תורת הקבוצות

עפ"י הרצאות של פרופ' ענר שלו

סמסטר א', תש"ע

רשום: שיר פלד, תיקונים יתקבלו בברכה במהלך ההפסקות או בכתובת מייל $shirpeled@cs$

1 מבוא

1. ניתן להגדיר קבוצות ע"י רשימת איבריהן:

$$A = \{a, b, 1, 13\}$$

2. ע"י רשימה לא מלאה - עם חוקיות:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

(בתורת הקבוצות 0 הינו מספר טבעי)

3. ע"י תכונה משותפת.

$$B = \{All\, parliament\, members\} = \{x : x\, is\, a\, member\}$$

$$\left\{x : \underbrace{P}_{property}(x)\right\}$$

$$\mathbb{R}^+ = \{x : x \in \mathbb{R},\, x > 0\}$$

לפי זה ניתן לקבל גם קבוצה שכוללת את כל העצמים, למשל:

$$U = \{x : x = x\}$$

זוהי הקבוצה האוניברסלית.

הפרדוקס של ראסל

ניסוח אינטואיטיבי: הספר $(Hair\, dresser)$ מספר את כל אלה שלא מספרים את עצמם, שזה הגיוני. אבל אז מי מספר את הספר? הרי אם הוא מספר את עצמו אז הוא לא צריך לספר את עצמו, ואם הוא לא מספר את עצמו אז הוא צריך לספר את עצמו.
ובניסוח מתמטי: תהי

$$Y = \left\{x : \underbrace{x \notin x}_{P}\right\}$$

הסבר: $x \in A$ משמעו x שייך ל A, כלומר x איבר של A. התכונה שניסחנו מגדירה את Y להיות קבוצת כל הקבוצות שאינן מכילות את עצמן. למשל הקבוצה $\{1\}$אינה מכילה את עצמה, היא מכילה את האיבר 1 אבל לא את הקבוצה

$\{1\}$. כלומר $\{\{1\}\} \in \{1\} \in 1$ אבל $\{\{1\}\} \neq \{1\}$. **זהו הבדל מהותי בין קבוצה שמכילה עצם לבין העצם עצמו.**
מאידך ־ הקבוצה U (האוניברסלית) בהחלט מכילה את עצמה, שכן היא מכילה את כל הקבוצות. כמו כן אם נגדיר את I להיות קבוצת כל הקבוצות האינסופיות ־ ברור ש I מכילה את עצמה כאיבר.
נשאל כעת האם $Y \in Y$?
אם כן ־ אזי לפי הכלל שמגדיר את Y נקבל ש $Y \notin Y$
אם לא ־ אזי לפי הכלל שמגדיר את Y נקבל ש $Y \in Y$
פרדוקס...
הפרדוקס גרם לסערה מתמטית והרס את התפיסה האינטואיטיבית של הלוגיקה ושל הקבוצות. כל מיני אנשים כמו פרגה שבנו קריירה בלוגיקה, מפעל חייהם קצת נהרס בגלל שלוש השורות הללו. למעשה פרדוקס זה ואחרים מוטטו את תורת הקבוצות הנאיבית ובהדרגה יצרו את תורת הקבוצות האקסיומטית, בה פרדוקסים אלו אינם קיימים. הרעיון שם הוא שאנחנו יותר זהירים בהגדרה של "מהי קבוצה", ושם אין זה נכון שיש התאמה בין תכונות ובין קבוצות. כלומר $\{x : P(x)\}$ כבר אינה בהכרח קבוצה. יש כללים לבנית קבוצות, כך למשל U (הקבוצה האוניברסלית) אינה קבוצה.
יש שמשתמשים במושג מחלקה לאוסף שאינו בהכרח קבוצה.

פרדוקס ההגדרה

n= המספר הטבעי הקטן ביותר שלא ניתן להגדירו כמשפט בעברית בן פחות מחמישים מילים.
אוסף המספרים שניתן להגדירם בפחות מחמישים מילים הוא סופי (משיקול קומבינטורי) , ולכן יש מספרים שלא ניתן להגדירם בפחות מ 50 מילים. ולכן יש מספר מינימלי כזה (יחיד) לכן זו הגדרה טובה. מצד שני: אורכה של ההגדרה קטן מחמישים מילים ועל כן יש פה סתירה, שכן קיבלנו ש־ n מחד מוגדר על ידי 13 מילים ומאידך אינו יכול להיות מוגדר ע"י פחות מ 50 מילים...
פרדוקס ההגדרה מוביל ליצירת שפה מתמטית פורמלית, פחות עשירה ויותר מדוייקת מהשפה הטבעית ובתורת הקבוצות האקסיומטית אנחנו מגבילים את עצמנו לשימוש בשפה זו כדי להגדיר קבוצה: שפה מסדר ראשון, שבה משתמשים בקשרים וכמתים לוגיים $(\vee, \wedge, \exists, \forall)$ וביחסים כדוגמת $\leq$ וכיו"ב.

לסיכום

פרדוקס ראסל $\Leftarrow$לא כל תכונה מגדירה קבוצה.
פרדוקס ההגדרה $\Leftarrow$זהירות בניסוח תכונות, ולכן ננסחן ע"י שפה מסדר ראשון.

2 אקסיומות של תורת הקבוצות

ZFC (צמרלו, פרנקל ואקסיומת הבחירה)

1: אקסיומת ההקפיות $(Extension)$

קבוצה מאופיינת ע"י איבריה:

$$A = B \Leftrightarrow [\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

למשל:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} : 2 < x^2 < 12\right\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

למרות הניסוח השונה ברור שיש שוויון קבוצות. נדגיש כאן שמדובר ממש על שוויון ולא על איזומורפיזם.

הגדרה 2.1 הכלה בין קבוצות: נגדיר $A \subseteq B$ אם

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

טענה 2.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

הוכחה: תרגיל לבית. ■

הגדרה 2.3 הכלה ממש $A \subset B$ או $A \subsetneq B$ אם $A \neq B \wedge A \subseteq B$.

אם $A \subseteq B$ נאמר ש A היא תת קבוצה של B.
אם $A \subsetneq B$ נאמר ש A היא תת קבוצה **ממש** של B.

2: אקסיומת הצמצום או המפרט$(Specification)$

אם A קבוצה ו $P(x)$ תכונה מסדר ראשון, אז $B = \{x \in A : P(x)\}$ היא קבוצה. החידוש הוא ש B אינה כל האיברים בעלי התכונה P אלא רק איברי A שלהם תכונה זו.
דוגמאות:
אם $\mathbb{N}$ קבוצה, אז כך גם קבוצת הריבועים $\left\{x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} \quad x = y^2\right\}$
אם אוסף בני האדם הוא קבוצה אז גם אוסף הנשים הוא קבוצה.

טענה 2.4 אוסף כל הקבוצות U אינו קבוצה.

הוכחה: אחרת היינו משחזרים את הפרדוקס של ראסל. ■

3: אקסיומת הקיום - קיימת קבוצה

טענה 2.5 קיימת קבוצה ללא איברים, נקרא לה הקבוצה הריקה $\emptyset$, היא יחידה.

הוכחה: תהי Aקבוצה. נגדיר $\emptyset = \{x \in A : x \neq x\}$ על סמך אקסיומת הצמצום (2) זו אכן קבוצה. יחידות נובעת מאקסיומת ההקפיות (1) שמגדירה שוויון בין קבוצות לפי שוויון בין האיברים. כי אם גם B קבוצה ללא איברים אז $x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in B$ ומכאן $B = \emptyset$. ■

לפעמים מנסחים את אקסיומה 3 כך: קיימת קבוצה ריקה.

טענה 2.6 $\emptyset \subseteq A$ לכל קבוצה A.

4: אקסיומת הצימוד $(Pairing)$

אם a, b קבוצות אז יש קבוצה C כך ש $a \in C$ וגם $b \in C$.

טענה 2.7 לכל שתי קבוצות כנ"ל יש קבוצה $\{a, b\}$ שאיבריה הם רק a ו b.

הוכחה: ניקח את C המובטחת מאקסיומת הצימוד, ונצמצם לפי אקסיומת הצימצום ונקבל:

$$C' = \{x \in C : x = a \vee x = b\}$$

וזה יתן בדיוק את $\{a, b\}$. ■

מסקנה: לכל קבוצה a יש קבוצה $\{a\}$שמכילה רק את האיבר a (מכונה יחידון או $Singleton$.
מדוע? ניקח $a = b$ ואז לפי הקודמת $\{a, b\}$ קבוצה, כלומר $\{a, a\}$קבוצה והיא בעצם $\{a\}$ (כי אין משמעות לחזרות).

דוגמאות:

מ-$\emptyset$ ניתן לבנות ע"י אקסיומה 4 קבוצות רבות אחרות, למשל:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

מסקנה: יש אינסוף קבוצות שונות זו מזו, מדוע? למשל הקבוצה הראשונה לעיל אינה מכילה איברים כלל, והשניה מכילה איבר ולכן הן שונות. באופן דומה אפשר להראות שכל הקבוצות בשרשרת שונות זו מזו.
כמו כן יש קבוצות בנות שני איברים (בהסתמך על אקסיומת הצימוד), למשל: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. אבל עדיין אין לנו דרך לבנות קבוצות בנות יותר משני איברים.

5: אקסיומת האיחוד

לכל קבוצה של קבוצות קיימת קבוצה שאיבריה הם בדיוק האיברים הנמצאים באיזושהי קבוצה בקבוצה בנתונה.
בניסוח יותר פורמלי: נאמר ש C=אוסף קבוצות (שמהווה קבוצה בעצמו)

$$\cup C=\{x|\exists A\in C\,,\,x\in A\}$$

מסמנים גם $\cup_{A\in C}A$.

דוגמאות:

- $\cup\emptyset=\emptyset$
- $a=\bigcup a=\bigcup_{A\in\{a\}}A=\bigcup\{a\}$ (כמובן מניחים ש a קבוצה)
- $\{x:x\in a\vee x\in b\}=\bigcup\{a,b\}$ "=" $a\cup b$ (נשתמש לעיתים בסימון השמאלי למרות שהוא פחות פורמלי)

טענה 2.8 מספר טענות על האיחוד:

1. $A\cup\emptyset=A$
2. $A\cup A=A$
3. $A\cup B=B\cup A$
4. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
5. $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$

ההוכחות פשוטות מאד. נראה את ההוכחה עבור 3:

$$\begin{aligned} x &\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B\\ &\Leftrightarrow x\in B\vee x\in A\\ &\Leftrightarrow x\in B\cup A\end{aligned}$$

בניית קבוצות בנות יותר משני איברים:
אם ידוע ש $\{a\}$קבוצה וגם $\{b,c\}$(כאשר $a\neq b\neq c$) נוכל ע"י איחוד ליצור $\{a\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}$. באופן פורמלי נצטרך להתחיל מקבוצה ריקה ואז נבחר:

$$\emptyset\cup\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$$

באופן דומה ניתן לבנות קבוצות בכל גודל שנרצה.

בניה של המספרים הטבעיים

נגדיר $0=\emptyset$, נניח שהוגדרו המספרים $0,1,...,n$ נגדיר את העוקב של n להיות:

$$n^{+}=n+1=n\cup\{n\}$$

למשל:

$$1=0^{+}=0\cup\{0\}=\emptyset\cup\{\emptyset\}=\{\emptyset\}=\{0\}$$

$$2=1^{+}=1\cup\{1\}=\{\emptyset\}\cup\{\{\emptyset\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=\{0,1\}$$

טענה 2.9 $n = \{0, 1, ..., n-1\}$ (קבוצה בת n איברים)

הוכחה: באינדוקציה ־ ראינו עבור מקרה הבסיס. נניח שזה מתקיים עבור n, כלומר $n = \{0, 1, ..., n-1\}$, ולפי ההגדרה מתקיים:

$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, ..., n-1\} \cup \{n\} = \{0, 1, ..., n-1, n\}$$

■

ואז נקבל שכל מספר טבעי מיוצג ע"י קבוצה שמכילה את כל האיברים שקדמו לו.

חיתוכים

(מסתבר שלא צריך גם אקסיומת חיתוך, אלא אפשר להגדיר באופן שנובע מאקסיומת הצמצום.)

הגדרה 2.10 A, B קבוצות, נאמר $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in A : x \in B\}$ (נשים לב שרק ההגדרה השניה היא לגיטימית לפי אקסיומת הצמצום).

טענה 2.11 כמה טענות על חיתוכים:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

הגדרה 2.12 אם C אוסף של קבוצות (קבוצה בעצמו) אז מגדירים

$$\bigcap C = \bigcap_{A \in C} A = \{x : \forall A \in C\,,\, x \in A\}$$

זה שוב בעייתי מבחינת הגדרה (כי לא הסתמכנו על הצמצום) אבל אם $C \neq \emptyset$נוכל לבחור $B \in C$ כלשהי ואז

$$\{x \in B : \forall A \in C\,,\, x \in A\}$$

מהי $\bigcap \emptyset$? זה בעצם הכל כי

$$x \notin \bigcap_{A \in \emptyset} A \Leftrightarrow \exists A \in \emptyset : x \notin A$$

אבל אין A בקבוצה הריקה ולכן לכל xמתקיים $x \in \bigcap \emptyset$. הבעיה היא שכאן קיבלנו את הקבוצה האוניברסלית, וראינו שאסור שזו תהיה קבוצה (כי נקבל את פרדוקס ראסל), ולכן נאמר שחיתוך של אוסף ריק של קבוצות אינו מוגדר.

טענה 2.13 חוקי הפילוג, מקשרים בין איחוד וחיתוך:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

משלימים

הגדרה 2.14 לקבוצות A, B נגדיר את ההפרש:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

זוהי קבוצה מאקסיומת הצמצום.

אם נתונה קבוצה E ואנו עוסקים רק בתתי קבוצות שלה, אז נגדיר משלים בצורה הבאה:

$$A^{\complement} = E \setminus A$$

לכאורה היינו רוצים לשים את קבוצת כל הקבוצות על תקן E, אבל ראינו שזו אינה קבוצה ולכן זה בעייתי. מכאן שמשלים הוא דבר יחסי וצריך בכל מצב שרוצים לדבר על משלים - להגדיר ביחס למה נעשית פעולת ההשלמה.

טענה 2.15 תכונות של משלימים

1. $\emptyset^{\complement} = E,\ E^{\complement} = \emptyset$
2. $\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$
3. $A \cup A^{\complement} = E,\ A \cap A^{\complement} = \emptyset$
4. $A^{\complement} \supseteq B^{\complement} \Leftrightarrow A \subseteq B$
5. חוקי דה מורגן:

   (א) $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$

   (ב) $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$

   הוכחה של הכלל הראשון:

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)^{\complement} \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^{\complement} \wedge x \in B^{\complement} \Leftrightarrow x \in A^{\complement} \cap B^{\complement}$$

6. $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$

הגדרה 2.16 הפרש סימטרי

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

תרגיל: ההפרש הסימטרי הוא קומוטטיבי, אסוציאטיבי ומקיים $A + A = \emptyset$

6: אקסיומת החזקה

אם X קבוצה אז יש קבוצה Y שכל קבוצה חלקית של X נמצאת בה.

$$Z \subseteq X \Rightarrow Z \in Y$$

מסקנה: קיימת קבוצה:

$$P(X) = \{Z \in Y : Z \subseteq X\}$$

זו לא בדיוק מסקנה, כי אם ניסוח אחר.

דוגמא

נניח $a \neq b$ ונגדיר $X = \{a,b\}$ אז

$$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

וזה מקרה פרטי של הטענה הבאה:

טענה 2.17 $|X| = n$ (עבור n סופי) $\Leftarrow |P(X)| = 2^n$

הוכחה: באינדוקציה על n בתרגיל הבית. ■

תכונות של קבוצת החזקה:

- $P(X \cap Y) = P(X) \cap P(Y)$ כי $Z \subseteq X \cap Y$ אם"ם $Z \subset X$ וגם $Z \subseteq Y$. ביתר כלליות $P\left(\bigcap X_{X \in C}\right) = \bigcap_{X \in C} P(X)$
- $P(X) \cup P(Y) \subseteq P(X \cup Y)$ וכן $\bigcup_{X \in C} P(X) \subseteq P\left(\bigcup_{X \in C} X\right)$
- אם $X \subseteq Y$ אז $P(X) \subseteq P(Y)$

זוגות סדורים ומכפלה קרטזית

זוגות סדורים

נרצה להגדיר (x,y) עם התכונה $(x,y) = (x',y')$ אם"ם $x = x' \wedge y = y'$ בניגוד ל $\{x,y\} = \{y,x\}$.
נרצה שהזוג הסדור (x,y) יוגדר כקבוצה.

הגדרה 2.18

$$(x,y) := \{\{x\}, \{x,y\}\}$$

למה 2.19 (x,y) היא יחידון אם"ם $x = y$

הוכחה: $x = y$ אז $(x,y) = (x,x)$ וזה בעצם

$$\{\{x\}, \{x,x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$$

וזוהי קבוצה בת איבר אחד - יחידון.
בכיוון השני, נניח ש (x,y) הוא יחידון אז:

$$\begin{aligned} (x,y) &= \{\{x\}, \{x,y\}\} \Rightarrow \{x\} = \{x,y\} \Rightarrow \mathrm{y} \in \{x\} \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

■

טענה 2.20

$$(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow x' = x \wedge y' = y$$

הוכחה: כיוון אחד "$\Leftarrow$" מיידי.
בכיוון השני - נניח שיש זוג סדור שהוא שווה לזוג סדור אחר.

$$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x'\},\{x',y'\}\}$$

נתמודד קודם עם המקרה ש $x=y$, ואז מתקבל מהטענה הקודמת שזהו שוויון בין יחידונים, כלומר $(x,y)=\{\{x\}\}=(x',y')$ ובהכרח נובע גם $x'=y'$ ולכן $x=y$.
כעת נניח $x\neq y$ ומשיקולי גודל של קבוצה גם $x'\neq y'$, ואז קיבלנו שויון בין שתי קבוצות שלשתיהן שני איברים מהנחת השונות $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{x'\},\{x',y'\}\}$, האחד בן איבר אחד בעצמו והשני בן שני איברים. מהגדרתנו לשוויון בין קבוצות נובע בהכרח כי

$$\{x\}=\{x'\}$$

ולכן

$$x=x'$$

וכן:

$$\{x,y\}=\{x',y'\}$$

וכיוון שידוע ש $x=x'$ נובע שבהכרח $y=y'$. ■

מסקנה 2.21 $(x,y)\neq(y,x)$ אלא אם $x=y$
נשים לב שתוך שימוש בקבוצות, שבהן הסדר אינו חשוב, הצלחנו ליצור מבנה שבו יש חשיבות לסדר.

מכפלה קרטזית

בהנתן קבוצות X,Y נרצה לבנות כקבוצה את $\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$ מבלי להזקק לעוד אקסיומות...

$$\begin{aligned}\{x\} &\subseteq X\subseteq X\cup Y\\ \{x,y\} &\subseteq X\cup Y\end{aligned}$$

ולכן $\{x\},\{x,y\}\in P(X\cup Y)$ ולפיכך $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}\subseteq P(X\cup Y)$
וכל כן:

$$(x,y)\in P(P(X\cup Y))$$

כאשר האיבר הימני הוא קבוצה לפי אקסיומות קודמות (חזקה ואיחוד), ולכן נוכל להשתמש באקסיומת הצמצום ולקבל קבוצה לגיטימית שהיא בדיוק קבוצת הזוגות הסדורים.

הגדרה 2.22 (טענה)

$$X\times Y:=\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$$

היא קבוצה שתקרא המכפלה הקרטזית של X ו Y. נוכיח שזו קבוצה:

$$X\times Y=\{z\in P(P(X\cup Y))\,|\exists x\in X,y\in Y,z=(x,y)\}$$

וכיוון שזה לפי אקסיומת הצמצום והקבוצה עצמה שהגדרנו היא חוקית - אכן מתקבלת קבוצה.

נניח ש R היא קבוצה כלשהי שמורכבת מזוגות סדורים כלשהם, נראה איך ניתן לראות את R כקבוצה חלקית של מכפלה קרטזית $X \times Y$, כאשר X ו Y הן קבוצות.

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}\in R\Rightarrow x,y\in\bigcup\bigcup R$$

תזכורת:

$$\bigcup R=\{z:\exists w\in R,z\in w\}$$

ולכן

$$\{x\},\{x,y\}\in\bigcup R$$

ומתקיים:

$$x,y\in\bigcup\bigcup R$$

וכעת נוכל לבחור

$$X=Y=\bigcup\bigcup R$$

אבל זה קצת בזבזני, ואפשר בעצם "להקטין" את X ו Yאם בוחרים:

$$X=\left\{x\in\bigcup\bigcup R:\exists y\in\bigcup\bigcup R\wedge(x,y)\in R\right\}$$

וכן:

$$Y=\left\{y\in\bigcup\bigcup R:\exists x\in\bigcup\bigcup R\wedge(x,y)\in R\right\}$$

ונקבל:

$$R\subseteq X\times Y$$

תכונות של המכפלה הקרטזית:

- $(X_1\times Y)\bigcup(X_2\times Y)=(X_1\bigcup X_2)\times Y$
- $(X_1\times Y)\bigcap(X_2\times Y)=(X_1\bigcap X_2)\times Y$
- $(X_1\times Y)\setminus(X_2\times Y)=(X_1\setminus X_2)\times Y$ (כנ"ל ברכיב השני)
- $\emptyset\times Y=\emptyset$
- $X\times\emptyset=\emptyset$
- $X\times Y=\emptyset\Rightarrow X=\emptyset\vee Y=\emptyset$

יחסים - $Relations$

דוגמא: $x \le y$ כאשר x,y טבעיים
$x = y$ כאשר x,y טבעיים
x נשוי ל y כאשר x,y בני אדם
x צאצא של y (הורות)
נסמן שאם R יחס אז xRy משמעו ש x,y מקיימים את היחס.
אנחנו רוצים לבטא את R ע"י קבוצה, ולכן:

הגדרה 2.23 יחס הוא קבוצה של זוגות סדורים.

בהגדרה מחליפים תכונה שמגדירה יחס (כמו בדוגמאות) באוסף הזוגות כך שהתכונה מתקיימת בהם.
לפי טענה קודמת כל יחס R הוא תת קבוצה של $X \times Y$ עבור X,Y קבוצות כלשהן.

- תחום היחס: $dom\mathtt{R} = \{x|\,(x,y) \in \mathtt{R}\}$
- טווח היחס: $ran\mathtt{R} = \{y : (x,y) \in \mathtt{R}\}$
- $\mathtt{R} \subseteq dom\mathtt{R} \times ran\mathtt{R}$

הגדרה 2.24 יחס R יקרא רפלקסיבי אם $(x,x) \in \mathtt{R}$ לכל $x \in dom\mathtt{R}$. יחס R יקרא סימטרי אם $(x,y) \in \mathtt{R} \Rightarrow (y,x) \in$ R. יחס Rיקרא טרנזיטיבי אם מתקיים

$$(x,y) \in \mathtt{R} \wedge (y,z) \in \mathtt{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathtt{R}$$

יחס יקרא אנטי־סימטרי אם

$$(x,y) \in \mathtt{R} \wedge (y,x) \in \mathtt{R} \Rightarrow x = y$$

הגדרה 2.25 $\mathtt{R} \subseteq X \times X$ יקרא יחס שקילות על X אם הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי וסימטרי ו $dom\mathtt{R} = X$.
יחס R יקרא יחס סדר אם הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי־סימטרי.

דוגמאות:

1. יחסי שקילות: שוויון (הכי קטן), $X \times X$ (הכי גדול), $x \equiv y\, mod\, 7$ על הטבעיים.
2. יחסי סדר: $\le$ על $\mathbb{R}$ (סדר קווי), היחס $\subseteq$בין קבוצות ב $P(X)$ כלשהי (זהו סדר חלקי כי יתכן $Y \nsubseteq Z$ וגם $Z \nsubseteq Y$).

הגדרה 2.26 (טענה) יהי R יחס שקילות על קבוצה X. לכל $x \in X$ נסמן $[x] = \{y \in X : (x,y) \in \mathtt{R}\}$ כמחלקת השקילות של x.
X מהווה איחוד זר של מחלקות שקילות, ולהיפך - אם נתונה חלוקה של X לקבוצות זרות זל"ז X_i , ניתן להגדיר יחס שקילות R כך ש $(x,y) \in \mathtt{R}$ אם ורק אם יש i כך ש $x,y \in X_i$. ומחלקות השקילות של היחס הן בדיוק X_i.

למה 2.27 מחלקות שקילות הן שוות או זרות. כלומר לכל $x,z \in dom\mathtt{R}$ או $[x] = [z]$ או $[x] \cap [z] = \emptyset$.

הוכחה: נניח $[x] \cap [z] \neq \emptyset$ ונוכיח $[x] = [z]$. עפ"י ההנחה קיים $y \in [x] \cap [z]$, אז

$$x\mathtt{R}y \wedge z\mathtt{R}y$$

מסימטריה מתקיים:

$$y\mathtt{R}z$$

ומטרנזיטיביות נובע

$$x\mathtt{R}z$$

מספיק להראות הכלה $[x]\subseteq[z]$, והצד השני יוכח באופן סימטרי. יהי $w\in[x]$, אזי $w\mathtt{R}x$ ומטרנזיטיביות $w\mathtt{R}z$ ולכן $w\in[z]$ ולכן מתקיימת ההכלה, ומכאן ההכלה בשני הכיוונים ולפיכך שוויון $[x]=[z]$. ■

משפט 2.28 יהי $\mathtt{R}$ יחס שקילות. אז התחום $dom\mathtt{R}$ ניתן להצגה כאיחוד זר של מחלקות שקילות.

הוכחה: נתבונן ב $\bigcup_{x\in dom\mathtt{R}}\{x\}$. זה שווה ל $dom\mathtt{R}$ כי $x\in[x]$. אם נשמיט חזרות נקבל מחלקות שקילות שונות זו מזו, ולכן זרות לפי הלמה, ואיחודן עדיין $dom\mathtt{R}$. ■

להיפך - אם יש חלוקה של קבוצה X לאוסף תתי קבוצות X_i זל"ז כך ש $X=\bigcup X_i$ אז ניתן להגדיר יחס $\mathtt{R}$ כך ש $x\mathtt{R}y$ אם"ם $x,y\in X_i$ עבור i כלשהו, וזה יהיה יחס שקילות שמחלקות השקילות שלו הן בדיוק X_i.

יחס הופכי, אם $\mathtt{R}$ יחס אז נגדיר

$$\mathtt{R}^{-1}=\{(x,y)\,|\,(y,x)\in\mathtt{R}\}$$

ואז $\mathtt{R}^{-1}$ הוא יחס, כאשר

$$\begin{aligned}dom\mathtt{R}^{-1}&=ran\mathtt{R}\\ ran\mathtt{R}^{-1}&=dom\mathtt{R}\end{aligned}$$

הגדרה 2.29 אם $\mathtt{R},\mathtt{S}$ יחסים, אז נגדיר הרכבת יחסים

$$\mathtt{R}\circ\mathtt{S}=\{(x,y)\,|\exists z,(x,z)\in\mathtt{S}\wedge(z,y)\in\mathtt{R}\}$$

יחסים רב מקומיים

איך נגדיר n־יות סדורות?

$$(x,y,z)=((x,y),z)$$

לפתוח כאן את הסוגריים זה קצת מייגע, אבל באותו אופן אפשר להגדיר אינדוקציה n־יות סדורות. קל לראות ש

$$(x,y,z)=(x',y',z')\Leftrightarrow x=x'\wedge y=y'\wedge z=z'$$

מכפלה קרטזית של n קבוצות תוגדר כך:

$$X_1\times...\times X_n=\{(x_1,...,x_n):x_i\in X_i\}$$

וההגדרה האינדוקטיבית (שמתלכדת איתה) היא:

$$X_1\times...\times X_n=(X_1\times...\times X_{n-1})\times X_n$$

הגדרה 2.30 יחס n־מקומי הוא קבוצה של n־יות סדורות.

דוגמאות:

- $n=3$ - יחס $\mathtt{R}$ על נקודות במישור כך ש $(x,y,z)\in\mathtt{R}$ אם"ם x,y,z נמצאות על ישר אחד.
- G חבורה, יחס $\mathtt{R}\subseteq G\times G\times G$ כך ש $(x,y,z)\in\mathtt{R}$ אם $x\cdot y=z$ (ע"י פעולת החבורה).

פונקציות

הגדרה 2.31 פונקציה היא יחס $\mathtt{F}$ עם התכונה שלכל $x \in dom\mathtt{F}$ יש y יחיד כך ש $(x,y) \in \mathtt{F}$. עבור y הנ"ל מסמנים $y = \mathtt{F}(x)$.

פונקציה תקרא חד חד ערכית עם לכל $y \in ran\mathtt{F}$ יש x יחיד כך ש $(x,y) \in \mathtt{F}$ (כלומר $y = \mathtt{F}(x)$).

פונקציה תקרא על (או על B) אם $ran\mathtt{F} = B$, כלומר לכל $y \in B$ יש $x \in A$ כלשהו כך ש $y = F(x)$.

לפעמים נסמן $\mathtt{F} : A \to B$ כשהכוונה היא $\mathtt{F} \subseteq A \times B$ פונקציה, כאשר $dom\mathtt{F} = A$.

הגדרה 2.32 צמצום של פונקציה - נניח $\mathtt{F} : A \to B$ פונקציה ו $A' \subseteq A$, נגדיר $\mathtt{F}_{|A'}$ ע"י

$$\mathtt{F}_{|A'} = \{(x,y) \in \mathtt{F} | x \in A'\}$$

קל לוודא שזו אכן פונקציה. נסמן ב $\mathtt{F}[A']$ את טווח $\mathtt{F}_{|A'}$. וכן $\{\mathtt{F}(x) | x \in A'\} = ran\mathtt{F}_{|A'}$היא תמונת A' תחת $\mathtt{F}$.

הערה 2.33 לעיתים נסמן פונקציה ב f קטנה.

תכונות

•
$$A'' \subseteq A' \Rightarrow f(A'') \subseteq f(A')$$

•
$$f(A' \cup A'') = f(A') \cup f(A'')$$

•
$$f(A' \cap A'') \subseteq f(A') \cap f(A'')$$

(לא בהכרח שוויון)

הגדרה 2.34 תמונה הפוכה - תהי $f : A \to B$ פונקציה, אז ל $B' \subseteq B$ נסמן

$$f^{-1}(B') = \{x \in A | f(x) \in B'\}$$

תכונות

•
$$B'' \subseteq B' \Rightarrow f^{-1}(B'') \subseteq f^{-1}(B')$$

•
$$f^{-1}(B' \cup B'') = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B'')$$

•

$$f'\left(B'\cap B''\right)=f^{-1}\left(B'\right)\cap f^{-1}\left(B''\right)$$

הוכחה: לתכונה האחרונה:

$$x\in f^{-1}\left(B'\cap B''\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)\in B'\cap B''$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right)\in B'\wedge f\left(x\right)\in B''\Leftrightarrow x\in f^{-1}\left(B'\right)\wedge x\in f^{-1}\left(B''\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in f^{-1}\left(B'\right)\cap f^{-1}\left(B''\right)$$

■

הערה 2.35 הגדרנו R^{-1} עבור יחס R. אם f פונקציה אז f^{-1} מוגדרת בהתאם:

$$\left\{(x,y):(y,x)\in f\right\}=\left\{(x,y)\,|x=f\left(y\right)\right\}$$

זהו יחס <u>לא בהכרח פונקציה</u>. למשל אם

$$x_1\neq x_2,\ f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=y\Rightarrow\left(y,x_1\right),\left(y,x_2\right)\in f^{-1}$$

ולכן f איננה פונקציה.
אבל אם f חח"ע (חד חד ערכית) אז f^{-1} היא פונקציה שהתחום שלה הוא $ran\left(f\right)$.

כי

$$f:A\rightarrow B$$

חח"ע אז

$$f^{-1}:ran\left(f\right)\rightarrow A$$

אם f גם <u>על B</u> אז

$$f^{-1}:B\rightarrow A$$

טענה 2.36 תהי $f:A\rightarrow B$ פונקציה.
1. קיימת פונקציה $g:B\rightarrow A$ כך ש $g\circ f=1_A$ אם"ם f חח"ע.
הסבר: $g\circ f$ הוגדר ליחסים ולכן לפונקציות מוגדר באופן דומה $\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)$ וזו פונקציה (לא קשה).
1_A פונקציית הזהות על A, כלומר לכל $a\in A$ מתקבל $1_A\left(a\right)=a$.
2. קיימת פונקציה $h:B\rightarrow A$ כך ש $f\circ h=1_B$ אם"ם f היא על.

הוכחה: 1. נניח קיום g כנ"ל ונראה ש f חח"ע.

$$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Rightarrow g\left(f\left(x_1\right)\right)=g\left(f\left(x_2\right)\right)\Rightarrow g\circ f\left(x_1\right)=g\circ f\left(x_2\right)$$

$$\Rightarrow 1_A\left(x_1\right)=1_A\left(x_2\right)\Rightarrow x_1=x_2$$

להיפך: נניח f חח"ע, אז קיימת פונקציה $f^{-1}:ran\left(f\right)\to A$ וקל לראות ש $f\circ f^{-1}=1_{A}$. אם $B=ran\left(f\right)$ ניקח $g=f^{-1}$, אחרת - נבחר $a\in A$ כלשהו ונגדיר:

$$g\left(y\right)=\begin{cases} f^{-1}\left(y\right) & y\in ran\left(f\right)\\ a & otherwise\end{cases}$$

ואז נקבל

$$g\circ f=1_{A}$$

2. נניח קיום h כנ"ל ונראה ש f היא על. יהי $y\in B$ אז:

$$f\left(h\left(y\right)\right)=f\circ h\left(y\right)=1_{B}\left(y\right)=y\Rightarrow y\in ran\left(f\right)\Rightarrow ran\left(f\right)=B$$

ולכן f היא על.

להיפך: נניח f היא על B. נרצה לכל $y\in B$ לבחור $x\in f^{-1}\left(\{y\}\right)$ (כלומר $f\left(x\right)=y$) ואז להגדיר $h\left(y\right)=x$. ואם כך עשינו - קל לוודא שנקבל

$$f\circ h\left(y\right)=y$$

ולכן

$$f\circ h=1_{B}$$

מסתבר שלשם כך צריך את אקסיומת הבחירה שתנוסח בהמשך. בהנתן האקסיומה ניקח $\mathrm{R}=f^{-1}$ יחס. מאקסיומת הבחירה מובטח קיום פונקציה h כך ש

$$dom\left(h\right)=dom\mathrm{R}=ran\left(f\right)=B$$

ולכן $h:B\to A$ ומתקיים $f\left(h\left(y\right)\right)=y$ כי f^{-1} מקיימת זאת. ■

הגדרה 2.37 אקסיומת הבחירה (ניסוח I): יהי R יחס. אז יש פונקציה h כך ש $dom\left(h\right)=dom\mathrm{R}$.

שיעור עם המתרגלת

"חזרה"

תהי $F:A\to B$ פונקציה ו $A\neq\emptyset$

א. F חח"ע $\Leftrightarrow$ קיים ל F הפכי משמאל, כלומר פונקציה $G:B\to A$ כך ש $G\circ F=I_{A}$.

ב. F היא על $\Leftrightarrow$ קיים ל F הפכי מימין, כלומר פונקציה $H:B\to A$ כך ש $F\circ H=I_{B}$

תרגיל: במקרה ש F חח"ע ועל, אז קיימים הפכי משמאל G והפכי מימין H ומתקיים $H=G$.

נניח $F:A\to B$ על, נתבונן ביחס $F^{-1}\subseteq B\times A$, כלומר

$$b=F\left(a\right)\Leftrightarrow\left(b,a\right)\in F^{-1}$$

נחפש פונקציה $H\subseteq F^{-1}$, כלומר לכל b נרצה לבחור a יחיד מהקבוצה $F^{-1}\left(b\right)=\{a\in A|\,F\left(a\right)=b\}$

ואז אקסיומת הבחירה תנוסח כך: לכל יחס S קיימת פונקציה H כך ש $DomH=DomS$.

מכפלה קרטזית אינסופית

תהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של קבוצות, I קבוצת אינדקסים כלשהי (סופית או אינסופית).

הגדרה 2.38

$$\times_{\alpha\in I}A_\alpha := \prod_{\alpha\in I}A_\alpha = \left\{f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha \middle| \forall\alpha\in I, f(\alpha)\in A_\alpha\right\}$$

נשים לב שאם עבור $\beta\in I$ כלשהו מתקיים $A_\beta=\emptyset$ אז $\times_{\alpha\in I}A_\alpha=\emptyset$.

הגדרה 2.39 אקסיומת הבחירה (ניסוח II) : אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של קבוצות לא ריקות אז $\times_{\alpha\in I}A_\alpha\neq\emptyset$.

7: אקסיומת הבחירה

הגדרה 2.40 אקסיומת הבחירה (ניסוח קלאסי) תהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של קבוצות לא ריקות, אז קיימת פונקציית בחירה.

פונקציית בחירה היא פונקציה

$$f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha,\ \forall\alpha\in I, f(\alpha)\in A_\alpha$$

נניח שלכל אוסף קבוצות לא ריקות יש פונקציית בחירה, יהי S יחס. נגדיר לכל $a\in DomS$:

$$S(a)=\{b|\,(a,b)\in S\}$$

ו $S(a)\neq\emptyset$ לכל a.
$\{S(a)\}_{a\in DomS}$$\Leftarrow$קיימת פונקציה $H:DomS\to\bigcup S(a)$ כך ש $H(a)\in S(a)$, כלומר $(a,H(a))\in S$, כלומר H פונקציה $H\subseteq S$.
בכיוון ההפוך: נניח שלכל יחס יש פונקציה.
תהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של קבוצות לא ריקות. נגדיר $S\subseteq I\times\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$:

$$a\in A_\alpha\Leftrightarrow(\alpha,a)\in S$$

$$A_\alpha\neq\emptyset\Rightarrow DomS=I$$

קיימת פונקציה $H\subseteq S$, כך ש $H:I\to\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$

$$H\subseteq S\Rightarrow\forall\alpha,\ (\alpha,H(\alpha))\in S\Rightarrow H(\alpha)\in A_\alpha$$

מספרים טבעיים

כבר הגדרנו את המספרים כך שיתאימו לקבוצות ע"י:

$$0=\emptyset$$

$$1=\{\emptyset\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{1\}\}$$

וכן הלאה, ולמעשה כל מספר טבעי הוא קבוצת המספרים הטבעיים שקטנים ממנו, כך למשל:

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, 1\}$$

וכו', ולכן מתקיים:

$$0 \in 1 \in 2 \in 3$$

$$0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3$$

הגדרה 2.41 כל קבוצה a, העוקב של a הוא הקבוצה $a^+ = a \cup \{a\}$

.

הגדרה 2.42 קבוצה A תיקרא אינדוקטיבית אם $\emptyset \in A$ ולכל $a \in A$ גם $a^+ \in A$.

8: אקסיומת האינסוף

קיימת קבוצה אינדוקטיבית.

הגדרה 2.43 מספר טבעי ־ קבוצה שנמצאת כאיבר בכל קבוצה אינדוקטיבית.

.

טענה 2.44 קיימת קבוצה שאיבריה הם בדיוק המספרים הטבעיים

הוכחה: תהי A קבוצה אינדוקטיבית, אז קיימת קבוצה $W = \{x \in A | x\, is\, in\, every\, inductive\, set\}$
כלומר $x \in W$ אם"ם x מספר טבעי. ■

נהוג לסמן את קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$ ע"י ω.

טענה 2.45 ω היא קבוצה אינדוקטיבית, והיא מוכלת בכל קבוצה אינדוקטיבית אחרת.

הוכחה: לכל A אינדוקטיבית, לכל $a \in \omega$, מתקיים $a \in A$ ולכן $\omega \subseteq A$.
לכל $a \in \omega$ ⇐לכל קבוצה אינדוקטיבית A , $a \in A$ ולכן $a^+ \in A$ ולכן $a^+ \in \omega$.
$\emptyset \in \omega$ כי $\emptyset \in A$ לכל A אינדוקטיבית, ולכן ω אינדוקטיבית. ■

$$1 = \{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \emptyset^+ = 0^+$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\} = 1^+$$

עיקרון האינדוקציה עבור ω

כל תת־קבוצה אינדוקטיבית של ω היא ω עצמה. (זה ברור, כי ω מוכלת בכל קבוצה אינדוקטיבית). מצד שני ־ זה עיקרון האינדוקציה, כיוון שבמהלך הוכחה באינדוקציה אנחנו מוכיחים שטענה כלשהי מתקיימת בקבוצה אינדוקטיבית שמוכלת בטבעיים, ולכן בפרט היא קבוצת הטבעיים עצמה.

הוכחה באינדוקציה של טענות

נניח שיש אוסף טענות $T(n)$ (לכל n טבעי)
כדי להוכיח ש $T(n)$ נכונה לכל n מספיק להראות שהקבוצה

$$T = \{n \in \omega | T(n)\}$$

היא אינדוקטיבית.
כלומר צריך להוכיח ש $0 \in T$ (כלומר $\emptyset \in T$)
ואם $n \in T$ (כלומר $T(n)$ נכונה), אז גם $n+1 \in T$
(כלומר $T(n+1)$ נכונה, במילים אחרות $a \in T \Rightarrow a^+ \in T$)

משפט 2.46 כל מספר טבעי פרט ל 0 הוא עוקב של מספר טבעי.

הוכחה: $T = \{n \in \omega | n = 0 \vee \exists p \in \omega : n = p^+\}$
נשים לב ש T היא קבוצת המספרים שהם עוקבים של מספרים טבעיים ו־0. T אינדוקטיבית כי $0 \in T$ ולכל $n \in T$ גם $n^+ \in T$ ולכן $T = \omega$. ■

טענה 2.47 כל מספר טבעי הוא מהצורה $\left(\left(\emptyset^+\right)^+\right)^+....^+$ תחת הזיהוי $0 = \emptyset$.

חזרה לשגרה עם ענר (וחזרה על החומר מהשיעור הקודם)

אקסיומת הבחירה

ניסוח 1: לכל יחס R יש פונקציה $F \subseteq R$ שתחומה הוא בדיוק תחום היחס.
באופן פורמלי אם $R \subseteq X \times Y$ ו $DomR = X$ אז יש $f : X \to Y$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים $(x, f(x)) \in R$.
נזקקנו לכך בהוכחה שפונקציה $F : A \to B$ היא על אם"ם יש לה הפכית מימין $H : B \to A$ כך ש $F \circ H = 1_B$.
הרעיון היה שתמיד אפשר לבחור את היחס ההפכי לפונקציה, וכדי לצמצם אותו לפונקציה יש צורך להשתמש באקסיומת הבחירה.

ניסוח 2 : אם $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ קבוצה של קבוצות לא ריקות אז קיימת פונקציה $f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ כך ש־$f(\beta) \in A_\beta$ לכל $\beta \in I$.
לדוגמה ־ אם נסתכל על קבוצת כל זוגות הנעליים, לא קשה למצוא פונקציה אם בוחרים תמיד את הנעל הימנית, כי יש כלל שמאפשר לבחור. מצד שני אם יש זוגות גרביים, לא כל כך ברור על פי איזה כלל לעשות את הבחירה.

ניסוח 3: יהיו A_α $(\alpha \in I)$ קבוצות לא ריקות, אז המכפלה הקרטזית

$$\prod_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

(בעצם זה נותן את אוסף הפונקציות $f : I \to \bigcup A_\alpha$)

ניסוח 4: אם X קבוצה, אז קיימת פונקציה $f : P(X) \to X$ כך ש $f(Y) \in Y$ לכל $\emptyset \neq Y \subseteq X$

הערה 2.48 אקסיומת הבחירה נראית "טבעית" או "סבירה", אך היא לא נובעת מהאקסיומות האחרות וגם שלילתה לא נובעת (זה ניתן להוכחה אך לא נגיע לזה בקורס) ולכן מוסיפים אותה כאקסיומה. הנושא של אי־תלות הוא מתקדם ולכן לא נעסוק בו בקורס, אולם ניתן דוגמה פשוטה יחסית על אקסיומת האינסוף (שקובעת שקיימת קבוצה אינדוקטיבית).

טענה 2.49 אקסיומת האינסוף לא נובעת מקודמותיה

הוכחה: אוסף כל הקבוצות הסופיות מקיים את האקסיומות שלמדנו לפני אקסיומת האינסוף. עולם זה אינו מקיים את אקסיומת האינסוף (אך את כל שאר האקסיומות) ולכן בהכרח אקסיומת האינסוף אינה נובעת. ■

הגדרנו את ω כקב' אינדוקטיבית מינימלית או $\mathbb{N}$, עקרון האינדוקציה ב ω : תת קבוצה של ω שמכילה את 0 וסגורה לפעולת העוקב היא כל ω.

יש הגדרה "מלמטה" של הטבעיים - מספר טבעי הוא איבר שאפשר להגיע אליו מ 0 ע"י הפעלה של פעולת העוקב מספר סופי של פעמים.

הגדרה "מלמעלה" - איבר ששייך לכל קבוצה אינדוקטיבית. זו הגדרה חוקית, כיוון שלפי אקסיומת האינסוף קיימת קבוצה אינדוקטיבית כלשהי I ולכן ניתן להשתמש באקסיומת הצמצום ולהגדיר $\omega = \{x \in I : x\, is\, in\, every\, inductive\, set\}$

ניסוח 1 לאקסיומת האינדוקציה:

$$M \subseteq \mathbb{N},\, M\, is\, inductive \Rightarrow M = \mathbb{N}$$

ניסוח 2: אם P תכונה של מספרים טבעיים, 0 מקיים את P, ואם n מקיים את P אז n^+ מקיים את P ⇐ כל מספר טבעי מקיים את P.

ניסוח 2 נובע מניסוח 1:

$$M = \{n \in \mathbb{N} |\, P(n)\}$$

M אינדוקטיבית אז $M = \mathbb{N}$ ולכן לכל טבעי n מתקיים $P(n)$.

דוגמה: $P(n)$: $n=0$ או $n = m^+$ לאיזה m.

$P(0)$ מיידי, וכמובן $P(n) \Rightarrow P(n^+)$ ולכן מתקיים הנדרש (כלומר כל מספר טבעי הוא 0 או עוקב של טבעי).

הגדרה באינדוקציה (ברקורסיה)

דוגמה: רוצים להגדיר פונקציה $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ נגדיר:

$$F(0) = 7$$

$$F(n+1) = (F(n)+3)^2$$

משפט 2.50 הרקורסיה:

תהי Xקבוצה.

יהי $a \in X$ ותהי $f : X \to X$ פונקציה.

אזי קיימת פונקציה יחידה $F : \mathbb{N} \to X$ כך ש:

1.

$$F(0) = a$$

2.

$$F\left(n^+\right) = f(F(n))$$

לכל $n \in \mathbb{N}$.

"הוכחה" לא פורמלית: ידוע שצריך להגדיר $F(0)=a$ אז $F(1)=f(a)$ ו $F(2)=f(f(a))$ ובאופן כללי $F(n)=\underbrace{f\circ f\circ...\circ f}_{n}(a)$. **הוכחה:** תת קבוצה $S\subseteq\mathbb{N}\times X$ תקרא טובה אם $(0,a)\in S$ וגם מתקיים

$$(n,x)\in S\Rightarrow\left(n^{+},f(x)\right)\in S$$

יהי C אוסף כל הקבוצות הטובות הנ"ל (זו קבוצה שכן כל קבוצה טובה היא איבר בקבוצה $P(\mathbb{N}\times X)$) אז:

1. $C\neq\emptyset$, כלומר יש קבוצה טובה, שכן $\mathbb{N}\times X$ עצמה היא טובה.
2. חיתוך קבוצות טובות הוא טוב. (מיידי מההגדרה)
3. תהי F חיתוך כל הקבוצות הטובות (F עצמה קבוצה כחיתוך קבוצת קבוצות) ע"י:

$$F=\{z\in\mathbb{N}\times X: z\,is\,in\,every\,good\,set\}$$

אז $F\subseteq\mathbb{N}\times X$ קבוצה טובה (לפי 2) והיא מינימלית ביחס להכלה. אם $G\subsetneq F$ אז G אינה טוב.

4. נראה ש F היא פונקציה. נגדיר

$$M=\{n\in\mathbb{N}|\,\exists x\in X\,(single)\,s.t.\,(n,x)\in F\}$$

נרצה להראות ש $M=\mathbb{N}$ ומכאן F פונקציה, נראה זאת באינדוקציה.

כלומר נראה ש M קבוצה אינדוקטיבית ומכאן ינבע המבוקש, ולכן F תהיה פונקציה כנדרש.

$0\in M$ שכן $(0,a)\in F$ כי F עצמה טובה, די להראות שאין גם $b\neq a$ כך ש $(0,b)\in F$, נניח בשלילה שיש כזה, ואז ניצור $G=F\setminus\{(0,b)\}$ ואז קיבלנו $G\subsetneq F$ אבל G עצמה טובה. מדוע? האיבר $(0,b)$אינו עוקב של שום איבר אחר, ולכן הסרתו לא פוגעת בתכונה השניה, ומכיוון שכמובן $(0,a)\in F$ ולא הסרנו אותו, קיבלנו את הדרוש ואכן G טובה, אבל זו סתירה למינימליות F ולכן $0\in M$ כנדרש.

נותר להראות $n\in M$ אז $n^{+}\in M$, כאן הטיעון דומה. נניח $n\in M$, יהי x היחיד עם $(n,x)\in F$ אז מכיוון ש F טובה מתקיים $(n^{+},f(x))\in F$, נניח בשלילה שיש $b\neq f(x)$ כך ש $(n^{+},b)\in F$, נוכל להגדיר כמקודם $G=F\setminus\{(n^{+},b)\}$, זה מוכל ממש ב F, וכמובן $(0,a)\in F$ וכן הלאה... (קל להשלים את הפרטים)... כמקודם מראים ש G טובה וזו סתירה למינימליות F ולכן M אינדוקטיבית ו $M=\mathbb{N}$.

עד כאן הראינו קיום, ונותר להראות יחידות של הפונקציה.

תהי G פונקציה כמו במשפט, נראה באינדוקציה ש $G(n)=F(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

בסיס: $G(0)=a=F(0)$ כמובן.

נניח $F(n)=G(n)$ ואז

$$G\left(n^{+}\right)=f(G(n))=f(F(n))=F\left(n^{+}\right)$$

וכיוון שהפונקציות מתלכדות קיבלנו יחידות ו $G=F$. ■

3 תכונות של מספרים טבעיים

טענה 3.1 יהי n טבעי. אז

$$x\in n\Rightarrow n\nsubseteq x$$

הוכחה לא פורמלית (אסורה):

$$n=\{0,1,...,n-1\}$$

ולכן אם $x\in n$ אז נובע $x<n$ ולא יתכן ש $n\subseteq x$ כי אז היה מתקיים $n=|n|\leq|x|=m<n$ בסתירה.

הבעיה כאן היא ה"..." שבהגדרה של n, אנחנו ננסה לשחזר את ההוכחה, אבל באופן פורמלי. **הוכחה:** באינדוקציה על n.

$n=0$: נרצה להראות $x\in 0\Rightarrow 0\subseteq x$, אבל $0=\emptyset$ ואין x כזה ולכן ערך הגרירה הוא אמת.

נניח נכונות ל n ונוכיח נכונות ל n^+:

$$x \in n^+ = n \cup \{n\} \Rightarrow x \in n \vee x = n$$

במקרה ש $x \in n$ אז מהנחת האינדוקציה מתקבל $x \nsubseteq n$ ולכן $x \nsubseteq n^+$ כי $n \subseteq n^+$.
במקרה ש $x = n$, אז אם $x \subseteq n^+$ נובע כמובן $n \subseteq n^+$ וכיוון ש $n^+ \subseteq n$ נובע $n = n^+$ ועל פי הגדרה מתקיים $n \in n^+$ ולכן $n \in n$ ולפי הנחת האינדוקציה נקבל $n \nsubseteq n$ בסתירה. לפיכך $x \nsubseteq n^+$ כדרוש. ■

טענה 3.2 $n \notin n$ לכל nטבעי

הוכחה: נובע מיד מטענה 1, $n \in n$ גורר $n \nsubseteq n$ בסתירה. ■

טענה 3.3 (טרנזיטיביות) יהי n טבעי, אז $x \in n \Leftarrow x \subseteq n$, במילים אחרות,

$$y \in x \wedge x \in n \Rightarrow y \in n$$

כלומר איבר של איבר הוא איבר.

הוכחה: באינדוקציה על n.
$n = 0$: אין $x \in 0$ ולכן כל מסקנה מכך היא נכונה.
נניח נכונות ל n ונוכיח ל n^+:
נניח $x \in n^+$, אז (כמקודם) $x \in n$ או $x = n$.
במקרה ש $x \in n$ נקבל מהנחת האינדוקציה $x \subseteq n$ אך כמובן $n \subseteq n^+$ ומטרנזיטיביות יחס ההכלה מתקיים $x \in n^+$.
במקרה ש $x = n$ אז $x \subseteq n^+$ כי $n \subseteq n^+$ על פי הגדרה. ■

טענה 3.4 יהיו n, m טבעיים, אז לא יתכן ש $n \in m$ וגם $m \in n$. **הוכחה:** $n \in m \in n$ מטרנזיטיביות (טענה 3) גורר $n \in n$, בסתירה לטענה 2. ■

טענה 3.5 $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$
כלומר הפונקציה $x \to x^+$ היא חח"ע.

הוכחה: נניח $n^+ = m^+$ אז $n \in n^+$ ולכן $n \in m^+$, כלומר $n \in m$ או $n = m$.
באופן דומה $m \in m^+ = n^+$ ולכן $m \in n$ או $m = n$.
נניח בשלילה $m \neq n$ ואז בהכרח $n \in m$ וגם $m \in n$, בסתירה לטענה שלפני הקודמת. ■

הגדרת פעולות חיבור כפל וחזקה על ω

הגדרה 3.6 בהנתן $m \in \omega$ נגדיר פונקציה

$$S_m : \omega \to \omega$$

כך:

$$\begin{aligned} S_m(0) &= m \\ S_m(n^+) &= S(n)^+ \end{aligned}$$

ממשפט הרקורסיה מובטח קיום ויחידות של S_m, ואז מקבלים $m + n = S_m(n)$

טענה 3.7 (אסוציאטיביות) לכל $k, m, n \in \omega$ מתקיים $(k+m)+n = k+(m+n)$

הוכחה: באינדוקציה על n.

$n=0$: אז

$$(k+m)+0=S_{k+m}(0)\underbrace{=}_{by\,definition}k+m=k+S_m(0)=k+(m+0)$$

נניח ל n ונוכיח ל n^+:

$$\begin{aligned}(k+m)+n^+ &= S_{k+m}\left(n^+\right)=S_{k+m}(n)^+=((k+m)+n)^+\underbrace{=}_{i.h.}(k+(m+n))^+\\ &= S_k(m+n)^+=S_k\left((m+n)^+\right)=k+(m+n)^+=k+S_m(n)^+\\ &= k+S_m\left(n^+\right)=k+\left(m+n^+\right)\end{aligned}$$

■

תכונות החיבור

1. $0+n=n$
2. קומוטטיביות: $m+n=n+m$

הגדרה 3.8 כפל: עבור $m\in\omega$ נגדיר $P_m:\omega\to\omega$ ע"י

$$P_m(0)=0$$

$$P_m\left(n^+\right)=P_m(n)+m=S_{P_m(n)}(m)$$

ושוב ממשפט הרקורסיה P_m קיימת ויחידה, ואז נגדיר $m\cdot n=P_m(n)$.

תכונות הכפל

1. אוסציאטיביות: $(k\cdot m)\cdot n=k\cdot(m\cdot n)$
2. יחידה: $m\cdot 1=m=1\cdot m$
3. קומוטטיביות: $m\cdot n=n\cdot m$
4. פילוג: $m\cdot(n+k)=m\cdot n+m\cdot k$

הגדרה 3.9 חזקה: עבור $m\in\omega$ נגדיר $e_m:\omega\to\omega$ על ידי:

$$e_m(0)=1$$

$$e_m\left(n^+\right)=e_m(n)\cdot m=P_{e_m(n)}(m)$$

ואז נאמר ש $m^n=e_m(n)$

תכונות החזקה

1. $(m\cdot k)^n=m^n\cdot k^n$
2. $m^{n+k}=m^n\cdot m^k$

4 סדר חלקי והלמה של צורן

(סדר חלקי הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי)
דוגמה: נגדיר סדר על ω: $m<n$ אם $m\in n$, ו $m\le n$ אם $m\in n$ או $m=n$.
טרנזיטיביות בעצם הוכחנו (בתחילת השיעור).
רפלקסיביות (של $\le$) נובעת מעצם ההגדרה.
אנטי סימטריה ־ הוכחנו בתחילת השיעור שלא יתכן גם $m\in n$ וגם $n\in m$, ולכן עבור היחס "$\le$" זה גורר שוויון.

הגדרה 4.1 תהי $(X,\le)$ קבוצה סדורה חלקית (קס"ח).
$x,y\in X$ יקראו ניתנים להשוואה אם $x\le y$ או $y\le x$
אם כל $x,y\in X$ ניתנים להשוואה אומרים ש $\le$ הוא סדר קווי.
תת קבוצה $C\subseteq X$ בה כל שני איברים ניתנים להשוואה נקראת שרשרת.

דוגמה $X=P(Y)=\{z|z\subseteq Y\}$ כאשר יחס הסדר שלנו הוא $\subseteq$, זה לא בהכרח סדר קווי (למעשה ל Y שיש בה יותר מאיבר אחד זה אינו סדר קווי).

הגדרה 4.2 חסם מלעיל לתת קבוצה C הוא איבר $x\in X$ כך ש $y\le x$ לכל $y\in C$.
איבר מקסימלי ב X הוא איבר $x\in X$ שאין גדול ממנו, כלומר שלכל y מתקיים

$$x\le y\Rightarrow x=y$$

הלמה של צורן

משפט 4.3 תהי X קבוצה לא ריקה, $\le$ סדר חלקי על X.
נניח שלכל שרשרת $C\subseteq X$ יש חסם עליון ב X, אז יש ב X איבר מקסימלי.

הוכחה מפוקפקת (אינטואיטיבית):

נניח בשלילה שאין ב X איבר מקסימלי, ניקח $x_1\in X$ (מאי־ריקנות זה אפשרי), x_1 אינו מקסימלי, לכן יש $x_2\in X$ כך ש $x_2\neq x_1$ וגם $x_1\le x_2$ ולכן $x_1<x_2$.
x_2 גם כן אינו מקסימלי, ולכן יש $x_2<x_3$, ונוכל לבנות סדרה אינסופית שכזאת, שהיא עולה. יכול להיות שמיצינו את כל X באמצעותה, ואם כך אז יש איבר בשרשרת שגדול מכל האחרים, ואחריו לא יכולנו להמשיך... בסתירה. ולכן בהכרח לא מיצינו את כל X, ויש לשרשרת חסם עליון.
$C=\{x_n:n=1,2,...\}$ היא שרשרת. מההנחה יש לה חסם עליון x, והוא אינו בשרשרת (כיוון שאחריו לא היה אפשר להמשיך את השרשרת עד אינסוף). ואז $x\notin C$. על פי הנחת השלילה x עדיין אינו מקסימלי, ולכן ניתן להתחיל איתו שרשרת חדשה, וגם לה צריך להיות חסם עליון. אינטואיטיבית, אם נמשיך כך (אינדוקציה טרנספיניטית) נגדיל כל הזמן את גודל השרשרת וזה לא יתכן כשכל השרשראות מוכלות בקבוצה נתונה. זה טיעון מאד מפוקפק, אך יש לו חשיבות כי הוא מציג את הקשר בין היעדר איבר מקסימלי לבין שרשראות. אבל בהחלט הטיעון האחרון לא באמת משכנע, ובשיעור הבא נוכיח פורמלית.

הוכחת הלמה בשלבים:

4.0.1 שלב 1

מספיק להוכיח שיש ב X שרשרת מקסימלית (ביחס להכלה).

למה 4.4 (C שרשרת מקסימלית אם היא שרשרת, ולכל $C\subseteq D$ כאשר D שרשרת גם כן, מתקיים $C=D$)

הוכחה: תהי $C\subseteq X$ שרשרת כנ"ל, מההנחה יש ב X חסם עליון ל C, כלומר יש $a\in X$ כך ש $c\le a$ לכל $c\in C$.
(בפרט מתקבל ש $a\in C$, אחרת היה אפשר לבנות שרשרת גדולה יותר (ביחס להכלה) ע"י $C\cup\{a\}$)
מכאן נובע ש a הוא איבר מקסימלי כזה שאת קיומו התבקשנו להוכיח, מדוע? נניח שיש $a\le b$, ואז נוכל לבנות שרשרת $C\cup\{b\}$, שהיא ממקסימליות C ממש שווה ל C, ואז נובע $b\in C$, והרי כבר ראינו ש a מקסימלי ב C, ונובע $a=b$. ■

4.0.2 שלב 2

מספיק להוכיח: יהי $\chi \neq \emptyset$ אוסף שרשראות בקב' סדורה חלקית $(X, \leq)$ שסגור לקבוצות חלקיות ולאיחודי שרשראות של שרשראות, אז יש ב χ שרשרת מקסימלית.

למה 4.5 שרשרת של שרשראות = קבוצת שרשראות שבה כל שתיים ניתנות להשוואה ביחס להכלה.

הוכחה: אוסף כל השרשראות ב X סגור לקבוצות חלקיות ולאיחודים של שרשרת שרשראות (איחוד של שרשרת שרשרות הוא בעצמו שרשרת: ניקח b,c באיחוד, $b \in B$ ו $c \in C$, B, C שרשרות בשרשרת השרשראות. בה"כ נניח ש $B \subseteq C$ (אחרת $C \subseteq B$) ואז $b, c \in C$ ובהכרח $b \leq c$ או $c \leq b$).

לכן נוכל לקחת χ=כל השרשראות ב X ולכן קיום שרשרת מקסימלית כדרוש ינבע. ■

4.0.3 שלב 3

נתחיל בהוכחה שב χ יש שרשרת מקסימלית אשר שייכת ל χ .

נשתמש באקסיומת הבחירה ־ מובטח קיום פונקציה:

$$\begin{aligned} f : P(X) &\rightarrow X \\ A \neq \emptyset &\Rightarrow f(A) \in A \end{aligned}$$

בהנתן קבוצה חלקית $A \subseteq \chi$ (כלומר $A \subseteq X$ וגם A שרשרת מתוך אוסף השרשראות ב χ) נגדיר

$$\hat{A} = \{x \in X | A \cup \{x\} \in \chi\}$$

כלומר אוסף כל האיברים שאפשר להוסיף ל A כך שעדיין נקבל שרשרת. ברור $A \subseteq \hat{A}$ (כי תמיד אפשר להוסיף את איברי A לעצמה ועדיין לקבל שרשרת), נבחין כי $A = \hat{A}$ אם"ם A שרשרת מקסימלית ב χ, נגדיר:

$$\begin{aligned} g : \chi &\rightarrow \chi \\ g(A) &= \begin{cases} A & A = \hat{A} \\ A \cup \underbrace{\left\{ f\left(\hat{A} \setminus A\right) \right\}}_{\in \hat{A} \setminus A \neq \emptyset} & A \subsetneq \hat{A} \end{cases} \end{aligned}$$

כלומר $g(A) \in \chi$, וגם מתקיים שאם יש בχ שרשרת גדולה יותר מ A ביחס להכלה, אזי $g(A)$ מתאימה ל A שרשרת שכזו, כמו כן $g(A) = A$ אם ורק אם A מקסימלית בהכלה ב χ.

מספיק להוכיח: יש $A \in \chi$ כך ש $g(A) = A$, כי אז A מקסימלית כדרוש.

4.0.4 שלב 4

הגדרה 4.6 קבוצה $J \subseteq \chi$ תקרא מגדל אם:

1. $\emptyset \in J$ (הקבוצה הריקה שייכת ל χ כי הוא סגור לקבוצות חלקיות)
2. אם $A \in J$ אז $g(A) \in J$
3. $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ שרשרת של שרשראות ב J ⇐ $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in J$

טענה 4.7 1. קיים מגדל ב χ

2. חיתוך (אפילו אינסופי) של מגדלים הוא מגדל
3. קיים מגדל מינימלי (ביחס להכלה)

הוכחה: 1. למשל χ עצמה.

2. יהיו J_α מגדלים, אז $\emptyset \in J_\alpha$ לכל α ולכן $\emptyset \in \bigcap_\alpha J_\alpha$. כעת אם $A \in \bigcap_\alpha J_\alpha$ אז $g(A) \in J_\alpha$ לכל α ולכן $g(A) \in \bigcap_\alpha J_\alpha$. התנאי השלישי שיש לבדוק הוא לגבי שרשרת של שרשראות, אם היא נמצאת בחיתוך המגדלים, אז איחוד השרשרת נמצא בכל אחד מהמגדלים, ולכן גם בחיתוך המגדלים.

3. ניקח $J_0 = \bigcap J$, כלומר חיתוך כל המגדלים. לפי 2 זה אכן מגדל וברור ש $J_0 \subseteq J$ לכל מגדל J, ומכאן המינימליות. ■

4.0.5 שלב 5

J_0 (המגדל המינימלי) מהווה שרשרת של שרשראות, כלומר $A,C\in J_0$ גורר ש $A\subseteq C$ או $C\subseteq A$.

הגדרה 4.8 $C\in J_0$ תיקרא טובה אם לכל $A\in J_0$ מתקיים $C\subseteq A$ או $A\subseteq C$, כלומר C ניתנת להשוואה עם כל איברי J_0.

J_0 שרשרת אם"ם כל הקבוצות ב J_0 טובות. נרצה להראות שכל $C\in J_0$ היא טובה.

4.0.6 שלב 6

תהי $C\in J_0$ טובה, תהי $A\in J_0$ כך ש $A\subsetneq C$ אז $g(A)\subseteq C$. **הוכחה:** מדוע? ראשית $g(A)\in J_0$ כי J_0 מגדל ($A\in J_0$).

שנית - C טובה ולכן $C\subsetneq g(A)$ או $g(A)\subseteq C$, במקרה השני קיבלנו את ההערה (זה מה שרצינו להראות), אחרת $C\subsetneq g(A)$, וכיוון שהנחנו ש $A\subsetneq C$ אז במעבר מ A ל $g(A)$ הוספנו בהכרח יותר מאיבר אחד, בסתירה למה שהגדרנו ש g עושה (מוסיפה רק איבר אחד לכל היותר), וקיבלנו את הדרוש. ■

4.0.7 שלב 7

נגדיר

$$U=\{A\in J_0:A\subseteq C\vee g(C)\subseteq A\}$$

כאשר מניחים כמקודם ש $C\in J_0$ טובה.
ברור ש $A\subseteq C\Leftarrow A\subseteq g(C)$ ולכן:

$$U\subseteq\{A\in J_0:A\subseteq g(C)\vee g(C)\subseteq A\}$$

טענה 4.9 U היא מגדל

הוכחה:
1. $\emptyset\in U$,
2. נראה $A\in U$ גורר $g(A)\in U$.

$$A\subsetneq C\underbrace{\Rightarrow}_{6}g(A)\subseteq C\Rightarrow g(A)\in U$$

$$A=C\Rightarrow g(A)=g(C)\Rightarrow g(C)\subseteq g(A)\Rightarrow g(A)\in U$$

$$g(C)\subseteq A\Rightarrow g(C)\subseteq g(A)\Rightarrow g(A)\in U$$

3. סגירות U לאיחוד שרשרת (תרגיל מיידי) ■

מסקנה 4.10 $U\subseteq J_0$ היא מגדל, בנוסף J_0 מגדל מינימלי, ולכן נובע $U=J_0$
כלומר לכל $A\in J_0$ מתקיים ש $A\subseteq C$ או $g(C)\subseteq A$

4.0.8 שלב 8

טענה 4.11 אוסף הקבוצות הטובות ב J_0 מהווה בעצמו מגדל.

הוכחה: 1. קבוצה ריקה היא טובה כי היא מוכלת בכל קבוצה אחרת.
2. אם C טובה אז $g(C)$ היא טובה. משלב 7 - לכל $A \in J_0$ או $A \subseteq C$ ואז גם $A \subseteq g(C)$ או $g(C) \subseteq A$, ולכן $g(C)$ ניתנת להשוואה עם כל $A \in J_0$, כלומר היא טובה.
3. איחוד שרשרת: תרגיל. ■

מסקנה 4.12 מינימליות J_0 כמגדל, אוסף הקבוצות הטובות ב J_0 גם הוא מגדל, לכן שווה ל J_0, לכן כל $C \in J_0$ היא טובה. ומכאן - J_0 היא שרשרת.

4.0.9 שלב 9

הגדרה 4.13 $A = \bigcup_{C \in J_0} C$

אז J_0 שרשרת וגם מגדל, ולכן $A \in J_0$ (כי מגדל סגור לאיחוד שרשראות בשרשרת). ברור ש A איבר מקסימלי ב J_0 (מכיל כל $D \in J_0$), אבל גם $g(A) \in J_0$ ולכן $g(A) \subseteq A$ ממקסימליות A, ואז $g(A) = A$, זה גורר ש A שרשרת מקסימלית ומסיים את הוכחת הלמה של צורן.

4.0.10 סיכום הוכחת הלמה של צורן ממעוף הציפור

1. מספיק להוכיח קיום שרשרת מקסימלית (כי בה יש איבר מקסימלי ב X)
2. הגדרנו מגדל: מכיל $\emptyset$, סגור לאיחוד שרשרת שרשרות, וסגור לפונקציה g שמעבירה שרשרת לא מקסימלית לשרשרת גדולה ממנה ממש ע"י הוספת איבר אחד.
3. קיים מגדל מינימלי (קל - חיתוך כל המגדלים)
4. מגדל מינימלי הוא בעצם שרשרת מקסימלית (קשה - לב ההוכחה) לכן קיימת שרשרת מקסימלית, מ.ש.ל.

תרגיל הלמה של צורן גוררת את אקסיומת הבחירה (ולכן שקולה לה)

5 גודל של קבוצות - קרדינלים (מונים)

הגדרה 5.1 קבוצות X, Y תקראנה שקולות אם יש פונקציה חח"ע ועל $f : X \to Y$. במקרה זה נכתוב $|X| = |Y|$ (ל X, Y אותו גודל, אותה עוצמה)

5.1 דוגמאות והגדרות

1. $\emptyset$ שקולה רק לעצמה
2. $|\{1,2\}| = |\{2,3\}| \neq |\{1\}|$
3. כללית, ל $m, n \in \omega$ מתקיים $|m| = |n|$ אם"ם $m = n$
4. n טבעי אז n לא שקול לקבוצה חלקית ממש של n
5. נאמר ש X קבוצה סופית אם יש $n \in \omega$ כך ש $|X| = |n|$
6. נאמר ש X קבוצה בת מניה אם $|X| = |\omega|$ כלומר יש סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ של איברים שונים כך $X = \{x_n : n \in \omega\}$

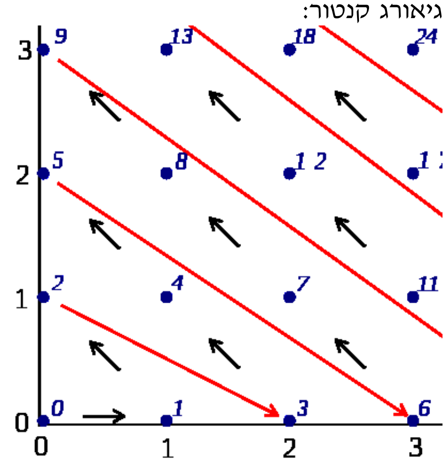
דוגמאות לקבוצות בנות מניה

1. המספרים הזוגיים

$$E = \{0, 2, 4, ...\}$$

ונגדיר $f : \omega \to E$ ע"י $f(n) = 2n$, והיא חח"ע ועל. לכן קבוצה יכולה להיות שקולה לקבוצה חלקית ממש שלה.

2. $\omega \times \omega$ בת מניה - להלן איור מתוך ויקיפדיה שממחיש את אופן הבניה של סדרת הזוגות מהטבעיים כפי שהציע גיאורג קנטור:



3. קבוצת הרציונאליים $\mathbb{Q}$ היא בת מניה, כיוון שלכל רציונאלי אי שלילי יש הצגה יחידה כשבר מצומצם, וכיוון שקבוצה חלקית אינסופית של קב' בת מניה היא בת מניה בעצמה, אז $\mathbb{Q}$ היא בת מניה בעצמה.

5.2 משפט קנטור

5.2.1 גרסה מצומצמת

משפט 5.2 קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ אינה בת מניה.

הוכחה: מספיק להראות ש $[0, 1]$ לא בת מניה, מדוע זה מספיק? כי $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ וקב"ח אינסופית של קב' בת מניה היא בת מניה.

שיטת הליכסון: נייצג כל ממשי $x \in [0, 1]$ בפיתוח עשרוני

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 ...$$

כאשר $x_i \in \{0, ..., 9\}$

נניח בשלילה ש $[0, 1]$ בת מניה, אז יש סדרה שממצה את $[0, 1]$ כאשר הסדרה היא:

$$0.x_{1,1} x_{1,2} x_{1,3} ...$$
$$0.x_{2,1} x_{2,2} x_{2,3} ...$$
$$0.x_{3,1} x_{3,2} x_{3,3} ...$$

וכן הלאה כאשר $x_{i,j} \in \{0, ..., 9\}$

נגדיר מספר ממשי $y \in [0, 1]$ ע"י:

$$y = 0.y_1 y_2 y_3 ...$$

כך שנבטיח ש $y_n \neq x_{nn}$ לכל n (למשל ע"י $y_n = (x_{nn}+1)\, mod 10$
ואז נובע ש $y \neq x_n$, כי הם שונים בספרה ה n-ית, ולכן y אינו איבר בסדרת המספרים שבנינו, ולכן הסדרה אינה ממצה את הקטע $[0,1]$ בסתירה. ■

בעצם רימינו בהוכחה, כיוון שהנחנו במובלע כי יש פיתוח עשרוני יחיד לכל מספר ממשי, אבל זה לא נכון שכן $0.99999... = 1$ כזכור מאינפי 1.
כנ"ל לכל מספר עשרוני עם פיתוח סופי ניתן להפעיל טריק דומה, למשל $0.137 = 0.13699999...$
זהו חוסר היחידות היחיד (לא נוכיח זאת כאן).

תיקון ההוכחה: לא נרשה סיום מספר ברצף 9, אלא אם זה הפיתוח היחיד עבור המספר, וזה נכון רק עבור הפיתוח העשרוני של 1 (אמרנו שכל המספרים הם מהצורה $0.xxxx$). גם בבניית y נוכל להפטר מסיום ב $999...$ כי יש מספיק דרגות חופש, כך למשל אפשר לתקן את החוק שהשתמשנו בו ל $y_n = (x_{nn}+1)\, mod 9$.
יצרנו הצגה יחידה במגבלות הנ"ל, ולכן ההוכחה כעת תקינה. זו דוגמא ראשונה לאינסופים שהם שונים זה מזה.

הגדרה 5.3 לקבוצות X,Y נאמר ש $|X| \leq |Y|$ אם יש העתקה חח"ע $f: X \to Y$, כלומר X שקולה לקבוצה חלקית של Y.

5.2.2 תכונות

1. $|X| = |Y| \Leftarrow |X| \leq |Y|$ בפרט $|X| \leq |X|$ (רפלקסיביות)
2. אם $|X| \leq |Y|$ וגם $|Y| \leq |Z|$ אז $|X| \leq |Z|$ (טרנזיטיביות): כי בהנתן

$$\underbrace{f}_{1:1} : X \to Y$$

$$\underbrace{g}_{1:1} : Y \to Z$$

נבנה

$$g \circ f : X \to Z$$

חח"ע גם היא (הרכבת חח"ע היא חח"ע).

שאלה: נניח $|X| \leq |Y|$ וגם $|Y| \leq |X|$, האם נובע $|X| = |Y|$?
נענה על זה בהמשך.

הגדרה 5.4 $|X| < |Y|$ אם $|X| \leq |Y|$ אך $|X| \neq |Y|$

לדוגמא: $|\omega| < \mathbb{R}$

5.2.3 משפט קנטור

משפט 5.5 לכל קבוצה X מתקיים

$$|X| < |P(X)|$$

הוכחה: $|X| \leq |P(X)|$ באופן ברור כי נבנה $f: X \to P(X)$ ע"י $f(x) = \{x\}$, וזה באופן ברור חח"ע.
נותר להראות $|X| \neq |P(X)|$\ כלומר שאין $f: X \to P(X)$ חח"ע <u>ועל</u> . וזאת נעשה באופן דומה לפרדוקס של ראסל.

נניח בשלילה שיש f כנ"ל ואז נגדיר:

$$A=\left\{x\in X:x\notin\underbrace{f\left(x\right)}_{\subseteq X}\right\}$$

כמובן $A\subseteq X$ ולכן $A\in P\left(X\right)$ וכיוון ש f על ־ קיים $a\in X$ כך ש $f\left(a\right)=A$.
כעת נשאל האם $a\in A$?
אם כן אז $a\in f\left(a\right)=A$ ולכן על פי הגדרת A נובע $a\notin A$ ־ סתירה.
אם לא אז $a\notin f\left(a\right)=A$ ולכן על פי הגדרת A נובע $a\in A$ ־ סתירה.
מכאן נובע שאין f כנ"ל ולכן $|X|\neq|P\left(X\right)|$ ו $|X|<|P\left(X\right)|$ כנדרש. ■

הערה 5.6 בעצם הוכחנו טענה חזקה יותר ־ שאין פונקציה על (ואפילו תהיה זו לא חח"ע) מקבוצה לקבוצת החזקה שלה.

הערה 5.7

$$|P\left(X\right)|=\left|\{0,1\}^{X}\right|$$

כי נגדיר:

$$f:P\left(X\right)\to\{0,1\}^{X}$$

(זו פונקציה שלכל איבר בקבוצה החזקה מתאימה פונקציה מ X לקבוצה בת שני איברים)
כך ש:

$$f\left(A\right):X\to\{0,1\}$$

שהיא הפונקציה המציינת, כלומר:

$$f\left(A\right)\left(x\right)=\begin{cases}0 & x\in A\\ 1 & x\notin A\end{cases}$$

קל לוודא ש f חח"ע ועל.

כעת כיוון ש $2=\{0,1\}$ מתקיים $|P\left(X\right)|=\left|2^{X}\right|$ ולכן ניסוח שקול למשפט קנטור יהיה:

$$|X|<\left|2^{X}\right|$$

וזה מכליל את העיקרון שראינו עבור מספרים טבעיים שראינו בעבר $|X|=n\in\omega$ מתקיים $|P\left(X\right)|=2^{n}$.

5.3 משפט קנטור־ברנשטיין

משפט 5.8 אם $|X|\leq|Y|$ וגם $|Y|\leq|X|$ אז $|X|=|Y|$

הוכחה: תהי $f:X\to Y$ חח"ע
תהי $g:Y\to X$ חח"ע
מטרה: לבנות $h:X\to Y$ חח"ע ועל.
נאמר ש $f\left(x\right)$ הוא צאצא של $x\in X$ וש $g\left(y\right)$ הוא צאצא של $y\in Y$.
ל $x\in X$ יש שרשרת צאצאים:

$$f\left(x\right),g\left(f\left(x\right)\right),f\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)...$$

ל $y\in Y$ יש שרשרת צאצאים:

$$g\left(y\right),f\left(g\left(y\right)\right),g\left(f\left(g\left(y\right)\right)\right),...$$

בהנתן $x\in X$ נלך אחורה ונחפש הורה ל־x אם קיים כזה, הוא יהיה $g^{-1}\left(x\right)$ אם קיים (רק אם $x\in g\left(Y\right)$, אחרת אין הורה), והורה של הורה של x אם קיים, כלומר $f^{-1}\left(g^{-1}\left(x\right)\right)$, מחח"ע אם יש הורה אז הוא יחיד, נמשיך כך $g^{-1}\left(f^{-1}\left(g^{-1}\left(x\right)\right)\right)$ וכן הלאה.

יכולים להיות 3 מצבים בבניית שרשרת כזו:

1. התהליך נעצר בנקודה כלשהי ב X (כלומר הגענו ל x' כלשהו שאינה ב $g\left(Y\right)$). נקרא לאוסף ה $x\in X$ שהתהליך לגביהם נעצר כך X_X.
2. התהליך נעצר בנקודה כלשהי ב Y (באופן דומה הגענו ל y' כלשהו שאינו ב $f\left(X\right)$). נקרא לאוסף ה $x\in X$ שהתהליך לגביהם נעצר באופן זה X_Y.
3. התהליך לא נעצר, נסמן את אוסף ה $x\in X$ שעבורם התהליך לא נעצר לעולם ע"י X_∞.

ברור ש:

$$X=X_X\coprod X_Y\coprod X_\infty$$

אפשר באמצעות תהליך זהה על Y לייצר חלוקה על Y ולקבל:

$$Y=Y_X\coprod Y_Y\coprod Y_\infty$$

ניקח $x\in X_X$ ואז $f\left(x\right)\in Y$ וכיוון שאם נתחיל את ה"הליכה לאחור" מ $f\left(x\right)=y'$ ניתקע ב X (כיוון ש $x\in X_X$) ולכן $f\left(x\right)\in Y_X$. משיקול דומה אם $x\in X_Y$ אז $f\left(x\right)\in Y_Y$. וכעת כבר ברור שאם $x\in X_\infty$ אז $f\left(x\right)=Y_\infty$.

נטען כי f מעתיק את X_X על Y_X. כיוון שלכל $y\in Y_X$ יש מקור ב X תחת f (כי ההיעצרות היא ב X), מחח"ע של f - יש העתקה חח"ע ועל מ X_X ל Y_X.

נטען גם כן כי יש העתקה חח"ע ועל מ X_Y ל Y_Y. על ידי g^{-1}, שהרי g^{-1} תמיד מוגדר עבור X_Y, כיוון שמובטח שההיעצרות תהיה ב Y, ובנוסף לכל $y\in Y_Y$, נתבונן ב $g\left(y\right)\in X$ ונגיע למסקנה כי בעצם $g\left(y\right)\in X_Y$, כיוון ש $g^{-1}\circ g\left(y\right)=y\in Y_Y$ ולכן מובטח שתהליך הצעידה לאחור מ $g\left(y\right)$ יעצר ב Y.

נטען כי $f:X_\infty\to Y_\infty$ חח"ע ועל, משיקולים דומים.

כעת ע"י צירוף הנ"ל קיבלנו כי יש לנו העתקה חח"ע משלוש המחלקות לשלוש המחלקות, ואם נרחיב את הפונקציה נקבל ממש העתקה חח"ע ועל מ X ל Y כנדרש. ■

נוכיח את משפט נקודת השבת, ובאמצעותו ניתן הוכחה אלטרנטיבית למשפט קנטור ברנשטיין.

משפט 5.9 תהי X קבוצה ו $\phi:P\left(X\right)\to P\left(X\right)$ מונוטונית ביחס להכלה, כלומר:

$$Y_1\subseteq Y_2\Rightarrow\phi\left(Y_1\right)\subseteq\phi\left(Y_2\right)$$

אז יש $Y_0\subseteq X$ כך ש $\phi\left(Y_0\right)=Y_0$

הוכחה: תהי:

$$D=\left\{Y\subseteq X|Y\subseteq\phi\left(Y\right)\right\}$$

ו D אינה ריקה כי למשל $\emptyset\in D$.

נגדיר:

$$Y_0=\bigcup_{Y\in D}Y$$

נראה כי $Y_0=\phi\left(Y_0\right)$

1. אם $Y\in D$ אז לפי הגדרה $Y\subseteq\phi(Y)$, ולכן $Y_0=\bigcup_{Y\in D}Y\subseteq\bigcup_{Y\in D}\phi(Y)$

2. ברור ש $Y\subseteq Y_0$ לכל $Y\in D$ (כי זהו איחוד) וממונוטוניות נובע $\phi(Y)\subseteq\phi(Y_0)$ לכל $Y\in D$ ואז כמובן $\bigcup_{Y\in D}\phi(Y)\subseteq\phi(Y_0)$

מצירוף 2 הנ"ל נובע $Y_0\subseteq\phi(Y_0)$ (ולכן $Y_0\in D$)
נפעיל את ϕ על ההערה הקודמת ונקבל ממונוטוניות הפונקציה כי:

$$\phi(Y_0)\subseteq\phi(\phi(Y_0))$$

ולכן על פי ההגדרה ממש מתקיים $\phi(Y_0)\in D$, וכיוון ש Y_0 מכיל כל איבר אחר ב D אז נובע $\phi(Y_0)\subseteq Y_0$ ומההכלה בשני הכיוונים אכן מתקיים שוויון:

$$Y_0=\phi(Y_0)$$

■

5.3.1 הוכחה נוספת למשפט קנטור־ברנשטיין

הוכחה: בהנתן X,Y כך ש $|X|\le|Y|$ ע"י f וגם $|Y|\ge|X|$ ע"י g אז נגדיר $\phi:P(X)\to P(X)$ באופן הבא:

$$\forall A\subseteq X:\ \phi(A)=X\setminus g(Y\setminus f(A))$$

קל לבדוק ש ϕ מונוטונית. ואז $A\subseteq B\Rightarrow\phi(A)\subseteq\phi(B)$.
ממשפט נקודת השבת יש $A\subseteq X$ כך ש $\phi(A)=A$ כלומר:

$$\begin{aligned} A &= X\setminus g(Y\setminus f(A)) \\ \Rightarrow\quad X\setminus A &= g(Y\setminus f(A)) \end{aligned}$$

זה אומר ש g^{-1} מגדירה העתקה חח"ע ועל מ $X\setminus A$ על $Y\setminus f(A)$ (g^{-1} היא פונקציה כי g חח"ע). ואז נוכל להגדיר פונקציה חח"ע ועל $h:X\to Y$ על ידי:

$$h(x)=\begin{cases} g^{-1}(x) & x\in X\setminus A \\ f(x) & x\in A \end{cases}$$

כיוון שהגדרנו את הפונקציה על תחומים זרים שתמונתם זרה, איחודם הוא כל X ואיחוד התמונות כל Y ־ ברור שהגדרנו פונקציה כנדרש. ■

5.4 עוצמות וחשבון עוצמות

זה יאפשר לנו להגדיר פעולות חיבור, כפל, חזקה על "מספרים אינסופיים".
כרגע נחשוב על עוצמה כמחלקת שקילות, כשיחס השקילות מתקיים אם יש $f:X\to Y$ חח"ע ועל, זה לא מדוייק כי המחלקה אינה קבוצה בעצמה.

הגדרה 5.10 $\aleph_0$ = עוצמת ω וכל הקבוצות בנות המניה
$\aleph$= עוצמת הרצף ־ $\aleph=|\mathbb{R}|=|[0,1]|$
יחס סדר בין עוצמות: לפי $|X|\le|Y|$ אם יש $f:X\to Y$ חח"ע, כך למשל $\aleph_0\le\aleph$

5.4.1 השערת הרצף

שאלה חשובה שנשאלה ־ היש עוצמות באמצע? כלומר האם יש עוצמה α כך ש $\aleph_0<\alpha<\aleph$?
השערת הרצף היתה שאין.
אחרי שנים רבות הוכיחו שאין פתרון לשאלה זו, כלומר: אקסיומות תורת הקבוצות לא מוכיחות את ההשערה ולא סותרות אותה.

טענה 5.11 כל שתי עוצמות ניתנות להשוואה, כלומר $\beta\le\alpha$ או $\alpha\le\beta$

הוכחה: תרגיל ־ על סמך הלמה של צורן. ■

עובדה שראינו: $\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית המינימלית, כלומר אם $\alpha\notin\omega$ אז $\aleph_0\le|\alpha|$.

5.4.2 פעולות על עוצמות

הגדרה 5.12 חיבור: בהנתן עוצמות α,β ניקח קבוצות A,B זרות כך ש $\alpha=|A|$ וגם $\beta=|B|$, ונגדיר:

$$\alpha+\beta=|A\cup B|$$

אי תלות בנציגים: קל לראות שאם $A\sim A'$ (כלומר מאותה עוצמה) ו $B\sim B'$ וגם $A'\sim B'$ כלומר $A\cup B\sim A'\cup B'$, זו נקודה טכנית, והפתרון שלה דומה לדרך שבה סיימנו את ההוכחה השניה למשפט קנטור ברנשטיין.

דוגמאות

1. זה מכליל חיבור בין מספרים טבעיים
2. קל לראות ש $\aleph_0+n=\aleph_0$, למשל נתבונן על הטבעיים עד $n-1$ בתור קבוצה בגודל n, ועל הטבעיים החל מ n, שידוע לנו שזו קבוצה בגודל $\aleph_0$, ואיחודם הוא כמובן הטבעיים ולכן עצמת האיחוד $\aleph_0$. (תכונת אי התלות בנציגים מאפשרת לנו לבחור דוגמא בחופשיות ולקבל משהו שהוא נכון לגבי המקרה הכללי)
3. $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ (למשל אי זוגיים וזוגיים)
4. תרגיל קל:

$$\alpha\le\alpha'\wedge\beta\le\beta'\Rightarrow\alpha+\beta\le\alpha'+\beta'$$

הגדרה 5.13 בהנתן עוצמות α,β ניקח קבוצות A,B כך ש $\alpha=|A|$ ו $\beta=|B|$ ונגדיר

$$\alpha\cdot\beta=|A\times B|$$

זה כמובן מכליל כפל טבעיים, לא תלוי בנציגים כמקודם, מונוטוני.

דוגמאות

1. $2\cdot\aleph_0=\aleph_0$
2. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ (כי ראינו ש $\omega\times\omega$ בת מניה)
3. $\aleph_0\cdot\aleph=\aleph$
4. $\aleph\cdot\aleph=\aleph$ וזה אולי די מפתיע כי זה אומר שלמישור הממשי ולישר הממשי אותה עוצמה. אפשר לבנות ממש את ההתאמה באמצעות עקום פיאנו:http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve.
5. כללית נראה בהמשך שלכל עצמה אינסופית α מתקיים $\alpha\cdot\alpha=\alpha$

הגדרה 5.14 אם $\alpha=|A|$ ו $\beta=|B|$ אז נגדיר

$$\alpha^\beta=\left|A^B\right|$$

כלומר כל הפונקציות $f:B\to A$

למשל $2^\beta=\left|\{0,1\}^B\right|=|P(B)|$

וכעת ניתן לסמן את משפט קנטור בתמציתיות ע"י:

$$\beta<2^\beta$$

הגדרה 5.15 הכללה של חיבור (גם למספר אינסופי של עצמות), אם $\alpha_i = A_i$ לכל $i \in I$, וגם לכל $j \neq i$ מתקבל $A_i \cap A_j = \emptyset$, אז:

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \left|\coprod_{i\in I} A_i\right|$$

הגדרה 5.16 כפל ארוך, כמקודם אם $\alpha_i = |A_i|$ עבור $i \in I$ אז מתקיים:

$$\prod_{i\in I} \alpha_i = \left|\prod_{i\in I} A_i\right|$$

5.4.3 תכונות של פעולות על עצמות

1. $\alpha + 0 = \alpha$ וכן $\alpha \cdot 1 = \alpha$
2. מונוטוניות:

$$\alpha \leq \alpha' \wedge \beta \leq \beta'$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta) \leq (\alpha'+\beta') \wedge (\alpha\beta) \leq (\alpha'\beta') \wedge \alpha^{\beta} \leq \alpha'^{\beta'}$$

3. קומוטטיביות חיבור וכפל:

$$A \times B \simeq B \times A$$

שקילות הקבוצות הללו מתקבלת בקלות ע"י ההעתקה:

$$(a,b) \to (b,a)$$

4. אסוציאטיביות חיבור וכפל:

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

זה נובע מאסוציאטיביות האיחוד.

5. פילוג:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$$

6. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$, כיוון ההוכחה הוא להתבונן ב $A^{B\cup C} \simeq A^B \times A^C$ ולבנות העתקה הנותנה שקילות זו (לא קשה לבניה).
7. $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$, $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

ראינו בעבר כי $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ וגם $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
כמו כן יודעים מהעבר כי $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

טענה 5.17 $\aleph \cdot \aleph = \aleph$

הוכחה: מהשוויון $\aleph = 2^{\aleph_0}$ נובע מחוקי החזקות כי $\aleph \cdot \aleph = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$ וכידוע $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ ולכן זה שווה ל $2^{\aleph_0} = \aleph$. ■

זה אומר לנו שהמישור שקול לישר, למשל אפשר לבנות העתקה בידיים אם כל נקודה בישר הממשי נתאים לה שתי נקודות, ע"י:

$$(0.a_1a_2a_3a_4...) \to (0.a_1a_3a_5..., 0.a_2a_4a_5...)$$

וזה נותן לנו העתקה חח"ע ועל (עד כדי יצוג כפול של חלק מהמספרים בפיתוח העשרוני/הבינארי אבל ראינו כבר זו בעיה טכנית שאפשר להתמודד איתה).

הערה 5.18 מכאן שבאותו אופן $\aleph^n = \aleph$ לכל n טבעי, וכן $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

הוכחה: הראשון מהשניים לעיל קל באינדוקציה. השני:

$$\aleph^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

■

מכאן שלא רק מרחבים ממשיים n מימדיים הם מאותה עצמה כמו הישר, אלא אף כאלו ממימד בן מניה!

טענה 5.19 תהי α עצמה אינסופית אז:

1. $\alpha + n = \alpha$ לכל n טבעי.
2. $\alpha + \aleph_0 = \alpha$

הוכחה: מספיק להוכיח את 2 כי אז נקבל:

$$\alpha = \alpha + 0 \leq \alpha + n \leq \alpha + \aleph_0 = \alpha$$

נוכיח את 2 אם כן.

.

תהי $\alpha = |A|$ אז יש לה קבוצה חלקית B בת מניה, כלומר $|B| = \aleph_0$. ואז נרשום:

$$\alpha = \underbrace{|A \setminus B|}_{\beta=?} + \underbrace{|B|}_{\aleph_0}$$

וכעת:

$$\alpha + \aleph_0 = (\beta + \aleph_0) + \aleph_0 \underbrace{=}_{associativity} \beta + (\aleph_0 + \aleph_0) = \beta + \aleph_0 \underbrace{=}_{by\, definition} \alpha$$

■

משפט 5.20 $\alpha = \alpha + \alpha$ לכל עצמה אינסופית.

הוכחה: תהי $\alpha = |A|$. נתבונן בזוגות (X, f) כך ש $\emptyset \neq X \subseteq A$ וגם

$$f : X \to X \times \underbrace{2}_{=\{0,1\}}$$

כלומר הטווח הוא שני עותקים זרים של X.
נשתמש בלמה של צורן: יהי F אוסף כל ה (X, f) הנ"ל, סדור ע"י הכלה והרחבת פונקציה, כלומר:

$$(X, f) \leq (X', f')$$

אם

$$X \subseteq X'$$

וגם

$$f'_{|X} = f$$

זהו סדר חלקי ו $|F| \neq \emptyset$, שכן קיימת $X \subseteq A$ בת מניה, ועבורה מתקיים $\aleph_0 = |X| = |X| \cdot 2 = |X| + |X| = \aleph_0$ ולכן קיימת פונקציה שעושה את ההתאמה הזו.
אם $C \subseteq F$ שרשרת אז יש לה חסם עליון ע"י:

$$\bigcup_{(X,f)\in C} (X,f) = \left(\bigcup X, \bigcup f\right)$$

על פי הלמה של צורן יש ב F איבר מקסימלי, נסמנו (X,f).
נתבונן ב $A \setminus X$. אם היא אינסופית אז יש בה $Y \subseteq A \setminus X$ בת מניה, ולכן $|Y| = |Y| \cdot 2$ ויש

$$g : Y \to Y \times 2$$

חח"ע ועל, ואז

$$(X,f) < (X \cup Y, f \cup g)$$

כך שההעתקה $f \cup g$ מעתיקה את $X \cup Y$ ל $(X \cup Y) \times 2 = X \times 2 \cup Y \times 2$, ולכן זהו איבר ב F בסתירה למקסימליות של (X,f).
מכאן ש $A \setminus X = n < \aleph_0$ סופית. וכמובן:

$$|A| = |X| + |A \setminus X| = \underbrace{|X|}_{infinite} + n \underbrace{=}_{by\,previous\,claim} |X|$$

לכן:

$$|A| = |X| \underbrace{=}_{by\, f} |X| \cdot 2 = |A| \cdot 2$$

ולכן:

$$\alpha = \alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$$

■

מסקנה 5.21 יהיו α, β עצמות אינסופיות אז:

$$\alpha + \beta = \max(\alpha, \beta)$$

וכנ"ל אם לפחות α או β אינסופי.

הוכחה: בה"כ $\beta \leq \alpha$ אז ממונוטוניות נקבל:

$$\alpha = \alpha + 0 \leq \alpha + \beta \leq \alpha + \alpha \underbrace{=}_{theorem} \alpha$$

■

משפט 5.22 תהי α עצמה אינסופית, אז $\alpha \cdot \alpha = \alpha$

הוכחה: דומה להוכחה הקודמת. נתבונן בזוגות (X,f) כך ש $A \supseteq X \neq \emptyset$ ו $f : X \to X \times X$ חח"ע ועל כאשר $|A| = \alpha$.

יהי F אוסף הזוגות (X,f) הנ"ל ונסדר אותו כמקודם. זהו סדר חלקי ולשרשרת יש חסם עליון ־ כמקודם, האוסף אינו ריק כי ניתן למצוא תת קבוצה בת מניה שלגביה יש פונקציה משיקול מניה.

מהלמה של צורן ־ יש איבר מקסימלי $(X,f) \in F$.

מתקיים $|X| = |X| \cdot |X|$ לכן אם $|X| = |A| = \alpha$ אז גמרנו, לכן נניח בשלילה $|X| < |A|$.

מתקיים לפיכך:

$$|A| = |X| + |A \setminus X| = \max\left(\underbrace{|X|}_{<|A|}, |A \setminus X|\right)$$

ולכן בהכרח $|A \setminus X| = |A|$.

בפרט נובע

$$|X| < |A \setminus X|$$

ואם כך ־ יש קבוצה $Y \subseteq |A \setminus X|$ כך ש $|Y| = |X|$, וברור ש $X \cap Y = \emptyset$, ולכן:

$$(X \cup Y) \times (X \cup Y) = \underbrace{X \times X}_{we\, had\, f:X \to X \times X} \cup \underbrace{X \times Y}_{\simeq X \times X \simeq X} \cup \underbrace{Y \times X}_{\simeq X \times X \simeq X} \cup \underbrace{Y \times Y}_{\simeq X \times X \simeq X}$$

ואז:

$$\begin{aligned} |X \times Y \cup Y \times X \cup Y \times Y| &= |X| + |X| + |X| \\ &= |Y| + |Y| + |Y| = |Y| \end{aligned}$$

ולכן יש $g : Y \to X \times Y \cup Y \times X \cup Y \times Y$ חח"ע ועל. מכאן שאפשר לקחת את $f \cup g : X \coprod Y \to \underbrace{X \times X \cup X \times Y \cup Y \times X \cup Y \times Y}_{=(X \coprod Y) \times ((X \coprod Y))}$ שתפעל באופן חח"ע ועל. ולכן בנינו איבר:

$$(X,f) < (X \cup Y, f \cup g) \in F$$

בסתירה למקסימליות (X,f). ■

משפט 5.23 כל שתי עוצמות ניתנות להשוואה.

הוכחה: X,Y קבוצות בעוצמות המתאימות, ונניח שלא מתקיים $|X| \geq |Y|$, כלומר אין פונקציה חח"ע $f : Y \to X$.

נוכיח $|X| \leq |Y|$, כלומר יש פונקציה חח"ע $X \to Y$ ע"י פונקציות חלקיות (X_0, f_0) חח"ע כך ש $|X_0| \leq |X|$ ע"י $f_0 : X_0 \to X$.

הוכחה מלאה ־ ענר ממליץ מאד להשלים לבד. ■

הערה 5.24 היש קבוצה A כך ש $A \in A$?

מסתבר שזה בלתי תלוי באקסיומות תורת הקבוצות, יתכן שכן ויתכן שלא, אפשר לבנות מודל שבו זה לא מתקיים ומודל שבו זה כן מתקיים.

מסקנה 5.25 אם $0 < \alpha, \beta$ ולפחות אחד מהם אינסופי, אז $\alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta)$, נובע מיד מהמשפט (תרגילון).

פונקציית החזקה מסתורית יותר...

6 סדר טוב $(Well\, Ordering)$

הגדרה 6.1 תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית.

נאמר ש $\leq$ הוא סדר טוב אם לכל קבוצה לא ריקה $Y \subseteq X$ יש איבר מינימלי $y \in Y$, כלומר $y \leq z$ לכל $z \in Y$.

6.0.4 דוגמאות

1. הטבעיים ω
2. $(\mathbb{Q}, \leq)$ אינו סדר טוב, למשל הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ היא קבוצה חלקית ללא מינימום.
3. כל קבוצה סופית עם סדר קוי.
4. אם ניקח את הטבעיים ונוסיף איבר ששמו ω שהוא גדול מכל האחרים, אז גם לקבוצה שהתקבלה יהיה סדר טוב.
5. אם ניקח שני עותקים של ω, ונמקם אותם "בזה אחר זה", כך שכל האיברים בעותק השני גדולים מאיברי העותק הראשון, גם על קבוצה זו יתקבל סדר טוב.

טענה 6.2 סדר טוב הוא בהכרח סדר קווי.

הוכחה: יהיו $x, y \in X$ ואז $\emptyset \neq \{x, y\} \subseteq X$ ולכן יש בקבוצה הזו מינימום, ולכן הם ברי השוואה. ■

6.1 עיקרון האינדוקציה הטרנספיניטית

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה כך ש $\leq$הוא סדר טוב. תהי $Y \subseteq X$ לא ריקה עם התכונה:
לכל $x \in X$ אם כל קודמי x (כלומר כל $y < x$) שייכים ל y, אז $x \in y$.
אזי $X = Y$. **הוכחה:** נניח בשלילה ש $Y \subsetneq X$, אז נתבונן ב $X \setminus Y$ (שאיננה ריקה לפי הנחתנו) ולכן יש איבר מינימלי $x \in X \setminus Y$, אז $x \notin Y$, ולכל $y < x$ לא יתכן $y \in X \setminus Y$ - סתירה למינימליות x. לכן $y \in Y$ לכל $y < x$ סתירה להנחה. ■

6.1.1 רישא

הגדרה 6.3 תהי $(W, \leq)$ קבוצה סדורה היטב. יהי $x \in W$. הרישא של W שמתאימה ל x מוגדרת כ:

$$W(x) = \{y \in W | \, y < x\}$$

($Initial\ segment$)

ולכן ניתן להגדיר את עיקרון האינדוקציה הטרנספיניטית גם כך:
תהי $(W, \leq)$ קב' סדורה היטב.

1. תהי $X \subseteq W$ ונניח שלכל $x \in W$ מתקיים $W(x) \subseteq X \Leftarrow x \in X$
אזי $W = X$
2. תהי P תכונה, ונניח שאם כל איברי הרישא $W(x)$ בעלי תכונה P אז גם x בעל תכונה זו, אז כל איברי W בעלי תכונה P.

הוכחה: $X = \{x \in W | P(x)\}$ ונשתמש ב 1. ■

6.2 הכנות למשפט הסדר הטוב

הגדרה 6.4 יהיו $(W_\alpha, \leq_\alpha)$ סדרים טובים $(\alpha \in I)$, ונניח שלכל $\alpha, \beta \in I$ מתקיים אחד משלושת הבאים:
או $(W_\alpha, \leq_\alpha) = (W_\beta, \leq_\beta)$
או $(W_\alpha, \leq_\alpha)$ הוא רישא של $(W_\beta, \leq_\beta)$
או להיפך $(W_\beta, \leq_\beta)$ מהווה רישא של $(W_\alpha, \leq_\alpha)$.
במקרה כזה נאמר ש $\{(W_\alpha, \leq_\alpha) : \alpha \in I\}$ היא שרשרת רישות, (בפרט $\{W_\alpha : \alpha \in I\}$ שרשרת ביחס להכלה).

למה 6.5 אם $\{(W_\alpha, \leq_\alpha) : \alpha \in I\}$ היא שרשרת רישות, אז $(\bigcup W_\alpha, \leq)$ היא קבוצה סדורה היטב, באשר $\leq = \bigcup_\alpha \leq_\alpha$ (כלומר איחוד הסדרים במובן של איחוד יחסים). ובנוסף כל $(W_\alpha, \leq_\alpha)$ היא רישא של הקבוצה החדשה או שהיא כל הקבוצה ממש.

הוכחה: קל לראות ש $\leq$הוא יחס סדר (כאיחוד שרשרת יחסי סדר) וכן שהוא קווי:

קויות - יהיו $a,b\in\bigcup W_\alpha$ אז $a\in W_\alpha$ ו $b\in W_\beta$. מתקיים בה"כ $W_\alpha\subseteq W_\beta$, ואז $a,b\in W_\beta$ והסדר בתוך W_β הוא קווי והסדר $\leq$ מרחיב אותו, ולכן נובע $a\leq b$ או $b\leq a$.

טרנזיטיביות - באופן דומה, ניקח $a\leq b\leq c$ אז יש W_γ כך ש $a,b,c\in W_\gamma$ והטרנזיטיביות של $\leq_\gamma$ מבטיחה $a\leq_\gamma c$, וכיוון שיחס הסדר $\leq$ הוא הרחבה שלו - מתקבל המבוקש.

מדוע הסדר המתקבל הוא סדר טוב?

תהי $X\neq\emptyset$ כך ש $X\subseteq\bigcup_\alpha W_\alpha$, אז יש $\alpha\in I$ כך ש $W_\alpha\cap X\neq\emptyset$. על פי הנחתנו $(W_\alpha,\leq_\alpha)$ סדורה היטב ולכן יש ב $W_\alpha\supseteq(W_\alpha\cap X)$ איבר מינימלי a. מאחר שמדובר בשרשרת רישות, a הוא האיבר המינימלי ב X כולה.

מדוע?

אחרת יש $b\in X$ כך ש $b<a$, ואז $b\in W_\beta$ לאיזה $\beta\in I$. אבל $W_\alpha\ni a>b$ גורר ש $b\in W_\alpha$ ולכן $a>b\in W_\alpha\cap X$ בסתירה למינימליות של a.

נפרט טיפה יותר:

מקרה 1: $W_\beta\subseteq W_\alpha$ ואז ברור ש $b\in W_\beta$ גורר $b\in W_\alpha$

מקרה 2: $W_\alpha\subsetneq W_\beta$ ולכן W_α רישא של W_β כלומר $W_\alpha=W_\beta\left(c\right)$

$$\begin{aligned} a &\in W_\beta\left(c\right)\Rightarrow a<c,b<a \underbrace{\Rightarrow}_{transitivity} b<c \\ &\Rightarrow b\in\underbrace{W_\beta\left(c\right)}_{W_\alpha}\Rightarrow b\in W_\alpha \end{aligned}$$

לבסוף לכל α מתקיים $W_\alpha\subseteq\bigcup_\beta W_\beta$ והסדר $\leq$ מרחיב את כל הסדרים $\leq_\alpha$ ו W_α היא רישא של האיחוד. ■

6.3 משפט הסדר הטוב

משפט 6.6 תהי W קבוצה, אז יש סדר טוב $\leq$ על W. כלומר: כל קבוצה ניתנת לסידור היטב.

הוכחה: על סמך הלמה של צורן - נגדיר

$$F=\left\{\left(X,\leq\right)|X\subseteq W\, and\, X\, is\, well-ordered\, by\ \leq\right\}$$

$F\neq\emptyset$ כי למשל $\left(\emptyset,\underbrace{\leq}_{=\emptyset}\right)\in F$. אם $W\neq\emptyset$ ו $x\in W$ אז $\left(\left\{x\right\},\left\{\left(x,x\right)\right\}\right)\in F$.

נגדיר יחס סדר על איבר F ע"י:

$$\left(X,\leq_X\right)<\left(Y,\leq_Y\right)$$

אם צד שמאל הוא רישא של צד ימין. בפרט $X\subsetneq Y$ וגם $\leq_Y$ מצומצם ל X הוא בדיוק $\leq_X$.

קל לבדוק שזה סדר חלקי (לא בהכרח קווי). נבדוק את תנאי השרשרת בלמה של צורן.

כאן שרשרת = שרשרת רישות במובן שהוגדר קודם, ולכן איחוד איברי השרשרת הוא ב F, ויחס הסדר מוסכם על כל איברי השרשרת (לפי הלמה שהוכחנו).

ע"פ הלמה של צורן יש ב F איבר מקסימלי $\left(X,\leq\right)$.

X סדורה היטב ע"י $\leq$, בהיותה שייכת ל F, נותר להראות $X=W$ כדי להשלים את ההוכחה.

אם $X\subsetneq W$, אזי נבחר $w\in W\setminus X$. נגדיר $Y=X\cup\left\{w\right\}$ ונסדר את Y כך שהסדר ירחיב את הסדר $\leq$ על X ו w איבר שגדול מכל איברי X. אז $\left(Y,\leq\right)\in F$ כלומר זה סדר טוב.

כמו כן $\left(X,\leq_X\right)<\left(Y,\leq_Y\right)$ כך ש $X=Y\left(w\right)$ כלומר X רישא ממש של Y ולכן זו סתירה למקסימליות של $\left(X,\leq\right)$ ב F. ■

6.4 תכונות של סדר טוב

נגדיר $f:(X,\leq_X)\to(Y,\leq_Y)$ איזומורפיזם אם f חח"ע, על ושומרת סדר.
כלומר

$$a\leq_X b\Rightarrow f(a)\leq_Y f(b)$$

למה 6.7 (תרגיל) תהי $(W,\leq)$ סדורה היטב ותהי $f:W\to W$ שומרת סדר, אז $f(x)\geq x$ לכל $x\in W$ (לא נוכיח כי זה מופיע בתרגיל).

למה 6.8 אם W_1,W_2 סדורות היטב ואיזומורפיות, אז האיזומורפיזם ביניהן הוא יחיד (נובע מלמה 1) ובפרט, אם W סדורה היטב ו $f:W\to W$ איזומורפיזם, אז $f=I$.

למה 6.9 (לא תרגיל) תהי $(W,\leq)$ קבוצה סדורה היטב, אז W איננה איזומורפית לרישא של עצמה.

הוכחה: נניח בשלילה שיש $a\in W$ כך ש $W\cong W(a)$ אז יש $f:W\to W(a)$ איזומורפיזם ואז $f(a)\in W(a)$ כלומר $f(a)<a$ בסתירה ללמה 1. ■

הערה 6.10 יתכן ש W תהיה איזומורפית לקבוצה חלקית ממש של W, כך למשל הטבעיים איזומורפיים לזוגיים וכו'.

משפט 6.11 תהיינה W_1,W_2 סדורות היטב, אז מתקיים בדיוק אחד מהתנאים הבאים:
1. W_1 איזומורפית ל W_2
2. W_1 איזומורפית לרישא של W_2
3. W_2 איזומורפית לרישא של W_1

רמז להוכחה: לא מתקיימים שני תנאים בבת אחת, זה נובע מלמה קודמת. כדי להוכיח קיום אחד התנאים מגדירים

$$f=\{(x,y)\in W_1\times W_2|W_1(x)\cong W_2(y)\}$$

מראים ש f היא פונקציה חח"ע מקב"ח של W_1 לקב"ח של W_2 ובעצם או f איזומורפיזם בין W_1 ל W_2או f איזו' מ W_1לרישא של W_2 או f איזו' מ W_2 לרישא של W_1.

7 אורדינלים - סודרים (הפרק האחרון הועבר ע"י המתרגלת חנה גלזנר)

מטרה: להגדיר אורדינלים כך שיקיימו

$$\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha\in\beta$$

וגם

$$\alpha=\{\gamma:\gamma\in\alpha\}$$

תכונות הדומות למספרים טבעיים.

תזכורת: קבוצה טרנזיטיבית קבוצה T תיקרא טרנזיטיבית אם לכל $x\in T$ מתקיים $x\subseteq T$. במילים אחרות $T\subseteq P(T)$.

הגדרה 7.1 אורדינל הוא קבוצה טרנזיטיבית שהיחס " $\in$ " עליה הוא יחס סדר טוב.
(כלומר נגדיר את מחלקת האורדינלים להיות כל הקבוצות מסוג זה)

דוגמאות:

1. $\emptyset$ אורדינל
2. כל $n \in \omega$ הוא אורדינל, ω אורדינל.

נגדיר יחס סדר על אורדינלים לפי $\alpha < \beta$ אם"ם $\alpha \in \beta$

טענה 7.2 :

1. אם α אורדינל ו $\beta \in \alpha$ אז β אורדינל.
2. אם α, β אורדינלים ו $\alpha \subsetneq \beta$ אז $\alpha \in \beta$

אם α, β אורדינלים אז $\alpha \subseteq \beta$ או $\beta \subseteq \alpha$

הוכחה: :

1. אם α אורדינל, ו $\beta \in \alpha$ אז $\beta \subseteq \alpha$.

β סדורה היטב ביחס ל " $\in$ ": אם $\gamma \in \beta$ אז $\gamma \in \alpha$ ואז $\gamma \subseteq \alpha$. יהי $\delta \in \gamma$ ומתקיים $\delta \in \alpha$.
או ש $\delta \in \beta$ או ש־$\beta \in \delta$ (כי בפרט יחס הסדר ב α הוא לינארי). אם $\beta \in \delta$ אז $\beta \in \delta \in \gamma \in \beta$, ולכן $\gamma \in \beta \Leftarrow \delta \in \beta$. מכאן ש β טרנזיטיבית ולכן β אורדינל.

2. אם $\alpha \subsetneq \beta$ אז $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, ואז יש ב $\beta \setminus \alpha$ איבר ראשון, נסמנו γ, אז $\alpha = S_\beta(\gamma)$ (כלומר הרישא של β שנקבעת על ידי γ). נשים לב שלכל $\delta \in \beta$, על פי הגדרה $\delta = S_\beta(\delta)$. ובפרט:

$$\alpha = S_\beta(\gamma) = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma \in \beta$$

כנדרש.

3. יהיו α, β אורדינלים, אז גם $\alpha \cap \beta$ אורדינל:

$$\gamma \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \gamma \in \alpha \Rightarrow \gamma \subseteq \alpha,\ \gamma \in \beta \Rightarrow \gamma \subseteq \beta$$

ולכן

$$\gamma \subseteq \alpha \cap \beta$$

נסמן $\gamma = \alpha \cap \beta$ אז $\alpha = \gamma$ או $\beta = \gamma$, אחרת $\gamma \subsetneq \alpha, \beta$ ולכן $\gamma \in \alpha, \beta$ ואז

$$\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$$

בסתירה (האמת שענר ציין בפנינו ששייכות של קבוצה לעצמה איננה סתירה לאקסיומות של תורת הקבוצות, אבל המתרגלת מניחה שזה כן)

זאת אומרת $\beta \subseteq \alpha$ או $\alpha \subseteq \beta$. ■

מסקנה 7.3 :

1. " $<$ " יחס סדר לינארי על Ord (מחלקת האורדינלים).
2. לכל אורדינל α: $\alpha = \{\beta \in Ord : \beta < \alpha\}$
3. אם C מחלקה של אורדינלים, אז $\bigcap C$ אורדינל, כלומר $\bigcap C \subseteq C$.
4. אם X קבוצה של אורדינלים, גם $\bigcup X$ אורדינל.
5. לכל אורדינל α מתקיים $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ אורדינל. נשים לב ש α^+ העוקב המיידי של α. (עוקב מיידי הוא האיבר הראשון ב $\{\beta : \alpha < \beta\}$

הגדרה 7.4 לכל אורדינל α נגדיר:

$$\alpha + 1 = \alpha^+$$

משפט 7.5 כל קבוצה סדורה היטב איזומורפית לסודר יחיד.

לשם כך נציג אקסיומה נוספת:

7.1 אקסיומת ההצבה ($Axiom\,of\,substitution$)

תהי A קבוצה ותהי $S\left(a,b\right)$ טענה שתלויה ב a,b, כך שלכל $a\in A$ קיימת הקבוצה $\{b|S\left(a,b\right)\}$(כלומר קיימת קבוצה ש b איבר בה אס"ם $S\left(a,b\right)$ מתקיימת) אז קיימת פונקציה F שתחום ההגדרה שלה הוא A, כך שלכל $a\in A$ מתקיים:

$$F\left(a\right)=\{b|S\left(a,b\right)\}$$

נחזור להוכחת המשפט הוכחה: יחידות נובעת מכך שקס"ה אינה איזומורפית לרישא ממש של עצמה, ומכך שאם α,β אורדינלים שונים, אחד מהם רישא ממש של השני, ולא יתכן ששתיהן איזומורפיות לאותה קבוצה A, שכן אז ניתן להרכיב פונקציות ולקבל ש α איזומורפית ל β, בסתירה.

תהי w קס"ה. תהי $S\left(x,\alpha\right)$ הטענה $S\left(x\right)\cong\alpha$ כאשר $S\left(x\right)$ הרישא של $x\in W$ ו α אורדינל.

לכל $x\in W$ מתקיים ש $\{\alpha:S\left(x,\alpha\right)\}$ קבוצה.

או שזו קבוצה ריקה, או שיש אורדינל יחיד כך ש $S\left(x\right)\cong\alpha$.

מאקסיומת ההצבה, קיימת פונקציה F שתחומה W, כך ש $F\left(x\right)=\{\alpha\}$ אם $S\left(x\right)\cong\alpha$. ו $F\left(x\right)=\emptyset$ אם אין α כנ"ל.

$F\left(W\right)$ קבוצה , לא יתכן ש $F\left(y\right)=\emptyset$ כי אם הקבוצה $\{y\in W|F\left(y\right)=\emptyset\}$ אינה ריקה, אז יש בה איבר ראשון x. נתבונן בקבוצת האורדינלים $C=\bigcup_{y<x}F\left(y\right)$. יהי α האורדינל הראשון שהוא גדול מכל איברי C. תרגיל: $S\left(x\right)\cong\alpha$, ואז $F\left(x\right)=\{\alpha\}\neq\emptyset$, סתירה.

יהי γ האורדינל הראשון כך ש $\gamma\notin\bigcup F\left(W\right)$, נשים לב ש $\bigcup F\left(W\right)$ רישא של מחלקת האורדינלים. אם $\alpha\in\bigcup F\left(W\right)$ אז יש $x\in W$ כך ש $S\left(x\right)\cong\alpha$. אם $\beta<\alpha$ אז β רישא של α. β איזומורפי לרישא של $S\left(x\right)$ כלומר $\beta\cong S\left(y\right)$ $y<x$ ו $y\in W$. לכן $\bigcup F\left(W\right)$ ו $\beta\in\bigcup F\left(W\right)=\gamma$.

F חח"ע ושומרת סדר (בדקו) $F:W\to\gamma$ איזומורפיזם. מצאנו אורדינל שאיזומורפי ל W כנדרש. ∎

7.2 אריתמטיקה של אורדינלים

7.2.1 חיבור

יהיו α,β אורדינלים

$\alpha'=\alpha\times\{0\}$ ו $\beta''=\beta\times\{1\}$

נגדיר על $\alpha'\cup\beta''$ סדר לפי:

$$\left(x,i\right)<\left(y,j\right)\Leftrightarrow i<j\vee\left(i=j\wedge x<y\right)$$

נגדיר $\alpha+\beta$ האורדינל שאיזומורפי ל $\alpha'\bigcup\beta''$.

דוגמאות / תכונות

1. $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$
2. $\alpha+1=\alpha^{+}$
3. אסוציאטיביות: $\alpha+\left(\beta+\gamma\right)=\left(\alpha+\beta\right)+\gamma$
4. $\alpha<\beta$ גורר שקיים $\gamma\neq0$ כך ש $\beta=\alpha+\gamma$.
5. לא קומוטטיבי, למשל - $\omega+1$ נותן את הטבעיים בהזזה, כלומר שוב משהו שהוא איזומורפי לטבעיים. לעומת זאת $\omega\cup\{\infty\}\cong\omega+1$, שזוהי קבוצה שיש בה איבר מקסימלי.
6. מתיישב עם חיבור בטבעיים.
7. שומר על חיבור עצמות

7.2.2 כפל

אם α,β אורדינלים, נגדיר $\alpha\cdot\beta$ להיות אורדינל שאיזומורפי ל $\alpha\times\beta$ עם סדר לקסיקוגרפי הכפוך (קודם קוא' שניה ואז קוא' ראשונה).

דוגמאות / תכונות

1. $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$ וכן $1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha$
2. אין קומוטטיביות, למשל:

$$\begin{aligned}3\omega &= \left(0,0\right),\left(1,0\right),\left(2,0\right),\left(0,1\right),\left(1,1\right),\left(2,1\right),\left(0,2\right)...\cong\omega\\ \omega 3 &= \left(0,0\right),\left(0,1\right),\left(0,2\right),\left(0,3\right),\left(0,4\right)...\\ &\quad \left(1,0\right),\left(1,1\right),\left(1,2\right),\left(1,3\right),\left(1,4\right)...\\ &\quad \left(2,0\right),\left(2,1\right),\left(2,2\right),\left(2,3\right),\left(2,4\right)...\end{aligned}$$

3. אסוציאטיביות $\alpha\left(\beta\gamma\right)=\left(a\beta\right)\gamma$
4. מתיישב עם כפל בטבעיים
5. מתיישב עם כפל עצמות

תכונות נוספות

1. $\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Rightarrow\beta=\gamma$
2. $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma,\alpha\neq 0\Rightarrow\beta=\gamma$
3. $\alpha\left(\beta+\gamma\right)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

הוכחה: :

:1

אם $\alpha\beta=\alpha\gamma$ אז יש איזומורפיזם:

$$f:\alpha'\cup\beta''\rightarrow\alpha'\cup\gamma''$$

נשים לב ש $f_{|\alpha'}$ היא הזהות ביחס ל α'. ולכן $f_{\beta''}:\beta''\rightarrow\gamma''$ איזומורפיזם ולכן:

$$\beta\cong\beta''\cong\gamma''\cong\gamma$$

ולכן מתקיים המבוקש.

2 באינדוקציה טרנספיניטית:

אם $\alpha\beta=\alpha\gamma$ אז יש איזו' :

$$f:\alpha\times\beta\rightarrow\alpha\times\gamma$$

אם $\alpha\neq 0$ אז $\beta=\gamma=0$ או $\beta,\gamma\neq 0$.

נסמן b_0,c_0 האיברים הראשונים ב β,γ בהתאמה. אז:

$$f_{|\alpha\times\{b_0\}}:\alpha\times\{b_0\}\rightarrow\alpha\times\{c_0\}$$

איזומורפיזם ולכל $a\in\alpha$ מתקיים:

$$f\left(a,b_0\right)=\left(a,c_0\right)$$

נניח כי לכל $b \in S(b_1)$ קיים $c \in \gamma$ כך שלכל $a \in \alpha$ מתקיים $f(a,b) = (a,c)$ נסמן $c = g(b)$.
נשים לב ש $g(S(b_1))$ רישא של γ. קיים c_1כך ש $g(S(b_1)) = S(c_1)$ ו:

$$f_{|\alpha \times \{b_1\}} : \alpha \times \{b_1\} \to \{\alpha\} \times \{c_1\}$$

איזומורפיזם ו $f(a,b_1) = (a,c_1)$.
מעקרון האינדוקציה הטרנספיניטית לכל $b \in \beta$ קיים $g(b) \in \gamma$ כך ש

$$f(a,b) = (a, g(b))$$

לכל $a \in \alpha$.
g איזומורפיזם ולכן $\gamma = \beta$. ■