תורת הגרפים

על פי הרצאות מאת פרופ' אהוד פרידגוט

11 ביולי 2010

רשם: שיר פלד, באמצעות LYX גרסה 1.6.1
תיקונים יתקבלו בברכה במהלך ההפסקות או בכתובת מייל $shirpeled@cs$
במבחן: להוכיח משפט אחד מתוך שניים ולפתור שניים מתוך שלושה תרגילים (שיתפרסמו במהלך הסמסטר).
ביבליוגרפיה: $Graph\,Theory/Diestel$

1 מבוא והגדרות

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1 גרף G הוא זוג (V,E), קבוצת הצלעות וקבוצת הקודקודים (או קשתות וצמתים).
V היא קבוצה כלשהי, ו E היא קבוצה של זוגות לא סדורים של איברים מ v. לעיתים נתעצל לכתוב את הצלע $\{i,j\}$ ונכתוב ij במקום זאת.
צלעות מרובות - מרשים $(ij)\,1,(ij)\,2$ וכן הלאה, לרוב לא נעסוק באלו.

.

הגדרה 1.2 צלעות מנוונות הן לולאה, כלומר צלע מקודקוד לעצמו ii.

.

הגדרה 1.3 גרף ללא צלעות מרובות וללא לולאות יקרא גרף פשוט.

.

הגדרה 1.4 גרף מכוון הוא גרף אשר בו הצלעות הן זוגות סדורים.

.

הגדרה 1.5 בהיפר גרף הצלעות הן קבוצות של קודקודים, לאו דווקא בגודל 2.

.

הגדרה 1.6 גרפים $G_1=(V_1,E_1)$ ו $G_2=(V_2,E_2)$ הם איזומורפיים אם יש $\phi:V_1\to V_2$ חח"ע ועל המשמרת צלעות, כלומר

$$\{\phi\,(i)\,,\phi\,(j)\}\in E_2\Leftrightarrow\{i,j\}\in E_1$$

.

הגדרה 1.7 גרף יקרא מישורי אם ניתן לצייר אותו במישור ללא חיתוכים של הצלעות

.

הגדרה 1.8 הגרף השלם על n קודקודים יסומן K_n, והוא הגרף שבו יש n קודקודים וכל 2 קודקודים יוצרים צלע.

.

הגדרה 1.9 גרף דו צדדי שלם יסומן $K_{n,m}$ והוא גרף דו"צ שקבוצת קודקודיו היא $\{1,...,n\}\cup\{1',2',...,m\}$ ובקבוצת הצלעות יהיו כל הזוגות $\{ij'\}$ (כלומר יש $n\cdot m$ צלעות).

.

הערה 1.10 $K_{3,2}$ מישורי בעוד ש $K_{3,3,}$ איננו מישורי

.

הגדרה 1.11 מסילות הן גרפים בצורת שרוך, שיסומנו P_3 למשל עבור גרף בן 4 קודקודים המחוברים בזה אחר זה בצלעות.

.

הגדרה 1.12 מעגלים הן מסילות שבהן הקודקוד הראשון מחובר לאחרון ויסומנו C_3 למשל, עבור משולש.

.

הגדרה 1.13 נאמר ש $x,y\in V$ שכנים, ונסמן $x\sim y$, אם $\{x,y\}\in E$.

.

הגדרה 1.14 הילוך על גרף סדרת קודקודים $x_1,...,x_n$ כך ש $x_i\sim x_{i+1}$ עבור $i=1,...,n-1$

.

הגדרה 1.15 הילוך בו אף צלע אינה חוזרת פעמיים נקרא מסילה. אם בנוסף אף קודקוד אינו חוזר פעמיים, נאמר שהמסילה פשוטה.

.

הגדרה 1.16 מסילה סגורה (קודקוד ראשון = קודקוד אחרון) תקרא מעגל.

.

הערה 1.17 לפעמים נוח לחשוב על מסילות (או הילוכים) כסדרה של צלעות ולא כסדרה של קודקודים. בדרך כלל יהיה ברור מההקשר למה הכוונה.

.

תרגיל אם יש הילוך מ x ל y, אז יש מסילה פשוטה מ x ל y.

הגדרה 1.18 נגדיר יחס שקילות על קודקודי הגרף: x שקול ל y אם יש הילוך מ x ל y. קל לראות שזה רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי. נקרא למחלקת השקילו של קודקוד x: "מרכיב הקשירות של x".

גרף ובו מרכיב קשירות יחיד יקרא גרף קשיר.

הגדרה 1.19 אם $G = (V, E)$ גרף, ו $H = (V', E')$ כך ש $V' \subseteq V$ וגם $E' \subseteq E$ אז נאמר ש H תת גרף של G. אם E' מכיל כל מ E ששני איבריה ב V', אז נאמר ש H הוא תת גרף מושרה.

.

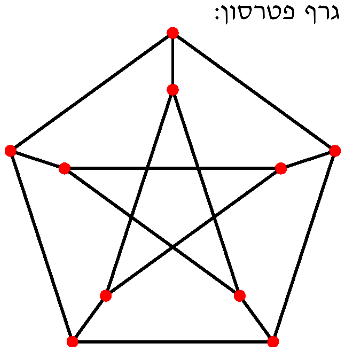
הגדרה 1.20 הדרגה של קודקוד x היא מספר הצלעות שלהן x שייך, לעיתים מסומן $d(x)$ ולעיתים $deg(x)$. בגרף מכוון יש דרגת כניסה ($indeg(x)$) ודרגת יציאה ($outdeg(x)$), שאינן בהכרח שוות זו לזו.

.

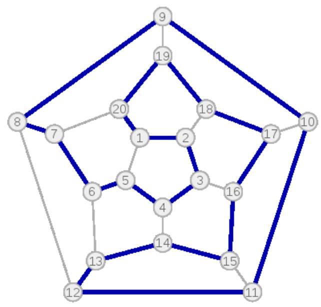
הגדרה 1.21 מעגל בגרף המכיל את כל הצלעות נקרא מעגל אוילר (מסילה ... וכו' ... מסילת אוילר)

מעגל המכיל את כל הקודקודים, כל קודקוד פעם אחת בלבד, יקרא מעגל המילטון (מסילה ... וכו' ... מסילת המילטון)

זהו גרף פטרסון:



זהו גרף הדודקהדרון:



שאלה: מי מהם המילטוני? תשובה ־ גרף הדודקהדרון, וההילוך עליו נתון במספור הקודקודים.

תרגילים

1. הוכיחו שבגרף פטרסון אין מעגל המילטון
2. בגרף המינג של $\{0,1\}^n$ (שיוגדר להלן) יש מעגל המילטון

הגדרה 1.22 גרף המינג של $\{0,1\}^n$ מוגדר כך שקודקודיו הם כל הסדרות הבינאריות באורך n ויש צלע בין שתי סדרות שנבדלות בביט אחד בדיוק.

למצוא מעגל המילטון בגרף זו בעיה שהיא NP קשה, ולעומת זאת קל מאד להכריע האם יש מעגל אוילר בגרף.

1.2 זוגיות

משפט 1.23 לחיצות הידיים ־ בכל מסיבה סופית, מספר האנשים שלחצו ידיים מספר אי־זוגי של פעמים, הוא זוגי. באופן פורמלי ־ בכל גרף פשוט וסופי, מספר הקודקודים בעלי דרגה אי־זוגית, הוא זוגי.

למה 1.24 בגרף סופי פשוט ־ סכום הדרגות הוא בדיוק פעמיים מספר הצלעות.

הוכחה: הלמה ־ כל צלע נספרת פעמיים עבור סכום הדרגות, פעם עבור כל קודקוד שהיא משתתפת בו.

המשפט ־ סכום הדרגות בעלי דרגה זוגית הוא בוודאי זוגי, ואם נוסיף לו את סכום הדרגות בעלי דרגה אי־זוגית נקבל את סכום הדרגות הכולל, שהוא זוגי, ומכאן שסכום הדרגות האי־זוגיות הוא זוגי בעצמו (ולכן מספר המחוברים בו זוגי כנדרש). ■

למה $\Leftarrow$משפט, ונראה בעתיד כי המשפט גורר את הלמה של שפרנר, הלמה של טאקר, תיבות עם מקצועות שלמים. הלמה של טאקר גוררת את משפט בורסוק־אולם, ומשפט בורסוק אולם וגם הלמה של שפרנר גוררים את משפט בראוור. כמו כן בורסוק אולם גורר את השערת קנסר (משפט לובס).

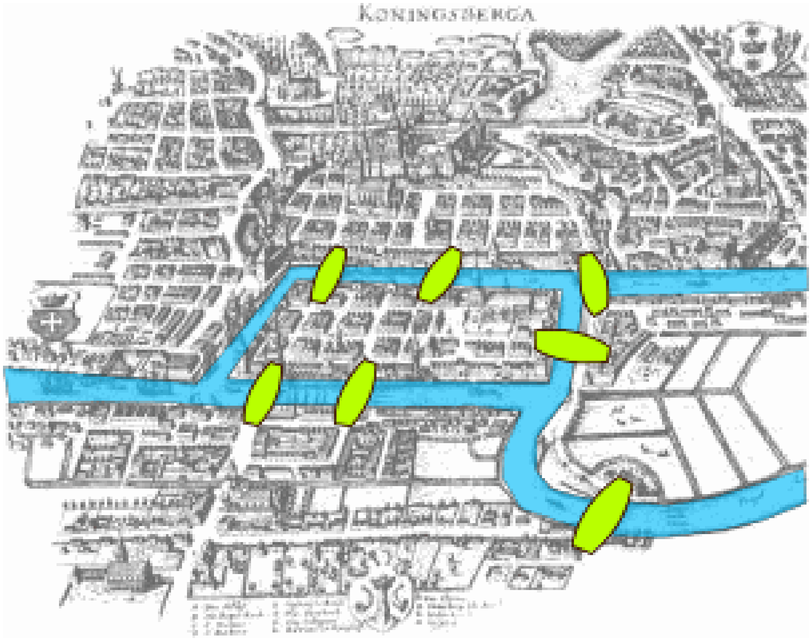
כל הנ"ל מלבד המשפט על תיבות עם מקצועות שלמים יגיעו בהמשך.

תרגיל:

נתונה תיבה ב $\mathbb{R}^d$ (כך ש $d \geq 1$) וחלוקה שלה לתיבות שלכל אחת מהן יש כיוון אחד בו ארכה הוא מספר שלם, אזי גם לתיבה הגדולה יש כיוון בו ארכה הוא מספר שלם.

רקע היסטורי:

בעיר קניגסברג, שממנה בא אוילר, היה נהר, איים וגשרים באופן הבא:



ונשאלה השאלה ־ האם אפשר לטייל, ובמהלך הטיול לעבור על כל גשר בדיוק פעם אחת, אפשר בקלות להפוך את הבעיה לגרף (הגשרים הם צלעות, והאיים ־ קודקודים) ולשאול ־ האם יש מעגל אוילר? התשובה היא שלא.

וההוכחה לכך ־ ממשפט אוילר שיובא להלן:

משפט 1.25 ב(מולטי)גרף סופי קשיר יש מעגל אוילר אם"ם כל הדרגות הן זוגיות.

מסקנה 1.26 בגרף סופי קשיר יש מסילת אוילר פתוחה אם"ם יש בו בדיוק 2 קודקודים שדרגתם אי־זוגית.

.

מסקנה 1.27 (הכללה) בגרף סופי קשיר ניתן לכסות את הצלעות ע"י k מסילות זרות בצלעות אם יש בדיוק $2k$ קודקודים בדרגה אי־זוגית.

הוכחה: ראשית נראה שהמשפט גורר את מסקנה א', ומסקנה ב' ניתנת להיסק בדרך דומה:

נוסיף קודקוד לגרף ונחבר אותו לשני הקודקודים שדרגתם אי־זוגית. קיבלנו גרף שבו כל הדרגות זוגיות ולכן עפ"י המשפט ־ יש מעגל אוילר. כעת נסיר את שתי הצלעות העוקבות שהוספנו ־ ונקבל מסילה פתוחה.

את מסקנה ב' נראה באופן דומה ע"י הוספה של k קודקודים חדשים. ■

למה 1.28 למשפט אוילר: במסילה (לא סגורה) דרגת שני הקצוות היא אי־זוגית ודרגת כל שאר הקודקודים היא זוגית.

הוכחה: למשפט אוילר:

כיוון אחד קל ־ אם G קשיר סופי, בעל מעגל אוילר, אזי כל הדרגות זוגיות, הולכים לאורך המעגל, מכל קודקוד גם נכנסים וגם יוצאים ולכן דרגתו זוגית.

בכיוון השני ־

יהי G גרף קשיר, סופי, בו כל הדרגות הן זוגיות. ניקח ב G הילוך ללא חזרה על צלעות בעל אורך מקסימלי. הילוך זה הוא בהכרח מעגל. מדוע? אחרת לקצוותיו היו דרגות אי־זוגיות, לפי הלמה, ולכן אפשר להאריך את ההילוך בעוד צעד לפחות (כי לא כל הצלעות של קודקוד הסיום מנוצלות).

מעגל זה חייב להכיל את כל הצלעות, אחרת ניתן להאריכו. מדוע? אם יש צלע שאינה במעגל, וקודקוד אחד שלה לפחות שייך למעגל, אזי אפשר להוסיף עוד צעד להילוך, בסתירה למקסימליות. אם קודקודי הצלע אינם המעגל, אזי מקשירות ־ ניתן למצוא מסילה מאחד מהקודקודים הנ"ל לקודקוד במעגל, והמסילה הזו, כיוון שמתחילה מחוץ למעגל ומסתיימת בתוכו, מכילה בהכרח צלע שקודקוד אחד שלה במעגל וקודקוד אחד מחוץ למעגל, ואותה ניתן לצרף להילוך כמקודם, בסתירה למקסימליות. ■

הגדרה 1.29 גרף מכוון יקרא קשיר חזק אם לכל $x, y \in V$ יש מסילה מכוונת מ x ל y.

משפט 1.30 אוילר המכוון: גרף סופי קשיר חזק מכיל מעגל אוילר מכוון אם"ם בכל קודקוד דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה.

הגדרה 1.31 סדרות דה־ברוין ($De\,Bruijn$) $B\left(n,k\right)$ היא סדרה מעגלית של k^nסימנים מתוך הקבוצה $1...k$ כך שכל אחת מ k^n המילים באורך n מופיעה פעם אחת על המעגל.

דוגמאות והסבר

נניח שיש קוד כניסה בן 4 ספרות (מתוך הספרות 0...9) שצריך לנחש. יש סה"כ 10^4 אפשרויות, וכל אפשרות היא באורך 4, ולכן לכאורה צריך $40,000$ לחיצות. למעשה אפשר לסדר את הספרות על פני מעגל באורך $10,000$ בסדרת דה־ברוין, ואז להקיש על כל הספרות לפי סדר המעגל, ואז לעבור לאופסט 1 ואז לאופסט 2 ו 3.

סדרת דה־ברוין הראשונה שהוגדרה היתה $B\left(3,2\right)$ שהוגדרה ע"י משוררי סנסקריט כדי לזכור את כל הצירופים של הברות ארוכות וקצרות ע"י $SLLLSLSSSL$ ובעצם אפשר לקצץ שתי האותיות האחרונות ולקבל $SLLLSLSS$ וכל צירוף בן 3 אותיות של S, L מתקבל אם קושרים את הסוף להתחלה כדי ליצור מעגל.

בסה"כ יש

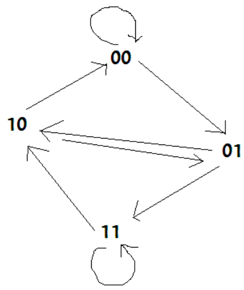
$$\frac{k!^{k^{(n-1)}}}{k^n}$$

סדרות דה ברוין.

שימוש למשפט אוילר המכוון

נניח שנרצה למצוא את $B\left(2,2\right)$, נרצה לראות את הרצפים $00, 11, 01, 10$.

אחרי 00 נוכל לראות את 01, אחריו נוכל לראות את 11 או 10, אחרי 11 אפשר לראות את 10 או את 11 שוב, ואחרי 10 אפשר לראות את 00 או את 01. כמובן אפשר לבנות מזה גרף.



ואם נמצא בזה המילטוניאן - נוכל למצוא את הסדרה המבוקשת.

אבל זה קשה, ולכן נעדיף לתאר את הבעיה באופן כזה שנחפש מעגל אוילר.

גרף דה ברוין על $\langle 1...k \rangle^n$, קודקודיו הן כל המילים באורך n מהא"ב $\{1,...,k\}$, ושתי מילים הן שכנות בגרף דה ברוין אם y מתקבלת מ x ע"י הסרת האות הראשונה והוספת אות בסוף.

את הצלע בין $x_1x_2...x_n$ ובין $x_2x_3...x_ny$ נסמן ע"י $x_1x_2x_3...x_ny$, מעגל אוילר בגרף זה מניב סדרת דה־ברוין.

למה יש מעגל אוילר בגרף דה ברוין? כי דרגת הכניסה והיציאה של כל קודקוד היא k, ולכן ממשפט אוילר המכוון - יש מעגל אוילר.

1.3 הלמה של שפרנר

(לא לבלבל עם משפט שפרנר)

סימפלקס d־ממדי הוא הקמור של $d+1$ נקודות בלתי תלויות אפינית ב $\mathbb{R}^d$.

$v_0, v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^k$ ב"ת אפינית אם $v_1 - v_0, v_2 - v_0, ..., v_k - v_0$ ב"ת ליניארית, וזה אם"ם הסימפלקס ה k מימדי שהוא הקמור שלהן אינו מנוון.

הגדרה 1.32 שילוש של סימפלקס היא חלוקתו למשולשים כך שהחיתוך של כל שניים הוא סימפלקס ממימד נמוך יותר (או ריק), המכונה גם פאה.

משפט 1.33 הלמה של שפרנר - יהי T שילוש של סימפלקס k מימדי, הקמור של $\{v_0, ..., v_k\}$. ותהי λ צביעה של קודקודי השילוש (קודקודי כל הסימפלקסים המופיעים בשילוש) ע"י צבעים $0, 1, 2, ..., k$.

λ מקיימת את התכונה הבאה:

לכל קודקוד בשילוש יש פאה קטנה ביותר המכילה אותו ו $\lambda(x) = i$ גורר שפאה זו עבור x מכילה את i.

אזי קיים סימפלקס בשילוש אשר נצבע ע"י כל ה $k+1$ צבעים

2 שפרנר ובראואר

2.1 הלמה של שפרנר

הגדרה 2.1 אם $p_1, \ldots, p_n$ נקודות, אזי הקמור שלהן יסומן $conv\left(p_1 \ldots p_n\right)$ הוא הקבוצה:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i | \alpha \geq 0 \wedge \sum \alpha_i = 1 \right\}$$

.

הגדרה 2.2 נאמר ש $p_0, \ldots, p_n$ בת"ל אפינית אם $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_n - p_0$ בת"ל ליניארית. והמשמעות האינטואיטיבית היא שהקמור של הנקודות הללו הוא ממימד מקסימלי.

.

הגדרה 2.3 סימפלקס n מימדי הוא קמור של נקודות $p_0, \ldots, p_n$ בת"א.

.

הגדרה 2.4 פאה של סימפלקס (שאף היא סימפלקס) היא הקמור של תת קבוצה של הנקודות.

.

הגדרה 2.5 אם x היא נקודה בסימפלקס הנפרש ע"י $p_0, \ldots, p_n$, התומך של x יסומן $supp\left(x\right)$, והוא הפאה הקטנה ביותר לה x שייך.

אם

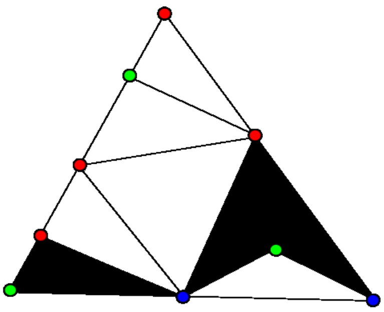
$$x = \sum \alpha_i p_i$$

אז התומך של x הוא הקמור של ה p_i שעבורם $\alpha_i > 0$.

.

הגדרה 2.6 שילוש (טריאנגולציה) של גוף כלשהו הוא חלוקה לסימפלקסים כך שכל שניים נחתכים בפאה (זה כולל קודקוד, שכן הוא פאה ממימד 0) או בקבוצה ריקה.

דוגמה לשילוש:



משפט 2.7 הלמה של שפרנר:

יהי S סימפלקס, שהוא הקמור של $p_0,...,p_n$ ($n \geq 0$).

יהי T שילוש של S.

תהי $\lambda : \{T's\, vertices\} \to \{0,1,...,n\}$ צביעה של קודקודי T שמקיימת שלכל קודקוד $t \in T$ מתקיים $p_{\lambda(t)} \in supp\,(t)$ כלומר צובעים את tבצבע המתאים לאחד מהקודקודים בתומך שלו.

אזי יש סימפלקס בשילוש שבו מופיעים כל הצבעים.

למעשה מספר הסימפלקסים הנ"ל הוא אי־זוגי, ובפרט אינו אפס.

הוכחה: באינדוקציה על n.

עבור $n=0$ הסימפלקס הוא נקודה אחת, והטענה נכונה.

נניח נכונות עבור $n-1$ (עבור $n \geq 1$).

ניקח סימפלקס n מימדי, נוסיף קודקוד p ש"נצבע" ב n.

נרחיב את השילוש של S לשילוש של $conv\,(p_0,...,p_n,p)$ ע"י הוספת p לכל אחד מהסימפלקסים ה $n-1$ מימדיים שבפאה $conv\,(p_0,...,p_{n-1})$.

נגדיר גרף שקודקודיו הם סימפלקסי השילוש.

יש קודקודים המתאימים לסימפלקסים הישנים (אלו שב T) וקודקודים שמתאימים לסימפלקסים ה p הוא קודקוד שלהם, סימפלקסים חדשים.

יש צלע בין שני סימפלקסים $\{s_1,s_2\}$ אם"ם הפאה המשותפת להם צבועה בצבעים $\{0,1,2,...,n-1\}$ בדיוק, בפרט אם אין להם פאה משותפת ־ אז אין צלע.

אין צלעות בין קודקודים המתאימים לסימפלקסים חדשים, שכן הפאות ה $n-1$ מימדיות המשותפות להם מכילות את הנקודה p, שצבועה בצבע n.

מהנחת האינדוקציה יש מספר אי־זוגי של קודקודים חדשים מדרגה 1. מדוע? בפאה שחיברנו ל p יש מה"א מספר אי־זוגי של סימפלקסים שצבועים בצבעים $\{0,1,...,n-1\}$, וכל אחד מאלו מהווה את פאת החיתוך בין סימפלקס ישן לסימפלקס חדש כלשהו. (כדאי לצייר את המקרה הדו־מימדי כדי להשתכנע). הדרגה של הקודקוד הזה היא 1 שכן כל שכניו האחרים הם חדשים גם כן, ולכן אין ביניהם צלע.

ממשפט לחיצות הידיים, מספר הקודקודים שדרגתם אי זוגית הוא זוגי, ולכן יש מספר אי־זוגי של קודקודים ישנים בדרגה אי־זוגית, לכל אחד מהם יש בהכרח פאה שצבועה ב $\{0,1,...,n-1\}$

אם המספרים $0,1,...,n-1$ מופיעים על סימפלקס, אז דרגתו היא 1 או 2, בהתאם אם מופיע או לא מופיע הצבע n. מדוע? ניקח קודקוד, הוא צבוע ב $n+1$ צבעים (לא בהכרח שונים) כאשר חלקם הוא $\{0,1,...,n-1\}$, ואז אם צבעו של הקודקוד האחרון הוא n ־ אז דרגת הקודקוד 1, ואחרת יש לו שתי צלעות, כי יש שתי דרכים לבחור עבורו את הצבעים $\{0,..,n-1\}$.

מכאן שהדרגות בגרף הן רק $0,1,2$ וקיים קודקוד שדרגתו היא 1, וממשפט לחיצות הידיים נובע שיש מספר אי זוגי של קודקודים שכאלו, כנדרש. ■

2.2 נקודת השבת של בראוור

משפט 2.8 נקודת השבת של בראוור:

לכל העתקה רציפה של B^n (הכדור ה n מימדי הסגור) לעצמו, יש נקודת שבת.

קל להשתכנע שלא מוכרחים לקחת כדור סגור, ואפשר לקחת משהו הומיאומורפי, למשל סימפלקס n־מימדי.

הוכחה: יהי S הקמור של n נקודות (זהו קמור $n-1$ מימדי) הבסיס הסטנדרטי $e_1,e_2,...,e_n$.

ואז $S=\{t|\sum_{i=1}^{n}t_i=1,\,t_i\geq 0\}$, נקבל בשלושה מימדים משולש דו־מימדי שיושב באלכסון למרכז הצירים (פחות או יותר).

תהי $f:S\to S$ רציפה.

ניקח שילוש של S, למשל את החלוקה הבריצנטרית.

(ניקח בהמשך שילושים כך שקוטר הסימפלקסים ישאף לאפס).

לכל פאה $conv\left(p_{i_1},...,p_{i_k}\right)$ נתאים את מרכז הכובד שלה. בשילוש שמגדירה החלוקה הבריצנטרית יש בדיוק $n!$ סימפלקסים:

לכל סדרה של $p_{i_1}\neq p_{i_2}...p_{i_n}$ (פרמוטציה של הקודקודים) נתאים את הסימפלקס שקודקודיו הם:

- מרכז הכובד של p_{i_1}
- מרכז הכובד של p_{i_1},p_{i_2}

...

- מרכז הכובד של $p_{i_1},...,p_{i_n}$

לא קשה להתרשם שזהו אכן שילוש (תרגיל)

כמו כן הקוטר של הסימפלקסים החדשים קטן יותר: אורך מקצוע של סימפלקס חדש הוא קטן מ $\frac{n-1}{n}$ מהתיכון של הסימפלקס המקורי (קטע שמחבר קודקוד למרכז הכובד של שאר הקודקודים), מתכונות התיכון.

Tשילוש של S.

$M_i=\{s\in S|s_i>[f(s)]_i\}$

לכל קודקוד $t\in T$ נבחר צבע i כך ש $t\in M_i$

הערות:

1. כל t שייך לאיזהשהו M_iאלא אם מתקיים $t=f(t)$. אם יש נקודת שבת אז סיימנו. $\sum t_i=1=\sum[f(t)]_i$
2. זו צביעת שפרנר כי $e_i\notin supp(t)$ אם"ם $t_i=0$ ואז מתקיים $\neg\left(t_i>[f(t)]_i\right)$

לכן אם אף אחד מקודקודי השילוש אינו נקודת שבת, אז יש סימפלקס רב צבעי. נשלש אותו ע"י חלוקה בריצנטרית.

נמשיך בתהליך זה, ונקבל סדרה אינסופית של סימפלקסים מוכלים זה בזה שהולכים וקטנים:

$$conv\left(t_1^1,...,t_n^1\right)$$

$$conv\left(t_1^2,...,t_n^2\right)$$

$$...$$

זוהי סדרת סימפלקסים סגורים בעלי קוטר ששואף לאפס, ועל פי הלמה של קנטור ־ יש להם נקודה משותפת, בפרט יש t יחיד הנמצא בכולם.

ולכן :

$$t_1^1,t_2^1,t_3^1,...\to t$$

$$t_1^2,t_2^2,t_3^2,...\to t$$

$$...$$

$$t_1^n, t_2^n, ... \to t$$

מרציפות של fמתקיים $x_1 \geq [f(x)]_1$, כנ"ל לכל הקואורדינטות של x. וכיוון שסכום הקוא' הוא בדיוק 1, אזי כל הקוא' שוות. לכן יש שוויון ו x נקודת שבת. ■

3 משפט בורסוק אולם

נראה כי משפט בורסוק אולם גורר את משפט נקודת השבת של בראוור.

משפט 3.1 בורסוק אולם: אין העתקה רציפה מהכדור הדו מימדי לשפה שלו, שהיא קבועה על השפה.

טענה 3.2 בורסוק אולם $\Leftarrow$בראוור

הוכחה: נניח $f: B \to B$ רציפה ללא נקודות שבת.

נגדיר g בסתירה לבורסוק אולם. לכל $f(x)$ ניקח את x ונמתח ישר מ $f(x)$ל x. את $g(x)$ נקבע להיות הנקודה שעל שולי המעגל בקצה הקרן. במידה ש x על שולי המעגל - נקבל ש $g(x) = x$ כפי שדרשנו. וההעתקה שדרשנו אכן רציפה. ■

הגדרה 3.3

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum x_i^2 = 1 \right\}$$

$$B^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n} | \sum x_i^2 \leq 1 \right\}$$

$$\hat{S^n} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum |x_i| = 1 \right\}$$

$$\hat{B^n} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n} | \sum |x_i| \leq 1 \right\}$$

.

הגדרה 3.4 העתקה קוטבית מקיימת $-f(x) = f(-x)$ (אנטיפודלית)

נשתמש מעתה באופן חופשי במונחים קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה, קבוצה קומפקטית, מרחק מקבוצה, קוטר של קבוצה כפי שהם מוגדרים ב $\mathbb{R}^n$.

לעיתים נתבונן בטופולוגיה יחסית, כלומר הקבוצות שהן סגורות או פתוחות ביחס לקבוצה כלשהי שמכילה אותן.

3.0.1 בורסוק אולם בניסוחים שונים

1. אם $f:S^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ רציפה, אזי קיימת x כך ש $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$
2. אם $f:S^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ וקוטבית, אזי קיימת x כך ש $f\left(x\right)=0$.
3. אין העתקה $f:S^{n}\to S^{n-1}$ רציפה וקוטבית.
4. אין $f:B^{n}\to S^{n-1}$ רציפה קוטבית על השפה.
5. אין כיסוי של S^{n} ע"י $n+1$ קבוצות סגורות בקוטר קטן מ 2. כלומר בכל כיסוי של S^{n} ע"י קבוצות סגורות $F_{1},...,F_{n+1}$ קיים i וקיימת x כך ש $x\in F_{i}$ וגם $-x\in F_{i}$.
6. בכל כיסוי של S^{n} ע"י $n+1$ קבוצות פתוחות $A_{1},...,A_{n+1}$, קיים i וקיים x כך ש $x\in A_{i}$ ו $-x\in A_{i}$
7. בכל כיסוי ע"י קבוצות פתוחות וסגורות ... (אותו הדבר כמקודם)

ברור שניתן לכסות את S^{n} ע"י $n+2$ קבוצות סגורות - אם אתה כולא בתוכו סימפלקס ומטיל אותו לכל הכיוונים.

בורסוק שאל האם כל קבוצה קמורה ב $\mathbb{R}^{d}$ ניתנת לחלוקה ל $d+2$ קבוצות מקוטר קטן יותר.

בורסוק הוכיח זאת עבור $d=2$.

אחרים הוכיחו זאת עבור $d=3$ וכן לכל d עבור קבוצות חלקות, לקבוצות סימטרית מרכזית, ולגופי סיבוב.

ב 93 הוכיחו קלעי וקהן כי התשובה לשאלתו של בורסוק היא שלילית, ובמימד גדול דיו צריך $C^{\sqrt{d}}$ חלקים, ובפרט לא ליניארי ב d, הדוגמה הקונקרטית הכי קטנה שאנחנו מכירים היא ממימד 256.

3.0.2 שקילויות

$2\Rightarrow1$ טריויאלי, שכן $f\left(x\right)=f\left(-x\right)=-f\left(-x\right)=0$.

$1\Rightarrow2$ בהנתן f כמו ב 1 נפעיל את 2 על $g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(-x\right)$ ונקבל את הדרוש.

$3\Rightarrow2$ כיוון ש 3 הוא מקרה פרטי של 2.

$2\Rightarrow3$ בהנתן דוגמה נגדית ל 2 - ניתן לנרמל אותה ולקבל דוגמה נגדית ל 3: אם f דוגמה נגדית ל 2, אז נתבונן ב $g\left(x\right)=\frac{f(x)}{|f(x)|}$

$4\Leftrightarrow3$ תרגיל. עבור $n=2$ אומר סעיף 3 שאי אפשר להעתיק את הספירה לקו המשווה, ו 4 אומר שאי אפשר להעתיק את העיגול לקו המשווה, ואז לשם השקילות מספיק להציג העתקה מתאימה בין B^{n} ל S^{n}.

$5\Rightarrow1$ נניח ש $F_{1},...,F_{n+1}$ כיסוי של S^{n} ע"י קבוצות סגורות. נתבונן ב $f:S^{n}\to\mathbb{R}^{\ltimes}$ המוגדרת ע"י:

$$f\left(x\right)=\left(d\left(x,F_{1}\right),d\left(x,F_{2}\right),...,\left(x,F_{n}\right)\right)$$

ואז לפי 1 קיים x כך ש $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$, כלומר שהמרחק של x מכ"א מהקבוצות הוא כמו המרחק של $-x$ מאותן קבוצות. אם קיים i כך ש $\left[f\left(x\right)\right]_{i}=0$ אזי $\left[f\left(-x\right)\right]_{i}=0$ ולכן שניהם שייכים לאותה קבוצה. ובהכרח קיים i שכזה, שכן הקבוצות מהוות כיסוי.

$3\Rightarrow5$

יש כיסוי של S^{n-1} ע"י $n+1$ קבוצות סגורות ללא $x,-x$ השייכות לאותה קבוצה. ולו היתה f המהווה דוגמא נגדית ל3 אזי התמונות ההפוכות של הכיסוי הנ"ל היו נותנות דוגמא נגדית ל 5 (מסתמכים על כך שתמונה הפוכה של קב' סגורה היא סגורה)

$5 \Rightarrow 6$ נראה ש $\neg 6 \Rightarrow \neg 5$:

כיסוי ע"י סגורות ללא $x,-x$ השייכות לאותה קבוצה, פירושו שכל הקבוצות הסגורות הן עם קוטר קטן ממש מ 2, כי בקבוצה סגורה הקוטר מתקבל (אנחנו במרחב קומפקטי). ולכן קיים $\alpha < 2$ כך שכל $F_1,...,F_{n+1}$ עם קוטר קטן α. אז אם נרפד אותן ב ε כך ש $\alpha + 2\varepsilon < 2$ נקבל קבוצות פתוחות עם קוטר קטן מ 2 בסתירה ל 6.

לרפד הכוונה לבנות קבוצה פתוחה מכילה וקרובה בגודלה ע"י:

$$F_i \subseteq F_i + \varepsilon = \{x | d(x, F_i) < \varepsilon\}$$

$6 \Rightarrow 5$:

בהנתן $C_1,...,C_{n+1}$ קב' פתוחות המכסות את S^n, ניצור $F_1,...,F_{n+1}$ המכסות את S^n כך ש $F_i \subset C_i$.

לכל $x \in S^n$ נבחר i כך ש $x \in C_i$ ונבחר ε כך ש $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset C_i$, זהו כדור סגור. אוסף הכדורים הפתוחים המקבילים לזה הוא כיסוי, מקומפקטיות יש תת כיסוי סופי, נגדיר כל F_i להיות אוסף הכדורים הסגורים המשוייכים ל C_i. האוסף הסופי הזה $F_1,...,F_{n+1}$ הוא האוסף המבוקש.

7 - תרגיל.

3.1 המשך בורסוק אולם

עד כה עבדנו בנורמה L_2 והתבוננו בכדור היחידה, מסתבר שיהיה נוח יותר להתבונן בכדור היחידה ב L_1 (בדו מימד זהו ריבוע שמונח על קודקודו), אותו נסמן ע"י $\hat{B}^2$.

נרצה להוכיח שאין $f : B^n \to S^{n-1}$ רציפה וקוטבית על השפה, ונעשה זאת בהתייחס לנורמה L_1, כלומר שאין $f; \hat{B^n} \to S^{\hat{n-1}}$ כנ"ל.

משפט 3.5 הלמה של טאקר - יהי T שילוש של $\hat{B^n}$ סימטרי על השפה (כלומר מה שקורה בפאה אחת קורה גם בפאה שמולה)

בדומה ללמה של שפרנר נגדיר צביעה של הנקודות בשילוש בצבעי הקודקודים, נבחין כי במקרה דנן יש יותר קודקודים, למשל במקרה הדו ממדי יש ארבעה, ולכן קודקודי $\hat{B^n}$ הם $\{\pm e_i\}_{i=1}^n$

תהי $\lambda : V(T) \to \{\pm 1, ..., \pm n\}$

כך ש λ קוטבית על השפה.

אזי יש צלע (חד מימדית בשילוש) שקודקודיה צבועים ב i ו $-i$.

.

טענה 3.6 בורסוק-אולם $\Leftarrow$טאקר

הוכחה: נניח שנתון שילוש וצביעה המפרים את הלמה של טאקר.

הצביעה מגדירה פונקציה מקודקודי השילוש לקודקודי $\hat{S}^{n-1}$ (קודקודי $\hat{B}^n$). אם אין צלע המסומנת $+i,-i$ הרי התמונה של כל סימפלקס בשילוש תחת הצביעה, היא סימפלקס (אולי ממימד נמוך יותר) על השפה של $\hat{S}^{n-1}$. מדוע? כל תת קבוצה של $\{\pm 1, .., \pm n\}$ שאינה מכילה שני קודקודים נגדיים - מגדירה פאה בסימפלקס ממימד כלשהו.

נרחיב זאת לינארית, כלומר נשלח כל קודקוד בשילוש לקודקוד של $\hat{S}^{n-1}$, ונרחיב לינארית את זה להעתקה שסותרת את BU, ע"י מתיחה של כל סימפלקס לפאה המתאימה ב $\hat{S}^{n-1}$. ■

טענה 3.7 טאקר $\Leftarrow$בורסוק־אולם

הוכחה: נניח בשלילה קיום $f:\hat{B^n}\to\hat{S^{n-1}}$ רציפה וקוטבית על השפה. f רציפה במידה שווה, ולכן קיים δ כך ש:

$$d\left(x,y\right)<\delta\Rightarrow d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)_{\infty}<\frac{2}{n}\Rightarrow\forall i:\left|f\left(x\right)_{i}-f\left(y\right)_{i}\right|<\frac{2}{n}$$

אין בעיה עם דרישת הקרבה בנורמה ∞ כיוון שכל הנורמות ב $\mathbb{R}^{n}$ שקולות.

ניקח שילוש של $\hat{B^n}$ עם קוטר קטן מ δ (למשל ־ נוסיף קודקוד ב 0, נחבר אליו את כל תתי הקבוצות שאינן מכילות קוד' נגדיים מ $\{\pm1,...,\pm n\}$ ואז נמשיך באמצעות חלוקה בריצנטרית).

נגדיר צביעה של קודקודי השילוש בצבעים $\pm1,...,\pm n$ באמצעות f:

בהנתן x ־ נתבונן ב $f\left(x\right)$ ונצבע את x עפ"י הקוא' בעלת הערך המוחלט הגדול ביותר, ומחליטים על דרך סטנדרטית לשבור תיקו. למשל אם הקוא' ה 17 היתה מקסימלית בערך מוחלט ־ אם היא חיובית ניתן לקודקוד את הצבע 17 ואחרת ־ את הערך 17־ . במילים אחרות צבענו לפי הקודקוד של $\hat{B^n}$ שהכי קרוב ל $f\left(x\right)$ בנורמת אינסוף.

כמובן שצביעה זו היא קוטבית.

לפי טאקר קיימים שני קודקודים שכנים בשילוש כך שהם צבועים ב $+i,-i$. נניח קודקודים אלו הם x,y. על פי הנחתנו $d\left(x,y\right)<\delta$ אבל $f\left(x\right)$ קרוב ל e_i ו $f\left(y\right)$ קרוב ל $-e_i$. כמה קרוב? העובדה ש $f\left(x\right)$ הכי קרוב ל i משמעו שהקוא' ה i בו חיובית והכי דומיננטית. באופן דומה ־ הקוא' ה i ב y היא שלילית והכי דומיננטית, ולכן מתקיים:

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|_{\infty}>\frac{2}{n}$$

בסתירה לרציפות במ"ש כפי שהנחנו. ■

. **הוכחה:** (הלמה של טאקר)

נחלק את $\hat{B^n}$ ל 2^nסימפלקסים ע"י הוספת קודקוד ב 0 וחיבורו לכל תתי הקבוצות של הקודקודים שאינן מכילות קודקודים נגדיים.

נוכיח את הלמה של טאקר לשילושים שמעדנים שילוש זה.

ע"מ להוכיח את בורסוק אולם ־ בחרנו בחלוקה שמכבדת עיקרון זה, ולכן אם נוכיח זאת ־ נוכיח את בורסוק אולם, ומהגרירה הראשונה נובעת מכך הלמה של טאקר עבור המקרה הכללי.

בהנתן שילוש כנ"ל וצביעה קוטבית על השפה נגדיר גרף שיוכיח קיומה של צלע הצבועה ב $+i,-i$.

לכל סימפלקס σ בשילוש, נגדיר $\Lambda\left(\sigma\right)$ = הצבעים המופיעים על קודקודי σ.

נגדיר גם $S\left(\sigma\right)$=לוקחים נקודה פנימית ב σ ורושמים עם סימן אילו קוא' אינן 0 (זה מוגדר היטב). למשל עבור שילוש בשני מימדים ־ צלע שיושבת בדיוק על ציר ה y באיזור השלילי תיתן -2 ב S, וסימפלקס דו מימדי כלשהו בתוך הסימפלקס הגדול, אם הוא ברביע הימני העליון, יתן $1,2$ למשל.

נאמר ש σ שמח אם $S\subseteq\Lambda$, כלומר אם הקוא' בנקודות הפנימיות שאינן אפס, בתוספת סימן, אכן באות לידי ביטוי בצבעים של קודקודי הסימפלקס.

נבחין כי אם $k=|S(\sigma)|$ אז $dim(\sigma)\le k$, כיוון שנובע שיש בו קוא' שאינן אפסות ב k מקומות. אם הוא שמח אז $k\le|\Lambda(\sigma)|$, ואז לסימפלקס לפחות k תויות, ולכן הוא $k-1$ מימדי לפחות, כלומר $dim(\sigma)\ge k-1$.

אם $dim(\sigma)=k-1$ ו $S(\sigma)=\Lambda(\sigma)$, נאמר ש σ שמח והדוק, כלומר בדיוק התויות הדרושות כדי לשמח אותו מופיעות עליו, כל אחת - פעם אחת.

נשים לב ש σ שמח ועל השפה הוא גם הדוק. וכן - $\{0\}$ הוא שמח ורופף (באופן ריק - כיוון שאין לו נקודה פנימית).

קודקודי הגרף שנגדיר הם הסימפלקסים השמחים (מכל המימדים) ושני קודקודים המתאימים ל σ ול τ הם שכנים אם אחד מהבאים מתקיים:

1. σ ו τ הם אנטיפודליים על השפה.
2. τ פאה של σ ותויות קודקודי τ מספיקות בכדי לשמח את σ.

טענה:

אם אין צלע בשילוש שמתוייגת ב $+i,-i$ אזי בגרף הנ"ל כל הדרגות הן 2 למעט דרגת הקודקוד המתאים לסימפלקס $\{0\}$ שהיא 1, וזו סתירה, כי אין גרף שכזה.

דרגת הקודקוד המתאים ל $\{0\}$ היא 1 - קל. הסימפלקס שמח באופן ברור, ויש צלע בינו לבין צלע שנמצאת על אחד הצירים, המתאימה לתיוג של $\{0\}$, ורק היא קיימת עבור $\{0\}$.

קודקודים אחרים: הדוק ושמח

1.1 על השפה - 2 שכנים, האחד - התאום הקוטבי לו. השני - סימפלקס ממימד גבוה יותר, שדורש אותן תויות בשביל להיות שמח.

1.2 הדוק ושמח לא על השפה: במקרה זה הוא פאה של 2 סימפלקסים ממימד גבוה יותר שאותם הוא משמח.

2.1 שמח ורופף - $S(\sigma)=\Lambda(\sigma)$ (יש תוית שמופיעה פעמיים) ולכן יש שתי פאות של σ המשמחות אותה ואלו שכניה היחידים

2.2 שמח ורופף - $S(\sigma)\subsetneq\Lambda(\sigma)$ (יש תוית שאין צורך בה) אז יש שני שכנים - שכן אחד הוא הפאה המתוייגת ע"י $S(\sigma)$, כמו כן נניח $\Lambda(\sigma)\setminus S(\sigma)=\{i\}$, ומכאן ש $-i\notin S(\sigma),\Lambda(\sigma)$ (הנחנו שאין צלע של $+i,-i$ וזה אומר ש σ חי בעל-מישור $x_i=0$ ולכן σ פאה של סימפלקס ממימד גבוה יותר, נכנה אותו σ^*, כך ש $S(\sigma^*)=S(\sigma)\cup\{i\}$ ולכן σ משמחת אותו - ויש צלע $\{\sigma,\sigma^*\}$. ■

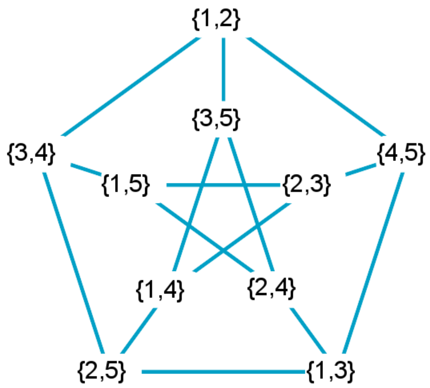
3.2 השערת קנסר (משפט לובס):

גרף קנסר $K(n,k)$ כך ש $2k+1\le n$

הקודקודים = ה k-יות המוכלות ב $[n]$, כלומר יש $\binom{n}{k}$ קודקודים.

2 קודקודים שכנים אם"ם הקבוצות המתאימות זרות.

להלן $K(5,2)$:



(מתוך ויקיפדיה)

צביעה של גרף ב l צבעים היא:

$$C : V(G) \to \{1, ..., l\}$$

כך ש $i \sim j$ אז $c(i) \neq c(j)$

מספר הצביעה של G יסומן $\chi(G)$ והוא ה l המינימלי כך שיש צביעה חוקית ב l צבעים.

אם G אינו טריוויאלי, אזי קל לראות ש $\chi(G) = 2$ אם"ם אין בו מעגלים באורך אי־זוגי (כלומר הוא דו־צדדי).

השאלה האם $\chi(G) \geq 3$ באופן כללי היא NP קשה.

נוכל לצבוע ב 3 צבעים את הגרף $K(5,2)$ לעיל ע"י צביעת כל הזוגות המכילים את 1 בצהוב, כל הזוגות המכילים את 2 וטרם נצבעו בכחול וכל השאר בירוק.

מדוע כשהגענו ל"כל השאר" הנחנו שיהיה בסדר, כי הבחנו שנותרה שלישיה, וכל שני זוגות מתוכה יחתכו בהכרח ולכן אין שני זוגות מתוכה שיש ביניהם צלע.

זה מעלה אלגוריתם כללי לצביעת $K(n,k)$ ב $n-2k+2$ צבעים ע"י:

1. על מי שמכיל את n
2. כל מי שמכיל את $n-1$
3. ...

$n-2k+1$ כל מי שמכיל את $2k$

ובצבע $n-2k+2$ את כל השאר.

קנסר(55): האם ניתן לצבוע את $K(n,k)$ באופן חוקי ב $n-2k+1$ צבעים? האם $\chi(K(n,k)) = n-2k+2$ או קטן יותר?

משפט 3.8 לובס(78) אכן $\chi(K(n,k)) = n-2k+2$ תוך שימוש מהפכני בבורסוק אולם.

הוכחה: (גרין מ 2002)

נניח בשלילה צביעה של $K(n,k)$ ב $n-2k+2 < n-2k+1$ צבעים, נגדיר $d = n-2k+1$, נמקם n נקודות על פני הספירה S^d במצב כללי (כלומר אין $d+1$ מהן שחיות ב S^{d-1}).

נגדיר קבוצות פתוחות ש $C_1,...,C_d$ כך ש $x\in C_i$ אם בחצי הספירה הפתוחה שמרכזה ב x יש k־יה שהקודקוד המתאים לה נצבע בצבע i. ברור ש C_i פתוחות. נגדיר:

$$F=S^d\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{d}C_i\right)$$

סגורה.

מבורסוק אולם ־ קיים $x,-x$ ששייכים ל C_i כלשהי (אפשרות א') או ל F (אפשרות ב').

א. יש הפרדה בין שתי k־יות בעלות אותו צבע, אבל הן זרות ולכן מתקבלת צלע בגרף, בסתירה לצביעה.

ב. כיוון ש x וגם $-x$ אינן באחת ה C_i־ים, בהכרח בהמיספירה שמכילה כ"א מהן יש לכל היותר $k-1$ איברים מתוך ה n, כלומר כל שאר ה $n-2(k-1)=d+1$ הנקודות נמצאות על "קו המשווה" שבין x ל $-x$, בסתירה להנחת המצב הכללי. ■

4 עצים

עץ הוא גרף קשיר חסר מעגלים

משפט 4.1 התנאים הבאים שקולים:

1. קשיר חסר מעגלים
2. קשיר מינימלי
3. חסר מעגלים מקסימלי
4. קשיר ו $|V|=|E|+1$ (בגרף סופי)
5. חסר מעגלים ו $|V|=|E|+1$(בגרף סופי)
6. בין כל 2 קודקודים יש מסילה פשוטה יחידה.

נתבונן פעמים רבות על הצלעות בגרף כוקטורים בינאריים במרחב $\mathbb{F}_2^{|V|}$, כאשר וקטור צלע מקבל 1 בשני המקומות המתאימים לקודקודים שהוא מחבר ביניהם, וזה מוכל בתת מרחב W שמוגדר ע"י הוקטורים שהקוא' שלהן מסתכמות ל 0.

* אוסף של וקטורי צלע הוא פורש את W אם"ם הצלעות יוצרות גרף קשיר
* אוסף צלעות כנ"ל בת"ל אם"ם הגרף שנוצר על ידיהן הוא חסר מעגלים

הרעיון הזה מוכיח בעצם את כל השקילויות ונוכיח אותו בתרגיל הבית.

הוכחה: נוכיח רק את $2\Rightarrow 3$

יהי G גרף קשיר מינימלי, תהי $e\in E(G)$, אם e שייכת למעגל הרי השמטתה לא תפגע בקשירות, שהרי כל הילוך שישתמש ב e יוכל להשתמש בשאר המעגל.

בסתירה למינימליות, ולכן G חסר מעגלים.

נראה מקסימליות ביחס לתכונה זו ־ יהיו $x,y\in V$ כך ש $\{x,y\}\notin E$, אזי מקשירות יש מסילה פשוט מ x ל y (שאיננה צלע) ואז הוספת הצלע $\{x,y\}$ יוצרת מעגל, ולכן הגרף חסר מעגלים מקסימלי. ■

הגדרה 4.2 עלה בעץ הוא קודקוד מדרגה 1.

טענה 4.3 בכל עץ סופי עם צלע אחת לפחות יש עלה

הוכחה: מתחילים מקודקוד שרירותי ולוקחים מסילה פשוטה באורך מקסימלי המתחילה בקודקוד זה. מסילה זו חייבת להסתיים בעלה, אחרת היה אפשר להמשיך. ■

טענה 4.4 בכל עץ סופי בעל צלע אחת לפחות יש לפחות שני עלים.

הוכחה: כמקודם, רק מתחילים בעלה שמובטח מההוכחה הקודמת. ■

. **הוכחה:** (אלטרנטיבית, לקיום שני עלים) בעץ עם n קודקודים יש $n-1$ צלעות, ולכן סכומן הוא $2n-2$. מקשירות כל הדרגות הן חיוביות ממש, אבל לו היו 0 או 1 קודקודים מדרגה 1, אזי סכום הדרגות היה לפחות $2n-1$. מכאן נובע שיש לפחות 2 קודקודים מדרגה 1, כנדרש. ■

נתבונן בסדרת הדרגות של עץ על n קודקודים, נסמנה $d(1), d(2), ..., d(n)$.
יודעים כי:

- $\sum d(i) = 2n-2$
- לכל i מתקיים ש $d(i) > 0$

שאלה: בהנתן סדרה $d(1), ..., d(n)$**, כמה עצים יש על קבוצת הקודקודים** $1, ..., n$ **שזו סדרת הדרגות שלהם?** במקרה של $(1,3,1,1)$ יש בדיוק עץ אחד
במקרה של $(1,2,2,1)$ יש שני עצים, שניהם איזומורפים אבל שונים כעצים מסומנים.

שאלה קשורה: כמה עצים מסומנים שונים יש על קבוצת קודקודים? התשובה: n^{n-2}
הוכחה עם סדרות־דרגות (אפשר למצוא בספר של ליניאל ופרנס)
הוכחה שניה של פיטמן (pitman) אפשר למצוא באינטרנט.
בהנתן סדרה $d_1, ..., d_n$ נסמן ב $T_{d_1,d_2,...,n}$ את מספר העצים עם סדרת דרגות זו. אם הסדרה היא באורך 1, אז $d_1 = 0$ ונקבל $T_0 = 1$.
אחרת ־ יש עץ עם לפחות צלע אחת ונוכל לפי המשפט הקודם לקבל שבעץ הזה יש עלה. בה"כ נאמר שהעלה הזה מזוהה עם הקודקוד ה n־י ולכן $d_n = 1$.
הסרת עלה והצלע המחוברת עליו שומרת על היות הגרף העץ, וכדי להבין איך נראה שאר הגרף ־ נצטרך לדעת מיהו שכנו של n.
נמיין את מספר הדרכים להשלים את העץ לפי "מיהו שכנו היחיד של n?".
נקבל :

$$T_{d_1,d_2,...,d_{n-1},1} = T_{d_1-1,d_2,...,d_{n-1}} T_{d_1,d_2-1,...,d_{n-1}} + ... + T_{d_1,d_2,...,d_{n-1}-1}$$

זה מזכיר את נוסחת הנסיגה של המקדמים המולטינומיים.

$$\binom{m}{c_1, c_2, c_3, ..., c_k} = \binom{m}{c_1}\binom{m-c_1}{c_2} \cdot ... \cdot \binom{m-c_1-c_2-...-c_{k-1}}{c_k} = \frac{m!}{c_1!c_2!...c_k!}$$

וזהו מספר הדרכים לחלק m עצמים כך ש c_1 יצבעו בצבע 1, c_2 יצבעו בצבע 2 וכן הלאה (וסכום ה c_i הוא כל העצמים).
אם אחד מה c_i אינו שלם ואי שלילי, נגדיר את ערך המקדם המולטינומי להיות 0.
כמו כן אם סכום ה c_i לא שווה ל m אז נגדיר אותו כ 0.

4.1 שלוש תכונות של המקדמים המולטינומיים:

.1

$$\binom{0}{0,0} = 1 = \frac{0!}{0!0!}$$

.2

$$\binom{m}{c_1, c_2, ..., c_k} = \binom{m}{c_1, c_2, ..., c_k, 0}$$

.3

$$\binom{m}{c_1, c_2, ..., c_k} = \binom{m-1}{c_1-1, c_2, ..., c_k} + \binom{m-1}{c_1, c_2-1, ..., c_k} + ... + \binom{m-1}{c_1, c_2, ..., c_k-1}$$

(המקרה הכללי של זהות פסקל)

.4

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^m = \sum_{c_1,...,c_k} \binom{m}{c_1, ..., c_k} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdot ... \cdot x_k^{c_k}$$

ואם מציבים 1 לכל המשתנים זה נותן:

$$k^m = \sum \binom{m}{c_1, ..., c_k}$$

וזה לא כל כך מפתיע, כי זה משקף את סך כל הדרכים לצבוע m חפצים ב k צבעים באיזו דרך שנרצה.

שמים לב ש T מאד דומה למקדם המולטינומי ומגיעים לניחוש:

$$T_{d_1,d_2,...,d_n} = \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, ..., d_n-1}$$

ומוכיחים באינדוקציה כאשר הבסיס הוא 1 $T_{1,1} = \binom{0}{0,0} =$
שלב המעבר:

$$T_{d_1,d_2,...,1} \underbrace{=}_{I.H.} \binom{n-3}{d_1-2, d_2-1, ..., d_{n-1}-1} + \binom{n-3}{d_1-1, d_2-2, ..., d_{n-1}-1} + ...$$
$$\underbrace{=}_{multinom} \binom{n-2}{d_1-1, ..., d_{n-1}-1} \underbrace{=}_{d_n=1} \binom{n-2}{d_1-1, ..., d_{n-1}-1, d_n-1}$$

ולכן מספר העצים על n קודקודים מסומנים הוא:

$$\sum_{d_1,...,d_n} T_{d_1,...,d_n} = \sum_{d_1,...,d_n} \binom{n-2}{d_1-1, ..., d_n-1} = n^{n-2}$$

עץ הוא קשיר חסר מעגלים.

הגדרה 4.5 יער = גרף חסר מעגלים כלשהו

.

הגדרה 4.6 עץ משורש - עץ עם קודקוד מיוחס

נתבונן ביער של עצים משורשים.
אם C הוא מספר העצים על n קודקודים מסומנים, הרי מספר העצים המשורשים על n קודקודים מסומנים הוא $n \cdot C$.

הגדרה 4.7 גיזום : לוקחים עץ משורש, מסירים צלע $\{x, y\}$, אחרי ההחסרה מקבלים 2 עצים, בה"כ x שייך לרכיב הקשירות של השורש, ונכריז על השורש הקודם כשורש רכיב הקשירות של x ועל y כעל שורש רכיב הקשירות של $y \Leftarrow$ קיבלנו שני עצים משורשים.

.

הגדרה 4.8 בהנתן 2 עצים משורשים T_1 ו T_2, בוחרים קודקוד בT_1, מחברים בצלע לשורש של T_2 ומכריזים על השורש של T_1 כעל שורש העץ החדש שנוצר. (זו הפעולה ההפוכה לגיזום)

פיטמן בנה ארבוריטום (מוזיאון של עצים):
הארבוריטום מסודר בשכבות, נכנה אותן $1, 2, 3, ..., n$ כאשר בשכבה ה k יש חלקות, ובכל חלקה יער עם k עצים משורשים על הקודקודים $1, .., n$, והארבוריטום ממצה.
חלקות ברמה ה k מחוברות לחלקות ברמה ה $k+1$ אם היער ברמה ה $k+1$ התקבל מזה שברמה ה k ע"י גיזום.
בשכבה הראשונה יש עץ אחד בחלקה, ולו $n-1$ צלעות
בשכבה השניה יש שני עצים ומספר הצלעות הכולל הוא $n-2$
וכך הלאה, בשכבה ה n יש n עצים בחלקה, ובסך הכל 0 צלעות (יש רק יער אחד שכזה)
נספור עבור כל שכבה - כמה שבילים יש כדי להגיע שכבה אחת למטה יותר (כלומר מהשכבה ה k לשכבה ה $k+1$) -
מהשכבה ה n-ית עצמה יש שביל אחד למטה, ומהשכבה הראשונה יש $n-1$ שבילים לשניה, מהשכבה השניה לשלישית $n-2$ וכן הלאה.
כמה שבילים יש למעלה?
מהשכבה הראשונה יש דרך 1.
מהשכבה השניה יש n דרכים לעלות, כי יש n אפשרויות על מי להרכיב ואחר כך $k-1$ אפשרויות מי להרכיב עליו. מאותו נימוק יש $n \cdot 2$ דרכים לעלות מהשכבה השלישית לשניה וכן הלאה.
מספר השבילים מהרמה ה 1 לרמה ה n הוא $1 \cdot n \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n-2) \cdot ... \cdot n \cdot 1 =$ $n^{n-1}(n-1)!$. כמו כן אם בוחרים נק' התחלה אפשר לקבל $C \cdot n \cdot (n-1)!$ והמספרים שווים ולכן

$$C = n^{n-2}$$

4.2 משפט על עצים ומטריצות Matrix Tree Theorem

מתוך רשימות הרצאה של Babai

מולטי גרף מכוון (ללא לולאות).

בהנתן מולטי גרף מכוון G וקודקוד מיוחס x, ניתן להתבונן בתת גרפים של G בהם דרגת היציאה של כל קודקוד למעט x היא 1, ודרגת היציאה של x היא 0.

תת גרף כזה נקרא תת גרף פונקציונלי = מייצג פונקציה מ $V(G)\setminus\{x\}$ ל $V(G)$, וניתן לשאול גם כמה תת גרפים פונקציונלים מהוים עץ (עם x כשורש).

דוגמא אם מחליפים כל צלע ב K_n (גרף שלם על n) בזוג צלעות מכוונות (הלוך ושוב) ובוחרים קדקוד כלשהו, אזי מספר העצים הפונקציונליים ביחס לקודקוד זה, הוא בדיוק מספר העצים הלא־מכוונים, אם נבנה מטריצת שכנויות עבור העץ שעל האלכסון יהיו דרגות היציאה ובתאים האחרים נרשום את מספר הצלעות מ i ל j בסימן שלילי. הטענה היא שאם נבחר תא המתאים לקודקוד כלשהו, נמחק את השורה והעמודה שלו וניקח דטרמיננטה של המטריצה שנותרה ־ נקבל מספר העצים הפונקציונלים ביחס לקודקוד שמחקנו.

קיילי$\Leftarrow MTT$

דטרמיננטה היא מכפלת הערכים העצמיים. n הוא ערך עצמי בריבוי $n-2$, העקבה (trace) היא $(n-1)^2$ והיא גם סכום הערכים העצמיים ולכן זה יוצא $(n-2)\cdot n+\lambda$ ולכן $\lambda=1$ ומכפלת הערכים העצמיים היא n^{n-2}.

בהנתן תמורה $\pi\in S_n$ ניתן לכתוב את π כמכפלה של מחזורים זרים $\pi=\tau_1\cdot\tau_2\cdot\ldots\cdot\tau_k$ למשל $(89)\,(4765)\,(123)=\pi$ וכתיבה זו היא יחידה עד כדי שינוי סדר.

הגדרה 4.9 בהנתן מולטיגרף מכוון G, הלפלסיאן של G היא מטריצה ששורותיה ועמודותיה מאונדקסות ע"י קודקודי G, כך ש $L_{ii}=outdeg\,(i)$ ו $i\neq j: L_{ij}=-\left(|edges\,from\,i\,to\,j|\right)$

משפט 4.10 (MTT) בהנתן G כנ"ל וקודקוד x, מספר התת־גרפים הפונקציונליים ביחס ל x שהם עצים (בגרפים לא מכוונים) הוא הדטרמיננטה של המטריצה $M(x)$= המתקבלת ממחיקת השורה והעמודה המתאימות ל x.

למה 4.11 בהנתן מחזורים $\tau_1,\tau_2,...,\tau_k\in S_{n\setminus\{x\}}$ ניתן לשאול כמה תתי גרפים פונקציונלים ביחס ל x יש ל G בהם מופיעים המחזורים $\tau_1,...,\tau_k$ למשל המחזור (123)מופיע בתת גרף, אם יש מעגל $1\to2\to3\to1$.

אם המחזורים אינם זרים ־ התשובה היא 0, שכן אין אנו מרשים שדרגת היציאה של קודקוד תהיה גדולה מ 1.

אם $\tau_1,...,\tau_k$ זרים, נגדיר $\pi=\tau_1\cdot\tau_2\cdot\ldots\cdot\tau_k$ ו $M=M_x$ הלפלסיאן המצומצם, אזי התשובה היא:

$$\prod\left|M_{i,\pi(i)}\right|$$

הוכחה: ספירה פשוטה ־ שכן בכל מעגל על $1,2,3$ למשל, צריך לבחור אחת מבין הצלעות בין 1 ל 2, אחת מבין הצלעות מ 2 ל 3 ואחת מבין הצלעות מ 3 ל 1. מכפלת המספרים הללו תיתן את מספר המעגלים האלו. ∎

תזכורת: אם $\tau=(i_1,...,i_k)$ אזי $Sgn\,(\tau)=(-1)^{k+1}$ ואם $\pi=\tau_1\cdot\tau_2\cdot\ldots\cdot\tau_k$ אז $Sgn\,(\pi)=\prod_{i=1}^{k}Sgn\,(\tau_i)$

למה 4.12 אם $\pi = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot ... \cdot \tau_k$ מכפלת מחזורים זרים, אזי:

$$Sgn\left(\pi\right)\prod M_{i,\pi(i)} > 0$$

אם"ם k זוגי (אם זה אינו 0)
ובמילים אחרות ־ אם זה אינו 0 אז זה קטן מ 0 אם"ם k אי־זוגי

הוכחה: בדיקה.
אם נקבע את x ונסמן ב $G\left(\tau_1, ..., \tau_k\right)$ את מספר התת־גרפים הפונקציונלים ביחס ל x, המכילים את המחזורים $\tau_1, ..., \tau_k$, הרי מנוסחת ההכלה וההדחה מספר העצים בהם אנו מתעניינים:

$$G\left(\emptyset\right) - G\left(\tau_1\right) - G\left(\tau_2\right) - ... + G\left(\tau_1, \tau_2\right) + ...$$

כיוון שזה מספר הגרפים שאינם מכילים אף מחזור (כלומר שום מעגל).
ומכיוון שסימן התמורה הוא בדיוק שלילי כאשר מספר המחזורים הזרים זוגי ־ זה מתלכד עם הביטוי של הדטרמיננטה:

$$\sum_{\pi \in S_{n\setminus\{x\}}} Sgn\left(\pi\right)\prod M_{i,\pi(i)}$$

■

5 זיווגים וזרימות

בהנתן גרף דו צדדי $G = \left(M, W, E\right)$ (גברים, נשים, הכרויות)
מחפשים זיווג ממצה של W הוא אוסף צלעות זרות (בקודקודים) המכיל את כל קודקודי W.

הגדרה 5.1 תנאי הול: לכל $W' \subseteq W$, אם $\Gamma\left(W'\right)$ היא קבוצת השכנים של קודקודי W', אזי $\left|W'\right| \le \left|\Gamma\left(W'\right)\right|$

משפט 5.2 (הול) בגרף דו צדדי סופי, קיום תנאי הול (עבור הנשים) הוא תנאי מספיק והכרחי לקיום זיווג ממצה ל W.

נראה שהלמה של שפרנר גוררת את משפט הול ־ הוכחה של אהרוני והאקסל.

הערה 5.3 לגבי שילושים:
שילוש הוא היררכי: אם x, y קודקודים בשילוש, שכנים בשלד החד מימדי שלו (x ו y קודקודים של אותו סימפלקס בשילוש) אזי דורשים ש $S\left(x\right) \subseteq Sp\left(y\right)$ או $S\left(y\right) \subseteq S\left(x\right)$.
כאשר $S\left(z\right)$ היא הפאה הקטנה ביותר של הסימפלקס הגדול המכילה את z. למשל השילוש הבריצנטרי הוא היררכי.
חסכוני: אם $S\left(z\right)$ הוא ממימד k אזי ל z יש לכל היותר k שכנים על השפה של הפאה לה הוא שייך.
למה אותה לא נוכיח ־ קיים שילוש היררכי חסכוני של של הסימפלקס בכל מימד.

הוכחה: יהי G גרף דו צדדי כנ"ל. לכל קבוצת נשים $X \subseteq W$ נבחר $|X|$ צלעות כך שכל צלע היא עם קצה אחד ב X, וכך שפוגעים ב $|X|$ גברים. נסמן את אוסף הצלעות הנ"ל ב E_X, זה אפשרי מתנאי הול. נשים לב שלא דורשים עקביות בין E_X ו E_Y כאשר $X \subseteq Y$.

נניח ש $k = |W|$, ניקח את הסימפלקס ה $k-1$ מימדי (שמספר קודקודיו כמספר הנשים) וניקח שילוש הירככי חסכוני שלו.

נסמן כל קודקוד בשילוש בצלע לפי 2 התנאים הבאים (בוחרים התאמה בין קודקודי הסימפלקס הגדול לנשים):

א. אם $supp\,(x)$ נפרש ע"י קבוצת קודקודים שמתאימה ל $X \subseteq W$, אז נסמן את x ע"י צלע כלשהי מתוך E_X.

ב. אם $x \sim y$ אז נדרוש שהצלעות שבהן נסמן את x ו y לא נחתכות בדיוק בגבר אחד. כלומר - מותר ששני קודקודים שמתאימים לשתי נשים - לעולם לא נתאים להם שתי צלעות אשר שתיהן הולכות לאותו גבר.

כיצד יוצרים סימון כזה?

אינדוקטיבית:

נניח שסימנו כבר קודקודים שהתומך שלהם $k-1$ מימדי, אזי בהנתן קודקוד x כך ש $k = dim\,(supp\,(x))$ אז ל x יש לכל היותר k שכנים שכבר סומנו. אבל ניתן לבחור עבורו צלע מקבוצה של $k+1$ צלעות. לכן יש גבר חופשי בקבוצה זו.

אם $x \sim y$, נסמן $supp\,(x) = X$ ו $supp\,(y) = Y$.

יש שתי אפשרויות - אם $Y \subseteq X$ אז קבוצת הקודקודים מהסוג הזה מונה לכל היותר k קודקודים, מכאן שיש ב E_x גבר פנוי - כלומר צלע פנויה שאפשר להשתמש בה.

אם $X = Y$ אז $E_X = E_Y$ ואין זוג צלעות שהולכות לאותו גבר, ולכן אפשר לבחור התאמה כנ"ל.

כעת נצבע כל קודקוד לפי האישה שעל הצלע המסמנת אותו, זוהי צביעת שפרנר, לכן יש סימפלקס רב צבעי, כלומר סימפלקס שכל הנשים מופיעות עליו, והצלעות שסימנו את קודקודי סימפלקס זה מהוות זיווג, כי כל הקודקודים בסימפלקס הם שכנים, ולא איפשרנו ששתי שכנות ילכו לאותו גבר בהתאמה שבנינו, ומכאן שזהו זיווג מושלם. ■

5.0.1 המקרה האינסופי

נסמן ב $\Gamma\,(X)$ את קבוצת שכני X.

יהי $G = (W, M, E)$ גרף דו צדדי כך ש $|W| = \infty$ ולכל תת קבוצה סופית של נשים - מתקיים

$$|\Gamma\,(X)| \geq |X|$$

אזי נאמר שתנאי הול מתקיים לנשים.

ברור שתנאי הול הוא תנאי הכרחי לקיום זיווג ממצה ל W, נשאלת השאלה האם הוא גם תנאי מספיק?

מסתבר שלא.

למשל אם שתי הקבוצות הן הטבעיים, אישה 2 מכירה את גבר 1, אישה 3 מכירה את גבר 2 וכן הלאה... ואישה מספר 1 מכירה את כולם. נובע שאין זיווג כי אישה מספר 1 תמיד תגנוב למישהי אחרת את בן הזוג. כלומר דווקא העובדה שיש קודקוד מדרגה אינסופית - עשויה להפריע לזיווג.

אם נוסיף את התנאי שכל הדרגות של קודקודי W תהיינה סופיות, אזי תנאי הול הוא גם מספיק.

(לא צריך שיהיה חסם על הדרגות, מספיק שכל אחת תהיה סופית)

המקרה הבן־מניה נוכיח זאת עבור המקרה הבן־מניה.
נתחיל בהוכחה שגויה:
נסתכל בגרף הסופי הנפרש ע"י האישה הראשונה ־ נמצא זיווג לפי משפט הול.
נסתכל בגרף הסופי הנפרש ע"י שתי הנשים הראשונות ־ "
נסתכל בגרף הנפרש ע"י k הנשים הראשונות ־ "
...

זו כמובן לא הוכחה לטענה המבוקשת אלא רק לכך שלכל תת גרף המושרה מקבוצת נשים סופית ־ יהיה זיווג סופי, אבל זה טריוויאלי בעצם, וגם להפעיל את הרעיון הזה על הדוגמה הנגדית שניתנה לעיל עם הטבעיים, וברור שזה לא יעבוד.

נעבור להוכחה נכונה: **הוכחה:** ממשפט הול למקרה הסופי ניתן לבנות סדרת זיווגים $M_1^0, M_2^0, M_3^0, ...$ (כמו בהוכחה השגויה, עבור האישה הראשונה, שתי הנשים הראשונות וכו') כאשר M_i^0 זיווג של i הנשים הראשונות.

היות שהדרגה של w_1 היא סופית ־ יש גבר שנסמנו m_1 המופיע ב ∞ מהזיווגים בסדרה $\left(M_n^0\right)_{n=1}^{\infty}$ בתור בן הזוג של w_1. כעת נעבור לתת סדר אינסופית (!) של כל הזיווגים בהם w_1 משודכת ל m_1. ונסמן סדרה זאת ע"י:

$$M_1^1, M_2^1, M_3^1, ...$$

ולכן בזיווג M_i^1 משודכות לפחות i נשים ו w_1 משודכת ל m_1. היות של w_2 מספר סופי של מכרים ־ נעבור לתת סדרה של הסדרה האינסופית לעיל אשר בה תמיד m_2 משודך ל w_2 וכן הלאה... לאשה w_i נשדך את הגבר המשודך לה בסדרה $\left(M_n^i\right)_{n=1}^{\infty}$.

וכעת יש לנו אלגוריתם לומר לאישה ה i למי היא משודכת, ולכן סיימנו את השידוך. ■

הערה 5.4 באמצעות משפט טיכונוף נוכיח את המקרה הכללי. לכל אישה נתבונן בקבוצת הגברים המוכרת לה, וזאת תהיה טופולוגיה דיסקרטית בה כל קבוצה היא פתוחה וסגורה. נתבונן במכפלה הקרטזית של קבוצות המכרים של כל הנשים. טופ' דיסקרטית על קבוצה סופית היא קומפקטית ולכן ממשפט טיכונוף ־ המכפלה קומפקטית אף היא. נקודה במרחב הזה היא סדרה של גברים, שכל גבר בקוא' ה i מתאים לאישה ה i. נתבונן בבסיס לטופ' המכפלה, בה בכל קבוצה יש גבר אחד במס' סופי של קוא'. מקומפקטיות ־ חותכים את כל איברי הבסיס ומקבלים זיווג.
(בערך, לא עקבתי אחרי הכל וזה היה די בריפרוף)

5.1 הול $\Leftarrow$ משפט בירקהוף ־ פון נוימן

הגדרה 5.5 מטריצה ריבועית תיקרא מטריצת פרמוטציה אם איבריה הם 0 ו 1 כאשר יש 1 בודד בכל עמודה ובכל שורה (כלומר זו תמורה של עמודות מטריצת היחידה), וקבוצת מטריצות הפרמוטציה היא הצגה של החבורה הסימטרית.

.

הגדרה 5.6 מטריצה ריבועית תיקרא דו סטוכסטית אם איבריה ממשיים אי־שליליים וסכום כל שורה ועמודה הוא 1. (בפרט מטריצות פרמוטציה הן מטריצות דו־סטוכסטיות)
דוגמא נוספת: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

מסתבר שאוסף המטריצות הדו־סטוכסטיות הוא קבוצה קמורה, ולמעשה זהו פאון שפאותיו הן מטריצות הפרמוטציה (וזהו המשפט שנוכיח).

משפט 5.7 בירקהוף ־ פון נוימן. המטריצות הדו־סטוכסטיות הן הקמור של מטריצות הפרמוטציה

למה 5.8 במטריצה דו־סטוכסטית קיים אלכסון מוכלל עליו כל האיברים חיוביים. (קיימת $\sigma \in S_n$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $0 < M_{i,\sigma(i)}$)

הוכחה: מחפשים זיווג בין השורות לעמודות, כאשר מותר לזווג שורה i לעמודה j אם $0 < M_{i,j}$.

בהנתן מטריצה ־ נבנה גרף דו"צ ונראה שתנאי הול מתקיים.

נתבונן בקבוצת שורות (=נשים) ונניח בשלילה שמספר העמודות שהשורות הללו מכירות הוא קטן ממספר השורות. בה"כ נניח שאלו השורות הראשונות ושהעמודות שהן מכירות הן העמודות הראשונות, אזי נקבל k שורות ראשונות שמכירות את m העמודות הראשונות $m < k$, מכאן שב k השורות הראשונות, מעבר לעמודה ה m יש רק אפסים, ומכיוון שהמטריצה דו־סטוכסטית, הסכום בכל שורה הוא 1 ולכן סכום k השורות הראשונות הוא k, ולכן הסכום הממוצע בכל עמודה הוא $\frac{k}{m} > 1$ ולכן יש עמודה שהסכום ב m השורות הראשונות שלה גדול מ1, ובפרט סכומה הכולל גדול מ 1 בסתירה לדו־סטוכסטיות. ∎

6 זרימה בגרפים

6.1 משפט השטף והחתך (Ford-Fulkerson 56', Min cut-Max flow)

$G = (V, E)$ יש שני קודקודים מיוחסים $s = source$ המקור, ו $t = target$ הבור/יעד.

תהי C פונקציית קיבולת $C : V^2 \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, הקיבולת של אי־צלע היא 0.

תהי f פונקציית זרימה על הגרף :

$$f : V^2 \to \mathbb{R}$$

כאשר נסמן $F(X,Y) := \sum_{x \in X, y \in Y} f(x,y)$ וכן $F(x,Y) := F(\{x\}, Y)$

פונקציית זרימה חוקית תקיים שלוש אקסיומות:

1. $f(x,y) = -f(y,x)$ לכל $x, y \in V$ (תסומן $F1$)
2. $F(x,V) = 0$ לכל $x \notin \{s,t\}$ (כלומר מה שנכנס לקודקוד שאינו המקור או הבור ־ גם יוצא ממנו, אקסיומה זו תסומן $F2$)
3. לכל x, y מתקיים $f(x,y) \geq C(x,y)$ (תסומן $F3$)

נתעניין בחתכי s, t, כלומר בחלוקת הגרף בדרכים שונות ל $V = \underbrace{S}_{s\in} \coprod \underbrace{\overline{S}}_{t\in}$ ונתעניין בקיבולת של חתכים שכאלו, כלומר ב $C\left(S, \overline{S}\right)$.

נבחין כי הזרימה מוגבלת ע"י הקיבולת המינימלית של חתך כלשהו, שכן זו מהווה צוואר בקבוק בדרך מ s ל t.

למה 6.1 לכל חתך $\left(S, \overline{S}\right)$ חתך s, t ־ מתקיים $F\left(S, \overline{S}\right) = F(s,V) := |f|$

הוכחה: $F\left(S,V\right)-\underbrace{F\left(S,S\right)}_{=0}=\underbrace{\sum_{s\neq x\in S}f\left(x,V\right)}_{=0\,by\,F2}+f\left(s,V\right)$ ■

מאקסיומה 3 לכל חתך $\left(S,\overline{S}\right)$ מתקיים:

$$|f|=F\left(S,\overline{S}\right)\leq C\left(S,\overline{S}\right)$$

ולכן

$$|f|\leq\min_{all\,cuts}C\left(S,\overline{S}\right)$$

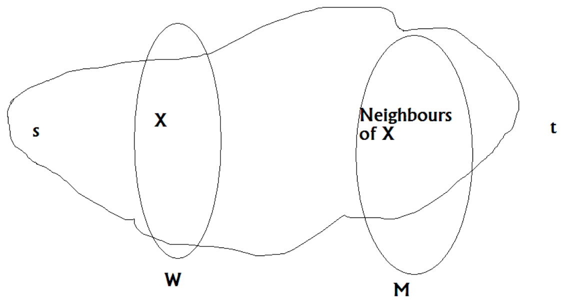
משפט 6.2 השטף והחתך ־ קיימת זרימה f כך ש $|f|=\min_{S}C\left(S,\overline{S}\right)$

אם כל הקיבולות הן מספרים שלמים, אזי קיימת זרימה מקסימלית שגם בה כל ערכי הזרימה שלמים. **הוכחה:** אפשר להוכיח את משפט הול באמצעות משפט השטף והחתך אם בצידו האחד של הגרף נוסיף קודקוד מקור שמזרים בקיבולת 1 לכל הנשים. ובצידו השני בור שמקבל בקיבולת 1 מכל הגברים. נשים קיבולת 1 לכל צלע מאישה לגבר ו 0 לצלעות מגברים לנשים.

נניח שהגרף מקיים תנאי הול, ממשפט השטף והחתך המחוזק ־ נראה כי יש זרימה שלמה בעלת ערך n (שכן החתך $\left(s\cup W,t\cup M\right)$ הוא בקיבולת n מתנאי הול). זה יגדיר זיווג מושלם.

נראה כי אכן חתך מינימלי הוא בגודל n בגרף זה.

בהנתן $\left(S,\overline{S}\right)$, ניתן להעביר מ $\overline{S}$ ל S כל גבר המכיר אשה ב S מבלי להגדיל את קיבולת החתך, ולכן יש חתך מינימלי הנראה כך:



עבור חתך כזה:

$$C\left(S,\overline{S}\right)=n\underbrace{-|X|+|\Gamma\left(X\right)|}_{edges\,from\,s\,to\,W\backslash X}\geq n$$

■

הוכחה: $MCMF$ (השטף והחתך) ־ תהי f זרימה מקסימלית, נמצא חתך $\left(S,\overline{S}\right)$ שקיבולתו $|f|$.

למה יש זרימה מקסימלית? הערך $|f|$ חסום, אם $v=\sup_{f\, legal\, flow}|f|$ אז יש $f_1,f_2,...,f_n,...$ כך ש $|f_n|\to v$ ולכן לכל אחת מהצלעות יש תת סדרה שעליה הסדרה הנ"ל מתכנסת. לכן קיימת תת סדרה מתכנסת על כל צלע - ניקח את הגבול שלה בכל צלע וזה יגדיר לנו פונקצית זרימה.

אחרי שהשתכנענו שאכן קיימת זרימה מקסימלית - נבנה את S באופן אינדוקטיבי.

יהי $S=\{s\}$

נפעל באלגוריתם הבא:

1. אם $x\in S$ ו $y\in\overline{S}$ והתנאי הבא מתקיים - העבר את y ל S:
   $C(x,y)-f(x,y)>0$ (כלומר f אינה מנצלת את הצלע במלואה)
2. חזור לשלב הקודם

ראשית נראה שכאשר מסיימים $t\notin S$, אחרת - יש מסלול $s=x_1,x_2,...,x_{m-1},x_m=t$ כך ש x_i צורף בגלל x_{i-1} לכל i בסדרה זו.

נסמן $\varepsilon_i=C(x_{i-1},x_i)-f(x_{i-1},x_i)$ וזה גדול מ 0 לכל i (אחרת לא היינו מצרפים את x_i ל S).

נגדיר $\varepsilon=\min_i\varepsilon_i$ וכעת נוסיף את ε לכל אחד מהערכים $f(x_{i-1},x_i)$ ונקבל פונקצית זרימה חוקית בעלת ערך גדול יותר מ f, בסתירה למקסימליות.

ומכאן $t\notin S$.

מההגדרה - לכל $x\in S$ ו $y\in\overline{S}$ - $f(x,y)=C(x,y)$ שאחרת היינו מוסיפים את y לקבוצה S ולכן $C(S,\overline{S})=|f|$. ■

נותר להראות שאם הקיבולות הן מספרים שלמים - אז יש זרימה שמזרימה מספר שלם בכל צלע. **הוכחה:** ניקח זרימה התחלתית $f_0=0$ (כלומר 0 בכל צלע). ולכל f_i נבנה את $(S,\overline{S})$ כמו בהוכחה הקודמת ואז יש שתי אפשרויות.

אם $t\notin S$ אז סיימנו ומצאנו חתך שערכו שווה לערך הזרימה.

אחרת - מוצאים מסילה מ s ל t כמו בהוכחה, ומגדילים את f_i לקבלת f_{i+1} כמו בהוכחה, אלא שכעת ε יהיה תמיד מספר שלם ולכן כל הזרימות, כולל המקסימלית, תהיינה שלמות. ■

7 קשירות

נאמר ש G הוא 1-קשיר אם הוא קשיר.

לכל $k>1$ נאמר ש G הוא k-קשיר אם יש בו לפחות $k+1$ קודקודים, ולכל $k-1$ קודקודים שמסירים ממנו G נשאר קשיר.

ואז $\kappa(G)$ - הקשירות הקודקודית, ה k המקסימלי כך ש G הוא k-קשיר.

לכל $k>1$ נאמר ש (מולטי) גרף G הוא k-קשיר צלעית, אם הסרת $k+1$ צלעות ממנו אינה מונעת ממנו להיות קשיר.

$\lambda(G)$- ה k המקסימלי כך ש G הינו k-קשיר-צלעית.

דוגמאות:

1. $n-1=\lambda(K_n)=\kappa(K_n)$
2. מסילה באורך $n>2$ מקיימת $1=\lambda(p_n)$=$\kappa(p_n)$
3. מעגל כאשר $n>3$ מקיים $2=\lambda(c_n)=\kappa(c_n)$
4. לא תמיד הם שווים, קל למצוא דוגמאות.

אם נסמן $\delta(G)$ הדרגה המינימלית ב G, הרי מתקיים $\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$ (תרגיל)

7.1 משפט מנגר

משפט 7.1 מנגר (גרסה קודקודית): יהי גרף G ו s,t קודקודים. אם המספר הקטן ביותר של קודקודים שצריך להסיר מ G בכדי להפריד את s מ t הוא k אזי ניתן למצוא k מסילות זרות בקודקודים (מלבד s ו t) מ s ל t.

.

משפט 7.2 מנגר (גרסה צלעית) כנ"ל צלעות.

הוכחה: תכנית ההוכחה ־ תרגיל: להראות שמנגר קודקודי $\Leftarrow$ מנגר צלעי.

נוכיח את מנגר קודקודי:

א. באינדוקציה על k.

ב. מ $MCMF$ (הוכחה קלה).

.

א. הוכחה באמצעות זרימה:

נעבור לגרף מכוון.

נחליף כל קודקוד v בשני קודקודים v^- ו v^+ וצלע מכוונת (v^-,v^+), ונגדיר קיבולת 1 על (v^-,v^+) וקיבולת 0 על (v^+,v^-).

לכל צלע (u,v) נבנה במקומה (u^+,v^-), על צלעות אלו נשים קיבולת אינסופית.

יהיו s,t קודקודים מיוחסים, חתך מינימלי המפריד אותם בגרף החדש, מתאים לקבוצה מינימלית של קודקודים, שהסרתם בגרף המקורי מפרידה את s מ t.

ממשפט השטף והחתך ־ יש זרימה מקסימלית בגרף החדש שהיא שלמה, כלומר זרימת $\{0,1\}$, ואז יש התאמה חח"ע בין מסלולים זרים בקודקודים בגרף המקורי לזרימות שלמות בגרף החדש: כלומר יש kמסילות זרות בקודקודים מ s ל t אס"ם יש זרימה בגודל k מ s ל t.

.

ב. הוכחה באינדוקציה על k (כלומר הנחה בשלילה של קיום של גרף מינימלי שאינו מקיים את המשפט, מתוך *Bollobas: Modern Graph Theory*)

עבור $k=1$ המשפט מתקיים, קל לראות זאת.

נניח בשלילה שהמשפט אינו נכון ויהי $k\geq 2$ המינימלי שעבורו המשפט אינו נכון ו G גרף עם מספר מינימלי של צלעות המהווה דוגמא נגדית עבור k.

כלומר יש s,t כך שניתן להפריד את s,t ע"י k קודקודים ולא פחות, אך יש רק $k-1$ (או פחות) מסילות זרות מ s ל t.

תהי w קבוצת קודקודים $k=|w|$ המפרידה את s מ t.

הערה $*$:נבחין כי אין ל s ול t שכן משותף, שכן אם היה שכן משותף ־ היה אפשר להסיר אותו מהגרף ולקבל דוגמה נגדית למשפט ב $k-1$, והנחנו שהדוגמה שבידנו משיגה k מינימלי, בסתירה.

נתבונן בשני מקרים:

מקרה 1: קיימת w כך שלא s ולא t הם שכנים של כל קודקודי w

מקרה 2: לכל קבוצה מפרידה כנ"ל w, מתקיים s או t הם שכנים של כל קודקודי w

.

מקרה 1: נתבונן בגרף המתקבל על ידי הסרת w, ברכיב הקשירות של s יש לפחות עוד קודקוד אחד (ולפחות צלע אחת) נחליף את רכיב הקשירות של s בגרף החדש בקודקוד s' ונחברו לכל הקודקודים ב w. בגרף זה יש פחות צלעות ולכן אינו דוגמא נגדית, ויש להסיר לפחות k קודקודים בכדי להפריד את s' מ t ולכן יש k מסילות זרות מ s' ל t, זה נותן k מסילות זרות מ w ל t.

באופן דומה, נניח ש t איננו שכן של כל קודקודי w ונקבל k מסילות זרות מ w ל s, תפירת מסילות אלו נותנת k מסילות זרות מ s ל t. מדוע? ב w יש בדיוק k קודקודים, כלומר ניתן לזווג את כל המסילות (הזרות בקודקודיהן) שמצאנו מ w ל t למסילות שמצאנו מ w ל s

מקרה 2: תהי $s, x_1, x_2, ..., x_m, t$ מסילה קצרה ביותר מ s ל t, כעת $m \geq 2$ שכן ל s ול t אין שכנים משותפים (הערה $*$). נסיר את הצלע $\{x_1, x_2\}$מהגרף וכעת נשארנו עם גרף שאינו דוגמה נגדית, כלומר מספר המסילות הזרות הוא כעת מספר הקודקודים הדרוש להפרדה, איך זה קרה? לא יתכן שמספר המסילות הזרות עלה, ולכן בהכרח מספר הקודקודים הדרוש להפרדה ירד, כלומר ניתן להפריד את s ו t על ידי $k-1$ קודקודים אך לא פחות.

תהי w_0 קבוצה של $k-1$ קודקודים המפרידה את s מ t בגרף החדש, ונגדיר $w_1 = w_0 \cup \{x_1\}$ ובאופן דומה $w_2 = w_0 \cup \{x_2\}$. נבחין כי w_1, w_2 מפרידים את s ו t בגרף המקורי.

x_1 אינו שכן של t כי הוא שכן של s, ולכן כל קודקודי w_0 שכנים של s ולכן כל קודקודי w_0 שכנים של s (הנחת מקרה 2).

x_2 לא שכן של s ולכן כל קודקודי w_0 שכנים של t, בסתירה (זה בסדר כי $|w_0| \geq 1$, ולא עשינו פה רמאות אינדוקציה, כמו הוכחת "כל האנשים בעולם הם ג'ינג'ים"). ■

תרגיל ־ הסיקו את הגרסה הצלעית של מנגר מהגרסה הקודקודית...
(הרעיון ־ בונים גרף עזר שבו הצלעות הופכות לקודקודים)

7.2 משפט Tutte

(האנלוג של משפט הול לגרף שהוא לא דו צדדי)

אפשר לחשוב על זיווג ככיסוי של שני קודקודים ע"י צלע, ואז בגרף כללי (עם מספר זוגי של קודקודים) ניתן לתהות האם אפשר לכסות עם צלעות זרות (בקודקודיהן) את כל קודקודי הגרף?

נסמן לכל $W \subseteq V$ את $q(W)$=מספר רכיבי הקשירות בעלי גודל אי זוגי ב $G \setminus W$.

ברור שתנאי הכרחי לקיום זיווג מושלם הוא שלכל $W \subseteq V$ יתקיים $q(W) \leq |W|$.

משפט 7.3 טאט: זהו גם תנאי מספיק

הוכחה: (מתוך Diestel)

יהי G גרף ללא זיווג מושלם, נמצא $S \subseteq V(G)$ המפר את תנאי טאט.

נניח ש G מקסימלי בצלעות ללא זיווג מושלם (ביחס להכלה, כלומר נוסיף עוד ועוד צלעות עד שנקבל את הגרף השלם או גרף מקסימלי ללא זיווג מושלם). מדוע זה בסדר? כי אם בגרף החדש, אחרי הוספת הצלעות, מצאנו הפרה לתנאי טאט ־ אזי נבחין כי כל רכיב קשירות מגודל אי־זוגי מגלם בתוכו לפחות רכיב קשירות אחד מהגרף הישן ובו מספר אי זוגי של קודקודים (כי סכום אי זוגי משמעו שאחד המחוברים לפחות הוא אי־זוגי גם כן)

נגדיר את S להיות קבוצת כל הקודקודים המחוברים לכל קודקוד אחר, ונראה שכל רכיב ב $G \setminus S$ הוא גרף שלם.

אם המצב הוא שיש S ענן קודקודים המחוברים לכל הקודקודים האחרים, שהוא גרף שלם, וגם כל העננים האחרים הם גרפים שלמים ועדיין אין זיווג ־ בהכרח תנאי טאט מופר

(מדוע? כי במקרה כזה את כל רכיבי הקשירות מגודל זוגי אפשר לכסות על ידי בחירת גרף דו"צ מתוך הגרף השלם שלהם, ולכל רכיב מגודל אי זוגי צריך למצוא שכן בענן המרכזי. אם לא מצאנו, למרות שכל הקודקודים בענן המרכזי שכנים של כולם, נובע שמספר רכיבי הקשירות האי־זוגיים גדול מהענן המרכזי (סתירה לתנאי טאט) או שמספר הקודקודים בענן

המרכזי לאחר הפרוצדורה הוא אי זוגי בעצמו. מכיוון שעד כה חילקנו לזוגות, מכאן נובע שמספר הקודקודים הבכל הגרף כולו הוא אי־זוגי, וגרף כזה מפר את תנאי טאט על פי הגדרתנו)

נניח בשלילה שיש רכיב ב $G \setminus S$ שאיננו גרף שלם, כלומר יש קודקודים a, a' ברכיב שאינם שכנים.

תהי $a, b, c, ..., a'$ מסילה קצרה ביותר בין a ו a', מכאן שאין צלע $\{a, c\}$ (אחרת היה אפשר לקצר את המסילה עוד ולדלג על b).

היות ש $b \notin S$, קיים d שאינו שכן של b.

קיים זיווג שלם M_1 בגרף אם נוסיף לו את הצלע $\{a, c\}$ממקסימליות הגרף ללא הזיווג.

מאותו טעם קיים זיווג שלם M_2 בגרף עם $\{b, d\}$.

נתחיל מסילה p מ d: $d, x_1, x_2, x_3, ..., v$ כך ש $d, x_1 \in M_1$ ו $x_1, x_2 \in M_2$ ו $x_2, x_3 \in M_1$ וכן הלאה, צלעות זוגיות במסילה שייכות ל M_2 והאי זוגיות ל M_1, נבחין כי בעצם המסילה מוכתבת לנו על ידי יחידות השכנים בזיווגים, ולכן היא גם מקסימלית ביחס לתכונה זו. לא נעשה שימוש בצלעות שאינן ב G, כלומר ב $\{a, c\}$ וב $\{b, d\}$.

נלך במסילה עד שניתקע, ובהכרח ניתקע כי אם נסגור מעגל עם d הרי שמגיעים אל d בצלע ששייכת ל M_2, ושם הוא מזווג ל b והצלע $\{b, d\}$ אינה קיימת בגרף שלנו כלל!

יש שתי אפשרויות:

א. p מסתיימת בצלע מ M_1 ואז $v = b$, כי זו הצלע היחידה שמפריעה לסגור מעגל ב M_2 (בזיווג יש רק מעגלים ו/או צלעות כפולות.

ב. p מסתיימת בצלע מ M_2 אז $v \in \{a, c\}$, מסיבות דומות נניח בה"כ $v = a$

אפשרות א: ניקח את הזיווג M_2 בכל המקומות מלבד המעגל הקטוע p, וב p עצמה ניקח את הצלעות האי־זוגיות, דהיינו צלעות מ M_1 וכך הלחמנו את שני הזיווגים כדי לקבל זיווג חוקי בגרף המקורי שאינו עושה שימוש בצלעות החסרות, בסתירה לכך שאין זיווג בגרף שלנו.

אפשרות ב': נבחין כי הצלע $\{b, a\}$ אינה ב M_1 ואינה ב M_2 (כי שני הקודקודים הללו מזווגים לאחרים בזיווגים אלו) , ולכן נוכל לקחת את הזיווג M_2 בכל המקומות שאינם במעגל הקטוע p, וב p עצמה להשתמש רק בצלעות האי־זוגיות וב $\{a, b\}$ (שאינה בזיווג) ומכך יתקבל זיווג מושלם, גם כן בסתירה לכך שאין זיווג מושלם בגרף שלנו. ■

משפט השטף והחתך גורר את דילוורת'

דילוורת' גורר את הול (מופיע בתרגיל)

נסביר לשם כך מהו משפט דילוורת':

תהי P קס"ח (קבוצה סדורה חלקית)

נגדיר שרשרת להיות סדרה של איברים שמתייחסים כל אחד לקודמו, $a_1 < a_2 < ... < a_n$

נגדיר אנטי שרשרת להיות סדרה של איברים שכל שניים אינם ניתנים להשוואה, כלומר קבוצה שאינה מכילה שרשרת ארוכה מ 1.

אם ל P יש שרשרת בגודל k אזי ברור שלא ניתן לכסות את P ע"י פחות מ k שרשראות זרות.

נגדיר אך לא נוכיח את משפט דילוורת' לצרכי התרגיל:

משפט 7.4 (דילוורת') עבור P קס"ח סופית - גודל האנטי שרשרת המקסימלית=מספר הקטן ביותר של שרשראות שצריך כדי לכסות את P.

הגדרה 7.5 A מונוטונית אם

$$x < y \land x \in A \Rightarrow y \in A$$

.

הגדרה 7.6 נאמר ש μ_1 שולטת סטוכססטית על μ_2 אם לכל קבוצה מונוטונית A, מתקיים $\mu_1(A) \geq \mu_2(A)$.

דוגמא לא סופית, אך ממחישה:
נתבונן בקטע $[0,1]$
כאשר $X \sim U[0,1]$ היא המידה μ_2
$Y \sim U\left[\frac{1}{2},1\right]$ היא המידה μ_1
קבוצה מונוטונית $(t,1]$ או $[t,1]$
ואז קל לראות ש:

$$Pr[x \in (t,1]] \leq Pr[y \in (t,1]]$$

ולכן μ_1 שולטת סטוכססטית על μ_2.
אפשר לראות זאת מיידית ואפשר גם להסתכל באופן הבא:
נבחר זוג x,y כך: $x \sim U[0,1]$ ו $y := \frac{1+x}{2} \sim U\left[\frac{1}{2},1\right]$ ואז אם מתבוננים בזוג (x,y), ההתפלגות השולית של הקוא' הראשונה היא μ_2 ושל הקוא' השניה μ_1.
אבל אז מתקבל $x \leq y$ תמיד כי $x \leq \frac{1+x}{2}$ לכל $x \in [0,1]$ ואז נאמר שזהו צימוד מונוטוני של המידות...
נגדיר זאת פורמלי:

הגדרה 7.7 צימוד מונוטוני של שתי מידות הסתברות μ_1,μ_2 על קס"ח P היא התפלגות $(x,y) \in P^2$ כך שההתפלגות השולית של y היא μ_1 וההתפלגות השולית של x היא μ_2 ו $x \leq y$ תמיד.

ברור שצימוד מונוטוני גורר ש $\mu_2 \preceq \mu_1$ (שולט סטוכססטית) כי לכל מאורע מונוטוני A מתקיים:

$$\mu_1(A) = Pr(y \in A)$$
$$\mu_2(A) = Pr(x \in A)$$

אבל המאורע השני הוא תת קבוצה של המאורע הראשון.
תרגיל לבית:
שימוש יפה למשפט השטף והחתך הוא שניתן באמצעותו להוכיח שאם μ_1,μ_2 מידות הסתברות על קס"ח סופית, אזי μ_1 שולטת סטוכססטית על μ_2 אס"ם קיים צימוד מונוטוני בין μ_1 ל μ_2.
קל לראות מההגדרה שאם יש צימוד מונוטוני אז יש שליטה סטוכססטית, הכיוון השני הוא מעניין.

דוגמא הגרף המקרי $G(n,p)$

הגדרה 7.8 זהו מרחב הסתברות על גרפים על קבוצת הקודקודים $\{1,2,...n\}$, כלומר יש $2^{\binom{n}{2}}$ נקודות במרחב, במילים אחרות - כל התת גרפים של K_n.

לכל צלע $\{i,j\}$ נגריל באופן בלתי תלוי משתנה מקרי $X_{ij}\in\{0,1\}$ כך ש $X_{ij}=1$ בהסתברות p.

ואז צלעות הגרף הן כל הזוגות $\{i,j\}$ כך ש $X_{ij}=1$.

במילים אחרות - עוברים על כל הצלעות האפשריות, בהסתברות p שמים צלע ובהסתברות $1-p$ אין עושים זאת בין כל שני קודקודים.

$$E\left[G(n,p)\right]=\{\{i,j\}:X_{ij}=1\}$$

$$p^{|E(M)|}\left(1-p\right)^{\binom{n}{2}-|E(M)|}=Pr\left[G(n,p)=M\right]$$

אוסף כל התת גרפים של K_n הוא קס"ח ביחס להכלה.

מה ההסתברות לקבל גרף מישורי?

נבחין כי קבוצת הגרפים שאינם מישוריים היא מונוטונית.

טענה 7.9

$$Pr\left[G(n,0,5)\ not\,planar\right]\leq Pr\left[G(n,0.51)\ not\,planar\right]$$

.

טענה 7.10 אם $0\leq p\leq q\leq 1$ אז המידה המושרה ע"י $G(n,q)$שולטת סטוכסטית במידה המושרה ע"י $G(n,p)$

זה בפרט מוכיח את הטענה הקודמת.

הוכחה: צימוד מונוטוני - לכל $\{i,j\}$ נגדיר:

$$X_{ij}\sim U\left[0,1\right]$$

$$E\left[G(n,p)\right]:=\{\{i,j\}:X_{ij}\leq p\}$$

התפלגות זאת נותנת את $G(n,p)$ אבל לפי הגדרה זו מקבלים $E\left[G(n,p)\right]\subseteq E\left[G(n,q)\right]$

אם $p\leq q$, כלומר בניסוח אחר של הגרלת הגרף - נקבל הכלה ממש במקרה שהקבוע שבוחרים (p או q) גדול יותר. ■

8 גרפים מישוריים

הגדרה 8.1 גרף יקרא מישורי אם יש לו שיכון במישור בו אין חיתוכים בין הצלעות.

עובדה (שנוכיח עוד מעט): K_5 איננו מישורי וכך גם $K_{3,3}$ בציור של גרף מישורי, מלבד קודקודים וצלעות, יש גם פאות: פאה היא האיזור התחום ע"י מעגל בציור של גרף מישורי אם בפנים המעגל אין עוד קודקודים. למעשה הגדרה טופולוגית של פאה תהיה טובה יותר, כלומר ־ אם נסיר מהמישור את צלעות הגרף וקודקודיו ־ רכיבי הקשירות הנותרים במישור הם הפאות.

לעיתים מתייחסים אל החלק האינסופי של המישור המקיף את הגרף כפאה חיצונית.

נסמן ב v את מספר הקודקודים בגרף, ב e את מספר הצלעות, וב f את מספר הפאות.

האם מספר הפאות תלוית בציור של הגרף במישור? לא.

משפט 8.2 (נוסחת אוילר) עבור גרף מישורי קשיר מתקיים $v-e+f=2$

הוכחה: באינדוקציה על e עבור $v=n$ קבוע.

בסיס האינדוקציה הוא $e=n-1$ (שכן אחרת הגרף לא קשיר) ובמקרה כזה זהו עץ, וכיוון שאין בו מעגלים ־ יש בו פאה אחת ולכן $f=1, e=n-1, v=n$ והנוסחה מתקיימת.

מעבר האינדוקציה ־ אנחנו מניחים ש $e\geq n$ ולכן יש לפחות מעגל אחד, ולכן יש לפחות פאה אחת חסומה.

נסיר צלע מהמעגל התוחם את הפאה החסומה, והיא תתאחד עם אחת משכנותיה, ונקבל גרף שבו יש פאה אחת פחות וצלע אחת פחות. כמו כן מקבלים גרף מישורי וקשיר (לא פגענו בקשירות כי הסרנו צלע ממעגל) לפי הנחת האינדוקציה מתקיימת נוסחת אוילר ובגרף המתקבל נסמן את הפרמטרים ב v', e', f' ומתקיים:

$$v'=v, e'=e-1, f'=f-1$$

ומהנחת האינדוקציה מתקיים:

$$v'-e'+f'=2 \Rightarrow v+e+1+f-1=2$$

ומכאן שנוסחת אוילר מתקיימת כנדרש. ■

טענה 8.3 בגרף מישורי קשיר על n קודקודים ו m צלעות, מתקיים $m\leq 3\left(n-2\right)$, בפרט ב K_5 בו מתקיים $n=5$ ו $m=\binom{5}{2}$ וכיוון ש $10\not\leq 3\cdot 3$ ולכן K_5 לא מישורי.

אפשר להוסיף צלעות לגרף כך שישאר מישורי עד שיתקבל שכל פאה תחומה ע"י 3 צלעות בדיוק, ולכן $3f\leq 2m$ וממשפט אוילר מתקיים $n-m+f$ כלומר:

$$2=n-m+f\leq n-m+\frac{2}{3}m \Rightarrow n-2\geq \frac{m}{3} \Rightarrow 3\left(n-2\right)\geq m$$

ב $K_{3,3}$ אין מעגלים באורך אי זוגי (כי הוא 2 צביע, כגרף דו"צ) ובפרט לכל פאה F מתקיים $P_F \geq 4$=מספר הצלעות התוחמות את הפאה F.

ולכן:

$$2m\geq 4f \Rightarrow 5\geq f$$

וממשפט אוילר:

$$2 = n - m + f = 5 - 10 + f \leq 0$$

בסתירה.

ניתן לשאול את השאלה ־ אם גרף איננו מישורי, מה המספר המינימלי של חיתוכים שאפשר לצפות לו (אין מרשים חיתוכים משולשים, מרובעים וכו')? עבור גרף G נסמן ב $Cr\left(G\right)$ את מספר החיתוכים המינימלי שניתן להשיג בשיכון G במישור.

טענה 8.4

$$Cr\left(G\right) \geq m - 3n + 6 = m - 3\left(n - 2\right)$$

זה נקרא גם משפט החיתוכים החלש

אבחנות:

1. בציור של גרף עם מספר מינימלי של חיתוכים צלע אינה חוצה את עצמה.
2. צלעות בעלות קודקוד משותף אינן נחתכות.
3. 2 צלעות אינן נחתכות פעמיים.

כל האבחנות הללו נובעות מאותו רעיון, שבהנתן נקודת חיתוך, אפשר להחליף בין שתי הצלעות הנכנסות או היוצאות אליה, ונקבל משהו ללא נקודת חיתוך, וזה אפשרי במקרים לעיל. **הוכחה:** (לטענה) בהנתן ציור של גרף ללא הפגמים הנ"ל עם $Cr\left(G\right)$ חציות ניצור גרף חדש על ידי הפיכת נקודת החיתוך לקודקודים. בגרף החדש מספר הקודקודים הוא $Cr\left(G\right) + v$ ומספר הצלעות הוא:

$$e + 2Cr\left(G\right)$$

כי כל קודקוד "חדש" מחלק את שתי הצלעות שעוברות דרכו לשני חלקים כ"א, ולכן מוסיף שתי צלעות למניין.
הגרף הזה מישורי ולכן:

$$e + 2Cr\left(G\right) \leq 3\left(v + Cr\left(G\right) - 2\right) \Rightarrow Cr\left(G\right) \geq e - 3r + 6$$

■

משפט 8.5 (החיתוכים) אם $4n \leq m$ וב G יש m צלעות ו n קודקודים, אזי

$$Cr\left(G\right) \geq \frac{m^3}{64n^2}$$

הוכחה: נצייר את G במישור, ונבחר תת גרף מקרי על ידי בחירת כל קודקוד באופן בלתי תלוי בהסתברות p. נתבונן בציור של הגרף החדש.

יהי X_p מספר החיתוכים בגרף זה, ו m_p מספר הצלעות ו n_p מספר הקודקודים. וכיוון שתת הגרף מישורי נובע :

$$X_p - m_p + 3n_p \geq 0$$

(נזניח את ה 6 מהמשפט החלש)
נתבונן בתוחלת ונקבל:

$$0 \leq \mathbb{E}\left[X_p - m_p + 3n_p\right] = \mathbb{E}\left[X_p\right] - \mathbb{E}\left[m_p\right] + 3\mathbb{E}\left[n_p\right]$$
$$= Xp^4 + mp^2 + 3np \Rightarrow \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} \leq X$$

ולפי הנחתנו $4n \leq m$ ולכן ניתן לבחור $p = \frac{4n}{m} \leq 1$, מציבים זאת ומקבלים כי

$$\frac{m^3}{64n^2} \leq X$$

כנדרש. ■

ארדש שאל מה המספר המקסימלי של מרחקי יחידה בין n נקודות במישור.
הוא שיער שהתשובה היא $n^{1+o(1)}$
מה שידוע הוא שזה לא יותר מ $O\left(n^{\frac{4}{3}}\right)$

טענה 8.6 בהנתן n נקודות ו j מעגלי יחידה במישור, מספר החילות של נקודות על מעגלים הוא לכל היותר $4n + 4n^{\frac{2}{3}}j^{\frac{2}{3}}$, בפרט אם לוקחים n נקודות ואת מעגלי היחידה סביבן, מקבלים חסם של $4n + 4n^{\frac{4}{3}}$ מרחקי יחידה.

הוכחה: נצייר גרף שקודקודיו הם הנקודות והצלעות הן בין נקודות סמוכות על אותו מעגל.
מכאן שנאפשר צלעות כפולות (אם יש שתי נקודות על מעגל) ולולאות (נקודה אחת על מעגל)

זה נותן ציור במישור עם x חציות כאשר $x \leq j^2$, ואז או שמספר החילות קטן מ $4n$ ואחרת אם מספר החילות הוא I אז $\frac{I^3}{64n^2} \leq x \leq j^2$ ■

כבר ראינו ש K_5 ו $K_{3,3}$ אינם מישוריים וכך גם כל גרף שיש לו תת גרף שהוא אחד מהם. האם זה המקרה הכללי? כלומר האם כל גרף שאינו מישורי מכיל את אחד מהם כתת גרף? אז מסתבר שלא, אבל כמעט. הומיאומורף של ציור של גרף G הוא ציור של גרף ובו מחליפים חלק מהצלעות ב G במסילות, כלומר מוסיפים קודקודים על גבי צלע...

משפט 8.7 קורטובסקי ־ גרף הוא מישורי אם"ם אינו מכיל הומיאומורף של K_5או $K_{3,3}$

(לא נוכיח זאת)

8.1 משפט 4 הצבעים

צביעה של קודקודי גרף:

$$\sigma : V(G) \to \{1, ..., n\}$$

כך ש

$$\sigma(i) \neq \sigma(j) \ \forall i \sim j$$

ואז נגדיר את $\chi(G)$ להיות ה n המינימלי עבורו קיימת צביעה שכזאת.

טענה 8.8 (קלה) אם Δ הדרגה המקסימלית של G, אזי מספר הצביעה של G הוא לכל היותר $\Delta + 1$.

הוכחה: אינדוקציה, מסירים קודקוד, צובעים, מחזירים אותו ויש לו לכל היותר Δ צבעים, ולכן אפשר לצבוע אותו בצבע ה $\Delta + 1$. ■

טענה 8.9 : אם הדרגה הממוצעת של G וכל תת גרף של G היא $\Delta \geq$ אזי $\Delta + 1 \geq \chi(G)$

הוכחה: אינדוקציה.
ב G יש קודקוד בעל דרגה $\Delta \geq$, נסיר אותו, נצבע כמקודם, נשיב אותו וכו'. היינו חייבים את הדרישה לתתי גרף כדי לקבל שגם אחרי ההסרה משתמרת התכונה שהדרגה הממוצעת קטנה מ Δ. ■

מסקנה 8.10 כל גרף מישורי הוא 6 - צביע, כי ראינו ש $e \leq 3(n-2)$ ולכן הדרגה הממוצעת היא $\frac{2e}{n} \leq 6$ וכך גם בכל תת גרף (גם כל תת גרף שלו הוא מישורי).

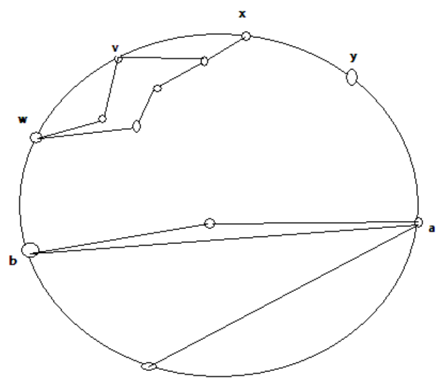
גאת'רי שיער ב 1852 שכאשר נרצה לצבוע מפה מדינית, נוכל לעשות זאת ב 4 צבעים שונים, ובאופן שקול - שכל גרף מישורי הוא 4 - צביע.
כעבור 38 שנה, ב 1890 - Heawood הוכיח את משפט 5 הצבעים.
ב 1976 - Apple&Haken הוכיחו את משפט 4 הצבעים תוך שימוש במחשב. הם מצאו 1936 משפחות של גרפים כך שכל גרף שקול לנציג של אחת המשפחות מבחינת צביעה, ואחר כך הריצו תוכנת מחשב שבדקה רק את הנציגים.
ב 1997 ניתנה הוכחה פשוטה יותר, אולם גם היא באמצעות מחשב.

הגדרה 8.11 בהנתן גרף G ורשימה של צבעים לכל קודקוד, צביעה חוקית היא השמה של צבע לכל קודקוד מתוך רשימתו כך שקודקודים שכנים מקבלים צבעים שונים.
$\chi_C(G)$ הוא ה k המינימלי כך שבכל אוסף של רשימות באורך k לכל קודקוד, יש צביעה חוקית.
ברור מאליו ש $\chi_C(G) \geq \chi(G)$

במבט ראשון נראה שהמספרים הללו ממש שווים, נציג גרף שמספר הצביעה שלו הוא 2 ומספר הבחירה 3 - זהו $K_{3,3}$, אם נבחר לקודקודי צד שמאל את הרשימות $\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}$ ולקודקודי צד ימין את הרשימות $\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}$ גם כן, וקל לוודא שאי אפשר לבחור צבע אחד לכל קודקוד מתוך רשימתו ולקבל צביעה חוקית. מספר הבחירה שלו הוא 3.

משפט 8.12 (קרסטן) כל גרף מישורי הוא 5 - בחיר (choosable)

הוכחה: ראשית ניתן להניח שכל פאות הגרף למעט החיצונית הן משולשים.
נניח:
א. זוג קודקודים סמוכים על הפאה החיצונית כבר צבועים
ב. לכל קודקוד אחר על הפאה החיצונית יש רשימת צבעים בגודל 3
ג. לכל קודקוד פנימי רשימה באורך 5
אזי ניתן להשלים את הצבעיה מהרשימות.
נתבונן בשני מקרים:
1. יש מיתר שמחבר שני קודקודים על הפאה החיצונית, ושמשאיר את x,y באותה המיספירה. במקרה כזה נצבע את החלק העליון לפי הנחת האינדוקציה ונקבל בחלק התחתון גרף המתאים גם כן להנחת האינדוקציה (2 הקודקודים המיוחסים שהצבעיה העליונה כופה על התחתונה הם הקודקודים הנמצאים, כאן בציור אלו a ו b):



2. נניח שצבענו את x בצבע α ואת y בצבע β, ו v שכן של x שניתן לצבוע, כי על פי הנחתנו יש ברשימה שלו לפחות שני צבעים שונים מ α, נסמנם δ,γ. מכל קודקוד על המסילה בין x ל w נסיר את הצבעים δ,γ מרשימתו. הגרף המתקבל על ידי הסרת v והסרת הצבעים כנ"ל נצבע לפי הנחת האינדוקציה אפילו אם w צבוע ב γאו δ, אז נשאר צבע פנוי וסיימנו. ■

9 תורת הגרפים האקסטרמלית (קיצונית)

משפט 9.1 מנטל 1927 - בכל גרף על $n \geq 3$ קודקודים עם לפחות $\frac{n^2}{4}$ צלעות יש משולש.

.

משפט 9.2 טורן 1941 - עבור $n \geq k \geq 2$ בכל גרף עם $< \binom{k-1}{2}\left(\frac{n}{k-1}\right)^2$ צלעות יש תת גרף שלם על k קודקודים (K_k).

הוכחה: בהנתן גרף G עם דרגה ממוצעת J ו n קודקודים ללא K_k נסדר את קודקודי G בשורה בסדר אקראי, ומסדרה זו ננסה לבנות תת גרף שלם כך:

ניקח את הקודקוד הראשון ואחר כך ניקח כל קודקוד המקיים שכל אלו שכבר נבחרו הם שכניו, ברור שהתהליך הזה נותן גרף שלם בגודל כלשהו.

קל לראות שאם קודקוד מופיע בסידור האקראי לפני כל אי־שכניו, הוא יבחר לקליקה שאנו בונים. (תנאי מספיק, אך לא הכרחי)

לכן לקודקוד בדרגה d יש סיכוי של לפחות $\frac{1}{n-d}$ להופיע בקליקה.

נגדיר לכל קודקוד משתנה מקרי מציין X_v שמקבל 1 אם v שייך לקליקה ו 0 אחרת.

נגדיר:

$$X = \sum_{v \in V} X_v$$

ו X = לגודל הקליקה המתקבלת.

$$\mathbb{E}[X] = \sum \mathbb{E}[X_v] \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_v}$$

מאידך הנחנו שבגרף אין קליקה בגודל k ולכן תוחלת הקליקה שתתקבל קטנה מ k:

$$\mathbb{E}[X] \leq k - 1$$

ולכן:

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_v} \leq k - 1$$

מקושי שוורץ יש:

$$n^2 \leq \sum_v \frac{1}{n - d_v} \cdot \sum_v n - d_v \leq (k-1)\left(n^2 - 2|E|\right)$$

מעבירים אגפים ומקבלים את משפט טורן. ■

10 שיעור 10 (האמת שהפסדתי שיעור אחד אבל בקטנה)

10.1 למת הרגולריות של סמרדי

נראה את Δ-ramoval-lemma אם אנחנו εn^2 רחוקים מלהיות חסרי משולשים - אז יש δn^3 משולשים.

נניח שיש X, Y קבוצות קדקודים ו $e(X, Y)$ קבוצת הצלעות ביניהן (נניח שהקבוצות זרות).

ונגדיר:

$$d(X, Y) := \frac{|e(X, Y)|}{|X| \cdot |Y|} \leq 1$$

נאמר ש X,Y זוג ε־רגולרי אם לכל $X' \subseteq X$ ו $Y' \subseteq Y$ שהם לא קטנים מדי, כלומר $|X'| \geq \varepsilon |X|$וגם $|Y'| \geq \varepsilon |Y|$, אז מתקיים:

$$\varepsilon \geq |d(X',Y') - d(X,Y)|$$

הרעיון של למת הרגולריות של סמרדי ־ לקחת כל גרף, לחלק אותו למספר לא גדול של חלקים, שאחד מהם בתפקיד "פח הזבל" והאחרים הם r־חלוקה של הגרף שנותנת גרף r צדדי.

בהנתן גרף $G(V,E)$ נאמר שחלוקה $V = V_0 \coprod V_1 \coprod ... V_k \coprod$ היא ε רגולרית אם:

.1

$$\varepsilon \cdot |V| \geq |V_0|$$

.2

$$|V_1| = |V_2| = ... = |V_k|$$

.3 לכל היותר εn^2 מהזוגות (V_i,V_j)אינם ε רגולריים.

(ההוכחה שנראה היא מתוך diestel)

משפט 10.1 למת הרגולריות של סמרדי: לכל $\varepsilon > 0$ ולכל mקיים M כך שכל גרף עם לפחות m קודקודים מאפשר חלוקה ε רגולרית $V = V_0 \coprod ... \coprod V_l$ כך ש $m \leq l \leq M$.

כלומר נצליח לייצר חלוקה ε רגולרית מבלי לקבל בהכרח המון חלקים.

הוכחה: נבחין כי עבור $\mu_i > 0$ ו $e_i > 0$ ו $i = 1...l$ מתקיים (מקושי שוורץ):

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{e_i^2}{\mu_i} \geq \frac{\left(\sum e_i\right)^2}{\sum \mu_i}$$

עבור שתי קבוצות זרות של קודקודים A,B נגדיר את האינדקס שלהן:

$$\begin{aligned} q(A,B) :&= \frac{|A| \cdot |B|}{n^2} \cdot d^2(A,B) \\ &= \frac{e^2(A,B)}{|A| \cdot |B| \cdot n^2} \end{aligned}$$

אם $\mathcal{A}$חלוקה של A ו $\mathcal{B}$ חלוקה של B נגדיר:

$$q(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \sum_{A' \in \mathcal{A}, B' \in \mathcal{B}} q(A',B')$$

אם $C_1,...,C_k$ קבוצות זרות של קודקודים נגדיר:

$$q\left(C_1,...,C_k\right):=\sum_{i<j}q\left(C_i,C_j\right)$$

אבל אם $V_0,V_1,...,V_k$ היא חלוקה של V כאשר V_0 פח הזבל. אזי נתייחס אל V_0 בתור קבוצה של קבוצות $\left\{\{v\}:v\in V_0\right\}$ ונגדיר:

$$q\left(V_0,V_1,...,V_l\right):=q\left(\underbrace{\{v_1\},\{v_2\},\{v_j\}}_{\{v_1,v_2,...,v_j\}=V_0},V_1,V_2,...,V_k\right)$$

טענה: אם ρ חלוקה של V אז $q\left(\rho\right)\leq 1$
הוכחה:

$$q\left(\rho\right)=\sum_{i<j\ ,\ C_i,C_j\in\rho}q\left(C_i,C_j\right)=\sum\frac{|C_i|\cdot|C_j|}{n^2}\cdot d^2\left(C_i,C_j\right)$$
$$\leq\frac{\left(\sum|C_i|\right)^2}{n^2}\leq 1$$

מדוע? כי מהריבוע שבמונה נקבל את כל מכפלות הזוגות ועוד ריבועים של כל מיני $|C_i|$ שרק מגדילים את הסכום. כמו כן d תמיד קטן או שווה ל 1 וכך גם ריבועו ולכן ניתן להתעלם ממנו ולכל היותר להגדיל את הביטוי.
נמשיך בדרכנו.
נראה שעידון של החלוקה מגדיל את האינדקס.
למה: אם $\mathcal{C}$ חלוקה של C ו $\mathcal{D}$חלוקה של D אזי
א.

$$q\left(\mathcal{C},\mathcal{D}\right)\geq q\left(C,D\right)$$

ב. p' חלוקה שמעדנת את p אז

$$q\left(p'\right)\geq q\left(p\right)$$

הוכחה:
א.

$$\begin{aligned}q\left(\mathcal{C},\mathcal{D}\right)&=\sum_{C_i\in\mathcal{C},D_j\in\mathcal{D}}q\left(C_i,D_j\right)\\&=\frac{1}{n^2}\sum\frac{e\left(C_i,D_j\right)^2}{|C_i|\cdot|D_j|}\underbrace{\geq}_{Cauchy-Schwartz}\frac{1}{n^2}\frac{\left(\sum e\left(C_i,D_j\right)\right)^2}{\sum|C_i|\,|D_j|}\\&=\frac{1}{n^2}\frac{e\left(C,D\right)^2}{|C|\,D}=q\left(C,D\right)\end{aligned}$$

ב.
נסמן:

$$p=\{C_1,...,C_k\}$$

יהי e_i החלוקה של C_i המושרה ע"י p'.

$$q(p)=\sum_{i<j}q(C_i,C_j)\underbrace{\leq}_{previous\,article}\sum_{i<j}q(e_i,e_j)=q(p')-\sum_i q(e_i')\leq q(p')$$

למה: יהי $\varepsilon>0$ ונניח שהזוג (C,D) איננו ε־רגולרי, אזי יש חלוקה של C: $\mathcal{C}=(C_1,C_2)$ וחלוקה של D : $\mathcal{D}=(D_1,D_2)$ כך ש:

$$q(\mathcal{C},\mathcal{D})\geq q(C,D)+\varepsilon^4\cdot\frac{|C|\cdot|D|}{n^2}$$

הוכחה: יש $C_1\subseteq C$ כך ש $|C_1|>\varepsilon|C|$ ו $D_1\subseteq D$ כך ש $|D_1|>\varepsilon|D|$

$$\eta=d(C_1,D_1)-d(C,D)$$

$$|\eta|>\varepsilon\ \eta^2>\varepsilon^2$$

$$d_i=|D_i|\quad c_i=|C_i|\ \ d:=|D|\quad c=|C|$$

$$e=e(C,D)\quad e_{ij}=e(C_i,D_j)$$

ואז:

$$q(\mathcal{C},\mathcal{D})=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\frac{e_{ij}^2}{c_id_j}=\frac{1}{n^2}\left(\frac{e_{11}^2}{c_1d_1}+\sum_{i+j>2}\frac{e_{ij}^2}{c_id_j}\right)$$
$$\underbrace{\geq}_{C.S.}\frac{1}{n^2}\left(\frac{e_{11}^2}{c_1d_1}+\frac{(e-e_{ij})^2}{cd-c_1d1}\right)$$

$$e_{11}=\frac{c_1d_1e}{cd}+\eta c_1d_1$$

מהגדרת η

$$n^2q(\mathcal{C},\mathcal{D})\geq\frac{1}{c_1d_1}\left(\frac{c_1d_1e}{cd}+\eta c_1d_1\right)^2+\frac{1}{cd-c_1d_1}\left(\frac{cd-c_1d_1}{cd}e-\eta c_1d_1\right)^2$$

עושים את החשבון בפתיחת סוגריים ומקבלים:

$$\geq \frac{e^2}{cd} + 0 \cdot e \cdot \eta + \eta^2 c_1 d_1$$

ה"גדול/שווה" הוא כי אנחנו מזניחים חלק מהמקדם (החיובי) של η^2, וזה גודל חיובי.

$$\geq \frac{e^2}{cd} + \varepsilon^4 \cdot cd$$

ואם נחלק את שני האגפים ב n^2 נקבל:

$$q\left(\mathcal{C}, \mathcal{D}\right) \geq q\left(C, D\right) + \frac{\varepsilon^4 cd}{n^2}$$

למה: אם $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ נניח:

$$p = \{C_0, ..., C_k\}$$

כך ש:

$$|C_0| \leq \varepsilon n$$

ו

$$|C_1| = ... = |C_k|$$

והחלוקה אינה ε רגולרית, אזי יש חלוקה $p' = \{C_0', ..., C_l'\}$ שמעדנת את p ו $k \leq l \leq k \cdot 4^k$ כך ש:

$$|C_0'| \leq |C_0| + \frac{n}{2^k}$$

$$q\left(p'\right) \geq q\left(p\right) + \frac{\varepsilon^5}{2}$$

ומתקיים:

$$|C_1'| = |C_2'| = ... = |C_l'|$$

הוכחה:

לכל זוג $1 \leq i < j \leq k$ נגדיר חלוקה $\mathcal{C}_{ij}$ של C_i וחלוקה $\mathcal{C}_{ji}$ של C_j כך: אם (C_i, C_j) זוג ε־רגולרי אז החלוקה טריויאלית, אחרת נחלק עפ"י הלמה הקודמת כך ש:

$$C = |C_1| = |C_2| = ... = |C_k|$$

ו:

$$q\left(\mathcal{C}_{ij}, \mathcal{C}_{ji}\right) \geq q\left(C_i, C_j\right) + \frac{\varepsilon^4 c^2}{n^2}$$

נגדיר לכל $1 \leq i \leq k$ את $\mathcal{C}_\rangle$להיות החלוקה המקסימלית המעדנת סימולטנית את כל ה $\mathcal{C}_{ij}$ים. ובסך הכל יהיו לכל היותר 2^{k-1}חלקים כלומר:

$$|\mathcal{C}_i| \leq 2^{k-1}$$

נגדיר חלוקה

$$\mathcal{C} = \{C_0\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C} \right)$$

ואז:

$$k \leq |\mathcal{C}| \leq k \cdot 2^k$$

ו $\mathcal{C}$ מעדנת את p.
מהו האינדקס של החלוקה הזו?

$$\begin{aligned} q(\mathcal{C}) = & \sum_{1 \leq i < j} q(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) + \sum_{1 \leq i} q(C_0, \mathcal{C}_i) + \sum_{0 < i} q(\mathcal{C}_i) + q(C_0) \\ \geq & \sum_{1 \leq i < j} q(C_i, C_j) + \frac{\sum k^2 \varepsilon^4 c^2}{n^2} + \sum q(C_0, C_i) + q(C_0) \\ \geq & q(p) + \varepsilon^5 \left(\frac{kc}{n} \right)^2 \geq q(p) + \frac{\varepsilon^5}{2} \end{aligned}$$

נגדיר

$$d = \left\lfloor \frac{c}{4^k} \right\rfloor$$

ונעדן שרירותית את $\mathcal{C}$ לחתיכות בגודל d. כל קבוצה ב $\mathcal{C}$ (מלבד פח הזבל C_0) תחולק לקבוצות בגודל d ואת השאריות נצרף ל C_0 כדי לקבל את C_0'.
זה מגדיר את p' ואז:

$$q(p') \geq q(\mathcal{C}) \geq q(p) + \frac{\varepsilon^5}{2}$$

$$\begin{aligned} |C_0'| & \leq |C_0| + |\mathcal{C}| \cdot d \leq |C_0| + \frac{k \cdot 2^k c}{4^k} \\ & \leq |C_0| + \frac{kc}{2^k} \leq |C_0| + \frac{n}{2^k} \end{aligned}$$

ואז:

$$|p'| \leq \frac{kc}{d} \leq k \cdot 4^k$$

ובזה סיימנו.
כעת ניתן להוכיח את למת הרגולריות בהסתמך על הטענות שהוכחו לעיל.
הוכחת הלמה
נתון $\frac{1}{4} \geq \varepsilon \geq 0$ ו $n \geq 1$
נגדיר:

$$s := \frac{2}{\varepsilon^5}$$

נייצר (בדרך כלל) חלוקה התחלתית שרירותית עם k_0 חלקים, ונרצה שסך כל התוספות לפח הזבל יהיו $\frac{\varepsilon n}{2} \geq s \cdot \frac{n}{2^{k_0}}$ וכן ש $m \leq k_0$.
נרצה n גדול דיו כך ש $|C_0| \leq k_0$ ואז $|C_0| < \frac{\varepsilon n}{2}$
מהו M? נגדיר $f(x) : x \to x \cdot 4^x$ ו $M = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{s\,times}(k_0)$ בהנתן גרף על $m \leq n$ קודקודים אם $n \leq m$ נחלק לסינגלטונים, אם $m < n$ נחלק באופן שרירותי ל k_0 קבוצות שוות מהבחירה שלנו נובע ש C_0 (פח הזבל - השארית אחרי שמחלקים לקבוצות שוות בגדלן), גדלו הוא לכל היותר $\frac{\varepsilon n}{2}$ ומעדנים שוב ושוב. וכיוון שאחרי s צעדים נגיע לאינדקס 1 (עפ"י הלמות) נובע שמתישהו בתהליך נקבל חלוקה שהיא ε רגולרית. ■

10.2 שימושים ללמת הרגולריות

משפט 10.2 לכל εקיים δ כך שאם n גדול דיו ו G גרף על n קודקודים בו הסרת פחות מ εn^2 משאירה משולש, אזי G מכיל יותר מ δn^3 משולשים.

למה 10.3 (תרגיל) אם $m = |X| = |Y| = |Z|$ וכל שלושת הזוגות ε־רגולרים עם צפיפות $d \leq$ אזי הגרף הנפרש עליהם מכיל $(1-\varepsilon)(d-\varepsilon)^3 m^3 \leq$ משולשים.

הוכחה: (המשפט) בהנתן ε נפעיל את למת הרגולריות עם פרמטרים ε' ו m ונקבל חלוקה ε' רגולרית לכל גרף על יותר מ m קודקודים בחלוקה:

$$V = V_0 \coprod V_1 \coprod ... \coprod V_l$$

כך ש $l < M$.
נזרוק צלעות מ V_0. לכל היותר $\varepsilon' n^2$.
נזרוק צלעות פנימיות, יש l קבוצות בחלוקה, ובכל קבוצה יש $\frac{n}{l}$ קודקודים, ולכן פחות מ $l \cdot \left(\frac{n}{l}\right)^2$ צלעות בסך הכל, וזה קטן מ $\frac{n^2}{m}$.
נזרוק צלעות מזוגות לא רגולריים, וזה קטן מ $\frac{\varepsilon' l^2 n^2}{l^2} = \varepsilon' n^2$
נזרוק צלעות בין זוגות עם צפיפות קטנה מ $2\varepsilon'$, וכאלה בוודאי יש פחות מ $2\varepsilon' n^2$ צלעות.
סה"כ:

$$n^2 \cdot \left(4\varepsilon + \frac{1}{m}\right)$$

נבחר $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{10}$ ו $\frac{1}{m} = \frac{\varepsilon}{10}$ ולכן סילקנו לכל היותר $\frac{1}{2} \cdot \varepsilon n^2$ צלעות, ואם הגרף בו התחלנו מקיים את ההנחה, עדיין נותרו בו משולשים שאינם מוכלים בפח הזבל, בזוגות לא רגולריים,

בצלעות פנימיות או זוגות דלילים. ולכן זהו משולש בין V_i, V_j, V_k כאשר כל אחד מהזוגות בשלישיה הוא ε' רגולרי עם צפיפות $\geq 2\varepsilon$ וגודל כל קבוצה $\geq \frac{n}{M(\varepsilon',m)} = \frac{n}{M(\varepsilon)}$

לפי התרגיל בשלשה כזו יש לפחות $\left(\frac{n}{m}\right)^3 \cdot (1-\varepsilon')\,\varepsilon'^3$ ולכן יש לפחות

$$n^3 \cdot \underbrace{\frac{(1-\varepsilon')\,\varepsilon'^3}{M^3}}_{=\delta}$$

משולשים. ■

11 שיעור 11

משפט 11.1 ארדש סטון (חיזוק למשפט טוראן) לכל r, s, γ קיים n_0 כך שאם G גרף על $n > n_0$ קודקודים עם $\left(\frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{1}{2} + \gamma\right) n^2$ צלעות, אז G מכיל $K_{\underbrace{r, r, r, ..., r}_{s}}$ (זהו גרף s־צדדי שלם עם r קודקודים בכל צד).

למה 11.2 לכל r, s וצפיפות d קיימים ε ו N כך שאם יש s קבוצות בגודל N כך שכל זוג מהן הוא ε־רגולרי עם צפיפות לפחות d, אזי יש עותק של $K_{\underbrace{r, r, r, ..., r}_{s}}$

אבחנה: אם X, Y קבוצות קודקודים כך שהגרף ביניהן ε רגולרי עם צפיפות d, ו $Y' \subseteq Y$ כך ש $|Y'| \geq \varepsilon |Y|$ אז לרוב הקודקודים ב X (כולם למעט אולי $\varepsilon |X|$) יש הרבה שכנים ב Y' (לפחות $(d-\varepsilon)|Y'|$). **הוכחה:** (הלמה) נסמן את הקבוצות $X_1, ..., X_S$ וגדלן N. נבחר v_1^1כך ש

$$\forall 2 \leq i \leq n : \left| \underbrace{N}_{Neighbours} \left(v_1^1\right) \cap X_i \right| > (d-\varepsilon)\,|X_i|$$

כמה קודקודים ב X_1פסולי למשרה זו? לכל היותר $\varepsilon s \cdot N = \varepsilon s\,|X_1|$
נבחר v_2^1 כך ש

$$\forall 2 \leq i \leq n : \left|N\left(v_2^1\right) \cap N\left(v_1^1\right) \cap X_i\right| \geq (d-\varepsilon)^2\,|X_i|$$

כמקודם יש רק לכל היותר $\varepsilon s N$ פסולי למשרה זו.
נמשיך כך, בשלב ה $j = 1...r$ בוחרים את v_j^1 כך ש:

$$\forall 2 \leq i \leq n : \ \left|N\left(v_j^1\right) \cap N\left(v_1^1\right) \cap ... \cap N\left(v_{j-1}^1\right) \cap X_i\right| \geq (d-\varepsilon)^j\,|X_i|$$

כך נמשיך ו את v_1^2 נבחר כך ש:

$$\forall 3 \leq i \leq n : \ \left| N\left(v_1^2\right) \cap \bigcap_{j=1}^{r} N\left(v_j^1\right) \cap X_i \right| \geq (d-\varepsilon)^{r+1}\,|X_i|$$

וכמובן $v_1^2 \in \bigcap_{j=1}^{r} N\left(v_j^1\right) \cap X_2$
יש 2 דרישות בכדי שנוכל להמשיך ולבנות עד הסוף צריך שהקבוצה שלנו תמיד תהיה גדולה מ ε (כדי שנוכל להשתמש ב ε רגולריות) :

$$(d-\varepsilon)^{r\cdot s} - \varepsilon rs \geq \frac{d^{rs}}{2} > \varepsilon$$

זה קובע תנאי על ε.

$$N \cdot \frac{d^{rs}}{2} > r$$

זה קובע תנאי על N. ■

. **הוכחה:** (ארדש סטון) נתונים r, s וגרף G על n (גדול מאד) קודקודים, עם $\left(\gamma + \frac{s-2}{s-1}\right) n^2$ צלעות.
נפעיל את למת הרגולריות של סמרדי (SZ.R.L) עם פרמטרים ε, m שיבחרו בהמשך.
נסיר צלעות לזבל εn^2.
נסיר זוגות לא רגולריים εn^2.
נסיר צלעות פנימיות $\frac{n^2}{m}$.
נסיר גם צלעות בזוגות בעלי צפיפות $< \frac{\gamma}{3}$ (זה לכל היותר $\frac{\gamma}{3} n^2$).
נבחר ε כך שאם n גדול דיו ו $|X_1| = ... = |X_s|$ הן קבוצות כך שכל זוג הוא ε עם צפיפות $\frac{\gamma}{3}$, אזי יש עותק של $K\underbrace{r, r, r, ..., r}_{s}$.
(הפעלת הלמה) וגם $\frac{\gamma}{3} > 2\varepsilon + \frac{1}{m}$
אם $\frac{\gamma}{10} = \frac{1}{m}$ עוד תנאי על ε.
בחרנו m, ε ומלמת הרגולריות נקבל M וחלוקה ε רגולרית:

$$V(G) = V_0 \coprod V_1 \coprod ... \coprod V_l$$

כך ש $m \leq l \leq M$.
אם $N < \frac{n(1-\varepsilon)}{M}$ הדרוש להפעלת הלמה עם γ, r, s אזי מצבנו טוב בתנאי שנמצא $V_{i_1}, ..., V_{i_s}$ כך שכל שניים מהם הם εרגולריים עם צפיפות $\frac{\gamma}{3}$.
לפי חשבוננו הסרנו עד כה לכל היותר $\frac{2\gamma}{3} n^2$צלעות., לכן נשארנו עם לפחות $\left(\frac{\gamma}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s-2}{s-1}\right) n^2$. צלעות.
נתבונן בגרף שקודקודיו הם קבוצות החלוקה וצלעותיו הן זוג ε־רגולרי עם צפיפות לפחות $\frac{\gamma}{3}$. מחפשים K_s.
יש לנו lקודקודים
טענה: יותר מ $\left(\frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{1}{2}\right) l^2$ צלעות ולכן ממשפט טוראן יש K_s
הוכחת הטענה: אם יש $\left(\frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{1}{2}\right) l^2$ זוגות ותרמו לכל היותר $\left(\frac{s-2}{s-1} \cdot \frac{1}{2}\right) n^2$ צלעות בגרף המקורי. ■

12 תורת רמזי

משפט 12.1 (קלייטמן) בכל קבוצה של שלושה אנשים נורמליים, יש לפחות שניים מאותו מין.

הוכחה: תרגיל קשה במיוחד. ■

משפט 12.2 רמזי (גרסה קלה יחסית) לכל $1 \leq k,l$ קיים n כך שאם צובעים את צלעות K_n באדום ובכחול, אזי מובטח לנו K_k אדום או K_l כחול.

ה n המינימלי המקיים זאת נקרא $R(k,l)$

12.0.1 כמה הערות

1. $R(k,l) = R(l,k)$
2. $R(k,1) = 1$(גרף מלא על קודקוד אחד הוא ללא צלעות)
3. $R(k,2) = k$ (גרף על 2 קוד' הוא צלע, ולכן או שיש צלע אדומה או שהגרף מלא כחול)
4. $R(3,3) = 6$
5. $R(4,4) = 17$
6. $43 \leq R(5,5) \leq 49$ (לא יודעים, יש יותר מדי אפשרויות בשביל לבדוק בכוח)
7. $102 \leq R(6,6) \leq 165$ (על אחת כמה וכמה)

באופן עקרוני הערך של $R(6,6)$ הוא לא כל כך מעניין, אבל מעניינת ההתנהגות האסימפטוטית של $R(n,n)$.

נראה כי לכל $n \geq 4$ מתקיים:

$$\sqrt{2} \leq \lim R(n,n)^{\frac{1}{n}} \leq 4$$

וכלל לא ברור אם הגבול קיים.

טענה 12.3

$$R(l,k) \leq \binom{l+k-2}{l-1} < \infty$$

מסקנה 12.4

$$R(n,n) \leq \binom{2n-n}{n-1} \sim c \cdot \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

למה 12.5

$$R(l,k) \leq R(l,k-1) + R(l-1,k)$$

הוכחה: (הטענה) בהנתן הלמה הטענה נובעת בקלות מאינדוקציה על $l+k$.

מתחילים ממקרה בסיס $l+k=2$ וכעת נוכיח עבור $n=l+k$ ואז מה"א מתקיים $R(l,k-1)\leq\binom{l+k-3}{l-1}$ ו $R(l-1,k)\leq\binom{l+k-3}{l-2}$ ומזהות פסקל מתקבל המבוקש. ■

הערה: נסמן את הקוא' הראשונה במספר רמזי כמונה את הקליקה הכחולה (והשניה את האדומה). **הוכחה:** (הלמה)

נניח $n=\underbrace{R(l,k-1)}_{A}+\underbrace{R(l-1,k)}_{B}$ נתבונן בצביעה של צלעות K_n, נתבונן בשכנים של קודקוד v. בה"כ יש לו A שכנים שהצלעות אליהם צבועות אדום. לפי הגדרת $R(l,k-1)$, הצביעה של הצלעות בתוך קבוצת שכנים זו מכילה K_l כחול (ואז גמרנו) או K_{k-1} אדום, שיחד עם הצלעות המחברות אותו ל v נותן K_k אדום וגם אז סיימנו.

המקרה של B שכנים שהצלעות אליהם צבועות בכחול - נפתר באופן דומה. ■

משפט 12.6 (רמזי, עדיין לא הכי כללי) לכל k,l,r קיים n כך שאם צובעים את כל ה r־יות של המספרים $\{1,...,n\}$ באדום או בכחול, בהכרח ניתן למצוא k מספרים כך שכל ה $\binom{k}{r}$ r־יות צבועות אדום או l מספרים כך שכל ה $\binom{l}{r}$ צבועות כחול.

הוכחה: נסמן את n מהמשפט ב $R^r(k,l)$.

הוכחה באינדוקציה:

$$R^1(k,l)=k+l-1$$

טענה:
$$R^r(k,l)\leq\underbrace{R^{r-1}\left(R^r(k-1,l),R^r(k,l-1)\right)+1}_{C}$$

הוכחה: זו בדיוק אותה הוכחה כמו קודם. נניח שיש C קודקודים, נקבע אחד מהם ונתבונן בכל ה r־יות שמכילה אותה. אם נשמיט אותה, נקבל מערכת של $(r-1)$־יות. מהנחת האינדוקציה או שנמצא אוסף של $R^r(k-1,l)$ של $(r-1)$־יות שצבועות ב אדום או אוסף בגודל $R^r(k,l-1)$ שצבוע בכחול...

[אולי כדאי להשלים את זה פעם כי לא הבנתי את זה עד הסוף] ■

12.1 המשך תורת רמזי

12.1.1 Happy Ending Theorem

שאלה שהציבה אסתר קליין לארדש וסקרש והם הוכיחו אותו.

קליין אמרה שאם מציבים 5 נקודות במישור, מובטח שאפשר לבנות מארבע מהן מרובע קמור.

שאלת קליין: האם לכל $k>4$ קיים $n(k)$ כך שאם מניחים n נקודות במישור, אף 3 אינן על ישר, מובטח k נקודות במצב קמור? (לא קשה לראות ש $n(4)=5$]

הערה 12.7 k נקודות הן במצב קמור אס"ם כל ארבע מהן במצב קמור.

משפט 12.8 $n(k)\leq R^4(5,k)$

הוכחה: בהנתן $R^4(5,k)$ נקודות במישור בלי 3 על ישר, נצבע את הרביעיות: קמורות בירוק וקעורות בצהוב. או שיש 5 נקודות כך שכל הרביעיות צהובות, כלומר קעורות, (אבל זה סותר את האבחנה הראשונית של קליין, שכן מבין 5 נקודות יש רביעיה קמורה) ולכן יש k נקודות כך שכל ארבע מהן נמצאות במצב קמור. ■

. **הוכחה:** (של טרסי) ש $n(k) \leq R^3(k,k)$

בהנתן מספר כזה של נקודות במישור ללא 3 על ישר אחד, נמספר שרירותית את הנקודות, ולכל שלשה $1 \leq i < j < k \leq R^3(k,k)$ נצבע בטורקיז אם המשולש i,j,k מכוון עם כיוון השעון ובאוף־וויט אם המשולש i,j,k הוא נגד כיוון השעון. לפי משפט רמזי קיימת k־יה עבורה כל השלשות באותה אוריינטציה.

מכאן שה k־יה הזו קמורה. מדוע? כיוון שרביעיה במצב קעור ־ לא ניתן לכוון את כל 4 המשולשים בה באותה אוריינטציה. ■

12.2 חסם תחתון למספרי רמזי

הצליחו להדק את $R(3,k)$ ואת $R(4,k)$ ל $R(5,k)$ זה עוד פתוח.

טענה 12.9 (ארדש, 1943) אם $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ אז $n < R(k,k)$

מסקנה 12.10 עבור $3 \leq k$ מתקיים $2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \leq R(k,k)$

$n = 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ אז $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{2^{1+\frac{k}{2}} \cdot n^k}{n! \cdot 2^{\frac{k^2}{2}}} < 1$

הוכחה: (אחד השימושים הראשונים בשיטה ההסתברותית)

נצבע כל צלע על פי הטלת מטבע הוגן.

מאורע "רע" הוא צביעה של k־יה רק באדום או רק בכחול. כלומר יש $2 \cdot \binom{n}{k}$ מאורעות רעים סך הכל, וההסתברות לכל אחד מהם היא $2^{-\binom{k}{2}}$ ומחסם האיחוד ההסתברות למאורע רע כלשהו היא קטנה מסכום ההסתברויות שהוא:

$$2 \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} < 1$$

ולכן קיים מאורע שאינו רע, ובפרט יש צביעה ללא k־יה מונוכרומאטית ובלבד שיתקיים אי השוויון הנ"ל, וזו ההנחה בטענה. ■

נגדיר $R(H)$ כאשר H גרף קבוע, יסמן את ה n המינימלי כך שבכל צביע של K_n ב 2 צבעים ־ יש עותק מונוכרומטי של H.

לכן $R(k,k) = R(K_k)$ וראינו שזה גדול מ $\sqrt{2}^k$.

מסתבר שמה שגורם לחסם להיות מעריכי הוא לא העובדה שיש k קודקודים, אלא שזו גם הדרגה של כל קודקוד, כלומר:

משפט 12.11 לכל Δ קיים c כך שאם H גרף עם דרגה מקסימלית Δ אזי $R(H) \leq c \cdot |V(H)|$.

למה 12.12 (שכבר הוכחנו) בגרף שמחולק לקבוצות, שכל 2 ε־רגולריות עם צפיפות $\leq d$, וגודל כל קבוצה N, ניתן למצוא $K_{\underbrace{r, r, \ldots, r}_{s}}$ כאשר $\frac{d^{rs}}{2} < (d-\varepsilon)^{s \cdot r} - s \cdot r \cdot \varepsilon$ ו $N > r \cdot d$.

נפעיל עם $d=\frac{1}{2}$, נשתמש בחיזוק של הלמה: מספיק ש $N>r\cdot d^{-(\Delta+1)}$ בשביל למצוא גרף s צדדי עם דרגה מקסימלית Δ. **הוכחה:** (המשפט)
נגדיר

$$m:=R\left(\Delta+1,\Delta+1\right)$$

ונשים לב שאם הדרגה המקסימלית של H היא Δ אז H הוא $\Delta+1$ צביע (=צדדי).
ולכן $H\subseteq K_{\underbrace{r,r,r,...,r}_{s}}$, למשל נוכל לקחת $r=|V\left(H\right)|$.

נוכל להשתמש בלמה כדי למצוא עותק של H בתוך $\Delta+1$ קבוצות שכל זוג מהן הוא ε רגולרי עם צפיפות $\leq\frac{1}{2}$ בתנאי ש ε קטן דיו.
בפרט ε צריך לקיים ש:

$$\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^{r\cdot(\Delta+1)}-\left(\Delta+1\right)r\varepsilon>\frac{1}{2}^{r(\Delta+1)}$$

וגם אם גודל הקבוצות הוא N אז נדרוש:

$$N>r\cdot2^{\Delta+1}$$

נדרוש ε גם קטן מספיק כך ש:

$$2\varepsilon<\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\leq\frac{1}{m-1}-\frac{1}{l}$$

לכל $m\leq l$.
נפעיל את SZRL (למת הרגולריות) עם פרמטרים m,ε.
מקבלים M כך ש $m\leq l\leq M$ חלקים.
רוצים ש $\frac{n(1-\varepsilon)}{M}>N>r\cdot2^{\Delta+1}$

$$n>\frac{M}{1-\varepsilon}\cdot2^{\Delta+1}\underbrace{r}_{=|V(H)|}$$

מתוך l הזוגות לכל היותר εl^{2} אינם ε־רגולרים ולכן נותרו

$$\binom{l}{2}-\varepsilon l^{2}=\frac{1}{2}l^{2}\left(1-\frac{1}{e}-2\varepsilon\right)>l^{2}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m-1}\right)$$

וממשפט טוראן יש m קבוצות כך שכל זוג הוא ε־רגולרי.
בהנתן גרף (אדום) ומשלימו (כחול) על n קודקודים ־ נצבע את הזוגות הנ"ל באדום או בכחול לפי צפיפות $\leq\frac{1}{2}$. ממשפט רמזי ומהגדרת m יש $\Delta+1$ קבוצות שכל זוג הוא ε־רגולרי וכולם עם צפיפות (בה"כ אדומה) $\leq\frac{1}{2}$. מבחירת n הן גם גדולות מספיק בכדי להבטיח עותק של H. ■

13 גרפים מקריים

נניח שאנו מחפשים גרף על n קודקודים ללא קליקה או קבוצה בת"ל בגודל $k = 2\log_2 n$ (כך $n = \sqrt{2}^k$) ראינו שגרף מקרי יעבוד בהסתברות חיובית: כל צלע באופן בלתי תלוי שייכת לגרף בהסתברות 2.

אם $n = 1024$ ו $k = 20$ אז גרף מקרי יכשל בהסתברות שהיא קטנה מה $\binom{1024}{20}2^{1-\binom{20}{2}}$ וזה קטן מ $\frac{2^{11}}{20!}$ שקטן מ 10^{-16}.

הבניה המפורשת הטובה ביותר נותנת $k = e^{\sqrt{\log n}}$.

משפט 13.1 (ארדש): לכל k, l קיים גרף ללא מעגלים באורך $\geq l$ עם מספר צביעה $\leq k$.

אפשר לדאוג כך שבכל קבוצה של $\frac{|V(G)|}{k}$ קודקודים יש צלע, וזה ימנע קבוצות בלתי תלויות גדולות, אבל אז אולי נקבל מעגל... **הוכחה:** נבחר מספר כלשהו $0 < \theta < \frac{1}{l}$ ונבחר גרף מקרי $G(n,p)$ (כלומר בוחרים צלע בהסתברות p) כאשר $p = n^{\theta-1}$

X- משתנה מקרי של מספר המעגלים באורך $\leq l$ בגרף שנוצר.

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum X_i\right] = \sum \mathbb{E}[X_i]$$

$$\mathbb{E}[X_i] = Pr[X_i = 1]$$

כאשר ה X_i הם משתנים מקריים המתאימים למעגלים באורך $i \geq l$ (משתנה מציין שונה לכל אורך מעגל אפשרי).

ואז:

$$\sum_{i=3}^{l} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{2i} \cdot p^i \leq \sum_{i=3}^{l} \frac{n^{\theta i}}{2i} = o(n)$$

(אנחנו מחלקים ב $2i$ כי אחרת סופרים את אותו המעגל עבור כל מעגל מכוון שאפשר לבנות עליו ועבור כל קודקוד התחלה בנפרד...)

מאי שוויון מרקוב, כיוון ש X אי שלילי מתקיים:

$$Pr[X \geq \lambda \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{\lambda}$$

ולכן:

$$Pr\left[X > \frac{n}{2}\right] = o(1)$$

בהסתברות ששואפת ל 1 יש פחות מ $\frac{n}{2}$ מעגלים באורך $\leq l$.

נגדיר:

$$\alpha = \frac{3}{p}\ln n$$

(נזכיר כי $p=n^{\theta-1}$)

Y = משתנה מקרי המונה את מספר הקבוצות הבלתי תלויות בגודל α (נניח α שלם):

$$\mathbb{E}\left[Y\right]=\binom{n}{\alpha}\left(1-p\right)^{\binom{\alpha}{2}}<\left(n\cdot e^{-p\frac{\alpha-1}{2}}\right)^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{n}}=o\left(1\right)$$

בפרט, ההסתברות ש $Y\geq 1$ היא $o\left(1\right)$ גם כן לפי א"ש מרקוב.

ניקח n כך שבהסתברות $<\frac{1}{2}$ יתקיים $X<\frac{n}{2}$ ובהסתברות $<\frac{1}{2}$ יתקיים $Y=0$ ונקבל שבהסתברות חיובית ־ שניהם מתרחשים סימולטנית. כלומר ־ יש גרף על n קודקודים ללא קבוצה בת"ל בגודל $3\ln n\cdot n^{1-\theta}$ עם פחות מ $\frac{n}{2}$ מעגלים באורך $\leq l$.

נסלק קודקוד אחד מכל מעגל קצר, ונקבל גרף עם לפחות $\frac{n}{2}$ קודקודים ללא מעגלים באורך $\leq l$ וללא קבוצה בלתי תלויה בגודל $3n^{1-\theta}\ln n$. ■

<u>עובדה</u> שהשתמשנו בה בהוכחה: אם Y מ"מ אי שלילי, אז

$$Pr\left(Y>0\right)<\mathbb{E}\left[Y\right]$$

מדוע?

כי התוחלת של Y (מ"מ טבעי) היא $Pr\left(Y=1\right)\cdot 1+Pr\left(Y=2\right)\cdot 2+...$ ולכן אם מוחקים את כל המספרים שמחוץ להסתברות מקבלים את... $Pr\left(Y=1\right)+Pr\left(Y=2\right)$ וזו ההסתברות ל Y חיובי, אולם רק הגדלנו את הביטוי.

האם תוחלת גדולה משמעה שיש סיכוי גבוה ש Y חיובי? התשובה היא שלא.

לדוגמא:

Y= מספר ההרוגים במלחמת עולם בעשור הקרוב, למשל אם נעריך את ההסתברות למלחמה ב $\frac{1}{100000}$ אבל את מספר ההרוגים הצפוי בכמה מיליארדים, אז נקבל שתוחלת מספר ההרוגים היא כמה אלפים, אבל ההסתברות שהמשתנה יהיה לא אפס קטנה מאד.

לכן מועיל להתבונן גם בשונות של המשתנה המקרי.

הגדרה 13.2 אם X משתנה מקרי אז השונות של X מוגדרת להיות:

$$Var\left(X\right)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^{2}\right]=\mathbb{E}\left[X^{2}\right]-\mathbb{E}^{2}\left[X\right]$$

וסטיית התקן היא $\sqrt{Var\left(x\right)}=\sigma$...

אם $X=\sum X_i$ אז:

$$\begin{aligned}Var\left(X\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum X_i\right)^{2}\right]-\mathbb{E}^{2}\left(\sum X_i\right)\\ &= \sum_{i}\left(\mathbb{E}\left[X_i^{2}\right]-\mathbb{E}^{2}\left[X_i\right]\right)+\sum_{i,j}\underbrace{\left(\mathbb{E}\left[X_iX_j\right]-\mathbb{E}\left[X_i\right]\mathbb{E}\left[X_j\right]\right)}_{Cov\left[X_i,X_j\right]}\end{aligned}$$

ואם X_i,X_j בלתי תלויים אז $Cov\left(X_i,X_j\right)=0$

מסקנה 13.3 מאי שוויון צ'ביצ'ב ידוע לנו:

$$Pr\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|>\lambda\sigma\right)=Pr\left(\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^{2}>X^{2}Var\left(X\right)\right)<\frac{1}{\lambda^{2}}$$

בפרט:

$$Pr\left(X\leq 0\right)\leq Pr\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq\mathbb{E}\left[X\right]\right)=Pr\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{\sigma}\cdot\sigma\right)\leq\frac{\sigma^{2}}{\mathbb{E}^{2}\left[X\right]}=\frac{Var\left(X\right)}{\mathbb{E}^{2}\left[X\right]}$$

ובפרט אם $Var\left(X\right)=o\left(\mathbb{E}^{2}\left[X\right]\right)$ אז בהסתברות ששואפת ל 1 מתקיים $0<X$ ולמעשה בהסתברות ששואפת ל1 מתקיים אף ש:

$$\left(1-\varepsilon\right)\mathbb{E}\left[X\right]\leq X\leq\left(1+\varepsilon\right)\mathbb{E}\left[X\right]$$

לכל ε.

שימוש במסקנה מא"ש צ'בישב

מספר המשולשים ב $G\left(n,p\right)$:

הגדרה 13.4 בהנתן תכונה A של גרפים אז $p^{*}=p^{*}\left(n\right)$ תקרא פונקציית סף עבור A אם $p=o\left(p^{*}\right)\Rightarrow Pr\left[G\left(n,p\right)\in A\right]\to 0$ ומאידך:

$$p^{*}=o\left(p\right)\Rightarrow Pr\left[G\left(n,p\right)\in A\right]\to 1$$

מהי תכונה של גרפים? בעצם אפשר לחלק את הגרפים לאלו שיש להם את התכונה ולאלו שאין להם ולכן זה שם אחר למשפחה של גרפים.

הגדרה 13.5 תכונה מונוטונית: נשמרת תחת הוספת צלעות (לדוגמא - הכלת משולש, קשירות, אי מישוריות, מספר צביעה 17)

נניח שלגרף הריק אין את התכונה ולגרף המלא יש את התכונה, ואז הפונקציה $Pr\left[G\left(n,p\right)\in A\right]$ היא פונקציה עולה מ 0 ל 1 (כפונקציה של p).

כעת אם X מספר המשולשים ב $G\left(n,p\right)$ כך ש $X=\sum X_{i}$ (סכום של משתנים מציינים למשולשים השונים) אז:

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\sum\mathbb{E}\left[X_{i}\right]=\binom{n}{3}\cdot p^{3}\sim\frac{n^{3}p^{3}}{6}$$

רואים שאם $p\sim\frac{c}{n}$ אז $\mathbb{E}\left[X\right]=\Theta\left(1\right)\sim\frac{c^{3}}{6}$

טענה 13.6 $p=\frac{1}{n}$ מהווה פונקציית סף עבור קיום משולש

הוכחה: $p=o\left(\frac{1}{n}\right)$ אז $\mathbb{E}\left[X\right]\sim\frac{p^{3}n^{3}}{6}=o\left(1\right)$ ולכן $Pr\left[X>0\right]=o\left(1\right)$.

צריך לראות מה קורה כאשר $p=\frac{\omega(n)}{n}$, $\omega\left(n\right)\to\infty$ (כלומר המנה של p ו $\frac{1}{n}$ שואפת לאינסוף)

$$\mathbb{E}\left[X\right]\sim\frac{\omega^{3}}{6}\to\infty$$

מה השונות? $Var=o\left(\mathbb{E}^{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
Var(X) = Var\left(\sum X_i\right) &= \sum Var(X_i) + \sum_{i\neq j} Cov(X_i, X_j) \\
&= \binom{n}{3}\left(\underbrace{\mathbb{E}\left[X_i^2\right]}_{p^3} - \underbrace{\mathbb{E}^2\left[X_i\right]}_{p^6}\right) + \sum_{i\neq j} Cov(X_i, X_j) \\
&\le \mathbb{E}[X] + \sum_{i\neq j} Cov(X_i, X_j) \le \mathbb{E}[X] + \binom{n}{3}\left(\mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]\right) \\
&\le \mathbb{E}[X] + \binom{n}{3} p^5 3n \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\cdot 3np^2 = \mathbb{E}[X] + \frac{3\omega(n)}{n} \to \mathbb{E}[X] = o\left(\mathbb{E}^2[X]\right)
\end{aligned}
$$

ולכן לכל ε אם $\omega(n) \to \infty$, ו X מספר המשולשים ב $G\left(n, \frac{\omega(n)}{n}\right)$ אזי

$$Pr\left[X \in \left[(1-\varepsilon)\,\mathbb{E}[X], (1+\varepsilon)\,\mathbb{E}[X]\right]\right] \to_{n\to\infty} 1$$

.

■

הופעת רכיב ענק בגרף מקרי

(ארדש ורני, 1960)

טענה 13.7 (שלא נוכיח)

$$\forall c\, \exists c' : Pr\left[\left|B(n,p) - np\right| > cnp\right] < e^{-c'np}$$

(כאשר $B(n,p)$ מ"מ בינומי)

נסמן ב $P(\lambda)$ את המשתנה הפואסוני עם פרמטר λ, ואז $Pr\left[P(\lambda) = k\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ ואז בגבול $B(n,p) \sim P(\lambda)$ כי:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{\overbrace{n^k p^k}_{\sim\lambda^k}}{k!} \underbrace{e^{-np}}_{\sim e^{-\lambda}} (1-p)^k$$

ולכן בגבול (עבור k קבוע) זה מתנהג אותו הדבר.
התוחלת של משתנה פואסוני היא כזכור λ.

טענה 13.8 (שלא נוכיח)

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta > 0 : Pr\left[\left|P(\lambda) - \lambda\right| > \varepsilon\lambda\right] < (1-\delta)^{\lambda}$$

תהליך הסתעפות (גלטון־ווסטון)

הדיון הבא לקוח מספרם של ספנסר ואלון השיטה ההסתברותית (יש ב google books בסביבות עמוד 161).

שני סוציולוגים שחקרו מה ההסתברות ששם משפחה כלשהו יכחד? כלומר ניקח את מר סמית, נבין כמה בנים יש לנו וכמה בנים יש להם וכו'... הם הגיעו לתשובה לא נכונה, אבל התהליך בכל זאת נקרא על שמם.

נניח שיש לנו בקטריה שבהסתברות $\frac{1}{2}$ היא מתה ובהסתברות שווה היא מתפצלת ל 2. מהי ההסתברות שמושבת הבקטריות תיכחד? (נסמן זאת ב p)

$$p = \underbrace{\frac{1}{2}}_{first\,one\,dies} + \frac{1}{2}\underbrace{\left[p^2\right]}_{both\,offsprings\,die}$$

ואז:

$$p^2 - 2p + 1 = 0 \Rightarrow p = 1$$

אם היינו בוחרים את ההסתברות למוות $\frac{2}{3}$ ולהתפצלות $\frac{1}{3}$ אז היינו מקבלים $\rightarrow p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}p^2$ $p = 1, 2$

אם היינו בוחרים את ההסתברות באופן סימטרי היינו מקבלים:

$$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p^2 \Rightarrow p = 1, \frac{1}{2}$$

אז מהי התשובה הנכונה כאן? 1 או $\frac{1}{2}$?

טענה 13.9 יהי Z מ"מ טבעי ונסתכל בתהליך גלטון ווטסון בו מספר הצאצים מתפלג Z אזי התהליך יכחד בהסתברות 1 אס"ם $\mathbb{E}\left[Z\right] \geq 1$ ואחרת ימשך לנצח בהסתברות חיובית ויכחד בהסתברות קטנה מ 1.

הוכחה: נגדיר פונקציה יוצרת של Z:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i$$

באשר $p_i = Pr\left[Z = i\right]$

נבחין כי $P\left(0\right)$=ההסתברות להיכחדות מיידית

$P\left(1\right)$= 1 (סיכום כל ההסתברויות...)

$0 \leq P'\left(x\right)$ עבור $0 \leq x$ ולכן P פונקציה עולה, וכך גם עבור הנגזרת השניה, לכן הפונקציה קמורה.

כמו כן $\mathbb{E}\left[Z\right] = P'\left(1\right)$

P היא הפונקציה היוצרת של מספר האורגניזמים בדור ה 1.

מהי הפונקציה היוצרת של מספר האורגניזמים בדור 2, מותנה על k אורגניזמים בדור ה 1?

כאשר $k = 2$ ־ נרצה פונקציה יוצרת שבה (בהנתן שני ילדים בדור הראשון) המקדם של x^j הוא ההסתברות שנולדו בדור השני j ילדים, אזי נולדו m ילדים לצאצא 1 ו $j - m$

לצאצא השני... נבחין שזה מתקבל ע"י המקדמים של P^2, שכן כל זוג שמשלים ל j יופיע פעם אחת.

באופן כללי זה יהיה P^k, בהנתן k ילדים בדור הראשון.

ובלי התניה?

נצטרך לסכום את הפונקציות היוצרות בהסתברויות עבור האפשרויות למה שהתרחש בדור הראשון, כלומר:

$$p_0 + p_1 P(x) + p_2 (P(x))^2 + ... + p_k (P(x))^k$$

ובאינדוקציה - הפונקציה היוצרת של מספר הילדים בדור ה s היא:

$$\underbrace{P \circ P \circ ... \circ P}_{s\,times}(x)$$

ולכן $P(0)$= ההסתברות להיכחדות בדור הראשון

$P(P(0))$=ההסתברות ל-0 צאצאים בדור השני

$\vdots$

$\underbrace{P \circ P \circ ... \circ P}_{s\,times}(x)$= ההסתברות ל-0 צאצאים בדור ה s

ולכן השאלה שמעניינת אותנו היא

$$\lim_{s\to\infty} P^{(s)}(0) = 1$$

?

מכיוון שהפונקציה P קמורה, יתכן שהיא נחתכת עם התוחלת בשתי נקודות לכל היותר, ואם היא נחתכת בשתי נקודות - אזי היא ממשיכה לטפס ותמיד תהיה מעל התוחלת.

למשוואה $P(x) = x$ יש שורש ב $x = 1$ ועוד שורש בקטע $[0,1]$ אם"ם $P'(1) < 1$.

הסדרה

$$P(0), P^{(2)}(0), ...$$

היא סדרה לא יורדת, חסומה, והגבול y מקיים $P(y) = y$, וכיוון שיש שני שורשים, אז $y < 1$ ולכן הסדרה לעיל מתכנסת לגודל שהוא קטן ממש מ 1. ■

משפט 13.10 נתבונן ב $G(n,p)$ כאשר $p = \frac{c}{n}$, אז

אם $c < 1$ אז בהסתברות ששואפת ל 1 כאשר $n \to \infty$ מתקיים שיש קבוע d כך שכל הרכיבים קטנים מ $d \cdot \log n$.

אם $1 < c$ אז בהסתברות ששואפת ל 1 כאשר $n \to \infty$ מתקיים שיש $0 < y(c) < 1$ וקיים רכיב בגודל $(1-y)n$.

במילים אחרות - אם $c < 1$ אז יש הרבה רכיבים קטנים, ואם $c > 1$ אז יש רכיב קשירות גדול בגודל $(1-y)n$ ושאר הגרף נראה כמו $G(yn,p)$

הוכחה: יהי $Z \sim Poisson(c)$ כלומר $Pr(Z=k) = e^{-k}\frac{c^k}{k!}$ כאשר $k = 1,2,3...$

נגדיר $Z_1, Z_2, ...$ מ"מ בלתי תלויים כך שלכל i מתקיים $Z_i \sim Z$

נגדיר:

$$Y_0 = 1$$

$$Y_i = Y_{i-1} + Z_i - 1$$

כלומר Y_i הוא מספר האורגניזמים שיש אחרי ש i אורגניזמים כבר ילדו ומתו.

T= ה t המינימלי שעבורו $Y_t = 0$, אחרת $T = \infty$.

הפונקציה היוצרת של Z היא:

$$P(x) = \sum Pr[Z = i]\, x^i = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-c} \frac{c^i}{i!} x^i = e^{c(x-1)}$$

ואז למשוואה $P(x) = x$ יש שורש קטן ממש מ 1 אם"ם $c > 1$ ואז נסמן שורש זה ב y (התלוי ב c), ואז y מקיים $y = e^{c(y-1)}$, ויש y יחיד שכזה בקטע $(0, 1)$

כשהתהליך מסתיים רושמים את וקטור ההיסטוריה:

$$H = (Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_T)$$

נאמר שהוקטור לעיל מהווה תיאור של היסטוריה אפשרית אם"ם:

$$\begin{cases} Y_0 = 1 \\ Y_i = Y_{i-1} + Z_i - 1 \end{cases}$$

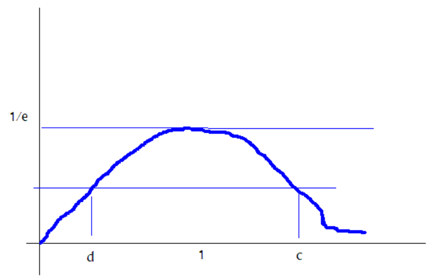
ולכל $i < T$ מתקיים $0 < Y_i$.

ואז מקבלים:

$$Pr[H = (Z_1, ..., Z_T)] = \prod_{i=1}^{T} e^{-c} \frac{c^{Z_i}}{Z_i!} = \frac{e^{-c}\left(ce^{-c}\right)^{T-1}}{\prod Z_i!}$$

(סכום ה Zים הוא $T-1$ שכן היצור ה T היה האחרון ששרד)

נתבונן בגרף xe^{-x}



אם $c \geq 1$ אז יש d יחיד כך ש $d \leq 1$ כך ש $y = de^{-d} = ce^{-c}$

y הוא פונקציה של c: $y = e^{c(y-1)}$ כלומר $cye^{-cy} = ce^{-c}$, זאת אומרת $cy = d$ $d \cdot e^{-d} = c \cdot e^{-c}$.

נגדיר: לכל $c>1$, נקרא ל d הדואלי של c אם $d<1<c$ מקיים ש $d\cdot e^{-d}=c\cdot e^{-c}$, יש d יחיד שכזה.

טענה: תהליך הסתעפות פואסוני עם פרמטר $c>1$ מותנה על היכחדות מתפלג כמו תהליך הסתעפות פואסוני עם פרמטר d שהוא הדואלי של c. הרעיון הוא שדיברנו על היווצרות רכיב ענק (זה אנלוגי למצב של אי־היכחדות) ועל שאר הגרף ־ שאין בו רכיב ענק, כלומר כל ההתחלות בו נכחדו.

הוכחה: נחשב את ההסתברות ל $H\left(Z_1,...,Z_T\right)$ בהנתן שאירעה היכחדות, וזה נותן כאמור:

$$\frac{e^{-c}\left(ce^{-c}\right)^{T-1}}{y\prod Z_i!}=\frac{e^{-d}\left(de^{-d}\right)^{T-1}}{\prod Z_i!}$$

קיבלנו שמותנה על היכחדות זה נראה כמו תהליך הסתעפות פואסוני עם פרמטר d.

תהליך בנית רכיב קשירות $C\left(v\right)$של קודקוד v בגרף $G\left(n,\frac{c}{n}\right)$: בתחילה v חי, כל שאר הקדקודים נייטרלים, $t=0$ ו $Y_0=1$. בכל זמן t שלם בוחרים w חי, לכל w' נייטרלי בודקים האם $\left\{w,w'\right\}$ צלע, אם כן אז w' חי, אם לא ־ w' נשאר נייטרלי. כשמסיימים לעבור על הנייטרלים ־ אז w מת ו $t:=t+1$.

$$Y_t=Y_{t-1}+Z_t-1$$

ואז:

$$Z_t\sim\left(n-\underbrace{\left(t-1\right)}_{deceased}-\underbrace{Y_{t-1}}_{alive},p\right)$$

כאשר T הוא ה t המינימלי עבורו $Y_t=0$, נקבל:

$$T=C\left(v\right)$$

נמשיך בהגדרת Y_t גם עבור $t>T$.

טענה: $Y_t\sim\left(1-t\right)+B\left(n-1,1-\left(1-p\right)^t\right)$

הוכחה: אם נסמן ב N_t את מספר הנייטרלים בזמן t, אז $N_t\sim B\left(N_{t-1},1-p\right)\sim B\left(n-1,\left(1-p\right)^t\right)$

n הוא מספר הקודקודים, הנייטרלים מתפלגים $B\left(n-1,\left(1-p\right)^t\right)$, המתים $(t-1)$ והחיים יחד מתפלגים $B\left(n-1,1-\left(1-p\right)^t\right)$

אם נבחר כעת $p=\frac{c}{n}$ אז כל עוד t ו Y_{t-1} קטנים אז $Z_t\sim Poi\left(c\right)$

נקבע את c

$Y_0^*,Y_1^*,...,T^*,Z_1^*,...,Z_T^*,H^*$ זה יגדיר תהליך הסתעפות $Poisson\left(c\right)$

ו $Y_0,Y_1,...,T^*,Z_1,...,Z_T,H$ תהליך בניית $C\left(v\right)$ ב $G\left(n,\frac{c}{n}\right)$.

לכל היסטוריה סופית H^* אז:

$$Pr\left[H^*=\left(Z_1,...,Z_T\right)\right]=\prod_{i=1}^{T}Pr\left[\underbrace{Z^*}_{\sim Poi(c)}<z_i\right]$$

$$Pr\left[H=(Z_1,...,Z_T)\right]=\prod Pr\left[Z_i=z_i\right]$$

וכיוון ש :

$$Z_i\sim B\left(n-1-Z_1-...-Z_{i-1},\frac{c}{n}\right)\sim Poi\left(c\right)$$

(כי כאשר n שואף לאינסוף, לכל היסטוריה סופית - הסכום של ה Zים קבוע ולכן תתקבל התפלגות פואסונית)

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}Pr\left[H^*\right]=Pr\left[H^*\right]$$

גודל רכיב מקסימלי כאשר $c<1$:

$$Pr\left[T>t\right]\le Pr\left[Y_t\ge 0\right]=Pr\left[B\left(n-1,1-(1-p)^t\right)>t\right]$$

וכיוון ש $(1-p)^t>1-pt$ אז $1-(1-p)^t<pt$ נוכל לקבל שהביטוי לעיל קטן או שווה ל:

$$Pr\left[\underbrace{B\left(n,pt\right)}_{Expec.\,is\,ct\,and\,c<1}>t\right]<\underbrace{e^{-c't}}_{c'\,some\,func.\,of\,c}$$

לכן אם ניקח תא כך ש $c't>2\log n$ אז $t>\frac{2}{c'}\log n$ ההסתברות ש $t<C\left(v\right)$ קטנה מ n^{-2} ולכן הסיכוי שקיים איזהשהו v כך ש $t<C\left(v\right)$ קטנה מ $\frac{1}{n}$, נובע שכל הרכיבים בגודל לוגריתמי לכל היותר.

אי שוויון שנשתמש בו:

$$\forall\varepsilon\exists\varepsilon'\quad Pr\left[\left|B\left(n,p\right)-np\right|>\varepsilon np\right]<e^{-\varepsilon' np}$$

נטפל במקרה של $1<c$:

עבור t קבוע, מתקיים

$$Pr\left[T=t\right]\approx Pr\left[T^*=t\right]$$

עבור $t=o\left(n\right)$ נקבל $1-(1-p)^t\sim pt$ ומתקבל:

$$Pr\left[Y_t\le 0\right]=Pr\left[B\left(n-1,1-(1-p)^t\right)\le t-1\right]\approx Pr\left[B\left(n,\frac{t\cdot c}{n}\right)<t\right]$$

וזה אקספוננציאלית קטן ב t.

אם $t=\alpha n$ אז:

$$1-(1-p)^t \sim 1-e^{-c\alpha}$$

והנקודה הקריטית היא

$$\begin{aligned}\alpha &= 1-e^{-c\alpha}\\ 1-\alpha &= e^{-c\alpha}\\ 1-\alpha &= y\end{aligned}$$

אם $\alpha<1-y$ אז $\alpha > 1-e^{-c\alpha}$ אז

$$Pr\left[Y_t\le 0\right]\sim Pr\left[B\left(n,1-e^{-c\alpha}\right)<\alpha n\right]$$

וזה קטן אקספוננציאלית ב αn.

כעת אם $\alpha>1-y$ אז $\alpha>1-e^{-c\alpha}$ אז $Pr\left[Y_t\le 0\right]\sim 1$

ומסיכום שני החישובים האחרונים נקבל שבהסתברות ששואפת ל 1 כש $n\to\infty$, קיים $t\approx(1-y)\,n$ כך ש $Y_t=0$.

אינטואיציה: במקרים שבהם התהליך הפואסוני הולך לאינסוף, כלומר אין מוות במקום קבוע ($T^*=\infty$) אז $T\sim(1-y)\,n$

$$Pr\left[T^*=\infty\right]=1-y$$

ולכן בוחרים t_0 כך ש $y-\varepsilon\le Pr\left[T^*\le t_0\right]\le t=y$ ועבור nגדול מתקיים:

$$y-2\varepsilon\le Pr\left[T\le t_0\right]\le y+\varepsilon$$

וגם

$$Pr\left[t_0\le T\le(1-\delta)\,n\,(1-y)\ \vee\ T>(1+\delta)\,n\,(1-y)\right]<\varepsilon$$

$$1-y-2\varepsilon\le Pr\left[T^*\in\left[(1-\delta)\,(1-y)\,n,(1+\delta)\,(1-y)\,n,\right]\right]\le(1-y)+3\varepsilon$$

נבחר s כך ש $(y+\varepsilon)^s<\varepsilon$ ו $s\sim\log\frac{1}{\varepsilon}$

נבחר v, נחשב את $C(v)$ ויש שלוש אפשרויות:

1. קטן אם $|C(v)|\le t_0$
2. ענק אם $C(v)\in\left[(1-\delta)\,(1-y)\,n,(1+\delta)\,(1-y)\,n,\right]$
3. כישלון - אחרת.

ממשיכים שוב ושוב עד קבלת רכיב ענק או כשלון או s רכיבים קטנים.

$$s\varepsilon\ge Pr\left[Failure\right]$$

$$\varepsilon > (y+\varepsilon)^s \geq Pr\left[All\, are\, small\right]$$

לכן סה"כ הסיכוי לא לקבל רכיב ענק $> \varepsilon\,(s+1)$ אבל ε קטן כרצוננו וכנ"ל $\varepsilon \cdot s$ ולכן בהסתברות השואפת ל 1, יש רכיב ענק שגדלו $n\,(1-y)$.
נבחין כי הגרף על $yn = m$ הקודקודים שלא בחנו, הוא בלתי תלוי במה שראינו ולכן הוא נראה כמו $G\left(m, \frac{c}{m}\right) = G\left(m, \frac{d}{m}\right)$ ■

14 יישומים אלגבריים לתורת הגרפים

משפט 14.1 אי אפשר להציג את K_n כאיחוד זר של פחות מ $n-1$ גרפים דו צדדיים שלמים.

העובדה שאפשר ב $n-1$ היא קלה להוכחה, לוקחים קודקוד v, הוא יהיה צד אחד ו $n-1$ הצדדים האחרים יהיו הצד השני, אחר כך ניקח קוד' v' ונקשר אותו ל $n-2$ הקודקודים וזה יהיה הגרף הדו"צ השני, וכו'. **הוכחה:** לכל קודקוד ב K_n נתאים משתנה x_i. נניח K_n איחוד של גרפים דו"צ שלמים $G_1\left(R_1, L_!\right), G_2\left(R_2, L_2\right), ..., G_m\left(R_m, L_m\right)$
נגדיר $m+1$ משוואות ליניאריות:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 0$$

נגדיר עוד m משוואות:

$$\begin{cases} \sum_{j\in R_1} & x_j = 0 \\ \sum_{j\in R_2} & x_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j\in R_m} & x_j = 0 \end{cases}$$

נניח $m \leq n-2$ אזי $m+1 \leq n-1$ אזי יש פתרון לא טריויאלי.
נתבונן ב $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$
מצד אחד זה 0, לפי המשוואה הראשונה.
מאידך זה שווה ל:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{k=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j\in R_k} x_j\right)}_{=0} \left(\sum_{i\in L_k} x_i\right)$$

וכיוון שהפתרון לא טריוויאלי אז $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ וקיבלנו שהביטוי כולו גדול ממש מאפס, בסתירה... ■

15 שיעור אחרון (המשך שיטות אלגבריות)

מטריצת סמיכות המוגדרת על ידי גרף על n קודקודים היא מטריצה $n \times n$:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & i \sim j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

כך למשל עבור K_3 בלתי מכוון תתקבל המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה ממשית סימטרית תמיד ניתנת לליכסון ־ כלומר יש לה מערכת שלמה של וקטורים עצמיים אורתוגונליים.

נעסוק בגרפים d־רגולריים בלבד ונחשוב על וקטורים ב $\mathbb{R}^n$ (או ב $\mathbb{C}^n$) כפונקציות על קבוצת הקודקודים של הגרף.

טענה 15.1 (תרגיל) יהי G גרף d־רגולרי על n קודקודים, עם ערכים עצמיים $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ אזי:

1. $\lambda_1 = d$ (כלומר d הוא ערך עצמי ואף הגדול שבהם)

נבחין כי וקטור של 1 ־ים הוא וקטור עצמי עם ע"ע d (שכן מספר ה 1 ־ים בכל שורה הוא בדיוק d)

2. הריבוי של d הוא 1 אס"ם G קשיר.

זאת כיוון שרכיבי קשירות שונים נראים כמו תת מטריצות במטריצת הסמיכות, ווקטור שכולו 1 ים במקומות המתאימים למטריצה הרלבנטית ־ יהיה וקטור עם ע"ע d.

3. $\lambda_n \geq -d$ ושוויון מתקיים אס"ם G הוא דו־צדדי

שתי הערות:

א. $tr\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

ב. אם $\frac{A}{d}$ אופרטור המיצוע, אז לכל f וקטור, אם נתבונן ב $\left(\frac{A}{d}\right)(f) = (g)$ אז נקבל $g_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} f_i = \frac{1}{d}\sum_{j\sim i} f_i$

נתבונן במטריצה המתאימה ל K_3, מהו הפולינום האופייני?

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$$

ולכן הע"ע הם $2, -1, -1$

הוקטורים העצמיים המתאימים במישור המרוכב כאשר $\omega^3 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}$$

הוקטורים העצמיים הללו הם לא מקריים, כיוון שאם נחשוב על קודקודי K_3 כאיברי החבורה $\mathbb{Z}_3$ והגרף יהיה **גרף קיילי** של החבורה עם היוצרים $\{\pm 1\}$.

(בגרף קיילי הקודקודים הם איברי החבורה ויש צלע אס"ם מאיבר א' מתקבל איבר ב' על ידי כפל באחד מחבורת היוצרים)

מסתבר שהוקטורים העצמיים של גרף קיילי של חבורה אבלית הם בדיוק הכרקטרים של החבורה.

הגדרה 15.2 כרקטר של חבורה H היא העתקה $\chi : H \to \{$חבורת שורשי היחידה ב $\mathbb{C}\}$ שהיא הומומורפיזם.

במקרה כזה נבחין שההומומורפיזמים χ_0, χ_1, χ_2 שהם כרקטרים של החבורה הם:

H	0	1	2
χ_0	1	1	1
χ_1	1	ω	ω^2
χ_2	1	ω^2	ω

נגדיר:

$$\chi_h\left(g\right) := \omega^{h \cdot g}$$

(כאשר h, g כמספרים ב $\mathbb{R}$, כך מהטבלה לעיל מקבלים שאכן $\chi_1\left(1\right) = \omega^{1 \cdot 1} = \omega$.

15.1 חידה

נניח שיש רמזור אחד, ו n מתגים (שיקבעו את צבעי האורות), כשלכל מתג 3 מצבים, ולכן יש 3^n קונפיגורציות של מתגים שקובעות את האור ברמזור $f : \{R, Y, G\}^n \to \{R, Y, G\}$.

נדרוש מהפונקציות שלנו שאם יש $x, y \in \{R, Y, G\}^n$ (כלומר שתי קונפיגורציות) כך שהן שונות בכל מתג, אזי האור המתקבל משתיהן יהיה שונה.

איזו פונקציה למשל תתאים? אם נדרוש שרמזור יופעל לחלוטין על ידי המתג הראשון ־ נקבל פונקציה שעומדת בתנאים הללו.

משפט 15.3 יש בדיוק $3!n$ פונקציות כאלו.

כלומר אם $V\left(G\right) = \{0, 1, 2\}^n$ ו $E\left(G\right) = \{\{x, y\} : x_i \neq y_i \forall i \in [n]\}$ מהן ה 3־צביעות החוקיות של G?

שימו לב ש G הוא גרף קיילי של $\mathbb{Z}_3^n$ עם היוצרים $\{\pm 1\}^n$.

זהו גרף עם 3^n קודקודים שהוא 2^n־רגולרי.

טענה 15.4 בגרף זה אין קבוצה בלתי תלויה בגודל $< \frac{3^n}{3}$ ויש קבוצות בת"ל בגודל $\frac{3^n}{3}$ אבל רק אלו הנקבעות על ידי קוא' יחידה

$$I \underbrace{i, j}_{1 \leq i \leq n,\ j \in \{0,1,2\}} = \{x \in \{0, 1, 2\}^n : x_i = j\}$$

הגרף המתאר את בעית הרמזורים הוא:

$$\underbrace{K_3 \times K_3 \times ... \times K_3}_{n\, times}$$

נגדיר מכפלה של גרפים: עבור $G \times H$:

$$V\left(G \times H\right) = V\left(G\right) \times V\left(H\right)$$

$$\left(u_1, v_1\right) \sim \left(u_2, v_2\right) \Leftrightarrow u_1 \sim u_2 \wedge v_1 \sim v_2$$

אחת הדרכים לחשוב על זה היא שבכל קודקוד של G אנחנו רושמים את כל קודקודי H, כך שנרשום צלע בין קוד' h בתוך קוד' g לקוד' h_1 בקוד' g_1 וכו'...

טענה 15.5 אם A מטריצת הסמיכות של G ו B מטריצת הסמיכות של H אז מטריצת הסמיכות של $G \times H$ תהיה $A \otimes B$ לפי אותו רעיון כמקודם - נרשום מטריצה גדולה של G ובכל מקום שמופיע 1 נכניס עותק של מטריצת הסמיכות של H.

$$(A \otimes B)_{i_1,j_1,i_2,j_2} = A_{i_1,j_1} \cdot B_{i_2,j_2}$$

(כאן i_1, j_1 יאמר לנו באיזה בלוק אנחנו נמצאים ו i_2, j_2 באיזה תא בבלוק)

באופן כללי אם A מטריצה $n \times n$ עם ו"ע $v_1, ..., v_n$ עם ע"ע $\lambda_1, ..., \lambda_n$
ו B מטריצה $m \times m$ עם ו"ע $w_1, ..., w_m$ עם ע"ע $\eta_1, ..., \eta_m$
אז ל $A \otimes B$ וקטורים עצמיים $v_i \otimes w_j$ והע"ע $\lambda_i \cdot \eta_j$
מקרה פרטי:
ע"ע וו"ע של גרף הרמזור, גרף קיילי של $\mathbb{Z}_3^n$ עם יוצרים $\{\pm 1\}^n$
נגדיר מכפלה פנימית על $\{0, 1, 2\}^n$ על ידי:

$$\langle f, g \rangle = 3^{-n} \sum_{x \in \{0,1,2\}^n} f(x) \overline{g(x)}$$

מיהם הכרקטרים של $\mathbb{Z}_3^n$? לכל $R \in \mathbb{Z}_3^n$ נגדיר:

$$\chi_R : \mathbb{Z}_3^n \to \mathbb{C}$$

על ידי:

$$\chi_R(s) = \omega^{\sum R_i S_i}$$

כך ש ω שורש יחידה פרמיטיבי.
נשים לב ש:

$$\chi_R(S + T) = \chi_R(S) \cdot \chi_R(T)$$

וגם

$$\chi_R \cdot \chi_S = \chi_{R+S}$$

כלומר הכרקטרים עצמם חבורה איזומורפית ל $\mathbb{Z}_3^n$.
עבור כרקטר כלשהו - מהו $\sum_{x \in \mathbb{Z}_e^n} \chi_R(x)$?
אם $R = (0, ..., 0)$ אז $\chi_R(T) = 1$ ואז הסכום לעיל יוצא 3^n.
נטען שאחרת קיים T כך ש $\chi_R(T) \neq 1$ כי אחרת:

$$\chi_R(T) \cdot \sum_x \chi_R(x) = \sum_x \chi_R(T + x) = \sum_y \chi_R(y) \Rightarrow \sum \chi_R(x) = 0$$

טענה 15.6

$$\langle \chi_R, \chi_S \rangle = \delta_{R,S}$$

הוכחה:

$$3^{-n} \sum \chi_R(x) \overline{\chi_S(x)} = 3^{-n} \sum \chi_R(x) \chi_{-S}(x) = 3^{-n} \sum \chi_{R-S}(x) = \delta_{R,S}$$

■

תהי A מטריצת הסמיכות של הגרף שלנו ואז

$$\begin{aligned}(A\chi_R)_T &= \sum_S A_{T,S} \chi_R(S) \\ &= \sum_{T\sim S} \chi_R(S) = \sum_{\tau\in\{\pm1\}^n} \chi_R(T+\tau) \\ &= \chi_R(T) \cdot \sum_{\tau\in\{\pm1\}^n} \chi_R(\tau)\end{aligned}$$

הע"ע המתאים ל R.
וזה נותן:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\omega^{R_i} + \omega^{-R_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \begin{cases} 2 & R_i = 0 \\ -1 & R_I \neq 0 \end{cases}$$

ולכן אם נסמן $|R|$=מספר הקוא' השונות מאפס ב R אז:

$$= 2^n \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^{|R|}$$

הערך העצמי הכי גדול יתקבל עבור הוקטור $(0, ..., 0)$ והוא יתן בדיוק 2^n ובכל שאר הו"ע (שמקבלים 1 באחת הקוא' ו 0 באחרות) אז יתקבלו הערכים $-2^{(n-1)}$, ולכן

$$2^n = \lambda_{max} \geq ... \geq \lambda_{min} = -2^{(n-1)}$$

כאשר λ_{max} יתקבל בריבוי 1, ו λ_{min} יתקבל בריבוי $2n$ מתאים ל χ_R כשל R קוא' יחידה שונה מ 0.

משפט 15.7 הופמן
יהי G גרף d רגולרי עם ע"ע $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_{min}$ ותהי I קבוצה בלתי תלויה של קודקודים ב G, אזי $\frac{|I|}{n} \leq \frac{-\lambda n}{d-\lambda n}$ (λ_n מספר שלילי)
שויון יתקבל רק אם הפונקציה האופיינית של I נפרשת על ידי הוקטורים העצמיים המתאימים ל λ_1 ול λ_{min}

15.1.1 הופמן $\Leftarrow$ רמזור

אם נציב את הערכים העצמיים שהגענו אליהם, נקבל ש $\frac{|I|}{3} \leq \frac{2^{n-1}}{2^n+2^{n-1}} = \frac{1}{3}$
נניח שיש שוויון ותהי f הפונקציה האופיינית של I

$$f = c\chi_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i\chi_{e_i} + b_i \cdot \chi_{2e_i})$$

שימו לב:

$$f^2 = f$$

שכן הפונקציה מקבלת רק את הערכים 0 ו 1.
כמו כן ההצגה של f לעיל היא יחידה.
כעת נניח שיש $i \neq j$ כך שאחד או יותר מ $\{a_i, b_i\}$ אינו 0 וגם אחד או יותר מ a_j, b_j אינו אפס. למשל $a_i \neq 0$ ו $b_i \neq 0$ אזי ב f^2 המקדם של $\chi_{e_i+2e_j}$ יהי $a_ib_j \neq 0$ בסתירה ליחידות ההצגה.
לכן f תלויה לכל היותר בקוא' אחת.

15.1.2 הוכחת משפט הופמן

יהי G גרף d רגולרי עם ע"ע $d = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_{min}$ וו"ע $v_1, v_2, ..., v_n$ ותהי I קבוצה ב"ת ש f היא הפונקציה האופינית שלה. כלומר

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$$

נכתוב:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

ההצגה היחידה של f על פי הבסיס של הוקטורים העצמיים.
נסמן $\alpha = \frac{|I|}{n}$ ואז $0 \leq \alpha \leq 1$

* טענות

$$\langle f, v_1 \rangle = \langle a_1 v_1, v_1 \rangle = a_1$$

אבל זה גם שווה ל:

$$= \frac{1}{n} \sum_{x \in I} 1 = \alpha$$

ולכן $a_1 = \alpha$.
**

$$\langle f,f\rangle = \sum |a_i|^2 = \frac{1}{n}\sum_{x\in I} 1 = \alpha$$

***

$$\langle f,Af\rangle = \frac{1}{n}\sum_x f(x)(Af)(x) = \frac{1}{n}\sum_x f(x)\sum_{y\sim x} f(y) = 0$$

אבל מאידך:

$$\langle f,Af\rangle = \left\langle \sum a_i v_i, \sum a_i\lambda_i v_i\right\rangle = \sum |a_i|^2 \lambda_i$$

נשוב להוכחה

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i|^2 = d\alpha^2 + \sum_{i=2}^{n}\lambda_i |a_i|^2 \geq d\alpha^2 + \lambda_{min}\sum_{i=2} |a_i|^2$$

ולכן:

$$0 \geq d\alpha^2 + \lambda_{min}\left(\alpha-\alpha^2\right) \Rightarrow \frac{-\lambda_{min}}{d-\lambda_{min}} \geq \alpha$$

ואם יש שוויון אז נובע ש $a_i \neq 0$ רק עבור $i=1$ ו v_i המתאימים לע"ע λ_{min}.

16 נספח

הוכחה משיעור שלא נכחתי בו:

משפט 16.1 קיים k,K כך שבכל גרף על n קודקודים עם לפחות $Kn^{\frac{3}{2}}$ צלעות קיים C_4 (מרובע) ויש גרף עם $kn^{\frac{3}{2}}$ צלעות שאין בו C_4.

הוכחה: יהי K כך ש $\frac{\left(n+n\sqrt{n-1}\right)}{2} \leq Kn^{\frac{3}{2}}$, מכאן שהדרגה הממוצעת בגרף על n קודקודים היא $\overline{d} \geq \left(1+\sqrt{n-1}\right)$

למה: אם $\binom{n}{2} < \sum_v \binom{d_v}{2}$ אז יש מרובע בגרף.

הוכחה: ניקח את הקבוצה $F = \{(x,\{u,v\}) : (x,u),(x,v)\in E\}$ כלומר "מזלגות", נקודות x ושניים משכניהן. כמה כאלו יש? בדיוק $\sum_v \binom{d_v}{2}$. נבחין כי $\binom{n}{2}$ מונה את מספר הזוגות, כלומר את הקוא' השניה באיברי F, ומשובך יונים אם מתקיימת ההנחה - יש שני איברים ב F שמסכימים על "שיני" המזלג, ולכן איחודם יוצר מרובע.

נתבונן ב:

$$n\binom{\overline{d}}{2} = n\binom{\frac{\sum_v d_v}{n}}{2} \leq \sum_v \binom{d_v}{2}$$

(מקמירות $\frac{x^2-x}{2}$)
מאידך:

$$n\binom{\overline{d}}{2} = n\frac{\overline{d}\left(\overline{d}-1\right)}{2} \geq \frac{\left(1+\sqrt{n-1}\right)\sqrt{n-1}}{2}n = \frac{n\sqrt{n-1}}{2} + \frac{(n-1)\,n}{2} > \binom{n}{2}$$

ולפי הלמה - יש מרובע.
נוכיח את החלק השני - קיום k.
נתבונן ב $\mathbb{F}_p^3$ עבור ראשוני p.
נסמן V_1=קב' המישורים ב $\mathbb{F}_p^3$
V_2= קב' הישרים ב $\mathbb{F}_p^3$
נגדיר גרף דו"צ $G = \left\langle V_1 \coprod V_2, E\right\rangle$
ויש צלע בין ישר למישור אם"ם הישר במישור.
כמה מישורים יש?

$$\left\{ax+by+cz=0 : (a,b,c) \in \mathbb{F}_p^3\right\}$$

צריך לבחור שלושה איברים, אבל זה לא מגדיר באופן יחיד, כי על כל מכפלה סקלרית של שלושתם תגדיר את אותו מישור (וכמובן אי אפשר לבחור את אפס) ולכן כל מישור יתקבל $p-1$ פעמים (עבור כל סקלר שאינו אפס) וסה"כ המישורים האפשריים $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2+p+1$
.

כמה ישרים יש?

$$\left\{\lambda\left(x,y,z\right) : x,y,z \neq 0\right\}$$

מגדיר ישר, צריך לקחת את מספר הנקודות במרחב, וכך נספור כל ישר $p-1$ פעמים (עבור $p-1$ בחירות של λ) ולכן גם מספר הישרים יצא p^2+p+1.
כעת נטען שאין מעגל באורך 4 בגרף, מדוע? מכיוון שאז יהיו שני מישורים שמחוברים לשני ישרים, כלומר שני ישרים שמוכלים בשני מישורים שונים, אבל שני ישרים שונים מגדירים מישור אחד ויחיד, בסתירה.
כמה ישרים מוכלים במישור? במישור יש משיקולי מימד p^2 נקודות, ללא אפס יש p^2-1 וכל ישר נספר $p-1$ פעמים (משיקולי כפל בסקלר) במניית הנקודות, ולכן כל מישור מכיל $\frac{p^2-1}{p-1} = p+1$ נקודות.
מכאן שסה"כ יש $|E| = \left(p^2+p+1\right)\left(p+1\right) = \Theta\left(p^3\right) = \Theta\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$ קודקודים כנדרש.
■