

ו

$$\binom{n'_{k-1}}{k-1} \geq \binom{n_k}{k-1}$$

אבל מזהות פסקל:

$$n \geq \binom{n'_{k-1}}{k-1} + \binom{n_k}{k} \geq \binom{n_{k-1}}{k-1} + \binom{n_k}{k} = \binom{n_k+1}{k}$$

ולכן n_k הוא לא המקסימלי שאפשר לבחור, בסתירה.
ומכך קיבלנו את הלמה, היחידות מתקבלת עקב בחירת המקסימליות. ■

(יש פה אולי פרטים להשלים שקצת דילגנו עליהם בשיעור)

13.1 הזזה לקבוצות בגודל קבוע

בהנתן $F \subseteq \binom{[n]}{k}$ ו $1 \leq i < j \leq n$ קבועים, נרצה להחליף את j ב i בכל קבוצה, במידה שאפשר לעשות זאת מבלי לשנות את גדלה ומבלי לשנות את הגודל של F, וכך במובן מסויים לצופף את הקבוצה לכיוון 1...

כדי להגדיר את $S_{ij}\left(F\right)$ נתבונן ב $T \in F$ כלשהי ונאמר:

$$S_{ij}\left(T\right)=\begin{cases} T & j\notin T\\ T & i\in T\\ T & i\notin T,j\in T,\left(T\setminus\left\{ j\right\} \cup\left\{ i\right\} \right)\in F\\ T\setminus\left\{ j\right\} \cup\left\{ i\right\} & otherwise \end{cases}$$

למה 13.5

$$\left|F\right|=\left|S_{ij}\left(F\right)\right|$$

הוכחה: זה טריוויאלי כיוון שלא הוספנו שום קבוצה חדשה וכל קבוצה ששינינו - הרשינו זאת רק במידה שהשינוי לא יהפוך אותה לקבוצה שכמותה כבר קיימת ב F, בפרט - לא גרמנו לכך שמספר הקבוצות ב F יפחת. ■

הגדרה 13.6 G נקראת מוזזת אם $S_{ij}\left(G\right)=G$ לכל i,j

שאלה: מה הגודל המירבי של F כך שמתקיימת תכונה P?

אסטרטגיה:

1. נראה שאם F מקיימת את P אז גם $S_{ij}\left(F\right)$ מקיימת את P
2. נפתור את הבעיה לכל G מוזזת

למה 13.7 מכל F אפשר לעבור ע"י הפעלה חוזרת ונשנית של הפעולות $F\rightarrow S_{ij}\left(F\right)$, ל G מוזזת.

הוכחה: ברור מסופיות הקבוצות, כי זו פעולה של הקטנה דיסקרטית של סכום איברי הקבוצות בתוך F, וזה חסום ולכן מתישהו יעצר. ■

למה 13.8 אם F נחתכת, גם $S_{ij}\left(F\right)$ נחתכת.

הוכחה: נניח בשלילה $A,B\in S_{ij}\left(F\right)$ כך ש $A\cap B=\emptyset$

לא יתכן ש $A,B\in F$ כיוון ש F נחתכת.

ולכן לפחות אחת הקבוצות "נוצרה" במהלך הפעלת S_{ij} על F.

לא יתכן $A,B\notin F$ שכן משמעות הדבר ששתיהן נוצרו במהלך הפעלת S_{ij} מאחיותיהן הגדולות A',B', ובשתיהן החלפנו את j ב i, ובפרט שתיהן מכילות את i ולכן $A\cap B\neq\emptyset$ בסתירה.

נניח בה"כ $A\notin F$ וגם $B\in F$, מכאן $i\in A$ ו $j\notin A$.

ולכן $A'\in F$ וכיוון ש F נחתכת מתקיים $A'\cap B\neq\emptyset$ ולכן החיתוך הוא בדיוק j, כי זה האיבר היחיד שהסרנו במעבר מ A' הנחתכת עם B ל A שאיננה.

מדוע B עברה מ F ל $S_{ij}\left(F\right)$ ללא שינוי? כיוון ש $B'=B\setminus\left\{ j\right\} \cup\left\{ i\right\} \in F$, אבל קבוצה זו אינה נחתכת עם A', כי כיוון ש A' עברה שינוי בהזזה - בהכרח $i\notin A'$, ו $j\in A'$, כלומר A' ו B' אינן מסכימות על i,j. אבל נבחין שבכל חלקיהן האחרים - A' מסכימה עם A ו B' עם B, ולהנחתנו $A\cap B=\emptyset$ ולכן $A'\cap B'=\emptyset$ בסתירה להיות F נחתכת.

ומכאן נסתרה הנחת השלילה ולכן $S_{ij}\left(F\right)$ אכן נחתכת. ■

. **הוכחה:** (ארדש קו רדו ע"י הזזות)

ראשית כל אם $n=2k$ אז $F\leq\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$ כי כל קבוצה בגודל $\frac{n}{2}$ מונעת ממשלימתה להכלל ב F.
אחרת נניח $n\geq 2k+1$.
ע"י הזזה נקבל G כך ש $|G|=|F|$ וגם G מוזזת (כלומר נשמרת תחת הזזה) ונחתכת בעת ובעונה אחת.
כעת נגדיר:

$$G_0=\{S\in G:n\notin S\}$$
$$G_1=\{S\in G:n\in S\}$$

$$G_1'=\{S\setminus\{n\}:S\in G_1\}$$

$G_0\subseteq\binom{[n-1]}{k}$ נחתכת, ואז נרצה להסתמך על הנחת האינדוקציה כדי לומר $|G_0|\leq\binom{n-2}{k-1}$
אם $G_1'\subseteq\binom{[n-1]}{k-1}$ נחתכת, אז נרצה להשתמש בהנחת האינדוקציה כדי לומר ש $|G_1'|\leq\binom{n-2}{k-2}$ ואז בזהות פסקל כדי להוכיח את המשפט כולו.
נוכיח זאת: נניח בשלילה $A,B\in G_1'$ ו $A\cap B=\emptyset$
אז $A'=A\cup\{n\}\in G$ ו $B\cup\{n\}\in G$ נבחר l שנמצא ב $[n-1]$ אבל לא ב $A\cup B$ (יש כזה מהנחתנו לגבי היחס בין k ו n), מהנחתנו שהמשפחה מוזזת - $S_{ln}(A')=A'$, נסמן:

$$A''=A'\setminus\{n\}\cup\{l\}$$

ונקבל $A''\in G$משום ש G מוזזת.
ולכן:

$$A''\cap(B\cup\{n\})=\emptyset$$

בסתירה לכך ש G נחתכת, ומכאן G_1' נחתכת.
נשוב להוכחת המשפט - ונקבל ש $G_1'\subseteq\binom{[n-1]}{k-1}$ ובפרט מתקיימת בה הנחת האינדוקציה ולכן $|G_1'|\leq\binom{n-2}{k-2}$,
ולפיכך:

$$|G|=|G_0|+|G_1|=|G_0|+|G_1'|\leq\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-1}{k-1}$$

■

14 שיעור 14

14.1 כמה שאלות

1. מהו הגודל המירבי של משפחה $F\in\binom{[n]}{k}$ כך שלכל שתי קבוצות A,B כך ש $|A\cap B|\geq r$? עבור $r=1$ זה משפט ארדש קו רדו.
2. מה הגודל המירבי של $F\in\binom{[n]}{k}$ כך שאין $A,B,C\in F$ המקיימות $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\emptyset$? בארדש קו רדו שאלנו זאת עבור זוגות של קבוצות, וכאן על שלשות, ואפשר כמובן לשאול זאת ביחס ל r קבוצות.
3. מה הגודל המירבי של $F\in\binom{[n]}{k}$ כך שלכל $A,B,C\in F$ אם $A\cap B\neq\emptyset$ וגם $A\cap C\neq\emptyset$ וגם $B\cap C\neq\emptyset$ אז $A\cap B\cap C\neq\emptyset$ (במילים אחרות אין שלוש קבוצות שנחתכות בזוגות אך אינן נחתכות בשלישיה)

14.1.1 שאלה 1 (קבוצות שנחתכות ב r מקומות)

אם נבחר:

$$F=\{S\subseteq[n]:\{1,...,r\}\subseteq S\}$$

למשל, נקבל משפחה שבה כל שתי קבוצות נחתכות בפרט על קבוצה ספציפית בגודל r.
ולכן אפשר להתבונן ב:

$$F^1 = \{S \subseteq [n] : \{1, ..., r\} \subseteq S\}$$
$$F^2 = \{S \subseteq [n] : |\{1, ..., r+2\} \cap S| \geq r+1\}$$
$$F^3 = \{S \subseteq [n] : |\{1, ..., r+4\} \cap S| \geq r+2\}$$

$$\vdots$$

$$F^j = \{S \subseteq [n] : |\{1, ..., r+2j\} \cap S| \geq r+j\}$$

עבור $j \leq k-r$
ומשפט שהוכיחו הוא שהמשפחה המקסימלית בין המשפחות הנ"ל משיגה את המקסימום האפשרי. כאשר n גדול מספיק לקחת את F^1, כאשר n קטן יותר - צריך לקחת אחרות.
ההזזה היא קלה, אבל ההוכחה שלאחריה היא קשה והושגה רק לפני כעשר שנים.

14.1.2 שאלה 2

אין שלוש קבוצות שנחתכות כל שתיים טריוויאלית.
אם $n < 3k$ אז זה תמיד נכון.
דוגמה בסיסית:

$$F = \{S \subseteq [n] : 1 \in S \, or \, 2 \in S\}$$

מניחים שזה משיג מקסימום, אבל זו שאלה פתוחה.

14.1.3 שאלה 3

זה מעניין כאשר $n \geq \frac{3k}{2}$
אפשר לקחת כדוגמה את

$$F = \{S : 1 \in S\}$$

כמו בדוגמה הפשוטה עבור ארדש קו רדו, ויש השערה שזה הכי טוב שאפשר להשיג.
אם משפחה היא מוזזת - קל להוכיח זאת, אבל אין יודעים אם תכונה זו נשמרת תחת הזזה.

14.2 משפט קרוסקל קטונה

הראינו בעבר (מלבד היחידות) את הטענה שקיימת ויחידה הצגה של m טבעי כלשהו ע"י (כלומר קיים k יחיד ו $m_j, ..., m_k$ ספציפיים):

$$m = \sum_{i=j}^{k} \binom{m_i}{i}$$

נזכיר:

הגדרה 14.1 הצל של F הוא:

$$\partial F=\left\{R\in\binom{\mathbb{N}}{k-1}:\exists S\in F\;s.t.\;R\subseteq S\right\}$$

אם נתון $|F|$, עד כמה קטן יכול להיות $|\partial F|$?

משפט 14.2 (קרוסקל קטונה)

$$|\partial F|\geq\binom{m_k}{k-1}+...+\binom{m_j}{j-1}$$

שלבי ההוכחה:

א. לכל $i<j$ מתקיים $|\partial\left(S_{ij}\left(F\right)\right)|\leq|\partial F|$ ולכן מספיק להוכיח את המשפט עבור משפחות מוזזות (ובפרט החסם מלרע שנמצא יהיה נכון גם עבור משפחות שאינן מוזזות, שכן ניתן להזיזן ולשמור על החסם).

בעצם נוכיח ש $\partial S_{ij}\left(F\right)\subseteq S_{ij}\left(\partial F\right)$ ומכך נקבל את הדרוש (שכן $|\partial F|=|S_{ij}\left(\partial F\right)|$

ב. משפט קרוסקל קטונה נכון כאשר Fמוזזת. **הוכחה:** נתחיל מחלק ב' של ההוכחה, כלומר נניח ש F מוזזת ונניח על סמך הלמה ש:

$$|F|=m=\binom{m_k}{k}+\binom{m_{k-1}}{k-1}+...+\binom{m_j}{j}$$

נגדיר:

$$F_1=\{S\in F:1\in S\}$$
$$F_1'=\{S\setminus\{1\}:S\in F_1\}$$
$$F_2=\{S\in F:1\notin S\}$$

ונחלק לשני מקרים

<u>מקרה 1:</u>

$$|F_1|\geq\binom{m_k-1}{k-1}+\binom{m_{k-1}-1}{k-2}+...+\binom{m_j-1}{j-1}$$

הצל של F כולל קבוצות (בגודל $k-1$) שמכילות את 1 וכאלו שאינן מכילות את 1.

$$F_1'\subseteq\partial F$$

ולכן מספר הקבוצות בצל שלא מכילות את 1 הוא לפחות $|F_1'|$

מספר הקבוצות בצל שמכילות את 1 הוא לפחות כמו גודל הצל של F_1' כי כל קבוצה ב $\partial F_1'$ אפשר להוסיף לה את 1 ולקבל קבוצה שהיא בצל של F וגם מכילה את 1.

ולכן (הנה באה הנקודה המרכזית בהוכחה):

$$|\partial F|\geq|F_1'|+|\partial F_1'|$$

כיוון ש $|F_1'|=|F_1|$, נציב זאת ונשתמש בהנחת האינדוקציה ביחס ל $\partial F_1'$ ונקבל:

$$|\partial F|\geq\underbrace{\binom{m_k-1}{k-1}+\binom{m_{k-1}-1}{k-2}+...+\binom{m_j-1}{j-1}}_{by\;|F_1|=\left|F_1'\right|}+\underbrace{\binom{m_k-1}{k-2}+\binom{m_{k-1}-1}{k-3}+...+\binom{m_j-1}{j-2}}_{by\;I.H.}$$

$$= \binom{m_k}{k-1} + \binom{m_{k-1}}{k-2} + ... + \binom{m_j}{j-1}$$

כנדרש.

מקרה 2:

נניח

$$|F_1| < \binom{m_k - 1}{k-1} + \binom{m_{k-1} - 1}{k-2} + ... + \binom{m_j - 1}{j-1}$$

אז מתקיים מזהות פסקל איבר־איבר (וכיוון ש $|F| = |F_1| + |F_2|$)

$$|F_2| > \binom{m_k - 1}{k} + \binom{m_{k-1} - 1}{k-1} + ... + \binom{m_j - 1}{j}$$

כעת אם F מוזזת אז $\partial F_2 \subseteq F_1'$

כי $1 \notin S \in F$ וגם $j \in S$ אז $S \setminus \{j\} \cup \{1\} \in F$, (כיוון שזו משפחה מוזזת), כלומר אם ניקח קבוצה בצל של F_2, נוכל לקבל ממנה ע"י תוספת 1 קבוצה שהיא ב F_1 ולכן היא עצמה נמצאת ב F_1'.

ואז מהנחת האינדוקציה:

$$|\partial F_2| \geq \binom{m_k - 1}{k-1} + \binom{m_{k-1} - 1}{k-2} + ...$$

אבל זה גם צריך להיות קטן מ $|F_1| = |F_1'|$, וזו סתירה להנחת מקרה 2! ומכאן שמקרה 2 לא יתכן, ולכן רק מקרה 1 שכבר הוכחנו מתקיים, ובכך השלמנו את חלק ב' של הוכחת המשפט.

נוכיח את חלק א': $\partial \left(S_{ij}\left(F\right)\right) \subseteq S_{ij}\left(\partial F\right)$

נניח $R \in \partial \left(S_{ij}\left(F\right)\right)$ ונראה כי $R \in S_{ij}\left(\partial F\right)$

תהי $T \in S_{ij}\left(F\right)$ כך ש $R \subseteq T$.

מקרה א': $T \in F$ ואז נובע $R \in \partial F$, נניח בשלילה $R \notin S_{ij}\left(\partial F\right)$

ואז $R' = R \setminus \{j\} \cup \{i\}$ אחות קטנה של R לא תהיה ב ∂F ובפרט $R' \nsubseteq T$ ולכן Rלא מתקבלת מ T ע"י השמטת i

ולכן:

$$T \neq R \cup \{i\} = R' \cup \{j\}$$

ולכן $j \in T$ (כי $R \subseteq T$) ומאידך $i \notin T$ כי אחרת $R' \subseteq T$ ולכן Tמועמדת להזזה.

מכך ש $T \in S_{ij}\left(F\right)$ נובע ש T כבר הוזזה ולכן $T' = T \setminus \{j\} \cup \{i\}$ נמצאת ב F וגם ב $S_{ij}\left(F\right)$ אבל $R' \subseteq T'$ כלומר $R' \in \partial F$ בסתירה.

מקרה ב': $T \notin F$ ואז:

$$T' = T \setminus \{i\} \cup \{j\} \in F,\, j \notin T,\, i \in T$$

ואז $R \subseteq T$

מקרה ב'1: $R \nsubseteq T'$ ולכן $i \in R$ ו $j \notin R$ ונגדיר:

$$R' = R \setminus \{i\} \cup \{j\}$$

ונקבל $R' \subseteq T'$ ו $R' \in \partial F$ ולכן הזזת הצל תזיז גם את R', ולכן נקבל את R בצל המוזז, דהיינו $R \in S_{ij}\left(\partial F\right)$ כדרוש.

מקרה ב'2: $R \subseteq T'$ ולכן $R \in \partial F$, מצד שני גם $R \subseteq T$, אבל $T \neq T'$ ו R קטנה משתי האחיות הללו באיבר אחד בדיוק, ולכן $R = T \cap T'$ ומכיוון שידוע לנו בדיוק מהם האיברים שעליהם T ו T' אינן מסכימות הרי ש:

$$i, j \notin R$$

ולכן פעולת ההזזה אינה מזיזה את R כלל ו $R \in \partial F \Rightarrow R \in S_{ij}\left(\partial F\right)$

[את מקרה ב'2 הוספתי לבד, אז אם יש בו שגיאות ־ נא לתקן אותי] ■

15 שיעור 15 ועוד קצת (סיכומים של ליאור יאנובסקי)

עוד קצת על קרוסקל קטונה

נדבר על יחסי סדר חלקיים על $\binom{[n]}{k}$ (וגם על $2^{[n]}$). נגדיר יחס סדר חלקי כך: אם $S=\{s_1,...,s_k\}$ כך ש $s_1<...<s_k$ ו $T=\{t_1,...,t_k\}$ כך ש $t_1<...<t_k$ אז נגדיר $T\leq_P S$ אם לכל i מתקיים $s_i\leq t_i$. למשל $\{3,5,14\}\leq_P\{2,5,11\}$ אבל הקבוצות $\{1,4\}$ ו $\{2,3\}$ אינן ניתנות להשוואה. נשים לב ש $F\subseteq\binom{[n]}{k}$ משפחה מוזזת אםם לכל $T\in F$ אם $T\leq_P S$ אז $S\in F$. נתבונן בהרחבות של הסדר $\leq_P$. למשל הסדר הלקסיקוגרפי, $T<_L S$ אם עבור ה i המינימלי שך ש $s_i\neq t_i$ מתקיים $s_i<t_i$ והסדר הלקסיקוגרפי ההפוך, $T<_{RL} S$ א עבור ה i המקסימלי כך ש $s_i\neq t_i$ מתקיים $s_i<t_i$. לדוגמא, עבור $S=\{1,2,5,9,11\}$ ו $T=\{1,3,4,8,11\}$ מתקיים $T<_L S$ (כי $2<3$) אבל $T<_{RL} S$ (כי $8<11$). דרך אחרת להגדיר את הסדרים הללו היא דרך ההפרש הסימטרי. $T<_L S$ אםם $\min(S\triangle T)\in S$ ו $T<_{RL} S$ אםם $\max(S\triangle T)\in T$.

נחזור לענייני צל. יהי

$$m=\binom{m_k}{k}+\binom{m_{k-1}}{k-1}+...+\binom{m_j}{j}$$

כך ש

$$m_k>m_{k-1}>...>m_j\geq j>0$$

.

נגדיר סימון חדש: אם $F\subseteq\binom{A}{j}$ ואם $R\cap A=\varnothing$ אזי "הצירוף של F ו R" מוגדר ומסומן ע"י

$$F\star R=\{S\cup R|S\in F\}$$

.

נשים לב שהאיברים הראשונים בסדר $<_{RL}$ הם אלו:

$$\{1,2\}<_{RL}\{1,3\}<_{RL}\{2,3\}<_{RL}\{1,4\}<_{RL}\{2,4\}<_{RL}...$$

איך נאפיין את m הקבוצות הראשונות בסדר $<_{RL}$? זה ייראה כך:

$$F_m=\binom{[m_k]}{k}\cup\binom{[m_{k-1}]}{k-1}\star\{m_k+1\}\cup\binom{[m_{k-2}]}{k-2}\star\{m_k+1,m_{k-1}+1\}\cup....\cup\binom{[m_j]}{j}\star\{m_k+1,m_{k-1}+1,...,m_{j+1}+1\}$$

כאשר האיחוד זר כמובן. הסבר: מכיוון ש $\binom{m_k}{k}\leq m<\binom{m_k+1}{k}$ ברור שהמשפחה המינמלית מוכלת ב $\binom{[m_k+1]}{k}$. הקטנות ביותר הן אלו שלא מכילות את m_k+1 וזה בדיוק $\binom{[m_k]}{k}$ שהוא האיבר הראשון באיחוד למעלה. את השארית יש לבחור מתוך הקבוצות שמכילות את m_k+1. הקטנות ביותר מתוכן, הן אלו שכל שאר אבריהן מוכלים ב $[m_{k-1}]$ וזה האיבר השני באיחוד. את השארית יש לבחור מתוך הקבוצות שמכילות את m_k+1 (השארית הקודמת) ואת $m_{k-1}+1$ (אלו שלא נכנסו בשלב השני) הקטנות ביותר מתוכן... וכו'. כלומר, F_m היא משפחה בגודל

$$|F_m|=\binom{m_k}{k}+\binom{m_{k-1}}{k-1}+...+\binom{m_j}{j}=m$$

והי הרישא מגודל m של הסדר $<_{LR}$. מה הקשר לצל ? נתבונן ב ∂F_m. ראשית, מתקיים

$$\partial \binom{[m_k]}{k} = \binom{[m_k]}{k-1}$$

שנית,

$$\partial \left(\binom{[m_{k-1}]}{k-1} \star \{m_k+1\} \right) = \binom{[m_{k-1}]}{k-1} \cup \binom{[m_{k-1}]}{k-2} \star \{m_k+1\}$$

נשים לב ש $\binom{[m_k]}{k-1} \subseteq \binom{[m_{k-1}]}{k-1}$ פשוט כי $m_{k-1} < m_k$. לכן התוספת החדשה היא רק $\binom{[m_{k-1}]}{k-2} \star \{m_k+1\}$.
באינדוקציה נקבל

$$\partial F_m = \binom{[m_k]}{k-1} \cup \binom{[m_{k-1}]}{k-2} \star \{m_k+1\} \cup \binom{[m_{k-2}]}{k-3} \star \{m_k+1, m_{k-1}+1\} \cup ... \cup \binom{[m_j]}{j-1} * \{m_k+1, m_{k-1}+1, ..., m_{j+1}+1\}$$

כאשר שוב כל האיחודים זרים. לכן קיבלנו

$$|\partial F_m| = \binom{m_k}{k-1} + \binom{m_{k-1}}{k-2} + \binom{m_{k-2}}{k-3} + ... + \binom{m_j}{j-1}$$

שזה בדיוק הביטוי ממשפט קרוסקל־קטונה. כלומר, F_m מממשת את החסם של קרוסקל־קטונה ולכן החסם הוא הדוק. רעיון זה נותן אסטרטגיה אחרת להוכחת משפט קרוסקל־קטונה. במונחים החדשים אפשר לנסח את המשפט כך: אם $F \subseteq \binom{\mathbb{N}}{k}$ משפחה בגודל m אז $|\partial F| \geq |\partial F_m|$. נחלק את F ל F_0 ו F_1 כמו קודם (אלו שלא מכילות את 1 ואלו שכן) ונגדיר את F_1' גם כמו קודם ע"י זה שנזרוק את 1 מכל הקבוצות ב F_1. נשים לב שמעבר ל F_1' לא שינינו את הסדר $<_{RL}$ בין אברי F_1. מהנחת האינדוקציה נובע שאת F_0 ואת F_1' אפשר להחליף ב G_0 ו G_1' שהן הרישאות של הסדר $<_{RL}$ מאותם גדלים כמו F_0 ו F_1' בהתאמה ומהנחת האינדוקציה $|\partial G_0| \leq |\partial F_0|$ ו $|\partial G_1'| \leq |\partial F_1|$. נגדיר את $G_1 = G_1' \star \{1\}$ ונקבל את אותהטענה כמו קודם רק עבור G_0 ו G_1. כדי להצליח לבצע את צעד האינדוקציה צריך להשתכנע ש $|\partial G_0 \cap \partial G_1| \geq |\partial F_0 \cap \partial F_1|$ ואז נקבל שהמשפחה $G = G_0 \cup G_1$ היא באותו גודל כמו F וגם $|\partial G| \leq |\partial F|$. אם נעשה לכל אינדקס i את מה שעשינו ל 1 נקבל משפחה H שבכל קואורדינטה היא מתפרקת לשתי משפחות שהן רישאות בסדר $<_{RL}$. האם זה אומר ש H בעצמה רישא בסדר $<_{RL}$? כמעט. יש יוצא דופן אחד שאפשר לטפל בו בנפרד. לא סגרנו את הפרטים אבל בעיקרון זה נותן הוכחה אלטרנטיבית למשפט קרוסקל קטונה.

משפט 15.1 (וריאציה על קרוסקל קטונה): אם $|F| = m = \binom{x}{k}$ כאשר x ממשי (לא בהכרח שלם) אז $|\partial F| \geq \binom{x}{k-1}$.

ההוכחה אותו הדבר כי כל הזהויות הקומבינטוריות למקדמים בינומים נכונות גם כאשר x ממשי ולכן כל החסמים נכונים.

בעיות מניה

בהינתן סידרה $a_0, a_1, a_2, ...$ אזי טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נקרא הפונקציה היוצרת של הסידרה. למשל נוסחאת הבינום:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

אבל גם עבור β לא שלם מתקיימת נוסחאת הבינום המוכללת:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\beta}{k}x^{k}=(1+x)^{\beta}$$

מפיתוח טור הטיילור של $(1+x)^{\beta}$ סביב 0. הטור מתכנס עבור $|x|<1$. בנוסחה המקורית, כאשר n שלם, יש הסבר קומבינטורי לנוסחה שנובע מכך שכשפותחים את הסוגריים ב $(1+x)^{n}$ יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור x מ k סוגריים ו 1 מכל השאר ולכן המקדם של x^{k} הוא $\binom{n}{k}$.

כעת, איך אנחנו רוצים לקודד את הבעיה הקומביטורית הבאה: רוצים לבחור k עצמים מתוך n ללא חשיבות לסדר אבל עם 3 חזרות על כל עצם לכל היותר. הפונקציה היוצרת המתאימה לבעיה היא:

$$\left(1+x+x^{2}+x^{3}\right)\left(1+x+x^{2}+x^{3}\right)\cdots\left(1+x+x^{2}+x^{3}\right)$$

כאשר יש n סוגריים. כלומר, אם נפתח את הסוגריים מספר האפשרויות לבחור איבר מכל סוגריים כך שהחזקה הכוללת של x תהיה k הוא בדיוק מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n ללא חשיבות לסדר כשכל אחד יכול לחזור לכל היותר 3 פעמים. ולכן זה גם יהיה המקדם של x^{k} כשנפתח ונכנס את הביטוי.

דוגמא נוספת שהאילוצים לא חיבים להיות אחידים היא כשיש קבוצה $\{A,B,C\}$ (תפוחים, בננות ותפוזים) ורוצים לבחור שלושה פירות עם חזרות כך שיהיה לנו לכל היותר 3 בננות, לכל היותר 2 תפוחים ולכל היותר 4 תפוזים. נרשום

$$\left(1+x+x^{2}\right)\left(1+x+x^{2}+x^{3}\right)\left(1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}\right)=\sum_{k=0}^{9}a_{k}x^{k}$$

כשפותחים סוגריים כל מחובר מתאים לכמה פירות לוקחים מכל סוג וכשמכנסים לפי חזקת x (מספר הפירות הכולל) מקבלים שהמקדם a_{k} הוא בדיוק מספר האפשרויות לעשות את הבחירה בכפוף לאילוצים. אם יש n פירות וכל פרי אפשר לקחת או לא לקחת אז הפונקציה היוצרת היא $(1+x)^{n}$ (בעצם אין חזרה ולכן זה מקדמים בינומים) אם אפשר לבחור עד פעמיים אז נקבל $\left(1+x+x^{2}\right)^{n}$. אם אנחנו לא מגבילים את מספר החזרות נקבל את הפונקציה

$$\left(1+x+x^{2}+...\right)^{n}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}$$

ונקבל ש a_{k} מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n עם חזרות (כרצוננו) ובלי חשיבות לסדר. אנחנו יודעים מהקורס במתמטיקה דיסקרטית ש $a_{k}=\binom{n+k-1}{k}$. נראה שאותה מסקנה מתקבלת מפיתוח הפונקציה היוצרת (תחת ההנחה ש $0\leq x<1$, אחרת הביטוי $1+x+x^{2}+...$ חסר משמעות):

$$\left(1+x+x^{2}+...\right)^{n}=(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-1)^{k}x^{k}$$

ולכן נקבל

$$a_{k}=\binom{-n}{k}(-1)^{k}=(-1)^{k}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}=\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}=\binom{n+k-1}{k}$$

כלומר, הוכחנו באופן אחר את הנוסחה לבחירה עם חזרות וללא חשיבות לסדר והפעם עם פונקציות יוצרות.

חיות קמורות בשורות

חיה היא אוסף של משבצות במישור משובץ כך שלכל שתי משבצות בחיה אפשר לעבור מאחת לשניה דרך משבצות סמוכות. כלומר, חיות הן קשירות. נאמר שחיה היא בגודל n אם היא כוללת n משבצות. לא נבחין בין שתי חיות שהן הזזה אחת של השניה. כן נבחין בין חיות שהן סיבוב אחת של השניה. אז כמה חיות יש בגודל n ?

$\underline{n=1}$: יש 1

$\underline{n=2}$: יש 2

$\underline{n=3}$: יש 6

בעצם לא ידוע כמה חיות יש. אגב, טטריס זה משחק שבו חיות נופלות מהשמיים. לחיה בגודל שתיים קוראים גם **דו**מינו ולכן לחיות קוראים לפעמים גם **פולי**מינו. חיה נקראת קמורה בשורות אם לכל שורה אופקית המשבצות של החיה מופיעות ברצף ללא חורים. נסמן ב $D(n)$ את מספר החיות הקמורות בשורות עם n משבצות.

למה 15.2 שני התנאים הבאים שקולים

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{Q(x)}{P(x)}$ כאשר $\deg(P)=k$ ו $\deg(Q)<k$ ו $P(x)=1+\alpha_1 x+...+x^k$ ו $Q(x)=\beta_0+...+\beta_l x^l$.

2) הסידרה (a_n) מקיימת נוסחת נסיגה לינארית עם מקדמים קבועים

הוכחה: פשוט מכפילים ומקבלים

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right)\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i\right) = Q(x)$$

נפתח ונשווה מקדמים. לכל $m \geq 0$ המקדם של x^{k+m} בצד ימין הוא אפס. מצד שני בצד ימין הוא $\alpha_k a_m + \alpha_{k-1} a_{m+1} + ... + \alpha_0 a_{m+k}$ ומהשוואה לאפס והעברת אגפים מקבלים שלכל $m \geq 0$ מקבלים

$$a_{m+k} = -\left(\alpha_k a_m + ... + \alpha_1 a_{m+k-1}\right)$$

זה מוכיח ש (1) גורר (2) ואותו שיקול נותן גם את הכיוון ההפוך. ■

16 שיעור # 11.05 (יום שלישי)

אם עוברים על כל האפשרויות אפשר לחשב ולקבל $D(4)=19$. נניח שרוצים לספור חיות קמורות בשורות בגודל n כך שבשורה ה i יש n_i משבצות עבור $1 \leq i \leq r$. כלומר, כאשר $n_1+n_2+...+n_r=n$. אז לשורה הראשונה יש אפשרות 1. לשורה השניה יש n_1+n_2-1 אפשרויות (כי צריך משבצת אחת של חפיפה בשביל הקשירות). באופן דומה, לשורה השלישית יש n_2+n_3-1 אפשרויות וכו'. כלומר בסה"כ מספר האפשרויות הינו:

$$D((n_1,...,n_r)) = \prod_{i=1}^{r-1}(n_{r+1}+n_r-1)$$

ולכן בסה"כ עבור $D(n)$ מקבלים

$$D(n) = \sum_{r,n_1+...+n_r=n} D((n_1,...,n_r)) = \sum_{n_1+...+n_r=n}\prod_{i=1}^{r-1}(n_{r+1}+n_r-1)$$

כלומר סוכמים על כל האפשרויות לכתוב את n כסכום של $r \geq 1$ מספרים חיוביים עם חשיבות לסדר ואז לכל אחד הביטוי שסוכמים הוא מה שחישבנו קודם (המכפלה). מן הסתם, זה ביטוי מאד לא יפה והיינו רוצים למצוא

נוסחה יותר סגורה ל $D\left(n\right)$. נגדיר את $D\left(n,r\right)$ להיות מספר החיות הקמורות בהן בשורה הראשונה יש r משבצות. מתקיים

$$D\left(n\right)=\sum_{r=1}^{n}D\left(n,r\right)$$

כעת נרצה למצוא נוסחאת נסיגה ל $D\left(n,r\right)$. לכל חיה קמורה בשורות בגודל n, מספר הדרכים להוסיף שורה עליונה בגודל r תלוי באורך השורה עליונה של החיות. אם יש i משבצות בשורה הראשונה יש $\left(r+i-1\right)$ דרכים להרחיב אותה. לכן מקבלים את נוסחאת הנסיגה

$$D\left(n,r\right)=\sum_{i=1}^{n-r}\left(n+i-1\right)D\left(n-r,i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(n+i-1\right)D\left(n-r,i\right)$$

השיוויון השני תחת ההגדרה $D\left(n,r\right)=0$ כאשר $r>n$. הנוסחה נכונה כאשר $r<n$ אבל כאשר $r=n$, כלומר כשכל המשבצות הן בשורה העליונה, מתקיים $D\left(n,n\right)=1$. נוסיף גם $D\left(0,r\right)=0$ לכל r וזה כבר נותן תיאור מלא של $D\left(n,r\right)$. נגדיר את הפונקציה

$$F\left(X,Y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}D\left(n,r\right)X^{r}Y^{n}$$

נשים לב שתחת ההצבה $X=1$ מקבלים

$$F\left(1,Y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{\infty}D\left(n,r\right)\right)Y^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}D\left(n\right)Y^{n}$$

כלומר, מקבלים פונקציה במשתנה אחד שהיא הפונקציה היוצרת של הסידרה $D\left(n\right)$ שזה מה שמעניין אותנו. אבל מכיוון שנוסחאת הנסיגה שלנו היא עבור $D\left(n,r\right)$, נעבוד עם פונקציית העזר $F\left(X,Y\right)$. נפתח את $F\left(X,Y\right)$ באמצעות נוסחאת הנסיגה שלנו ונקבל

$$F\left(X,Y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}D\left(n,r\right)X^{r}Y^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}X^{n}Y^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(r+i-1\right)D\left(n-r,i\right)X^{r}Y^{n}$$

המחובר הראשון הוא עבור מקרה הקצה $n=r$ שאיננו מכוסה ע"י נוסחאת הנסיגה ובו מתקיים $D\left(n,n\right)=1$. כעת, ננסה לפשט באמצעות מניפולציות אלגבריות את הזהות שקבילנו כטורים פורמליים. ראשית, עבור המחובר הראשון, מנוסחה לסכום של טור הנדסי, מקבלים

$$\sum_{n=1}^{\infty}X^{n}Y^{n}=\frac{XY}{1-XY}=A$$

שנית, במחובר השני נפתח את $r+i-1$ ונקבל

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(r+i-1\right)D\left(n-r,i\right)X^{r}Y^{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(r-1\right)D\left(n-r,i\right)X^{r}Y^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}iD\left(n-r,i\right)X^{r}Y^{n}\\&=B+C\end{aligned}$$

נמשיך לעבוד על המחובר הראשון בביטוי למעלה שקראנו לו B ונקבל

$$\begin{aligned}B &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(r-1)\,D\left(n-r,i\right)X^{r}Y^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}(r-1)\,X^{r}Y^{r}Y^{n-r}\sum_{i=1}^{\infty}D\left(n-r,i\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}(r-1)\,X^{r}Y^{r}Y^{n-r}D\left(n-r\right)\end{aligned}$$

נחליף אינדקס סכימה ל $m=n-r$ ונקבל

$$B=\sum_{m=1}^{\infty}D\left(m\right)Y^{m}\sum_{r=1}^{\infty}(r-1)\,X^{r}Y^{r}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}D\left(m\right)Y^{m}\right)\left(\sum_{r=1}^{\infty}(r-1)\,X^{r}Y^{r}\right)=F\left(1,Y\right)\frac{X^{2}Y^{2}}{\left(1-XY\right)^{2}}$$

כאשר עבור המוכפל הראשון השתמשנו בפיתוח שעשינו קודם ועבור המוכפל השני השתמשנו בנוסחה $\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\frac{1}{(1-z)^{2}}$ שמקבלים מלגזור את הנוסחה של טור הנדסי (עם עוד קצת מניפולציות אלגבריות). נשאר לפתח את המחובר האחרון C:

$$\begin{aligned}C &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}iD\left(n-r,i\right)X^{r}Y^{n}=\sum_{r=1}^{\infty}X^{r}Y^{r}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}iD\left(n-r,i\right)Y^{n-r}\\&=\sum_{r=1}^{\infty}X^{r}Y^{r}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}iD\left(m,i\right)Y^{m}=\frac{XY}{1-XY}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}iD\left(m,i\right)Y^{m}\right)\end{aligned}$$

נשאר ביטוי מכוער שאנחנו עדיין לא יודעים לפתור. קיבלנו אם כך

$$F\left(X,Y\right)=\frac{XY}{1-XY}+\frac{X^{2}Y^{2}}{\left(1-XY\right)^{2}}F\left(1,Y\right)+\frac{XY}{1-XY}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}iD\left(m,i\right)Y^{m}\right)$$

נסמן את החלק המכוער

$$G\left(Y\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}iD\left(m,i\right)\right)Y^{m}$$

ונקבל

$$F\left(X,Y\right)=\frac{XY}{1-XY}+\frac{X^{2}Y^{2}}{\left(1-XY\right)^{2}}F\left(1,Y\right)+\frac{XY}{1-XY}G\left(Y\right)$$

נשים לב ש X נכנס רק בצורה של פונקציה רציונלית והחלק הלא ברור הוא רק פונקציה של Y. נגדיר שתי פעולות על פונקציות בשני משתנים (או למעשה על טורי חזקות פורמליים בשני משתנים). הראשונה היא הפעולה שכבר השתמשנו בה שהיא להציב 1 במקום X, כלומר

$$L_{1}H\left(X,Y\right)=H\left(1,Y\right)$$

הפעולה השניה היא קצת יותר מסובכת, גוזרים לפי X ואח"כ מציבים $X=1$, כלומר

$$L_2 H\left(X,Y\right)=\frac{\partial H}{\partial X}|_{X=1}$$

יש כל מיני סוגיות אנליטיות של רדיוס התכנסות וכו' שאנחנו מזניחים מתוך הנחה כללית שבמקרה שלנו הכל עובד בסדר. את $L_1 F\left(X,Y\right)=F\left(1,Y\right)$ כבר ראינו. הפעולה השניה נותנת

$$L_2 F\left(X,Y\right)=L_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}D\left(n,r\right)X^r Y^n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}rD\left(n,r\right)X^{r-1}Y^n\right)|_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{\infty}rD\left(n,r\right)\right)Y^n=G\left(Y\right)$$

נשים לב גם ש L_1 ו L_2 אופרטורים לינאריים. כעת, נפעיל אותם על שני האגפים של הביטוי שהגענו אליו. קודם נפעיל את L_1 ונקבל

$$L_1\left(F\left(X,Y\right)\right)=L_1\left(\frac{XY}{1-XY}+\frac{X^2Y^2}{\left(1-XY\right)^2}F\left(1,Y\right)+\frac{XY}{1-XY}G\left(Y\right)\right)$$

$$F\left(1,Y\right)=\frac{Y}{1-Y}+\frac{Y^2}{\left(1-Y\right)^2}F\left(1,Y\right)+\frac{Y}{1-Y}G\left(Y\right)$$

כעת נפעיל את L_2 ונקבל

$$L_2 F\left(1,Y\right)=L_2\left(\frac{XY}{1-XY}+\frac{X^2Y^2}{\left(1-XY\right)^2}F\left(1,Y\right)+\frac{XY}{1-XY}G\left(Y\right)\right)$$

$$G\left(Y\right)=L_2\left(\frac{XY}{1-XY}\right)+L_2\left(\frac{X^2Y^2}{\left(1-XY\right)^2}\right)F\left(1,Y\right)+L_2\left(\frac{XY}{1-XY}\right)G\left(Y\right)$$

גוזרים ומציבים ויוצא

$$G\left(Y\right)=\frac{Y}{\left(1-Y\right)^2}+\frac{2Y^2}{\left(1-Y\right)^3}F\left(1,Y\right)+\frac{Y}{\left(1-Y\right)^2}G\left(Y\right)$$

אפשר לחשוב על הזהויות שקיבלנו כעל מערכת של שתי משוואות לינאריות בשני נעלמים.

$$\frac{Y}{1-Y}+\frac{2Y-1}{\left(1-Y\right)^2}F\left(1,Y\right)+\frac{Y}{1-Y}G\left(Y\right)=0$$

$$\frac{Y}{\left(1-Y\right)^2}+\frac{2Y^2}{\left(1-Y\right)^3}F\left(1,Y\right)+\frac{-1+3Y-Y^2}{\left(1-Y\right)^2}G\left(Y\right)=0$$

ואחרי צימצום מכנים מקבלים

$$Y+\frac{2Y-1}{1-Y}F\left(1,Y\right)+YG\left(Y\right)=0$$

$$Y+\frac{2Y^2}{1-Y}F\left(1,Y\right)+\left(-1+3Y-Y^2\right)G\left(Y\right)=0$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב $-1+3y-y^2$ ואת המשוואה השניה ב Y כדי להשוות את המקדמים של $G\left(Y\right)$:

$$\left(-1+3Y-Y^2\right)Y+\frac{\left(-1+3Y-Y^2\right)\left(2Y-1\right)}{1-Y}F\left(1,Y\right)+\left(-1+3Y-Y^2\right)YG\left(Y\right)=0$$

$$Y^2+\frac{2Y^3}{1-Y}F\left(1,Y\right)+\left(-1+3Y-Y^2\right)YG\left(Y\right)=0$$

וכמובן נחסר

$$\left[\left(-1+3Y-Y^2\right)Y-Y^2\right]+\left[\frac{\left(-1+3Y-Y^2\right)\left(2Y-1\right)}{1-Y}-\frac{2Y^3}{1-Y}\right]F\left(1,Y\right)=0$$

$$\left[-Y+2Y^2-Y^3\right]+\left[\frac{1-5Y+7Y^2-4Y^3}{1-Y}\right]F\left(1,Y\right)=0$$

$$F\left(1,Y\right)=\frac{\left(y^3-2Y^2+Y\right)\left(1-Y\right)}{1-5Y+7Y^2-4Y^3}=\frac{Y^4-3Y^3+3Y^2-Y}{4Y^3-7Y^2+5Y-1}$$

נרצה לחלק עם שארית כך שהחלק השברי יהיה עם מונה מדרגה נמוכה יותר מזו של המכנה ונקבל

$$F\left(1,Y\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{5-13Y+7Y^2}{1-5Y+7Y^2-4Y^3}\right)-5+4y$$

נקבל שבטור החזקות $F\left(1,Y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}D\left(n\right)Y^n$ המקדמים $D\left(n\right)$ מקיימים לכל $n\geq 2$ את הזהות

$$D\left(n+3\right)-5D\left(n+2\right)+7D\left(n+1\right)-4D\left(n\right)=0$$

וזה נותן את נוסחאת הנסיגה

$$D(n+3)=5D(n+2)-7D(n+1)+4D(n)$$

למזלנו כבר חישבנו את $D(4),..,D(1)$ ועכשיו אפשר לחשב את $D(5)$ באופן הבא:

$$D(5)=D(2+3)=5D(2+2)-7D(2+1)+4D(2)=5\cdot 19-7\cdot 6+4\cdot 2=95-42+8=53+8=61$$

אם לפולינום $P(y)=1-5y+7y^2-4y^3$ יש היו שלושה שורשים ממשיים שונים, כלומר $P(y)=(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)$ היינו מקבלים שאפשר לכתוב

$$\frac{1}{P(y)}=\frac{A}{y-\alpha}+\frac{B}{y-\beta}+\frac{C}{y-\gamma}$$

17 בחזרה לשגרה (סוף תקופת יאנובסקי)

17.1 נוסחת קטלן באמצעות פונקציות יוצרות

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n\geq 1} a_n x^n \quad a_0=0\\
F(x)^2 &= \left(\sum_{k\geq 1}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k\geq m}^{\infty} a_m x^m\right)\\
&= \sum_{n\geq 2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(a_k a_{n-k})\,x^n=\sum_{n\geq 2}^{\infty} a_n x^n = F(x)-x
\end{aligned}$$

ולכן:

$$F(x)^2-F(x)+x=0$$

נקבל מכך:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1-4x}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n x^n
\end{aligned}$$

ולכן:

$$a_n=-\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n$$

ומכיוון שטור החזקות של $(1+x)^{\alpha}$ הוא $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ נציב ונקבל:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}4^n\left(-1\right)^n\\
&=\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)...\left(\frac{-2n+3}{2}\right)4^n\left(-1\right)^n}{n!}\\
&=\frac{\left(-1\right)\left(1\right)\left(-1\right)\left(-3\right)\left(-5\right)...\left(2n-3\right)4^n\left(-1\right)^n}{2^{n+1}\cdot n!}\\
&=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot\left(2n-3\right)\cdot4^n}{2^{n+1}\cdot n!}=\frac{\left(2n-2\right)!\cdot4^n}{\left(2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot\left(2n-2\right)\right)\cdot2^{n+1}\cdot n!}\\
&=\frac{\left(2n-2\right)!\cdot4^n}{2^{n-1}\cdot\left(1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot\left(n-1\right)\right)\cdot2^{n+1}\cdot n!}=\frac{\left(2n-2\right)!}{n!\left(n-1\right)!}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

וזה אכן מספר קטלן.

17.2 מניה של עצים

הגדרה 17.1 מניה של עצים על קודקודים מסומנים היא כאשר כל קודקוד הוא מיוחס, לדוגמה - עבור ארבעה קודקודים, מסילה שמתחילה בקודקוד 1 ומסתיימת ב 4 נספרת בנפרד ממסילה שמתחילה ב 2 ומסתיימת ב 4.

משפט 17.2 קיילי: מספר העצים על n קודקודים מסומנים הוא n^{n-2}

הגדרה 17.3 איזומורפיזם בין גרפים היא העתקה בין הקודקודים השומרת על צלעות

באופן כללי יש על n קודקודים $2^{\binom{n}{2}}$ גרפים אפשריים (כל צלע אפשר לבחור או לא).
כמה גרפים עד כדי איזומורפיזם יש? זו שאלה קשה יותר שנגיע אליה מאוחר יותר.
יהי G גרף (V,E) ו $V=\{1,...,n\}$ ונסמן ב $k(G)$ את מספר העצים הפורשים ב G. נסמן $|E|=m$

הגדרה 17.4 נגדיר את מטריצת החילה של גרף $I_{n\times m}(G)$ באופן הבא - כל שורה מתאימה לקודקוד וכל עמודה מתאימה לצלע ויש 1 בתא אם קודקוד משתתף בעמודה ו 0 אחרת.

הגדרה 17.5 מטריצת החילה המכוונת $\tilde{I}_{n\times m}(G)$ מתקבלת אם נרשום 1 כאשר קודקוד הוא זנב של צלע ו -1 כאשר הוא ראש (וכמובן 0 אם אין צלע).

הגדרה 17.6 מטריצת החילה המכוונת המקוצצת $\overline{I}_{n-1\times m}(G)$ מתקבלת ממטריצת החילה המכוונת ע"י השמטת השורה האחרונה

מטריצת השכנות $A_{n\times n}(G)$ היא מטריצה שבה גם השורות וגם העמודות מייצגות קודקודים ונרשום 1 בתא המתאים לשני קודקודים המשתתפים בצלע.

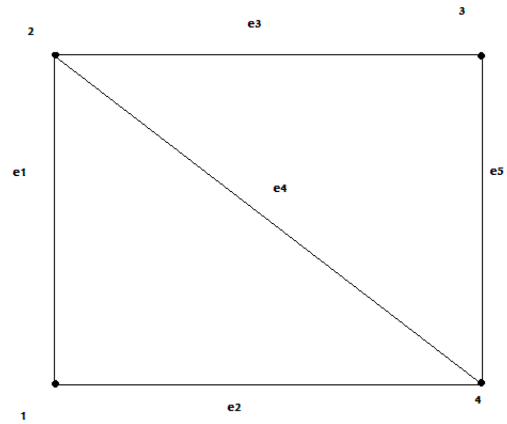
$D_{n\times n}(G)$ היא מטריצת הדרגה, שבה על האלכסון נרשום את דרגת הקודקוד המתאים.
$\overline{A}(G)$ היא מטריצת השכנות המקוצצת - שנמחק ממנה את השורה וגם את העמודה האחרונה.
$\overline{D}(G)$ מטריצת הדרגה המקוצצת כנ"ל.

משפט 17.7 משפט עץ-מטריצה Matrix-tree theorem

$$det\left(\overline{I}\left(G\right)\cdot\overline{I}\left(G\right)^T\right)=k\left(G\right)$$

$$\overline{I}\left(G\right)\cdot\overline{I}\left(G\right)^T=\overline{D}\left(G\right)-\overline{A}\left(G\right)$$

נתבונן בגרף הבא:



נכוון באופן שרירותי כל צלע כך שתהיה מהקודקוד הקטן לגדול מבין השניים שמרכיבים אותה.
מטריצת החילה המכוונת תהיה:

$$\tilde{I}(G)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

ומקוצצת:

$$\overline{I}(G)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ואז:

$$\overline{I}(G)^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\overline{I}(G)\,\overline{I}(G)^T=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=\overline{D}(G)-\overline{A}(G)$$

כפי שהמשפט אומר.
ואכן:

$$det=8$$

גם כן.

נצטט את נוסחת קושי־בינה מאלגברה ליניארית, האומרת שעבור מטריצות $A_{n\times m},B_{m\times n}$ (אולי לא ריבועיות) מתקיים:

$$det\left(A\cdot B\right)=\sum_{C_{n\times n}\,submatrix\,of\,A\,and\,D_{n\times n}matching\,submatrix\,of\,B}det\left(C\right)\cdot det\left(D\right)$$

ולכן:

$$det\left(\overline{I}\left(G\right)\cdot\overline{I}\left(G\right)^{T}\right)=\sum_{H\,subgraph\,of\,I\,with\,n-1\,edges}det\left(\overline{I}\left(H\right)\right)\cdot det\left(\overline{I}\left(H\right)^{T}\right)=\sum_{A\,submatrix\,of\,G}det\left(A_{n-1\times n-1}\right)^{2}$$

18 ממשיכים במניית עצים

נמשיך ב Matrix Tree theorem:

אם אכן

$$\overline{I}\left(G\right)\cdot\overline{I}\left(G\right)^{T}=\overline{D}\left(G\right)-\overline{A}\left(G\right)$$

אז:

$$\left(\overline{I}\left(G\right)\cdot\overline{I}\left(G\right)^{T}\right)_{ij}=\begin{cases}deg\left(i\right) & i=j\\ -1 & \{i,j\}\in E\\ 0 & \{i,j\}\notin E\end{cases}$$

קל לראות שזה אכן מתקבל (כי מכפלת שורה בעצמה תיתן את דרגת השורה, ומכפלת שורה בשורה אחרת 1־ אם יש ביניהן צלע ו 0 אחרת)

ידוע לנו מקושי בינה כי:

$$det\left(\overline{I}\left(G\right)\cdot\overline{I}\left(G\right)^{T}\right)=\sum_{A\,submatrix\,of\,G}det\left(A_{n-1\times n-1}\right)^{2}$$

כלומר בסכום הימני צריך לבחור בכל פעם תת גרף ובו $n-1$ צלעות ולהתבונן במטריצה המתאימה.

למה 18.1 אם H גרף על הקודקודים $\{1...n\}$ עם $n-1$ צלעות אז:

$$det\left(\overline{I}\left(H\right)\right)=\begin{cases}0 & H\,is\,not\,a\,tree\\ \pm1 & otherwise\end{cases}$$

נעיר כי ב $\overline{I}\left(G\right)$ השורות תלויות לינארית אם"ם הגרף G אינו קשיר (לא קשה להיווכח בכך, כיוון שעצם הורדת השורה נועדה כדי לפגום בתלות של הגרף כולו, ואם יש יותר מרכיב קשירות אחד, אז השורות המתאימות לו תהיינה תלויות).

מכאן שאם H אינו עץ אכן מתקבל 0.

נשלים את ההוכחה אם נראה שעבור עץ יתקבל ±1 בדטרמיננטה.

זה נכון כיוון שניתן לפתח את הדטרמיננטה לפי השורה והעמודה המתאימות לתא שיש בו ±1 (כי מובטח שיש עלה) ומשם באינדוקציה (כי קיבלנו את הדטרמיננטה של עץ יותר קטן כפול ±1).

זה משלים את הוכחת הלמה.

מכיוון שכך ־ ברור שאכן בביטוי

$$det\left(\overline{I}\left(G\right)\cdot\overline{I}\left(G\right)^{T}\right)=\sum_{A\,submatrix\,of\,G}det\left(A_{n-1\times n-1}\right)^{2}$$

נקבל 1 עבור כל תת גרף בן n קודקודים ו $n-1$ צלעות שהוא עץ, וזה משלים את הוכחת Matrix Tree theorem.

18.0.1 נוסחת קיילי

ניקח את מטריצת החילה המקוצצת המתאימה לגרף השלם על n קודקודים ־ K_n ונחשב את:

$$\overline{I}\left(K_n\right)\overline{I}\left(K_n\right)=\left(\begin{array}{cccc} n-1 & -1 & -1 & \\ & n-1 & n-1 & \\ & -1 & & \\ & & & \\ & & & n-1 \end{array}\right)=\overline{D}-\overline{A}=M$$

ונרצה לחשב את הדטרמיננטה של המטריצה הזו.

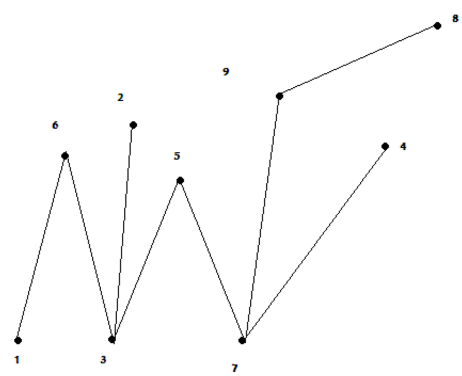
$$det\left(M-I_{id}\right)=0\Rightarrow$$

1 הוא ערך עצמי עם ריבוי 1.

$$rank\left(A-\lambda I\right)\leq n-r\Rightarrow$$

λ הוא ערך עצמי עם ריבוי r לפחות.
ואז n הוא ערך עצמי עם ריבוי $n-2$ ולכן הדטרמיננטה היא n^{n-2}.

18.0.2 סדרת $Prufer$



בהנתן עץ:
נבחר את העלה הכי קטן, נמחק אותו, ואת שכנו נוסיף לסדרה, נקבל כך את:

$$6,3,7,3,5,7,9$$

וכשמגיעים לצלע אחת ־ עוצרים. נקבל כך סדרה באורך $n-2$
מה מאפיין את הסדרה?
עלים לא יופיעו בסדרה.
כל קודקוד שאינו עלה ־ יופיע כדרגתו (בכל פעם ששכנו יהיה עלה ויקוצץ).
הסדרה (בהנתן n) מאפיינת לחלוטין את הגרף, כיוון שנוכל לרשום את הקודקודים שאינם מופיעים בה לפי הסדר, ולצייר את העץ (באופן עקרוני פעולת יצירת הסדרה היא הפיכה) ולכן זו העתקה חח"ע ועל ממרחב העצים למרחב הסדרות מתוך n באורך $n-2$, וזו בעצם הוכחה אלטרנטיבית לנוסחת קיילי.

18.0.3 יערות מושרשים

יער הוא גרף חסר מעגלים.

יער מושרש הוא יער שבו לכל מרכיב קשירות (עץ) יש קודקוד מיוחס הנקרא שורש.

נסמן יער מושרש (F,R) כאשר Fיער, R קבוצת הקודקודים המיוחסים.

בהנתן עץ מושרש, יש לכל קודקוד מסילה יחידה בינו ובין השורש, כאשר נוריד צלע מהעץ, ברכיב הקשירות שניתקנו מהשורש, יש קודקוד אחד שהוא הקרוב ביותר לשורש בעץ המקורי, והוא גם קודקוד בצלע שהסרנו, וקודקוד זה יהפוך לשורש של העץ שנותק מהשורש הקודם.

אם יער אחד מתקבל מהשני על ידי מחיקת צלע כנ"ל ־ נאמר שהיער המתקבל מכיל את היער המקורי.

נסמן ב $T(n)$את מספר העצים המושרשים עם n קודקודים מסומנים, ונבחין כי אם נתחיל בעץ על כל הקודקודים, יש $(n-1)!$ דרכים לבנות שרשרת שתוביל ליער חסר צלעות על n קודקודים.

כיוון שיש $T(n)$ עצים, אזי באופן כללי יש $T(n)\cdot(n-1)!$ שרשראות שכאלה.

בהנתן k מרכיבי קשירות, אם נרצה להוסיף צלע ולעבור ל $k-1$ מרכיבי קשירות, נצטרך לבחור שני קודקודים:

1. אחד מהם חייב להיות שורש של מרכיב קשירות כלשהו
2. השני יכול להיות כל קודקוד שהוא (שונה מהראשון)

אם נבחר בסדר הפוך נבחר אחד מ n הקודקודים להיות הקודקוד הסתמי, ואחד מ $k-1$ הקודקודים שהם שורשים של רכיבי קשירות שונים משל הקוד' הראשון שבחרנו. מספר האפשרויות לכך הוא $n\cdot(k-1)$ וזה נכון לכל שלב בדרך.

מכאן נובע שמספר הדרכים לעשות זאת הוא:

$$n\left(n-1\right)n\left(n-2\right)\cdot\ldots\cdot n\cdot 1=\prod_{k=2}^{n}n\cdot\left(k-1\right)=n^{n-1}\cdot\left(n-1\right)!$$

ואם נשווה זאת לשיטת הספירה הקודמת ־ נקבל

$$T\left(n\right)\left(n-1\right)!=n^{n-1}\left(n-1\right)!\Rightarrow T\left(n\right)=n^{n-1}$$

נבחין שכל עץ מסומן יתקבל ב n דרכים (בכל פעם קודקוד אחר יהיה השורש) ולכן מספר העצים המסומנים יהיה n^{n-2}

[לא ברור אם יש לומר עצים משורשים או עצים מושרשים, הפותר נכונה יזכה בפרס, הפותר לא נכונה יזכה בקצב]

18.0.4 הוכחה נוספת עם פונקציות מ n ל n.

כמה עצים עם שני שורשים (שורש ראשי ושורש משני) יש? n^n, ולכן ננסה למצוא התאמה בין היצורים הללו לפונקציות מ $[n]$ ל $[n]$.

בהנתן עץ עם שני שורשים, נתבונן במסילה משורש א' לשורש ב'.

נתבונן בקודקודים לאורך המסילה בסדר עולה (לפי n)

נתבונן באותם קודקודים לפי הסדר שמשרה המסילה

נתאים בין שני הסידורים כדי לבנות פונקציה מ $[n]$ ל $[n]$.

זה טוב ויפה כי זה מגדיר את ההעתקה בין קודקודי המסילה ־ מה עם הקודקודים שאינם על המסילה? בהנתן קוד' a שאינו על המסילה, יש קוד' b על המסילה שהוא הקרוב לו ביותר, נכוון מסילה מ a ל b ונגדיר את ההעתקה בין כל קודקוד במסילה לבא אחריו.

אז בשלב הראשון הראנו שניתן לבנות מעץ עם שני שורשים פונקציה כנ"ל.

כעת צריך להראות שמכל פונקציה ניתן לבנות עץ שמייצג אותה.

תהי $f:[n]\to[n]$, אזי יש $A\subseteq[n]$ כלשהי, כך ש $f_{|A}$ היא תמורה על A.

קל לנחש שנרצה ש A הזו תהיה הקודקודים שבין שני השורשים.

נפעיל את f על A לפי הסדר ונקבל את הסדר של קודקודי על המסילה המתאימה, ואת הקודקודים האחרים נתאים באופן דומה. [לא פירטנו יותר מדי ודי הסתפקנו בציורים של דוגמאות כדי להוכיח, ולכן לא אנסה לרשום הוכחה פורמלית כאן]

18.0.5 הוכחה נוספת על יסוד הקשר בין מניה ובין מניית קבוצות לא סדורות

דוגמא:

כמה גרפים יש על n קוד' מסומנים = $g(n)$

כמה גרפים קשירים יש על n קוד' מסומנים = $c(n)$

ברור ש $g(n) = 2^{\binom{n}{2}}$

ניעזר בפונקציות יוצרות אקספוננציאליות.

בהנתן סדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ הפונקציה היוצרת הרגילה היא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

הגדרה 18.2 הפונקציה היוצרת המעריכית היא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

בהנתן גרף על n קודקודים אפשר להציג אותו כאוסף של רכיבי קשירות שהם גרפים קשירים על קבוצות של $n_1, n_2, ..., n_k$ קודקודים, כך ש $\sum n_i = n$

נגדיר:

$$G(x) = \sum_{n \geq 1} g(n) \frac{x^n}{n!}$$

$$C(x) = \sum_{n \geq 1} c(n) \frac{x^n}{n!}$$

ונשאל מה הקשר ביניהם?

הנוסחה האקספוננציאלית אומרת:

$$1 + G(x) = e^{C(x)}$$

מדוע? הרי לכל $F(x)$

$$e^{F(x)} = 1 + F(x) + \frac{F^2(x)}{2} + \frac{F^3(x)}{3!} + ...$$

מפיתוח טיילור של האקספוננט.

ואז:

$$e^{C(x)} = 1 + C(x) + \frac{C^2(x)}{2} + \frac{C^3(x)}{3!} + ...$$

נבחין שהאיבר הראשון אחרי 1 הוא הפונקציה היוצרת עבור מספר הגרפים קשירים על n קודקודים.

האיבר הבא הוא הפונקציה היוצרת עבור גרפים עם שני מרכיבי קשירות על n קודקודים, למה?

נגדיר $g_2(x)$ להיות מספר הגרפים על n קוד' עם 2 מרכיבי קשירות בדיוק, ואז:

$$g_2(n) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} c(m) c(n-m)$$

(כי נסתכל על כל החלוקות של הקודקודים לשתי קבוצות וכו')

$$\frac{C^2(x)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{m\geq 1}\frac{c(m)\,x^m}{m!}\right)\left(\sum_{r\geq 1}\frac{c(r)\,x^r}{r!}\right)$$
$$=\sum_{n\geq 2}\underbrace{\left(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{n!c(m)\,c(n-m)}{m!\,(n-m)!}\right)}_{g_2(n)}\frac{x^n}{n!}$$

באופן דומה ניתן להראות שהפונקציה היוצרת של $g_k(n)$ היא האיבר ה $k+1$ בפיתוח של $e^{C(x)}$.

18.0.6 עצים ויערות

אם נסמן ב $f(n)$את מספר היערות המושרשים
ונגדיר $F(x)=\sum\frac{f(n)}{n!}x^n$
וב $t(n)$את מספר העצים המושרשים
ונגדיר $T(x)=\sum\frac{t(n)}{n!}x^n$
נטען כי מתקיים:

$$e^{T(x)}=1+F(x)$$

[הוכחה: באופן דומה לקשר בין גרפים לגרפים קשירים, אבל לא השלמנו אותה]

18.1 חלוקות

חלוקה היא רישום של מספר כסכום של מספרים אחרים, למשל $7=3+2+2$
נסמן $p(n)$=מספר החלוקות של n (אין חשיבות לסדר המחוברים)
$q(n)$=מספר החלוקות של n עם חלקים שונים.
נגדיר $q(0)=p(0)=1$
נביט בפונקציה היוצרת:

$$\sum_{n=0}^{\infty}q(n)\,x^n=(1)(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)\cdot\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^k\right)$$

נסביר את הפולינום: המקדם של x^k יתקבל מתהליך הבחירה הבא: ניקח את x^{n_1} מתוך הסוגריים ה n_1, ניקח x^{n_2} מתוך הסוגריים ה n_2 וכך הלאה עד שניקח את x^{n_i} מתוך הסוגריים ה n_i ובלבד שיתקיים $\sum n_j=k$. כיוון שהתהליך הזה מתאים בדיוק לבחירת מספרים שלמים המסתכמים ל k, נקבל שאכן המקדם של x^k יהיה $q(n)$.

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty}p(n)\,x^n=\left(1+x+x^2+\ldots\right)\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)\left(1+x^3+x^6+\ldots\right)$$
$$=\prod_{k\geq 1}\left(1+x^k+x^{2k}+\ldots\right)=\prod_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0}x^{nk}=\prod_{k\geq 1}\left(\frac{1}{1-x^k}\right)$$

מדוע החלוקה? כך למשל ההסגר הראשון מציין כמה חלקים בגודל 1 ניקח, ההסגר השני כמה חלקים בגודל 2 וכן הלאה, ולכן חלוקה של 11 ל $4+2+2+1+1+1$ תצויין ע"י בחירת x^3 מההסגר הראשון, x^4 מההסגר השני (כלומר בחרנו שני חלקים בגודל 2), 1 מתוך ההסגר השלישי (כלומר 0 חלקים בגודל 3) ו x^4 מתוך ההסגר הרביעי, ומשם ואילך 1 מתוך כל ההסגרים האחרים.
לכן כל אסטרטגיית סיכום של איברים שונים שתיתן 11 תגרום לתוספת של אחד למקדם של x^{11}.

נסמן ב $e(n)$ את מספר החלוקות לחלקים אי זוגיים יהיה לכן:

$$\prod_{k\geq 1}\left(\frac{1}{1-x^{2k-1}}\right)$$

מעניין שמספר החלוקות למספרים אי זוגיים ומספר החלוקות לחלקים שונים - שוות.
נראה זאת ע"י שוויון בין הפונקציות היוצרות, נראה כי:

$$\prod_{k\geq 1}\left(1+x^k\right)=\prod_{r\geq 1}\frac{1}{1-x^{2r-1}}$$

הוכחה: (של אורן בקר):

$$\prod_{k\geq 1}\left(1+x^k\right)=\prod_{k\geq 1}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$$

ולכן אם נצמצם חזקות - נקבל שכל האיברים שבהם חזקת x זוגית - מצטמצמים מהמכנה, ולכן נשאר עם:

$$\prod\frac{1}{1-x^{2k-1}}$$

כפי שרצינו. ■

האם יש דרך אינטואיטיבית להראות שוויון בין מספר החלוקות לחלקים שונים ובין מספר החלוקות לחלקים אי זוגיים?

נתחיל בחלוקה לחלקים שונים, וכל חלק נציג על ידי $2^i\cdot r$ עבור r אי־זוגי , (כאשר i יכול להיות גם 0) ונמיר אותו בהצגה של r, 2^i פעמים.

בכיוון השני בהנתן חלוקה לחלקים אי זוגיים, אם למשל 7 מופיע 3 פעמים, נמיר אותו בהצגה $7\cdot\left(2^1+2^0\right)$ וכך הלאה עד שנקבל חלקים שונים.

19 תמורות

19.1 מבנה מחזורים

אפשר לאפיין תמורה ע"י מבנה המחזורים שלה (כלומר החלוקה למחזורים זרים, ומהו בדיוק כל מחזור).

19.2 מספר היפוכים

נאמר ש (i,j) הוא היפוך בתמורה π אם $i<j$ ו $\pi(i)<\pi(j)$

הגדרה 19.1 $a_l(n)$= מספר התמורות ב S_n עם l היפוכים

ברור ש:

$$0\leq a_l(n)\leq\binom{n}{2}$$

ואז:

$$F(q)=\sum_{l=0}^{\binom{n}{2}}a_l(n)\,q^l=\left(1+q+...+q^{n-1}\right)\left(1+q+...+q^{n-2}\right)\cdot...\cdot\left(1+q+q^2\right)(1+q)\cdot 1$$

זה מכונה האנלוג ה q־י של $n!$
נסביר את שוויון הפולינומים לעיל:

עבור $q=1$ נקבל כמובן $\sum_{l=0}^{\binom{n}{2}} a_l\left(n\right)=n!$.

נראה איך אנחנו בונים תמורה - מניחים את 1 במרכז, ואז את 2 אפשר להוסיף ב 2 דרכים (משמאל או מימין), את 3 אפשר להוסיף ב 3 דרכים (ביניהם, משמאל, או מימין), ואז להוסיף את k אפשר ב k דרכים. וברור שסך הכל יש לנו $n!$ דרכים לבנות תמורה (את זה אנחנו כבר יודעים).

נביט בזה בדרך שונה: כאשר מוסיפים את k - כמה היפוכים עם מספרים קטנים מ k נתרמים על ידי k?

אם נכניס את k מימין - כל המספרים קטנים ממנו והוא תורם 0 היפוכים.

אם מכניסים את k בין שני המספרים הכי ימניים - הוא תורם היפוך אחד - זה q.

בין המספר השני מימין לשלישי - נתרמים שני היפוכים וזה q^2.

סה"כ:

$$\left(1+q+q^2+...+q^{k-1}\right)$$

אפשר לתאר את תהליך הבניה כך:

את 1 הכנסנו במקום ה $0 \le i_1 \le 0$ מימין

את 2 הכנסנו במקום ה $0 \le i_2 \le 1$ מימין

את 3 הכנסנו במקום ה $0 \le i_3 \le 2$ מימין

...

את n הכנסנו במקום ה $0 \le i_n \le n-1$ מימין

כמה היפוכים יש לתמורה שבנינו?

1 תורם i_1 היפוכים, 2 תורם i_2 היפוכים וכן הלאה, ואז נקבל :

$$\begin{aligned}F\left(q\right) &= \sum_{i_1=0}^{0}\sum_{i_2=0}^{1}...\sum_{i_n=0}^{n-1} q^{i_1+i_2+...+i_n} = \sum_{i_1}\sum_{i_2}...\sum_{i_n} q^{i_0}q^{i_1}\cdot ...\cdot q^{i_n}\\ &= \sum_{i_1} q^{i_1}\sum_{i_2} q^{i_2}...\sum_{i_n} q^{i_n} = 1\left(1+q\right)\left(1+q+q^2\right)...\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}\right)\end{aligned}$$

דוגמה: S_3 נביט בתמורות לפי מספר ההיפוכים שלהן:

אפס היפוכים - תמורת הזהות 123

היפוך אחד - $213, 132$

שני היפוכים - $231, 312$

שלושה היפוכים - 321

הגדרה 19.2 יחס הסדר החלש על תמורות הוא: $\pi < \sigma$ אם אפשר לקבל את π מ σ ע"י הכפלה משמאל בחילופים <u>מהצורה $(i,i+1)$</u> כשכל חילוף מגדיל את מספר ההיפוכים.

כך למשל $123 < 213$ ע"י הכפלה ב (12), ואז ב S_3 מתקבל הסדר הבא:

$$123 < 213 < 231 < 321$$

$$123 < 132 < 312 < 321$$

זה מתאים גם ליחס הכלה ביחס להיפוכים, ולא במקרה, וניתן להגדיר באופן שקול $\pi < \sigma$ אם קבוצת ההיפוכים של π מכילה את קבוצת ההיפוכים של σ.

הגדרה 19.3 יחס הסדר החזק (יחס ברוה - Bruhat) הוא: $\pi < \sigma$ אם אפשר לקבל את π מ σ ע"י הכפלה משמאל בחילופים <u>כלשהם</u> כשכל חילוף מגדיל את מספר ההיפוכים.

ואז בנוסף ליחס לעיל מקבלים גם:

$$132 < 231$$

$$213 < 312$$

תכונת הסריג (שאומרת שלכל שני איברים יש איבר יחיד שגדול משניהם ומינימלי ביחס לזה) מתקיימת ביחס הסדר החלש אך לא בחזק.

19.3 קבוצת ירידה

אם π תמורה אז

$$I\left(\pi\right)=\left\{ i\mid1\leq i\leq n\ :\ \pi\left(i\right)>\pi\left(i+1\right)\right\}$$

כלומר האינדקסים שבהם התמורה יורדת, כך למשל עבור התמורה 2376541 מתקיים שקבוצת הירידה שלה היא $\{3,4,5,6\}$ (כלומר המקומות בתמורה שאחריהם יש ירידה).
קבוצת הירידה של תמורת הזהות היא הקבוצה הריקה, קבוצת הירידה של תמורת ההיפוך היא $[n-1]$.

דוגמה S_3 **:**

$$\begin{aligned}I\left(123\right) & =\emptyset\\
I\left(213\right) & =\left\{ 1\right\} \\
I\left(132\right) & =\left\{ 2\right\} \\
I\left(231\right) & =\left\{ 2\right\} \\
I\left(312\right) & =\left\{ 1\right\} \\
I\left\{ 321\right\} & =\left\{ 1,2\right\}
\end{aligned}$$

הגדרה 19.4

$$m\left(\pi\right)=\sum_{i\in I\left(\pi\right)}i$$

אם מגדירים

$$G\left(q\right)=\sum_{\pi\in S_{n}}q^{m\left(\pi\right)}$$

אז מקבלים את נוסחת מקמהון

$$F\left(q\right)=G\left(q\right)$$

(לא נוכיח זאת)
ידוע לנו ש

$$\sum_{k=1}^{n-1}=\binom{n}{2}$$

(יש לכך הרבה הוכחות, למשל כאן: /http://demonstrations.wolfram.com/ProofWithoutWords12N1NChoose2)
כמה תמורות יש ב S_n עם c_1מחזורים באורך 2, c_2 מחזורים באורך 2, ... c_n מחזורים באורך n.
צריך לקיים:

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 + ... + nc_n = n$$

כך למשל אם $c_n = 1$ אז כל $c_i = 0$ לכל $i \neq n$.
כך למשל עבור התמורה:

$$(12)\,(3)\,(4)\,(567)\,(8\,9\,10)$$

מתקיים:

$$c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 0$$

אם לתמורה π יש c_1 מחזורים באורך 1, ... וכן הלאה, אומרים ש π היא תמורה מסוג $1^{c_1}2^{c_2}...n^{c_n}$.
כמה תמורות מגדירה סדרה נתונה?
נתחיל בסידור הסוגריים המתאימים לגדלי התמורות, כעת נוכל להניח את n האיברים בתוכן ב $n!$ איברים, אבל יש תמורות שקולות במה שמנינו.
כך למשל את כל המחזורים באורך 3 אפשר להחליף ביניהם, ולכן נחלק בכל האפשרויות לערבב מחזורים מאותו האורך.
בנוסף - תמורות ציקליות הן שקולות, ולכן נחלק גם בזה ונקבל:

$$\frac{n!}{c_1!c_2! \cdot ... \cdot c_n! \cdot 1^{c_1}2^{c_2}3^{c_3} \cdot ... \cdot n^{c_n}}$$

כמה תמורות יש ב S_n, שבהן יש k מחזורים, כלומר $\sum c_i = k$? נסמן זאת ע"י $a\,(n,k)$
אם n נקודת שבת בתמורה אז בהנתן $a\,(n-1,k-1)$ אפשר להוסיף את n בתור נקודת שבת ולקבל תמורה על n בת k מחזורים.
אם n איננה נקודת שבת, אז זו בעצם תמורה מ $a\,(n-1,k)$ ורק צריך לבחור לאיזה מהמחזורים להוסיף את n ובאיזה מקום במחזור, כלומר למחזור באורך t אפשר להוסיף את n באחד מ t מהמקומות. בסך הכל, אם נתבונן ברשימת המחזורים - יש $n-1$ מקומות שבהם אפשר "להכניס" את n.
מהטיעון הנ"ל:

$$a\,(n,k) = a\,(n-1,k-1) + (n-1)\,a\,(n-1,k)$$

והראינו בתרגיל ש:

$$\sum a\,(n,k)\,x^{n-k} = x\,(x+1)\,...\,(x+n-1)$$

כמו כן אם b_n מקיים:

$$\sum b\,(n,k)\,x^{n-k} = x\,(x+1)\,...\,(x+n-1)$$

אז $b\,(n,k)$ מקיים את אותה נוסחת נסיגה כמו $a\,(n,k)$.

19.3.1 מניית תתי מרחבים וקטוריים

$a(n,k)$= כמה תתי מרחב k ממדיים יש למרחב nממדי מעל שדה עם qאיברים
$b(n,k)$ = בכמה דרכים אפשר לבחור kוקטורים בת"ל ב F_q^n?
בכמה דרכים אפשר לבחור את הוקטור הראשון? כל איבר ששונה מאפס וזה (q^n-1)
הוקטור השני? יש (q^n-q), מדוע? כי האיבר הראשון פורש q איברים שאי אפשר לבחור.
באופן דומה:

$$b(n,k)=(q^n-1)(q^n-q)\cdot ....\cdot\left(q^n-q^{k-1}\right)$$

מה הקשר בין $b(n,,k)$ ו $a(n,k)$?
מ b מתקבל לנו בסיס עבור מרחב, ולכן אם נחלק את $b(n,k)$ במספר הבסיסים שיש למרחב k מימדי - נקבל את $a(n,k)$ ולכן:

$$\begin{aligned}a(n,k)=\frac{b(n,k)}{b(k,k)}&=\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdot ....\cdot\left(q^n-q^{k-1}\right)}{(q^k-1)(q^k-q)\cdot ....\cdot(q^k-q^{k-1})}\\&=\frac{q^{\binom{k}{2}}\left(1+q+...+q^{n-1}\right)\left(1+q+...+q^{n-2}\right)\cdot ...\cdot\left(1+q+...+q^{n-k}\right)}{q^{\binom{k}{2}}(1+q+...+q^{k-1})\cdot(1+q+...+q^{k-2})\cdot ...\cdot 1}\\&=\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right](q)=\frac{[n!]}{[k!][n-k]!}\end{aligned}$$

מסתבר שזהו פולינום ב q.
$n!$ הן תמורות על $[n]$.
$[n!]$ הן תמורות על $[n]$ לפי היפוכים.

טענה 19.5

$$\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right]=\sum a_{n,k,i}q^i$$

כאשר $a_{n,k,i}$ = מספר התמורות על k 1־ים ו $n-k$ 2־ים עם i היפוכים.

הוכחה: נראה כי $F(q)\cdot[k!]\cdot[(n-k)!]=[n!]$: נסדר את ה 1־ים וה 2־ים, ונרשום לעצמנו את הסדר הפנימי של ה 1־ים והסדר הפנימי של ה 2־ים, זה יכפול את החישוב הפרמוטציות הפנימיות ולכן זה יוצא. ■

20 שיעור 20

בהמשך לשיעור הקודם - $\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right](q)$ = מספר תת מרחבים ממימד k של מרחב וקטורי n מימדי מעל $\mathbb{F}_q$ (שדה עם q איברים)

כמו כן - אם $\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right](q)=\sum_{i=0}^{k(n-k)}a_i(n,k)\,q^i$ כאשר $a_i(n,k)=a_{k(n-k)-i}(n,k)$, אז ה a־ים סופרים תמורות של k איברים מסוג אחד ו $n-k$ איברים מסוג שני, בהתאם למספר ההיפוכים.
(אני לא לגמרי בטוח במה שרשום במשפט האחרון)

טענה 20.1

$$\left[\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}n\\n-k\end{array}\right]$$

במקדמים בינומיים זה ברור ע"י התאמה של קבוצות ומשלימותיהן, אבל אין לנו קונספט קנוני של משלים במרחבים וקטוריים.

יהי $U\subseteq V$ מ"ו אז נסמן Φ =כל הפונקציונלים מ V ל $\mathbb{F}_q$

נסמן $U^*=\{\phi\in\Phi:\phi(x)=0\,\forall x\in U\}$ ואז $U^*\subseteq\Phi$ ומתקיים שאם $dimU=k$ אז $dimU^*=n-k$

אפשר גם לרשום:

$$U^*=\{y\in V:\langle y,x\rangle=0\,\forall x\in U\}$$

.

נניח שיש לנו מרחב V, ותת מרחב $n-1$ מימדי V'.

טענה 20.2

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}+q^{n-k}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}$$

מטרה: לספור תת מרחבים וקטוריים k ממדיים U של V.

מקרה א': $U\subseteq V'$, כאלה יש $\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}$

מקרה ב': $U\cap V'=U'$ כך ש $dimU'=k-1$. מספר האפשרויות ל U' הוא $\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}$ והשאלה היא כמה $U\subseteq V$יש שהם k מימדיים כך ש $U\cap V'=U'$.

יש ב $V\setminus V'$ סך הכל q^n-q^{n-1} וקטורים, וכל אחד מהם אפשר לצרף ל U'כדי לקבל מרחב ממימד k, אבל עשויים להיות מרחבים שנספור פעמיים וכו'.

לכן נשאל בהנתן U - כמה וקטורים הוספנו ל U' כדי לקבל אותו? זה יוצא q^k-q^{k-1} מטעמים דומים.

מכאן נובע שסך הכל הדרכים להשלים את U' הן:

$$\frac{q^n-q^{n-1}}{q^k-q^{k-1}}=\frac{q^n\left(1-q^{-1}\right)}{q^k\left(1-q^{-1}\right)}=q^{n-k}$$

נושא חדש - מניה של חפצים שונים תוך הכללת תמורות מסוג מסויים, למשל מחרוזות וכו'

אם g תמורה ב S_n

קבוצת נקודות השבת תסומן $FP(g)=\{i:g(i)=i\}$

אם ל g יש מבנה מחזורים $1^{C_1}2^{C_2}...n^{C_n}$ אז נסמן: $Z(g)=Z_1^{C_1}Z_2^{C_2}...Z_n^{C_n}$

20.1 בכמה דרכים ניתן לצבוע דפנות של קוביה ב 2 צבעים?

(נאמר כחול ואדום)

כמו כן נאמר ש 2 צביעות תהיינה שוות אם אחת מתקבלת מהשניה ע"י סיבוב של הקוביה.

יש חבורה של תמורות G שפועלת על הדפנות.

בפרט - החבורה היא טרנזיטיבית, שכן יש לה רק מסלול אחד.

תהי X קבוצה

G חבורת תמורות על X

נגדיר $Y=\{f:X\to C\}$ כאשר C קבוצת הצבעים.

20.1.1 מהי חבורת הסיבובים של הקוביה?

כמה איברים יש בחבורה? 24 (למשל - בוחרים לאן דופן מספר 1 עוברת ובאילו מ 4 הסיבובים שלה היא תימצא)

מה קורה אם מרשים שיקופים? כיוון שסיבובים מתאימים להעתקות אורת' עם דטרמיננטה 1 ושיקופים מאפשרים גם דט' 1- מקבלים שזה מכפיל את מספר האיברים, לכן 48.

מהו מבנה המחזורים?

עבור העתקת הזהות Z_1^6

מהו מבנה המחזורים של תמורות שפועלות כך: מחזיקים שני קודקודים נגדיים ומסובבים את הקוביה? יש 8 כאלו והמבנה יהיה Z_3^2

מה בדבר תמורות שנוצרות ע"י סיבוב שמעביר ציר דרך 2 צלעות נגדיות? 6, כאשר מבנה המחזורים הוא Z_2^3

ותמורות שנוצרות ע"י סיבוב ב 90 מעלות שמעביר ציר דרך שתי דפנות נגדיות?6, כאשר מבנה המחזורים הוא $Z_1^2Z_4$

תמורות שנוצרות ע"י סיבוב ב180 מעלות שמעביר ציר דרך שתי דפנות נגדיות? 3, כאשר מבנה המחזורים הוא $Z_1^2Z_2^2$

21 שיעור 21

תהי $G \subseteq S_n$ חבורת תמורות שפועלת על $X = \{1, ..., n\}$

אם $x \in X$ אז הקבוצה $\{g(x) : g \in G\}$ היא המסלול של x, ונסמן אותה Ω_x, ו Ω תהיה קבוצת המסלולים.

א. שני מסלולים הם זהים או זרים

ב. הממסלולים כוללים את כל X

[הוכחות - בקורס מבנים אלגבריים 1, למשל בסיכומים שלי באתר של דינה, בסביבות עמוד 28 ואילך]

משפט 21.1 ברנסייד

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|FP(g)|$$

כאשר $FP(g) = \{x : g(x) = x\}$

[הוכחה - בסיכומים שהוזכרו]

נתבונן במחרוזות (ממש עם חרוזים וכל זה) כאשר חלק מהחרוזים צבועים בכחול והשאר באדום. נרצה למנות כמה מחרוזות עם חמישה חרוזים יש. כמובן שכל מחרוזת שמתקבלת מאחרת על ידי סיבוב או שיקוף - לא נרצה למנות אותה פעמיים.

ראשית נפתור את הבעיה בלי להתמודד עם שיקופים.

אזי אפשר לומר שהחבורה שפועלת על המחרוזת היא החבורה הציקלית $\mathbb{Z}_5$.

תמורת הזהות מקבעת את כל 32 הצביעות האפשריות, ו 4 האחרות מקבעות 2 מחרוזות כ"א, ולכן נקבל ממשפט ברנסייד שמספר המסלולים (כלומר מחרוזות) הוא $\frac{1}{5}(32 + 4 \cdot 2) = 8$.

מה קורה לחבורה כשמרשים גם שיקופים?

חבורת השיקופים והסיבובים היא החבורה D_5 שגדלה 10, ולכן כעת מתווספים 5 שיקופים. כל שיקוף משאיר במקום 8 תמורות, מדוע? ציר שיקוף עובר דרך חרוז אחד ומפריד את 4 האחרים ל 2 זוגות, בוחרים צביעה עבור חרוז הציר ושני החרוזים בצד ימין (יש 8 אפשרויות כאלו) וזה מגדיר תמורה שנשמרת תחת השיקוף.

לכן סה"כ נקבל:

$$\frac{1}{10}(32 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 8) = 8$$

במקרה זה אותו הדבר, אבל זה לחלוטין לא מחוייב המציאות.

עבור 7 חרוזים אם נרשה רק סיבובים נקבל 20 מחרוזות, אבל אם נתיר גם שיקופים נקבל רק 18 מחרוזות.

נתבונן במחרוזת בת 6 חרוזים. זה קצת יותר מסובך כי כיוון שגודל המחרוזת זוגי - זה מאפשר יותר מסוג אחד של שיקוף וכו'...

נתבונן רק בסיבובים:

תמורת הזהות מותירה במקום את כל 64 הצביעות.
את מי משאיר במקום סיבוב של קליק אחד ימינה? יש שתי צביעות - הכל כחול או הכל אדום.
סיבוב ימינה ב 5 קליקים - באותו אופן - שתי צביעות.
סיבוב ימינה בשני קליקים - צביעה של הכל באותו צבע או צביעות לסירוגין יעבדו, ולכן יש 4
סיבוב ב 4 קליקים - כמו סיבוב ב 2
סיבוב ב 3 קליקים - יש שמונה צביעות שזה משאיר במקום, בוחרים צבעים ל 1,2,3 והסיבוב ישרה את צביעת 4,5,6.
סה"כ:

$$\frac{1}{6}\left(64+2+2+4+4+8\right)=14$$

מה אם נוסיף שיקופים?
יש שישה שיקופים - שכן אפשר לשקף סביב שני חרוזים נגדיים או סביב שתי צלעות נגדיות.
לכל שיקוף סביב חרוזים יש 16 צביעות שהוא משאיר במקום- כי די לבחור את צבעי חרוזי הציר ושני צבעי החרוזים בצד ימין. יש שלושה כאלו.
לכל שיקוף סביב צלעות יש 8 צביעות שנשמרות, שכן מספיק לבחור את צבעי החרוזים באחד הצדדים. יש שלושה כאלו.
סה"כ:

$$\frac{1}{12}\left(64+2+4+8+4+2+3\cdot 16+3\cdot 8\right)=13$$

21.1 נכליל את הבעיה

אם X קבוצה, G חבורה שפועלת עליה, R קבוצה של צבעים ו $R^X=\{f:X\to R\}$ קבוצת הצביעות של X, אזי G בעצם פועלת גם על צביעות:
בהנתן $f:X\to R$ ו $g\in G$ נרצה להגדיר את $g\left(f\right)\left(x\right)=f\left(g^{-1}\left(x\right)\right)$, במילים אחרות - כדי לדעת איך לצבוע אחרי הפעלת תמורה - נצבע לפני הפעלת התמורה, נפעיל את התמורה ונבדוק מה הצבע שמתקבל במקום שמעניין אותנו.
אם נסמן $|X|=n$ אז מביטים במשתנים $z_1,z_2,...,z_n$ ומגדירים את מציין המחזורים של התמורה g ע"י:

$$z_g\left(z_1,...,z_n\right)=z_1^{c_1(g)}z_2^{c_2(g)}...\cdot z_n^{c_n(g)}$$

כאשר $c_k\left(g\right)$ מספר המחזורים ב g בגודל k. ומהלמה של ברנסייד נגדיר את Z_g שהוא מציין המחזורים של החבורה:

$$Z_G\left(z_1,z_2,...,z_n\right)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}z_g\left(z_1,z_2,...,z_n\right)$$

נרשום $R=\{b_1,...,b_r\}$ כאשר $|R|=r$
נתאים כל צביעה $f:X\to R$ למונום במשתנים $x_1,...,x_r$ שיוגדר $m\left(f\right)=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdot...\cdot x_r^{a_r}$ כאשר a_k היא מספר המונה כמה חרוזים צבועים בצבע ה k, כלומר $a_k=|\{x\in X:f\left(x\right)=b_k\}|$.

$$\sum_{w\in\Omega}x_1^{a_1}\cdot...\cdot x_r^{a_r}=Z_G\left(x_1+...+x_r,x_1^2+x_2^2+...+x_r^2,...,x_1^n+x_2^n+...+x_r^n\right)$$

משפט 21.2 פוליה :

$$|\Omega|=Z_G\left(\underbrace{r,r,...,r}_{n}\right)$$

הוכחה: לפי משפט ברנסייד:

$$|\Omega|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|FP(g)|$$

בהנתן g ספציפית, כמה $f:X\to R$ יש כך ש $f=gf$?
בהנתן החלוקה של תמורה למחזורים זרים:

$$\underbrace{()\,()\,()}_{c_1}\underbrace{(\quad)\,(\quad)}_{c_2}\cdots$$

האבחנה היא ש $f:X\to R$ היא פונקציית שבת ביחס לתמורה g אס"ם f קבוע על כל מחזור של g, בפירוק g למכפלת מחזורים שונים. ולכן:

$$\Bigg|\underbrace{FP(g)}_{G\,acts\,on\,R^X}\Bigg|=r^{c_1(g)+c_2(g)+\ldots+c_n(g)}=z_g(r,r,r,r,\ldots)$$

■

C_n חבורה ציקלית על מחרוזות באורך n אז נרצה לחשב את $Z_{C_n}(z_1,\ldots,z_n)$. סיבוב של k צעדים ימינה $(0,1,\ldots,n-1)$ תלוי במחלק המשותף המקסימלי של n ו k, אם נגדיר $u=(n,k)$ אז יש u מחזורים באורך $\frac{n}{u}$ ו $z_k(z_1,..,z_n)=z_{\frac{n}{u}}^{u}$

$$Z_{C_n}(z_1,\ldots,z_2)=\sum_{k=1}^{n}z_{\frac{n}{(n,k)}}^{(n,k)}=\sum_{u|n}\varphi\left(\frac{n}{u}\right)z_{\frac{n}{u}}^{u}=\sum_{u|n}\varphi(u)\,z_u^{\frac{n}{u}}$$

...

נטפל גם בשיקופים
אם n אי־זוגי אז

$$Z_{D_n}(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{2n}\left(\sum_{u|n}\varphi(u)\,z_u^{\frac{n}{u}}+nz_1z_2^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

ואם nזוגי אז:

$$Z_{D_n}=\frac{1}{2n}\left(\sum_{u|n}\varphi(u)\,z_u^{\frac{n}{u}}+\frac{n}{2}z_1^2z_2^{\frac{n-2}{2}}+\frac{n}{2}z_2^{\frac{n}{2}}\right)$$

שאלה: צובעים מחרוזת של 6 חרוזים ב 3 צבעים אדום, כחול ושחור. כמה צביעות ש עד כדי סיבובים עם 2 חרוזים מכל צבע?

$$Z_{C_6}=\frac{1}{6}\left(z_1^6+2z_6+2z_3^2+z_2^3\right)$$

משפט פוליה אומר שצריך להציב:

$$\begin{aligned}z_1&=x_1+x_2+x_3\\z_2&=x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\vdots\end{aligned}$$

ולכן:

$$\frac{1}{6}\left((x_1+x_2+x_3)^6+2\left(x_1^6+x_2^6+x_3^6\right)+2\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)+\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right)$$

נרצה לחשב את המקדם של $x_1^2x_2^2x_3^2$ בביטוי זה ונקבל:

$$\frac{1}{6}\left(\binom{6}{2\,2\,2}+\binom{3}{1\,1\,1}\right)$$

22 שיעור אחרון

נספור צביעות של פאות הקוביה ב r צבעים כאשר לא מבחינים בין צביעות שאחת מתקבלת מהשניה על ידי סיבובים או שיקופים.

נתבונן במציין המחזורים של הסיבובים והשיקופים האפשריים:
עבור תמורת היחידה - z_1^6 (יש שישה מחזורים באורך 1 כל אחד) הוא מציין המחזורים ויש תמורה אחת כזו
סיבובים סביב ציר שעובר דרך קודקודים נגדיים - יש 8 תמורות כאלו ומציין המחזורים שלהן הוא z_3^2
סיבובים סביב ציר שעובר דרך זוג צלעות נגדיות - יש 6 תמורות כאלו ומציין המחזורים שלהן z_2^3
סיבובים סביב ציר שעובר דרך מרכזי פאות נגדיות בזווית 90/270 מעלות - יש 6 כאלו ומציין המחזורים $z_1^2z_4$
סיבובים סביב ציר שעובר דרך מרכזי פאות נגדיות בזווית 180 מעלות - יש 3 כאלו ומציין המחזורים $z_1^2z_2^2$
וזה מתאר את מציין המחזורים של הקוביה:

$$\frac{1}{24}\left(z_1^6+8z_3^2+6z_2^3+6z_1^2z_4+3z_1^2z_2^2\right)$$

נציב 2 בכל המשתנים, עבור צביעה בשני צבעים ונקבל:

$$\frac{1}{24}\left(2^6+8\cdot 2^2+6\cdot 2^3+6\cdot 2^2\cdot 2+3\cdot 2^2\cdot 2^2\right)=10$$

אם נסמן ב a_i את מספר הפאות שנצבעו בצבע ה i, אז נשאל כמה צביעות יש?

$$\sum_{coloring} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{a_r}=Z_G\left(x_1+x_2+\ldots+x_r,x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2,\ldots\right)$$

ובמקרה של הקוביה:

$$\frac{1}{24}\left((x_1+x_2)^6+8\left(x_1^3+x_2^3\right)^2+6\left(x_1+x_2\right)^2\left(x_1^4+x_2^4\right)+6\left(x_1^2+x_2^2\right)^3+3\left(x_1+x_2\right)^2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)$$

מה המקדם של $x_1^3x_2^3$? זה יתן לנו את מספר הצביעות שבהן 3 פאות צבועות בכחול ו 3 באדום.

22.1 כמה גרפים יש על nקודקודים?

כמה גרפים על 4 קודקודים יש עד כדי איזומורפיזם?
בלי צלעות - 1
עם צלע אחת - 1
עם שתי צלעות - 2
עם 3 צלעות - 3 (ח', ש' או משולש)
עם 4 צלעות - 2
עם 5 צלעות -1
עם 6 צלעות - גרף שלם (יחיד)

כלומר 11 גרפים.

A= קבוצת הצלעות שגדלה $\binom{[4]}{2}$, ואם ניתן ל S_4 לפעול על הקודקודים נקבל שתמורות אלו פועלות גם על הצלעות.

מספר הגרפים עד כדי איזומורפיזם של n קודקודים הוא מספר הצביעות של $\binom{[n]}{2}$ ב 2 צבעים כאשר שתי צביעות שקולות אם אחת מתקבלת מהשני ע"י פעולה של S_n שפועל על $\binom{[n]}{2}$.

נתבונן במציין המחזורים של כל תמורה מחד כתמורה ב S_4 ומאידך כפעולת התמורה על זוגות של קודקודים, דהיינו על קבוצת הצלעות $\binom{[n]}{2}$. (זהו בעצם שיכון של S_4 בתוך S_6)

תמורת היחידה - יש 1 כזו - מציין המחזורים כתמורה על הקודקודים z_1^4 - מציין המחזורים כתמורה על הצלעות z_1^6

התמורות מהצורה (ij) - יש 6 כאלו - מציין המחזורים כתמורה על הקודקודים $z_1^2z_2$ - מציין המחזורים כתמורה על הצלעות $z_1^2z_2^2$

התמורות מהצורה (ijk) - יש 8 כאלו - מציין המחזורים כתמורה על הקודקודים z_1z_3 - מציין המחזורים כתמורה על הצלעות z_3^2

התמורות מהצורה $(ijks)$ - יש 6 כאלו - מציין המחזורים כתמורה על הקודקודים z_4 - מציין המחזורים כתמורה על הצלעות z_2z_4

התמורות מהצורה $(ij)\,(ks)$- יש 3 כאלו - מציין המחזורים כתמורה על הקודקודים z_2^4 - מציין המחזורים כתמורה על הצלעות $z_1^2z_2^2$

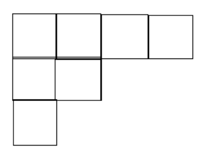
כעת אם נציב 2 במקום כל אחד מהמשתנים ונחלק במספר האיברים, נקבל את התשובה:

$$\frac{1}{24}\left(2^6+6\cdot 2^4+8\cdot 2^2+6\cdot 2^2\right)=11$$

שהיא נכונה כפי שראינו באופן ידני.

22.2 טבלאות

דיברנו על חלוקות, והן מתאימות לדיאגרמות, כך למשל הדיאגרמה:



מתאימה לחלוקה 4,2,1 או אם מסתכלים לאורך - 3 2 1 1.

בהנתן חלוקה, טבלאות ינג הן טבלאות שממקמים בכל תא מספר שונה, כך שכל שורה וכל טור עולים מונוטונית.

22.2.1 נוסחת הווים למספר טבלאות ינג עבור דיאגרמה נתונה

בהנתן n משבצות, לכל משבצת הוו שלה הוא מספר המשבצות שמימינה באותה שורה או מתחתיה באותה עמודה (וגם היא עצמה) למעשה זו מעין צורת r.

נוסחת הווים: מספר טבלאות ינג הוא בדיוק $\frac{n!}{\prod_x hook(x)}$ באשר לכל תא x המספר $hook\left(x\right)$ הוא גודל הוו של x.

נבחין כי $hook\left(y\right)$ באם y הוא התא הימני ביותר בשורה העליוני בדיאגרמה הקודמת - אז הוו שלו הוא בגודל 1, ובלעדיה מקבלים טבלת ינג.

רעיון ההוכחה הוא לבנות על בסיס הרעיון הקודם נוסחת רקורסיבית של מספר טבלאות ינג ולהוכיח באינדוקציה.