

22.10.2006

מרצה: חגית לסט

hagitl@math.huji.ac.ilמתמטיקה דיסקרטיתלוגיקה:

אתר קורס – owl.huji.ac.il

ציון: 80% בחינה סופית, 10% תרגילי בית (9 תרגילי בית חייבים להגיש, הציון יחשב ע"פ 11 התרגילים הטובים ביותר), 10% בחנים – מגן (התרעה של שבועיים).

על מה נדבר:

1. מושגים בסיסיים בתורת הקבוצות
2. בעיות מניה
3. גרפים

מושגים בתורת הקבוצות:

הגדרה: קבוצה היא אוסף של איברים שונים זה מזה, אין חשיבות לסדר האיברים. קבוצות A, B נקראות שוות, ומסומנות $(A = B)$ אם יש להן בדיוק את אותו אוסף איברים.

דוגמאות: $A = \{a, b, 2, chair\}$. נסמן $|A|$ את גודל הקבוצה.

נשים לב - $B = \{a, a, 2, 3\}, |B| = 3$

נשים לב - $|A|, A = \{\{2, 3\}, 4\}$

קצת כיתוב פורמלי - $A = B \Leftrightarrow x \in B \Leftrightarrow x \in A$

קבוצות מיוחדות - $\emptyset$ - הקבוצה הריקה.

קצת קבוצות מיוחדות:

$$N := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$N^+ := \{x \in N \mid x > 0\}$$

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ - קבוצת המספרים השלמים.}$$

$$Q = \left\{ x = \frac{p}{n} \mid p, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

$$0.6 = 0.666666666\dots = \frac{2}{3} \in Q \text{ סימון:}$$

R – הממשיים. ראה אינפי 1 ... ☺

הגדרות:

• $A \subset B$ (A מוכלת ב-B, B מכילה את A, וסימון נוסף - $A \subseteq B$) אם כל איבר של A שייך גם ל-B.

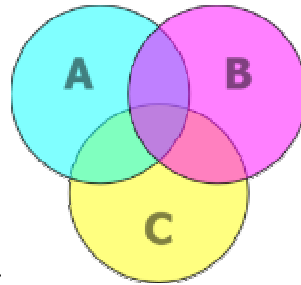
הגדרה פורמלית: נאמר ש $A \subset B$ אם $(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

○ הערה: $A \subset A$

$$\begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B, x \notin A \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{אם } A \subsetneq B \\ \neq \end{matrix} \quad \circ$$

$$\exists x \in A, x \notin B - A \not\subset B \quad \circ$$

הגדרה: A, B נקראות זרות אם אין להן איברים משותפים. דוגמא: $A = \{2, 4\}, B = \{\{2, 4\}\}$ - זרות.



דיאגרמת ון: U אחת

משפט: תהי A קבוצה, אזי $\emptyset \subset A$. **הוכחה:** צ"ל, $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$. לא קיים $x \in \emptyset$, ולכן – מתקיים באופן ריק.
הוכחה בדרך השלילה: נניח כי $\exists x \in \emptyset, x \notin A$. אבל לא קיים $x \in \emptyset$, ולכן הגענו לסתירה. מ.ש.ל.

משפט: יהיו A, B, C קבוצות כלשהן, אזי:

1. $A \subset A$ - תכונת הרפלקסיביות.
2. $\left. \begin{matrix} A \subset B \\ B \subset C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A \subset C$ - תכונת הטרנזיטיביות.
3. $\left. \begin{matrix} A \subset B \\ B \subset A \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = B$ - תכונת האנטי סימטריות.

נוכיח, בשביל הכיף, את 2:

הוכחה: צ"ל כי עם הנתון, אזי $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in C$.

$$x \in A \Rightarrow_{A \subset B} x \in B$$

$$x \in B \Rightarrow_{B \subset C} x \in C$$

מ.ש.ל.

פעולות על קבוצות:

הגדרות:

1. $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = A \cap B$
- a. הערה: $A, B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ זרות.
2. $\{x \mid x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$ (נשים לב – לא 'או' מוציא).
3. $\{x \mid x \in A, x \notin B\} = A \setminus B$
4. $A \oplus B = A \Delta B = \{x \mid x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\} = A \setminus B \cup B \setminus A$

טענות:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$
3. $A \oplus A = \emptyset$
4. $A \cup \emptyset = A$
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. $A \setminus A = \emptyset$

אם נדבר על הקבוצות ממקודם: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

משפט: לכל 3 קבוצות A, B, C מתקיים:

1. קומוטיביות (חוק החילוף)
 - a. $A \cap B = B \cap A$
 - b. $A \cup B = B \cup A$
2. חוק הקיבוץ – אסוציאטיביות:
 - a. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
 - b. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. חוק הפילוג – דיסטריבוטיביות:
 - a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(מאוד דומה לכפל וחיבור)

הוכחה (3b):

נראה הכלה משני הכיוונים (נובע מתכונת האנטי סימטריות).

כיוון ראשון – נראה כי $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. יהי $x \in A \cup (B \cap C)$ יתכנו 2 אפשרויות:

1. $x \in A$ - אזי $x \in A \cup B$ וגם $x \in A \cup C$, ולכן $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. מ.ש.ל.
2. $x \notin A$ - אזי $x \in (B \cap C)$, כלומר $x \in B \wedge x \in C$. ולכן $x \in (B \cup A)$ וגם $x \in (C \cup A)$, ולכן $x \in (B \cup A) \cap (C \cup A)$. מ.ש.ל.

כיוון שני – לתלמיד החרוץ.

שאלה: האם $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. **לא** – הכל קל לבדוק באמצעות דיאגרמת ון.

קצת הגדרות וסימונים

יהיו $A_1, \dots, A_n$ קבוצות, אזי

$$\{A_i\}_{i=1}^n := \{A_1, \dots, A_n\}.$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i := A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

נשים לב, שלמראית עין, יש בעיה בהגדרות הימניות-איחוד (או חיתוך) הן פעולות בינאריות. הצד הימני לא מוגדר בכלל! – אולם, בגלל שזוהי אסוציאטיבי, אזי זה לא ממש משנה.

$\bigcup_{i \in I} A_i$ - איחוד כל ה A_i עבור i המוכל ב I .

$$[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

ועל כן, הסימונים הבאים שקולים:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i \in [n]} A_i$$

הגדרה: תהי U קבוצה אוניברסלית (העולם) - $A \subset U$ תת קבוצה, אז $\bar{A} = A^c = U \setminus A$, ונקרא ל A^c ($\bar{A}$) המשלים (complementary) של A .

ניסוח פורמלי: $x \in A^c$ אם"מ $x \notin A$ (הערה – מניחים כי $x \in U$ - זה העולם).

כמובן ש $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^c$.

הערה: $\bar{U} = \emptyset$.

משפט:

$$1. \quad (A^c)^c = A$$

$$2. \quad A \cap A^c = \emptyset$$

$$3. \quad A \cup A^c = U$$

הוכחות:

1. נראה הכלה משני הכיוונים –

a. $A \subset (A^c)^c$. יהי $x \in A$. לכן $x \notin A^c$. ועל כן $x \in (A^c)^c$. מ.ש.ל.

b. $A \supset (A^c)^c$ - יהי $x \in (A^c)^c$. לכן $x \notin A^c$. ועל כן $x \in A$. מ.ש.ל.

חוקי דה-מורגן

$$1. (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$2. (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

הוכחה:

1. נראה הכלה משני הכיוונים.

$$a. (A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c. \text{ יהי } x \in (A \cap B)^c. \text{ על כן } x \notin (A \cap B).$$

יתכנו 2 אפשרויות:

$$i. x \notin A - \text{ אז } x \in A^c, \text{ ועל כן הוא שייך } x \in A^c \cup B^c$$

$$ii. x \in A - \text{ אבל } x \notin (A \cap B), \text{ ולכן } x \notin B, \text{ ועל כן } x \in B^c, \text{ וכמובן}$$

$$x \in A^c \cup B^c$$

$$b. (A \cap B)^c \supset A^c \cup B^c. \text{ יהי } x \in A^c \cup B^c. \text{ יתכנו 2 אפשרויות:}$$

$$i. x \in A^c \text{ אז } x \notin A. \text{ וכמובן ש } x \notin A \cap B, \text{ ועל כן } x \in (A \cap B)^c.$$

$$ii. x \in B^c, \text{ ועל כן } x \notin B, \text{ כלומר, } x \notin B, \text{ לכן } x \notin A \cap B, \text{ ולכן}$$

$$x \in (A \cap B)^c$$

2. לתלמיד החרוץ בבית.

מכפלה קרטזית של קבוצות

יהיו A, B קבוצות. אזי $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. נשים לב – זוגות סדורים – $(a, b) \neq (b, a)$.

האם $A \times B = B \times A$? לא (אלא אם $A = B$, ברכות לקטנוניים).

$$\begin{array}{l} A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\} \quad A = \{a, b\} \\ \text{דוגמא: אם} \quad \text{אז} \quad B = \{1, 2\} \\ B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b)\} \end{array}$$

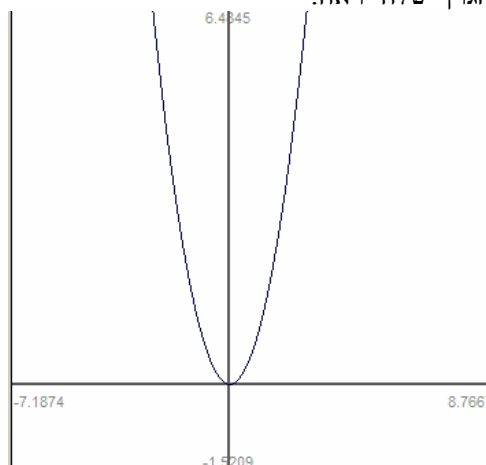
29.10.2006

פונקציות

יהיו A, B קבוצות. $f \subseteq A \times B$ נקראת פונקציה מ A ל B אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד כך ש $(a, b) \in f$.

דוגמא: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $f = \{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$

הגרף שלה יראה:



הקבוצה A נקראת **תחום** (domain), איבריה נקראים מקורות.

הקבוצה B נקראת טווח (range).

לכל $A_1 \subset A$ מסמנים $f(A_1) = \{f(x) \in B | x \in A_1\}$.

למשל, בדוגמא הקודמת, $f((0, 2)) = (0, 4)$. לכל $B_1 \subset B$ מסמנים

$f^{-1}(B_1) = \{x \in A | f(x) \in B_1\}$ (נשים לב – יתכן ש f אינה הפיכה).

הערה: $f: A \rightarrow B$ אז לכל איבר ב A קיימת תמונה יחידה ב B . אבל לאיבר ב B יתכן מספר כלשהו של מקורות (כולל 0).

טענה: $|f(A_i)| \leq |A_i|$

שיויון רק אם f חח"ע.

תכונות של פונקציות

A, B קבוצות, $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

הגדרה:

1. f נקראת חד חד ערכית (1-1 ערכית) אם לכל $a_1 \neq a_2 \in A$ מתקיים $f(a_1) \neq f(a_2)$.

2. f נקראת 'על' אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$.

הערה: אין קשר בין חח"עיות ל'על'יות של פונקציה.

ניסוחים פורמליים

1. f חח"ע אם"מ $a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$

2. f על אם"מ $f(A) = B$.

הרכבה של פונקציות

יהיו A, B, C קבוצות, $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$. נגדיר $f \circ g$ (הרכבה של g עם f) כ
$$g \circ f: A \rightarrow C := \forall a \in A, g \circ f(a) = g(f(a))$$
כמובן שלא מוגדר בהכרח $f \circ g$.

פונקציות מיוחדות:

1. $I_A: A \rightarrow A$ פונקציית הזהות על A - $I_A(a) = a$.
2. פונקציה $f: A \rightarrow B$ נקראת הפיכה מימין אם קיימת $g: B \rightarrow A$ כך ש $f \circ g = I_B$.
3. פונקציה $f: A \rightarrow B$ נקראת הפיכה משמאל אם קיימת $g: B \rightarrow A$ כך ש $g \circ f = I_A$.

שאלה למחשבה: האם $f \circ g = I_B$ גורר $f \circ g = I_A$? לא.

לדוגמא:

$$\begin{aligned}A &= \{a_1, a_2, a_3\} \\B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \\f(a_1) &= b_1, f(a_2) = b_2, f(a_3) = b_3 \\g(b_1) &= a_1 \\g(b_2) &= a_2 \\g(b_3) &= a_3 \\g(b_4) &= a_3\end{aligned}$$

בדוגמא הנ"ל, f הפיכה משמאל, לא להפך.

טענה: $g \circ f = I_A$ (ועל כן f הפיכה משמאל).

הערה: $f \circ g \neq I_B$ כי $f \circ g(b_4) = f(g(b_4)) = f(a_3) = b_3$

עוד הערה: מכך לא נובע ש f לא הפיכה מימין (כי אולי יש $h \neq g$ כך ש $f \circ h = I_B$).

טענה 1: תהי $f: A \rightarrow B$, אם קיימת ל f הפכית משמאל, $g: B \rightarrow A$, ו f היא על, אז g היא גם ההפכית של f מימין.

טענה 2:

א. f חז"ע אמ"מ קיימת לה הפכית משמאל.

ב. f על אמ"מ קיימת לה הפכית מימין.

נשים לב – ע"פ הטענה 2ב', f לא הפכית מימין, כי היא איננה על.

הוכחה – 2ב'

צ"ל על אמ"מ קיימת לה הפכית מימין, כלומר קיימת $g: B \rightarrow A$ כך ש $f \circ g = I_B$.
 $\Rightarrow$ קיימת $g: B \rightarrow A$, צ"ל f על, כלומר: לכל $b_0 \in B$ קיים $f_0 \in A$ כך ש $f(f_0) = b_0$.
יהי $b_0 \in B$. מתקיים $b_0 = f(g(b_0))$, כלומר נגדיר $a_0 := g(b_0)$, ואז מקור כנדרש.
 $\Leftarrow$ נניח ש f היא על. צ"ל שקיימת $g: B \rightarrow A$ כך ש $f \circ g = I_B$.

נגדיר את g באופן הבא – לכל איבר $b_0 \in B$ נבחר איבר מתוך $f^{-1}(\{b_0\})$ (אוסף המקורות של b_0). נגדיר $a_0 := g(b_0)$. f היא על, ולכן אפשר להגדיר זאת.

טענה: הפונקציה שהגדרנו g אכן מקיימת $f \circ g = I_B$. מקיימת, כי:
יהי $b_0 \in B$. $f(g(b_0)) = f(a_0) = b_0$.

הגדרה: $f: A \rightarrow B$ נקראית **הפיכה** אם קיימת לה הפכית מימין ומשמאל
הערה: מהטענות מקודם, אם g הפכית מימין, אז היא גם הפכית משמאל.

משפט: אם f פונקציה הפיכה, אז קיימת לה פונקציה הפכית יחידה. מסמנים אותה f^{-1} .
משפט: f היא פונקציה הפיכה אם"מ היא חח"ע ועל. $f \circ f^{-1} = I_B, f^{-1} \circ f = I_A$.

31.10.2006

$$g: B \rightarrow A, f: A \rightarrow B$$

סיכום ביניים

$f \circ g = I_B$ אם קיימת g כך ש f **הפיכה מימין**
 $g \circ f = I_A$ אם קיימת g כך ש f **הפיכה משמאל**
 f נקראת **הפיכה** אם היא הפיכה מימין ומשמאל.

טענה A:

1. f הפיכה משמאל אמ"מ היא $1-1$ ערכית
2. f הפיכה מימין אמ"מ היא על

טענה B:

אם f הפיכה משמאל, g ההפכית משמאל, אזי אם f גם הפיכה מימין $\Leftarrow g$ הפכית של f מימין.

מכאן נובע, כי $f: A \rightarrow B$ הפיכה אמ"מ קיימת $g: B \rightarrow A$ כך ש $f \circ g = I_B, g \circ f = I_A$

g נקראת הפכית של f , ו f, g נקראות פונקציות הפוכות (הופכיות).

טענה: אם קיימת $f: A \rightarrow B$ פונקציה הפכית g אזי היא יחידה.

הוכחה שלי: נניח בשלילה כי קיימת $g, h: B \rightarrow A$ הינן הפכיות של f . נטען כי $g = h$. צ"ל כי
 לכל $b \in B$ מתקיים $g(b) = h(b)$. יהי $b \in B$. מכך של f הפכית, היא על, ולכן קיים a כך
 $f(a) = b$. מהגדרה, צריך להתקיים $g(b) = a$ (אחרת $g \circ f \neq I_A$). כנ"ל $h(b) = a$
 (אחרת $h \circ f \neq I_A$). מכאן $g = h$.

הוכחה של חגית:

$$g(b) = h \circ f(g(b)) = h(f(g(b))) = h(b)$$

לכן ניתן לסמן את ההפכית של f : f^{-1} .

משפט: פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל

שאלה:

1. האם $g \circ f$ חח"ע $\Leftarrow f$ חח"ע?
2. האם $g \circ f$ חח"ע $\Leftarrow g$ חח"ע?

תשובות:

1. יהו $x, y \in A$ כך ש $f(x) = f(y)$. נפעיל g , ונקבל $g(f(x)) = g(f(y))$.
2. לא נכון.

תזכורת:

אם A סופית, $|A| =$ מספר האיברים ב A , ונקרא גם 'עוצמה' של A .

משפט: יהיו A, B קבוצות סופיות, אז $|A| = |B|$ אם"מ קיימת $f: A \rightarrow B$ חח"ע ועל.

הוכחה: $\Leftarrow$ אם $|A| = |B| = n$, נגדיר $A = \{a_i\}_{i=1}^n$, $B = \{b_i\}_{i=1}^n$. נגדיר $f(a_i) = b_i$. ברור כי היא חח"ע ועל.
 $\Rightarrow |B| =_{(2)} |f(A)| =_{(1)} |A|$ (1 כי f חח"ע, 2 כי היא על).

עוצמות של קבוצות

הגדרה: (הרחבה של המושג עוצמה לקבוצות אינסופיות): יהיו A, B קבוצות. נאמר כי A, B שקולות ונסמן $A \sim B$ אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: A \rightarrow B$.

סימון: אם $A \sim B$ נאמר של A ול B יש את אותה עוצמה ונסמן $|A| = |B|$.

דוגמא: הקטע $A = [-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

נתבונן ב $B = [-2, 2]$. נראה כי $|A| = |B|$, ע"י הגדרת $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 2x$.

הערה: אם A, B קבוצות סופיות, אז $A \subset B, A \neq B$ אזי $|A| \neq |B|$. אבל אם A, B בהחלט יתכן $A \subset B, A \neq B$ אבל $|A| = |B|$.

סימון: $|N| = \aleph_0$.

טענה: $|N| = \aleph_0$. נראה התאמה חח"ע ועל בין $f: N^+ \rightarrow N$ $f(n) = n - 1$. ברור כי היא חח"ע ועל.

סיפור: יש מלון עם $\aleph_0$ חדרים. יש פסטיבל, וכל החדרים תפוסים. בלילה מגיע אורח, ורוצה להכנס למלון, ושואל אם יש חדר פנוי, אבל אין. מנהל המלון עונה – נבקש מכל אורח לזוז לחדר הבא.

שאלה: יש עוד מלון, בו יש עוד $\aleph_0$ חדרים, וירדו גשמים, והיתה הצפה במלון. $\aleph_0$ אנשים רוצים לבוא. אפשר לסדר להם מקום? כן! – אם אתה גר בחדר n , תעבור לחדר $2n$. התפנו כל המקומות האי זוגיים, ובהם יש מקום לעוד מלון מוצף.

שאלה 2: $\aleph_0$ מלונות, כ"א $\aleph_0$ חדרים. האם אפשר לשכן את כולם במלון עם $\aleph_0$ חדרים? כמובן שלא.

5.11.2006

עוצמה של קבוצות

תהי X קבוצה, נגדיר $P(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$ (אוסף כל תת הקבוצות של X).

נגדיר יחס: $A \sim B$ אם $|A| = |B|$ (קיימת $f: A \rightarrow B$ חח"ע ועל).

טענה: היחס ' $\sim$ ' הוא יחס שקילות על $P(X)$.

דוגמא: $X = \{1, 2, 3\}$ אזי $P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

כאן המחלקות שקילות יהיו:

$$C_0 = \{\emptyset\}, C_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, C_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, C_3 = \{\{1, 2, 3\}\}$$

הוכחה:

- **רפלקסיביות:** $A \sim B$. תהי $I_A := f$. ברור כי f חח"ע ועל.
- **סימטריות:** צ"ל כי אם $A \sim B$ אזי $B \sim A$. $A \sim B$, ועל כן קיימת $f: A \rightarrow B$ חח"ע ועל. לכן f הפיכה, וקיימת $f^{-1}: B \rightarrow A$ חח"ע ועל.
- **טרנזיטיביות:** נתון כי $A \sim B, B \sim C$, כלומר קיימות $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ חח"ע ועל. צ"ל קיום $h: A \rightarrow C$ חח"ע ועל. תהי $h = g \circ f$. הוכחנו בתרגיל כי h כזו חח"ע ועל. ועל כן, סיימנו.

הגדרה: קבוצה A נקראת בת מניה אם A סופית או $|A| = \aleph_0$ (תזכורת - $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$). (לא פורמלי - קב' בת מניה היא קבוצה שאפשר לסדר את איבריה בשורה (בסדרה...))

הקבוצות הבאות הן בנות מניה:

- $\mathbb{N}$ (טבעיים עם 0)
- $\mathbb{N}^+$ (טבעיים בלי 0)
- $\mathbb{Z}$ (שלמים)
- $\mathbb{Q}$ (רציונליים).

טענה: $\mathbb{Z}$ היא בת מניה.

הוכחה: נגדיר $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ לכל $m \in \mathbb{Z}$ יהי $f(m) = \begin{cases} 2m, m \geq 0 \\ -2m-1, m < 0 \end{cases}$. ברור כי f חח"ע ועל.

טענה: $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

ראשית, נראה ש $|\mathbb{Q}^+| = \aleph_0$. אחרי זה אפשר לעשות את אותו טריק שעשינו עם $\mathbb{Z}$ קודם... נתבונן בטבלה הבאה:

m/n	1	2	3	4	5	6
1	$f(1) = \frac{1}{1}$	$f(2) = \frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	...	
2	$f(3) = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	...	
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$		
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$		
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{4}$		

ברור כי כל איבר מ $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}^+, n \neq 0 \right\}$ נמצא שם. נעבור על כל האלכסונים משמאל

לימין, וככה נכסה את כולם. כל מספר רציונלי מופיע $\frac{m}{n}$ מופיע ברשימה לכל המאוחר באלכסון ה m .

ניסוח פורמלי: (wikipedia) הנה הוכחתו של [גאורג קנטור](#) שקבוצת הזוגות של מספרים טבעיים היא בת-מנייה. נסדר את הזוגות באופן הבא: ראשית יבוא $(1,1)$, אחריו $(1,2)$ ו- $(2,1)$, אחר-כך שלושת הזוגות (i,j) שסכום הקואורדינטות שלהם $i+j=4$, אחר-כך ארבעת הזוגות שסכום הקואורדינטות שלהם 5, וכן הלאה. (הזוגות (i,j) שסכומם n מסודרים לפי הערך של i , מהקטן לגדול). ברור שהרשימה כוללת כל זוג של מספרים טבעיים, ולכן אוסף הזוגות בן-מנייה.

מן ההוכחה הזו נובע למשל שאוסף המספרים הרציונליים (החיוביים) הוא בן מנייה: יש פונקציה מן הזוגות של מספרים טבעיים המכסה את כל המספרים הרציונליים, $(i,j) \rightarrow \frac{i}{j}$. העובדה שכל מספר רציונלי מתקבל יותר מפעם אחת (ולמעשה אינסוף פעמים) אינה מפריעה - אם רוצים ליצור רשימה שבה כל רציונלי יופיע פעם אחת, אפשר לדלג על זוגות (i,j) שאינם זרים; או לחילופין להשתמש במשפט [קנטור-שרדר-ברנשטיין](#).

האם כל קבוצה בת מנייה?

טענה: $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. נראה קיום של פונקציה $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שהיא חז"ע ועל.

הוכחה: ראה לעיל.

הגדרה: יהו A, B קבוצות, נאמר שעצמתה של A קטנה או שווה מעצמתה של B ונסמן $|A| \leq |B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע $f: A \rightarrow B$.

נאמר ש $|A| < |B|$ אם $|A| \leq |B|$ אבל $|A| \neq |B|$, כלומר – יש פונקציה $f: A \rightarrow B$ חח"ע, אבל אין פונקציה על.

לדוגמא: $|\{1,2\}| < |\{1,2,3\}|$.

טענה: $|[0,1]| > \aleph_0$.

הקדמה: לכל מספר בקטע $(0,1)$ קיים יצוג עשרוני אינסופי יחיד. לדוגמא - $0.8 = 0.799999\dots$

הוכחה: נראה ש $|\mathbb{N}| \leq |[0,1]|$. נגדיר $f: \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ חח"ע ע"י $f(n) = \frac{1}{n+2}$.

כעת, נראה שאין $g: \mathbb{N} \rightarrow ([0,1])$ על. נניח בשלילה שיש פונקציה g כנ"ל. לכל n נרשום את $g(n)$ בפיתוח עשרוני אינסופי. לדוגמא:

$$g(1) = 0.a_{11}a_{12}\dots$$

$$g(2) = 0.a_{21}a_{22}\dots c$$

$$g(3) = 0.a_{31}a_{32}\dots$$

ברור כי $a_{ij} \in \{0,1,\dots,9\}$. נראה ש g איננה על. נראה שקיים $b = 0.b_1b_2\dots$ שאיננו מופיע

ברשימה. נגדיר את $b_i := \begin{cases} 2, & a_{ii} = 1 \\ 1, & a_{ii} \neq 1 \end{cases}$ (הספרה ה i של b).

$$b = 0.221\dots$$

טענה: $b \neq g(n)$ לכל n .

הוכחה: כי בפיתוח העשרוני של b הם שונים בספרה (ע"פ הגדרת b).

הוכחנו בעצם כי אין $f: \mathbb{N} \rightarrow (0,1)$ שהיא על. אם ננסה להוכיח אותו דבר על $(0,1)$ של $\mathbb{Q}$, ואז, יתכן שה b הנ"ל הוא אי-רציונלי, ולכן ההוכחה תיפול.

7.11.2006

מכפלה קרטזית

A, B קבוצות, אזי $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$. ברור כי אם $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$ אזי גם $A \times B = \emptyset$.

איך נגדיר $A \times B \times C$? אולי מתקיים $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$? לא! זה מוגדר שונה לגמרי.

$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

אבל אפשר להגדיר התאמה חז"ע ועל¹ ביניהם, ועל כן כמובן $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$.

נגדיר: $f: (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$ ונראה כי היא חז"ע ועל. נגדיר את f כך:

$$f((a, b), c) = (a, (b, c))$$

תזכורת: התנאים הבאים שקולים:

- f הפיכה
- f חז"ע ועל
- קיימת g כך ש $f \circ g = I$ וגם $g \circ f = I$

אנו נראה קיום של פונקציה הפוכה (את g הנ"ל). תהי $g: A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$.

$$g(a, (b, c)) = ((a, b), c) \quad \text{נראה כי} \quad g \circ f = I_{(A \times B) \times C} \quad \text{וגם} \quad f \circ g = I_{A \times (B \times C)}$$

טענה: $g \circ f = I$

$$g \circ f((a, b), c) = g(f((a, b), c)) = g((a, (b, c))) = ((a, b), c) \quad \text{הוכחה:}$$

טענה: $f \circ g = I$

הוכחה: כמו הקודמת.

1. הגדרה: $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$, או בעברית: אוסף השלשות

הסדורות של איברים מ A, B, C .

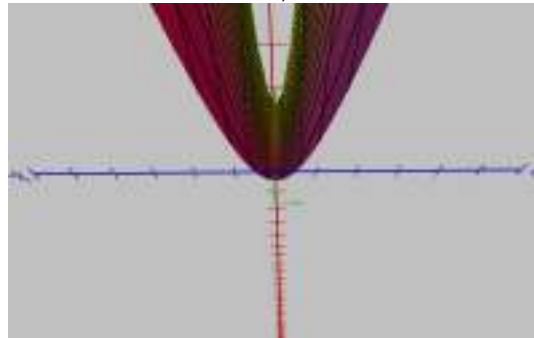
2. הגדרה כללית: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$ הוא אוסף המיות הסדורות של

איברים מ $A_1, \dots, A_n$.

¹ איזומורפיזם

3. $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ times}}$. לדוגמא - $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$, וזהו

המרחב התלת מימדי. איך נראה המרחב התלת מימדי?



בעיות מנייה

(בואו נלמד לספור')

כללי משחק: אם לא הגדרנו אחרת, אזי כל הקבוצות הם סופיות

טענה: (עקרון המכפלה) $|A \times B| = |A| \times |B|$

הוכחה 1: בעזרת מטריצה $|A| = m$, $|B| = n$. נבנה מטריצה C מסדר $m \times n$, ונשים

ב $C_{ij} = (a_i, b_j)$. מן הסתם זו תהיה מטריצה של זוגות סדורים.

ברור כי שורות המטריצה מתאימות ל A . המטריצה תראה כך:

$$C = \begin{pmatrix} (a_1, b_1) & \dots & (a_1, b_n) \\ \dots & & \dots \\ (a_m, b_1) & \dots & (a_m, b_n) \end{pmatrix}$$

ברור כי $|A \times B|$ שווה למספר האיברים במטריצה, שזה $|A||B|$. מ.ש.ל. $m \cdot n = |A||B|$.

הוכחה 2: בעזרת עץ אפשרויות. ניקח את איברי A , $a_1, \dots, a_m$. עבור כל a_i , הוא יכול להתחבר

ל $b_1, \dots, b_n$. כלומר, n אפשרויות. סה"כ, מספר האפשרויות הוא $n \cdot m$, כלומר $|A||B|$.

טענה: עקרון המכפלה ל-3 קבוצות - $|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|$.

הוכחה 1: באמצעות עקרון המכפלה ל-2 קבוצות - להראות (באמצעות ההתאמה החז"ע ועל) כי

$$|A \times B \times C| = |(A \times B) \times C|$$

$$|(A \times B) \times C| = |A \times B||C| = |A||B||C|$$

הוכחה אפשרית: הכללה של הוכחה ע"י מטריצה $\leftarrow$ קוביה תלת מימדית. אבל זה לא כיה.

הוכחה 2: אפשר להכליל את ההוכחה באמצעות עץ אפשרויות. נניח כי $|A| = m, |B| = n, |C| = k$.

צריך לראות כמה שלשות מהצורה $(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C$ אפשר לבנות.

יהי a_i כלשהו (יש m כאלה). אפשר לשים לו כל אחד מ b_j (יש n אפשרויות). לכל a_i, b_j אפשר

לבחור c_i כלשהו (יש k כאלה). סה"כ, יש לי $m \cdot n \cdot k$ אפשרויות, כלומר $|A||B||C|$ אפשרויות.

עקרון המכפלה לח קבוצות: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$

שאלה: נניח שאני מופיעה בתלבושת, שכוללת מעיל, צעיף וכובע. יש לנו 2 מעילים, 4 צעיפים, 6

כובעים. עם כמה תלבושות אפשר להופיע? אם חייבים את כולם (אי אפשר לבוא בלי צעיף), אז יש

לנו $2 \times 4 \times 6 = 48$ אופציות. אם לא חייבים מעיל, אז יש לנו $3 \times 4 \times 6 = 72$ אופציות.

2 מערך מלבני של מספרים. לדוגמא (1) היא מטריצה מסדר 1×1 . $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ היא מטריצה מסדר 2×2 . אם

C מטריצה, אזי C_{ij} הוא האיבר בשורה ה- i ובעמודה ה- j .

12.11.2006

שאלה: כמה מספרים תלת ספרתיים יש? (תלת ספרתי - $[100, 999]$) -

$$= 999 - 100 + 1 = 900$$

למה ה-1? נתבונן בשאלה פשוטה יותר - כמה מספרים יש בין 1 ל-3? $3 - 1 + 1 = 3$

נענה על השאלה בעזרת עקרון המכפלה - במקום של המאות יש לי 9 אפשרויות, בעשרות 10, ובאחדות גם 10. סה"כ, ע"פ עקרון המכפלה $9 \times 10 \times 10 = 900$.

הגדרה: יהו A, B קבוצות $B^A = \{f \mid f: A \rightarrow B\}$

טענה: לכל קבוצה A , מתקיים $|A^{[n]}| = |A|^n$. (תזכורת - $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$) ע"פ הגדרה,

$$A^n = \left\{ \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ times}} \right\}, A^{[n]} = \{f \mid f: [n] \rightarrow A\}$$

הוכחה: נראה התאמה חח"ע ועל בין A^n ל- $A^{[n]}$.

דוגמא: $[n] = \{1, 2, 3\}$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. דוגמאות לאיברים ב- $A^{[n]}$ - פונקציות

שהתחום שלהם הוא $\{1, 2, 3\}$, והטווח הוא $\{a_i\}_{i=1}^4$.

תהי $f \in A^{[n]}$ $f \leftrightarrow (f(1), f(2), \dots, f(n)) \in A^n$ - כלומר, כל וקטור ב- A^n מגדיר חד משמעית פונקציה. (למה זה מגדיר זאת? כי פונקציה נקבעת ע"י ההחלטה מהי התמונה של כל איבר בתחום). כל שני וקטורים שונים מגדירים פונקציות שונות. לכל פונקציה מתאים וקטור. לכן ההתאמה היא חח"ע ועל.

מסקנה: $|A^{[n]}| = |A|^n$. מכיוון ש- $|A^n| = |A|^n$ נובע ש- $|A^{[n]}| = |A|^n$.

נתזור לדוגמא: אם $A = \{a_i\}_{i=1}^4$, $n = 3$ אזי $|A^{[n]}| = 4^3$.

מקרה פרטי: $A = \{0, 1\}$ אז $|A^{[n]}| = |\{0, 1\}^n| = 2^n$.

תזכורת: תהי A קבוצה, אזי $p(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$, כלומר - אוסף כל תת הקבוצות של A .

טענה: תהי A קבוצה, אזי $|P(A)| = 2^{|A|}$.

הוכחה: נראה התאמה חח"ע ועל בין $P(A)$ לבין $\{0, 1\}^{|A|}$.

תהי $A = \{a_i\}_{i=1}^n$. תהי $B \in P(A)$. נתאים ל- B וקטור באורך n , $(r_1, \dots, r_n)$, כאשר

$$r_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B \\ 0, & a_i \notin B \end{cases}$$

לדוגמא, עבור $n = 5$, עבור $B = \emptyset$, נתאים לו את הוקטור $(0, 0, 0, 0, 0)$.

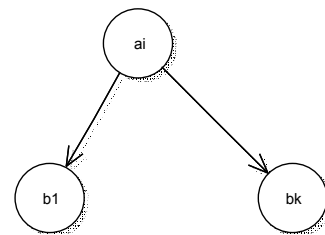
אם $B = (a_3, a_4)$, אז נתאים ל- B את $(0, 0, 1, 1, 0)$. אם $B = A$, אזי נתאים לו את $(1, 1, 1, 1, 1)$.

ההתאמה חח"ע: לשתי קבוצות שונות יתאימו וקטורים שונים. **ההתאמה על:** לכל קבוצה יש וקטור.

הוקטור $(r_1, \dots, r_n)$ שהוגדר באופן הבא $r_i = \begin{cases} 1, a_i \in B \\ 0, a_i \notin B \end{cases}$ נקרא **הוקטור האופייני (המציין)** של הקבוצה B.

הרחבה של עקרון המכפלה

תהי $R \subseteq A \times B$. אם לכל $a \in A$ מתקיים $K = |\{b \in B \mid (a, b) \in R\}|$ (כאשר K מספר קבוע), אז $|R| = K|A|$.
הוכחה: באמצעות עץ אפשרויות:



. לכל a_i מתאימים $\{b_i\}_{i=1}^k$.

דוגמאות:

1. בכמה מספרים תלת ספרתיים אין שתי ספרות זרות?
בספרת המאות, נבחר איבר $\{1, \dots, 9\}$ - כלומר 9 אפשרויות
בספרת העשרות: נבחר איבר בין 9 אפשרויות $\{0, \dots, 9\}$ (בלי האיבר שבחרנו במאות).
בספרות האחדות: נבחר איבר בין 8 האפשרויות שלא בחרנו בקודמות.
בסה"כ - $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ אפשרויות.
2. בכמה מספרים תלת ספרתיים אין שתי ספרות צמודות זהות? $9^3 = 729$. למה?
בספרת המאות - $\{1, \dots, 9\}$ - 9 אפשרויות
בספרת העשרות - $\{0, \dots, 9\}$ בלי האיבר שבחרנו קודם, כלומר 9 אפשרויות.
בספרות האחדות - 9 אפשרויות - כל האפשרויות בלי הספרה הקודמת.
3. כמה מספרים אי זוגיים יש בין 0 ל-99 עם ספרות שונות?
ספרת עשרות - $\{0, \dots, 9\}$ - 10 אפשרויות
ספרות יחידות - $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ - 5 אפשרויות. סה"כ - 50 אפשרויות.

עקרון הסכום: אם A, B קבוצות זרות אזי $|A \cup B| = |A| + |B|$

הרחבה לעקרון הסכום - $A \subseteq B$ אז $|B \setminus A| = |B| - |A|$

הוכחה:

טענת עזר: $B = B \setminus A \cup A$

הוכחה: לתלמיד החרוץ.

$A, B \setminus A$ קבוצות זרות, ולכן $|B \setminus A| = |B| - |A| \Leftrightarrow |B| = |B \setminus A| + |A|$.

$$\text{הגדרה: } n! = \prod_{i=1}^n i$$

נשים לב כי $0! := 1$

הגדרה: תהי A קבוצה, $|A| = n$ פרמוטציה (תמורה) של A היא סדרה באורך n שבה מופיע כל איבר מ- A .

לדוגמא: אם $A = \{1, 2, 3\} = [3]$, אז הפרמוטציות של A הן:

1 2 3

1 3 2

2 3 1

. נשים לב שזה יכול לייצג את מספר האופנים להושיב את אבא דוב, אמא דובה, ותינוק

2 1 3

3 1 2

3 2 1

דובון על ספסל.

טענה: מספר התמורות על הקבוצה $[n]$ היא $n!$.

הוכחה 1: יש לי n מקומות, ואנו בוחרים איברים שמתאימים למקום הראשון. יש לי n אופציות. בשני

$n-1$. וכך הלאה (במקום האחרון תהיה לי אפשרות אחת). הפלא ופלא – יש לנו $n! = \prod_{i=1}^n i$ תמורות.

הוכחה 2: עץ אפשרויות.

14.11.2006

תזכורת: תמורה של קבוצה $|A| = n$ היא סדרה באורך n שבה מופיע כל איבר של A בדיוק פעם אחת.

יש $n!$ תמורות על קבוצה $|A| = n$.

הוכחה 1: שיעור שעבר.

הוכחה 2: באינדוקציה. נסמן מספר התמורות של הקבוצה $[n]$ כ $f(n)$.

טענה: $f(n) = n \cdot f(n-1)$, כאשר $f(1) = 1$.

בסיס האינדוקציה: $f(1) = 1$

שלב האינדוקציה: נניח כי הטענה נכונה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n . נתון כי עבור $n-1$ הסדרה בגודל $n-1$ יש $f(n-1)$ אפשרויות. את האיבר ה- n אפשר לשים בכל מקום בסדרה (ראשון, אחרון, או באמצע) – סה"כ n מקומות. לכן יש לנו $nf(n-1)$ אפשרויות.

ברור, מהגדרת $f(n)$, כי $f(n) = n!$.

הוכחה 3: תהי $[n]$ הקבוצה הנתונה ונסדר את האיברים של $[n]$ בשורה, בשלבים, כאשר בכל שלב מחליטים על מיקומו היחסי של האיבר. בשלב הראשון, נבחר מקום ל a_1 . אז, ל a_2 יש שני מיקומים

יחסיים – מימין ל a_1 , ומשמאלו. בשלב השלישי, צריך להכניס את a_3 , יש 3 אופציות (ביניהם, מימין, משמאל). וכך הלאה. סה"כ $n!$ אופציות.

תרגיל: בכמה תמורות של 8 האותיות A, B, C, D, E, F, G, H , האותיות G, H צמודות?

דרך א: נקח את GH בתור איבר יחיד, ואז יש לנו $2 \cdot 7!$ תמורות (הוא בגלל שאפשר HG ו GH).

דרך ב: מיקום יחסי של A – אופציה אחת.

2 – B

3 – C

4 – D

5 – E

6 – F

7 – G

2 – H

טענה: מספר הפוקנציה החז"ע $f: [n] \rightarrow [n]$ היא $n!$

הוכחה: יש התאמה חז"ע בין f כנ"ל לבין תמורה של $[n]$. $(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow (f(1), \dots, f(n))$.

מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך n איברים $[n]$

כאשר:

1. מותר / אסור לבחור אותו איבר מספר פעמים.

2. סדר הבחירה חשוב / לא חשוב

(סה"כ – 4 בעיות)

עם חזרות (מותר לבחור מס' פעמים אותו איבר): השאלה היא בעצם מהו מספר הסדרות באורך k של

איברים מתוך $[n]$.

סה"כ יש לנו k מקומות, בכל אחד מהם n אפשרויות, כלומר סה"כ n^k בחירות אפשריות.

בלי חזרות, הסדר חשוב: מהו מספר הסדרות באורך k של איברים שונים מתוך $[n]$?

במקום הראשון n אפשרויות

במקום השני $n - 1$ אפשרויות

במקום האחרון $n - k + 1$ אפשרויות.

נשים לב, שנדרש כי $n \geq k$ (אחרת אין אפשרויות).

סה"כ - $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$. זה שווה ל $\frac{n!}{(n - k)!}$.

נראה בצורה אחרת שמספר הסדרות באורך k של איברים שונים מתוך $[n]$ הוא $\frac{n!}{(n - k)!}$

נגדיר התאמה בין סדרות חוקיות באורך k לבין סדרות חוקיות באורך n .

$$(a_1, \dots, a_k) \leftrightarrow \left(a_1, \dots, a_k, \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{any order of the rest of the elements}} \right)$$

כל סדרה באורך k מתאימה ל $(n - k)!$ סדרות באורך n , ולכן מספר הסדרות החוקיות באורך k

הוא $\frac{n!}{(n - k)!}$.

19.11.2006

סימון: איחוד זר, נסמן $C = A_1 \cup A_2$, הכוונה היא $C = A_1 \cup A_2$
 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
מותר לכתוב - $\{1,2,3\} \cup \{4,5\}$, אסור לכתוב $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$

בחירת k איברים מתוך n איברים

1. חזרות מותרות, הסדר חשוב - n^k

2. חזרות אסורות, הסדר חשוב - $\frac{n!}{(n-k)!}$

3. חזרות אסורות, הסדר לא חשוב.

○ נסמן S – אוסף הסדרות באורך k של איברים שונים מתוך $[n]$. $|S| = \frac{n!}{(n-k)!}$

○ נסמן L – אוסף התת קבוצות בגודל k של $[n]$. כל איבר ב L מתאים ל $k!$ איברים של S

$$|L| = \frac{|S|}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ , ועל כן } |S| = k!|L|$$

$$\text{סימון: } \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ אם } k > n \text{ , אז}$$
$$\binom{n}{k} = 0 \text{ אם } k < 0 \text{ , אז}$$

דוגמא: לוטו - 'צריך לנחש רק 6'

$\{1, \dots, 45\}$. בכמה אופנים ניתן למלא טופס? $\equiv$ כמה קבוצות בגודל 6 יש ל $[45]$?

$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{(39)!6!} = 8,145,060$$

ב"טוטו" 3 אפשרויות, 16 מקומות. $3^{16} = 43,046,721$

דוגמא 2: בכמה אופנים ניתן לבחור ועד של 6 דיירים מתוך 45? $\binom{45}{6}$. אם אני לא בועד, אז ?

$$\binom{44}{6} \text{ . אם אני כן בועד, אז } \binom{44}{5}$$

בכמה דרכים אפשר להושיב 6 אנשים על ספסל עם 45 מקומות? $6! \cdot \binom{45}{6}$.

דוגמא: בכמה דרכים אפשר לסדר על המדף m עותקים זרים של ספר אלגברה, ו- k עותקים זהים של ספר אינפי?

$$\binom{m+k}{m} \quad (\text{בוחרים איפה נשים אלגברה, והשאר נקבע}).$$

4. בוחרים k איברים מתוך n , חזרות מותרות, הסדר לא חשוב. נשים לב, אסור לסמן כקבוצה - קבוצה לא מאפשרת חזרות. בחירה חוקית נקבעת ע"פ מספר הפעמים שבהם בחרנו את האיבר i (נסמן x_i).

○ דרישות:

▪ לכל $x_i \geq 0$, x_i טבעי.

$$\sum_{i=1}^n x_i = k \quad \text{▪}$$

○ בחירה של k איברים כאשר חזרות מותרות והסדר לא חשוב מתאימה (חח"ע ועל) לסדרה

של $n-1$ ים, ו- k אפסים, באופן הבא:

▪ $n-1$ 'אחדים', שנניח ביניהם / מצדיהם של האפסים מחלקים אותם ל- n חלקים.

דוגמאות: עבור $n=8, k=3$, אזי 011101011 (סדרה עם 3 אפסים ו-7 ים), מתאימה לבחירה 'חוקית' של 3 איברים מתוך $[7]$. בחרנו את 1, 4, 5.

אם אנו רוצים לבחור את 1, 4, 4 אז נסמן 011100111.

מספר הבחירות החוקיות הוא מספר הסדרות של k אפסים, עם $n-1$ אחדים, כלומר

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

בכמה דרכים אפשר לחלק k תפוזים ל- n ילדים? $\binom{k+n-1}{k}$. כל חלוקה כזו מתאימה חח"ע ועל

לבחירה חוקית ממקודם. שמים $n-1$ מקלות שיחלקו את k התפוזים ל- n קבוצות, כל אחת מתאימה לילד.

שאלה: כמה פתרונות (x_i) שלמים אי שליליים יש למשוואה $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

(0,4)

(1,3)

דוגמא: כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש ל- $x_1 + x_2 = 4$? (2,2)

(3,1)

(4,0)

(כל פתרון מתאים לבחירה חוקית של 4 איברים מתוך $[2]$).

$$(0,4) \leftrightarrow 2222$$

$$(1,3) \leftrightarrow 1222 \quad \text{נשים לב -}$$

$$(2,2) \leftrightarrow 1122$$

נגדיר התאמה – פתרון 'חוקי' של המשוואה $(x_1, \dots, x_n)$ - בחירה של k איברים מתוך $[n]$, עם חזרות, הסדר לא חשוב, שבה האיבר i נבחר x_i פעמים. בסה"כ, התשובה היא $\binom{n+k-1}{k}$

שאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש לאי השוויון $x_1 + \dots + x_n \leq k$?

תשובה: נגדיר התאמה (חח"ע ועל) בין $(x_1, \dots, x_n)$ שהוא פתרון של אי השוויון לבין פתרון אי שלילי

עם מספרים שלמים $(x_1, \dots, x_n, y)$, פתרון של המשוואה $\sum_{i=1}^n x_i + y = k$. לזה יש

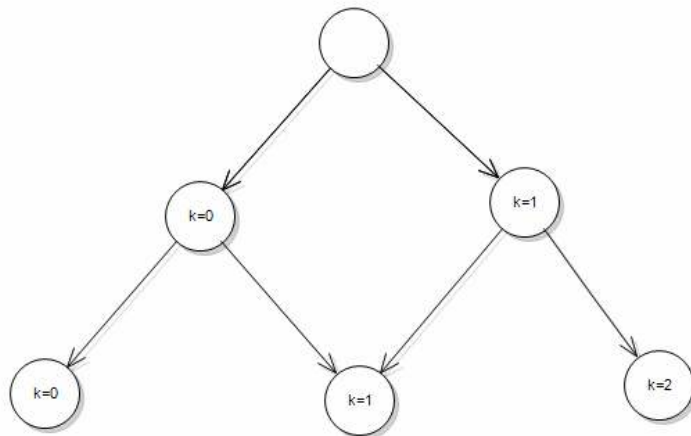
$$\binom{n+1+k-1}{k} = \binom{n+k}{k}$$

משולש פסקל

בשורה 0 – קודקוד 1.

שורה 1 – שני קודקודים.

שורה 2 – שלושה קודקודים.



נסמן C_k^n - מספר המסלולים המובילים מקודקוד המשולש לקודקוד ה- k בשורה ה- n ית. לדוגמא:

$$c_0^0 = 1, c_0^1 = 1, c_1^1 = 1.$$

$$c_0^2 = 1, c_1^2 = 2, c_2^2 = 1$$

$$c_k^n = \binom{n}{k} \quad \text{טענה:}$$

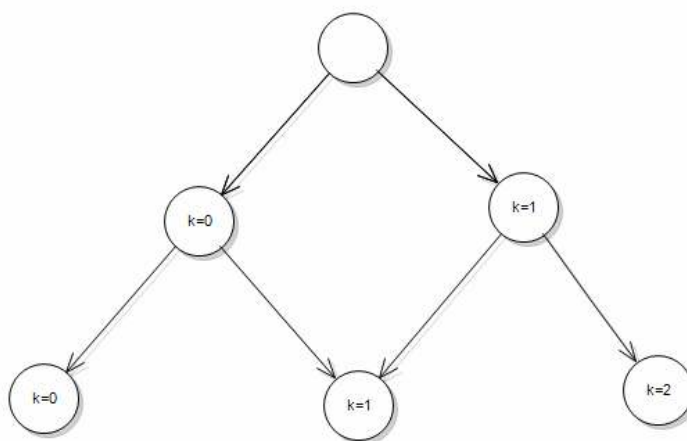
21.11.2006

ציטוט השיעור: 'כולם יודעים מה זה $\sum$? מאיפה למדתם את זה?'

הודעות

- השבוע אין שעת קבלה
- בשבוע 8 יהיה בוחן ביום ג' בזמן השיעור (12.12.06) – יהיה גם שיעור. החומר לבוחן יכלול עד שבוע 6 כולל.

משולש פסקל



יש כאן שלוש שורות (0,1,2). הקודקודים בשורה ה- n ממוספרים משמאל לימין $0 \dots n$.
נגדיר מספר המסלולים מקודקוד המשולש (העליון) לקודקוד שנמצא ה- k בשורה ה- n כ- c_k^n .
קצת דוגמאות:

$$c_0^0 = 1$$

$$\forall n, c_0^n = 1$$

$$\forall n, c_n^n = 1$$

$$\forall n, c_1^n = n$$

$$c_k^n = \binom{n}{k} \quad \text{טענה:}$$

הוכחה: כל מסלול מקודקוד המשולש לקודקוד ה- k בשורה ה- n ית מורכב מ- n חלקים, הכוללים k "פניות ימינה", ו- $n-k$ פניות שמאלה.

צריך לבחור k שלבים מתוך n שבהם 'נפנה ימינה'. יש $\binom{n}{k}$ בחירות אפשריות. כל בחירה אפשרית היא מסלול כמבוקש.

זהות פסקל

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{0} = 1 \text{ אז } k = 0 \text{ אם } k = 0$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{-1} = 0 \text{ אז } k = 0 \text{ אם } k = 0, \text{ ועל כן, } \binom{n-1}{-1} = 0 \text{ , שהגדרנו כי } \binom{n-1}{-1} = 0$$

$$\binom{n-1}{0} = 1 \text{ ועל כן מתקיים השיויון במקרה של } k = 0.$$

$$\text{אם } k = n. \text{ באגף שמאל } \binom{n}{n} = 1. \text{ באגף ימין } \binom{n-1}{n} = 0, \binom{n-1}{n-1} = 1, \text{ ועל כן מתקיים.}$$

כעת, עבור $1 \leq k \leq n-1$:

הוכחה 1: באמצעות מסלולים - $c_k^n = \binom{n}{k}$ - מספר המסלולים לקודקוד k בשורה בשורה

ה n . שני הקודקודים שמגיעים אליו הם $k-1$ ו k בשורה $n-1$ - כלומר, c_{k-1}^{n-1} ו c_k^{n-1} ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ ומזה מגיעים לשיויון}$$

הוכחה 2: קומבינטורית - $\binom{n}{k}$ היא מספר התת קבוצות בגודל k של $[n]$. קיימות 2

אפשרויות:

- לוקחים את האיבר n - ואז יש לבחור $k-1$ איברים מתוך $n-1$ - כלומר

$$\binom{n-1}{k-1}$$

- לא לוקחים את האיבר n - ואז יש לבחור k איברים מתוך $n-1$ - כלומר

$$\binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ בסה"כ, יוצא ש}$$

הוכחה 3: אלגברית - נפתח את אגף ימין, ונגיע לאגף שמאל.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k)!(n-k-1)!} =$$

$$\frac{k(n-1)! + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{זהות נוספת}$$

הוכחה 1: אלגברית

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k!)}$$

כנדרש.

הוכחה 2: קומבינטורית – בחירת תת קבוצה של k מתוך n מתאימה לבחירת $n-k$ אנשים, כי ברגע שנבחרו k אנשים – בחרנו את ה $n-k$ שלא נבחרו... (זה אותו דבר לבחור מי יהיה בועד, או מי שלא יהיה בועד).

הוכחה 3: משולש פסקל – מסימטריה.

נוסחת הבינום –

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

לדוגמא:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b + \binom{4}{4} a^4 b^0 =$$

$$b^4 + 4ab^3 = 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$$

(נשים לב שזה מתאים גם למשולש פסקל – אפשר פשוט לקחת את השורה ה n ית)

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

בג 26.11.2006

ציטוט השיעור: 'לא מעניין אתכם, תלכו – אני אשאר עם מי שמתעניין בוועדים' מתמטיקה דיסקרטית ומבוא לאחזקת הבניין המשותף.

נוסחאות בינום

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

הוכחה קומבינטורית: $(a+b)^2 = \underbrace{(a+b)}_{A_1} \underbrace{(a+b)}_{A_2} = aa + ab + ba + bb$

כל מחובר הוא כפל של איבר שבחרנו מ A_1 באיבר שבחרנו מ A_2 , כלומר $A_1 \times A_2$ נשים לב כי $A_1 = A_2 = \{a, b\}$.

נתבונן ב $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = ?a^3 + ?a^2b + ?b^2a + ?b^3$ - יהיו לנו 2^3 מחוברים. נתבונן ב a^2b - המקדם של מחובר זה הוא כל האפשרויות לבחור a, a, b מהקבוצות

$(a, b)^3$. לכן, המקדם שלו הוא $\binom{3}{1}$. כנ"ל גם בנוגע ל b^2a . בנוגע ל b^3 - זה $\binom{3}{3}$, ו $\binom{3}{0}$ עבור

a^3 . ולכן זה שווה ל:

$$\binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}b^2a + \binom{3}{3}b^3$$

באופן כללי – כל מחובר של $(a+b)^n$ נוצר מבחירה של גורם אחד מכל אחד מהגורמים $(a+b)$.

למשל – המחובר a^n נוצר מבחירה של a מכל אחד מהגורמים $(a+b)$.

באופן כללי – גורם מהצורה $a^k b^{n-k}$ מתקבל מ $\binom{n}{k}$ בחירות (צריך לבחור k גורמים מתוך n

הגורמים של $\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ times}}$ ולקחת מהם את הגורם a . מהשאר ניקח את b . לכן –

כנשקבל איברים דומים, נקבל - $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}a^nb^0$.

תרגיל: הוכיחו את הזהות $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

הוכחה אלגברית: מנוסחת הבינום נובע כי $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. מכך בפרט, $a=1, b=1$.

נובעת הטענה. $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

הוכחה קומבינטורית: שני האגפים שווים, מאחר ושניהם מייצגים את מספר תת הקבוצות של $[n]$.

2^n - מספר תתי הקבוצות של $[n]$ (הוכחנו – עבור כל תת קבוצה, נתאים וקטור מ $\{0,1\}^n$ - הוקטור המציין).

$\binom{n}{k}$ - מספר תתי הקבוצות בגודל k של n , ועל כן $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ - הוא מספר כל תתי הקבוצות (מגודל כלשהו) של $[n]$.

תרגיל: הוכיחו ש $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \frac{n}{2} 2^n$.

הוכחה אלגברית:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}$$

נגזור את שני האגפים

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

נציב $x=1$, ונקבל $n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

הוכחה קומבינטורית:

נתבונן במשמעות של $\binom{n}{k} - k \binom{n}{k}$ - מספר תתי הקבוצות בגודל k . k - מספר האיברים. לכן המשמעות של המכפלה היא סה"כ מספר האיברים בתתי הקבוצות בגודל k . (כל איבר נספר פעמים רבות, מן הסתם).
ועל כן, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ = סה"כ מספר האיברים בתתי קבוצות בגודל כלשהן. למה זה שווה לצד האחר

$\left(\frac{n}{2} 2^n \right)$ - נסדר את כל תתי הקבוצות בצמדים - $\left\{ \begin{array}{l} A_1, \overline{A_1} \\ A_2, \overline{A_2} \\ \dots \\ A_{\frac{1}{2} \cdot 2^n}, \overline{A_{\frac{1}{2} \cdot 2^n}} \end{array} \right.$ יש 2^n תתי קבוצות, ולכן $\frac{1}{2} 2^n$ תתי צמדים.

לכן, בסה"כ סכום האיברים בכל תתי הקבוצות הוא $\frac{1}{2} 2^n \cdot n$.

הוכחה 3- בעזרת מטריצה

נבנה מטריצה של וקטורים מציינים של כל תת קבוצה. (כל שורה היא וקטור מצוין).

$$2^n \text{ rows} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{array}}^{n \text{ columns}} \end{array} \right.$$

נסכום את כל האיברים במטריצה – אם נסכום את איברי כל השורות, נקבל $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ (סכום גדלי כל תתי הקבוצות).

מהו סכום האיברים בעמודה הראשונה של המטריצה? $\frac{1}{2} 2^n$, כי האיבר "1" נמצא בדיוק במחצית מתתי הקבוצות של $[n]$ (חצי ממתתי הקבוצות מכילות את 1, חצי לא מכילות את 1).

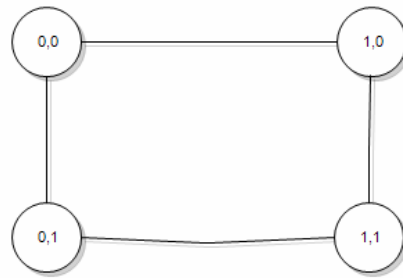
סכום כל העמודה הוא $\frac{1}{2} 2^n$. יש n עמודות, ולכן סכום איברי המטריצה הוא $n \frac{1}{2} 2^n$.

גרף המינג

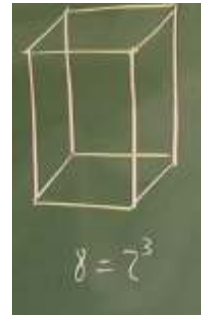
מדובר בגרף שקודקודיו הם סדרות באורך n של $\{0,1\}$. שני קודקודים מחוברים אם הם שונים בדיוק בביט (קוארדינטה) אחת. לדוגמא, עבור $n = 1$



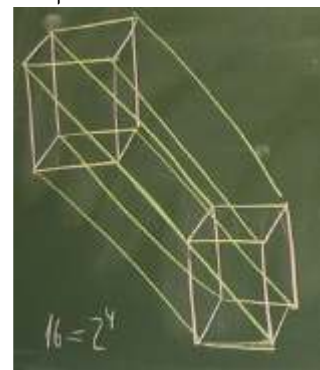
עבור $n = 2$:



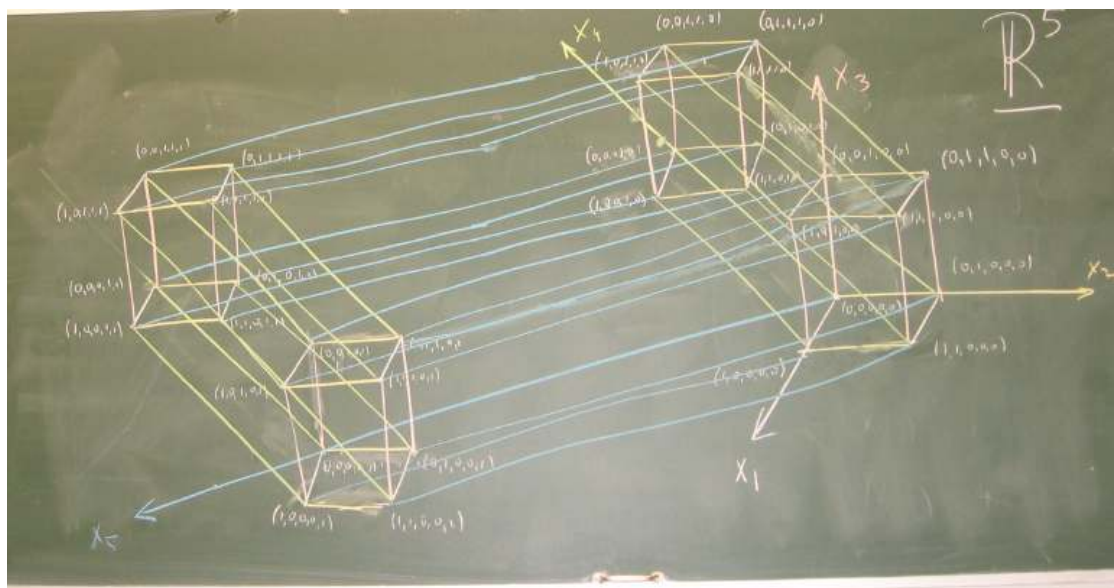
עבור $n = 3$ זה יראה כמו קוביה תלת מימדית, כלומר:



עבור $n = 4$ זה יראה כך:

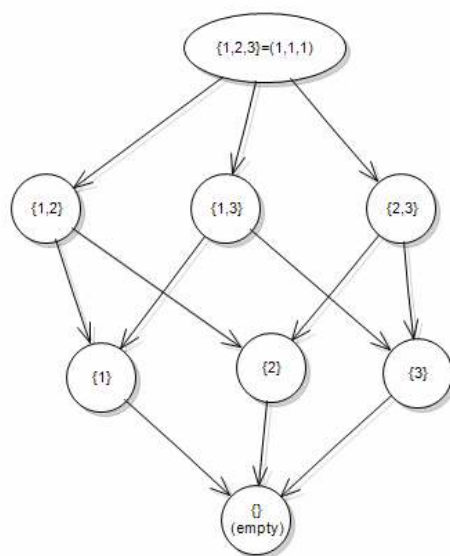


עבור $n = 5$ זה יראה כך:



תודות לריבס, ולדינה זליגר על המצלמה הדיגיטלית...

דרך אחרת להסתכל על גרף המינג - זהו גרף הכלה של קבוצות. לדוגמא - עבור $n = 3$ הקבוצה $\{1,2,3\}$, מתאימה כמובן לוקטור $\{1,1,1\}$. כל תתי הקבוצות בגודל 2 הן $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$. כל תתי הקבוצות בגודל 1 הן $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. כל תתי הקבוצות בגודל 0 הן $\emptyset$.



אם נדמיין ממש ממש חזק, נראה קובייה תלת מימדית. נזכר במה שהוכחנו כבר ב-3 דרכים שונות:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \frac{n}{2} 2^n$$

$\binom{n}{k}$ = מספר הקודקודים בגרף המינג שיש להם k אחדות. מכך קודקוד שהוא סדרה עם k 'אחדים' יוצאות k צלעות לקודקודים עם $(k-1)$ 'אחדים'.

ב'הצגה הקבוצתית' של גרף המינג $\binom{n}{k}$ הוא מספר הצלעות היוצאות משכבה שמתאימה לוקטורים עם k אחדים, לשכבה שמתאימה לוקטורים עם $k-1$ אחדים. לכן, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ מייצג את סה"כ מספר הצלעות בגרף המינג.

בואו נספור כעת את מספר הצלעות בגרף המינג מתוך הסתכלות אחרת. בגרף המינג יש 2^n קודקודים – מכל קודקוד יוצאות n צלעות. מאחר ומדובר בגרף לא מכוון, סה"כ יש לנו $\frac{n}{2} 2^n$ צלעות. מ.ש.ל.

הוכחה חמישית לזהות (ואחרונה) - אלגברית:

$$\text{טענת עזר: } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

הוכחה קומבינטורית לטענת העזר: רוצים לבחור ועד בגודל k עם יו"ר מתוך n אנשים.

אפשר לבחור k אנשים, ואז לבחור יו"ר $\binom{n}{k}$ או לבחור יו"ר n ולהכפיל במספר

$$\text{האפשרויות לבחור את הועד } \binom{n-1}{k-1} - \text{ובסה"כ } n \binom{n-1}{k-1}.$$

הוכחה אלגברית לטענת העזר: לתלמיד בבית.

בחזרה להוכחה המקורית, נקבל:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} =_{l:=k-1} n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = n 2^{n-1} = \frac{n}{2} 2^n$$

28.11.2006

הוכחה באינדוקציה של נוסחת הבינום

$$\text{צ"ל: } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

בסיס: ברור.

$$\text{הנחת אינדוקציה עבור } n: (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \text{ נראה כי}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{Induction hypothesis}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

כעת נשנה את משתנה הסכימה, $l = k + 1$, בשיויון השמאלי, ובימני רק נחליף את השם מ k ל l , בשביל היופי.

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^l b^{n-l+1} + \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^l b^{n+1-l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n+1} \left(\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} \right) a^l b^{n-l+1}$$

$$(*) - \text{אמנם הוספנו מחוברים, } \binom{n}{n+1} a^{n+1} b^{n-(n+1)+1}, \binom{n}{0-1} a^0 b^{n-0+1}, \text{ אבל הם שווים ל-0, ולכן}$$

מותר לנו.

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n-n+1} + \sum_{l=0}^n \binom{n+1}{l} a^l b^{n+1-l}$$

מ.ש.ל.

סדרה אנימודלית

הגדרה: סדרה אנימודלית היא סדרת מספרים שתחילה עולה, ואח"כ יורדת.
דוגמא: $(8, 10, -1, -3, -5, -11)$.

טענה: לכל n , הסדרה $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ היא סדרה אנימודלית.

תזכורת: משולש פסקל לראות שכל שורה היא אנימודלית, לפחות במובן החלש $(\leq, \geq)$.

הוכחה:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k} \quad \text{טענת עזר:}$$

הוכחה:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(\underbrace{n-k+1}_{=n-(k-1)!})!} \cdot \frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k}$$

$$\begin{aligned} n-k+1 &\geq k \\ \Leftrightarrow n+1 &\geq 2k \quad \text{כלומר, } \frac{n-k+1}{k} \geq 1 \quad \text{אם } \binom{n}{k} \geq \binom{n}{k-1}, \quad \text{ועל כן,} \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

מסקנה: לכל $k \leq \frac{n+1}{2}$ מתקיים $\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k}$. כלומר, עד המקום $\frac{n+1}{2}$ הסדרה עולה.

לכל $k \geq \frac{n+1}{2}$ מתקיים $\binom{n}{k-1} \geq \binom{n}{k}$, ועל כן, החל ממקום זה הסדרה יורדת.

$$\sum_{k=0}^r \binom{a+k}{k} = \binom{a+r+1}{a+1} \quad \text{תרגיל: הוכיחו את הזהות:}$$

הוכחה קומבינטורית: אגף ימין = מספר תתי הקבוצות בגודל $a+1$ מתוך $[a+r+1]$.

$$\binom{a+k}{k} = \binom{a+k}{a} = (a+k+1) \quad \text{אגף שמאל = מספר תתי הקבוצה עם איבר מקסימלי}$$

האיבר המקסימלי הכי קטן האפשרי הוא $a+1$.

האיבר המקסימלי הכי גדול האפשרי הוא $a+r+1$.

סה"כ, מספר תתי הקבוצות בגודל $a+1$ עם איבר מקסימלי כלשהו $= \sum_{k=0}^r \binom{a+k}{k}$, וזה שווה כמובן

$$\binom{a+r+1}{a+1} \quad \text{למספר תתי הקבוצות בגודל } a+1, \quad \text{כלומר}$$

עקרון הכלה והדחה

הנחה: כל הקבוצות הן סופיות.

תזכורת: עקרון הסכום – אם $A \cap B = \emptyset$, אז $|A \cup B| = |A| + |B|$.

עקרון הסכום המוכלל – $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ - (כאשר ב $\cup$ הכוונה כאן היא לאיחוד זר – כל שתיים מבין $A_1, \dots, A_n$ הן זרות).

נשים לב שלא מספיק כי $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$ - יש לדרוש כי לכל $A_i \cap A_j = \emptyset$.

מסקנה: לכל A, B $|B \setminus A| = |B| - |B \cap A|$

הוכחה למסקנה: $B = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$, וזה יהיה איחוד זר. מעקרון הסכום,

$$|B| = |B \cap A| + |B \setminus A|$$

עקרון הכלה והדחה לשתי קבוצות

טענה: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

הוכחה א' - $A \cup B = (A \setminus B) \cup^* [(A \cap B) \cup^* (B \setminus A)]$ (סימון $\cup^*$ - איחוד זר).

מעקרון הסכום המוכלל -

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |B \cap A|$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \text{כן}$$

הוכחה ב': הסבר קומבינטורי – נראה כי כל איבר של $A \cup B$ נספר פעם אחת באגף ימין. נחלק ל3 מקרים:

$$1. \quad x \in A \setminus B \quad \text{אז הוא נספר פעם אחת בלבד, ב } |A|$$

$$2. \quad x \in B \setminus A \quad \text{אז הוא נספר פעם אחת, ב } |B|$$

$$3. \quad x \in A \cap B \quad \text{אז הוא נספר פעמיים, ופעם אחת תרד, ועל כן הוא נספר פעם אחת. בסה"כ, כל איבר נספר פעם אחת, ומכאן הזהות.}$$

הכלה והדחה ל3 קבוצות

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

(רואים מדיאגרמת ון).

אפשר גם לרשום את זה כך :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{i=1}^3 |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

רמז, אפשר להרחיב את זה ל n קבוצות.

נוסחאות הכללה והדחפה לח קבוצות

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| =$$

$$\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

הוכחת המשפט: נראה שכל איבר $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ נספר באגף ימין בדיוק פעם אחת. יהי $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ קיים

$1 \leq t \leq n$ כך ש x שייך בדיוק ל t קבוצות $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}$.

בביטוי $\sum_{j=1}^n |A_j|$ x נספר t פעמים.

בביטוי $\sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} |A_{j_1} \cap A_{j_2}|$ x נספר $\binom{t}{2}$ פעמים (כי x נמצא בכל חיתוך של שתיים מתוך הקבוצות $(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t})$

בביטוי $\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}|$ x נספר $\binom{t}{3}$ פעמים.

...

בביטוי $\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}|$ x נספר $\binom{t}{t}$ פעמים - פעם אחת (זה קורה כאשר בחרנו בדיוק את $j_1, \dots, j_t$ להיות $i_1, \dots, i_t$).

בביטויים שמתאימים לחיתוכים של יותר מ t קבוצות, x נספר 0 פעמים.

סה"כ x נספר באגף ימין $t - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \binom{t}{4} + \dots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t}$. נרצה להגיד שכל זה שווה ל1.

$$t - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \binom{t}{4} + \dots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t} = 1 \quad \text{טענה:}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} t - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \binom{t}{4} + \dots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t} &= \sum_{k=1}^t (-1)^{k-1} \binom{t}{k} = - \sum_{k=1}^t (-1)^k \binom{t}{k} = \\ &= - \left[\sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} - 1 \right] = 1 - \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} =_* 1 \end{aligned}$$

* - מטענת העזר

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} = 0 \quad \text{טענת עזר:}$$

$$0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} \quad \text{הוכחה:}$$

משמעות קומבינטורית: מספר הקבוצות בעלות מספר זוגי של איברים = מספר הקבוצות בעלות מס' אי זוגי של איברים.

תרגיל: בכמה תמורות של המספרים $1, \dots, 9$ לא נמצאים זה ליד זה אף אחד מהזוגות $(12), (34), (45)$ (גם $21, 43, 54$ אסורות כמובן)

פתרון: נסמן $\{A_{12}, A_{34}, A_{45}\}$ אוסף התמורות בהן 12 יושבים זה ליד זה $A_{12} = \{A_{12}, A_{34}, A_{45}\}$ באופנים דומים. נסמן P כאוסף כל התמורות של $1, \dots, 9$ ($P = 9!$ כמובן)
אנו רוצים למצוא את $\overline{A_{12}} \cap \overline{A_{34}} \cap \overline{A_{45}}$ (זה סימון למשלים במקרה זה)

נזכור כי $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$ ומחוקי דמורגן

$$\overline{A_{12}} \cap \overline{A_{34}} \cap \overline{A_{45}} = \overline{A_{12} \cup A_{34} \cup A_{45}} = |P| - \underbrace{|A_{12} \cup A_{34} \cup A_{45}|}_* = 9! - (|A_{12}| + |A_{34}| + |A_{45}| - |A_{12} \cap A_{34}| - |A_{12} \cap A_{45}| - |A_{34} \cap A_{45}| + |A_{12} \cap A_{34} \cap A_{45}|)$$

את * נחשב לפי נוסחת הכלה והדחה

מהו $|A_{12}|$? נתייחס ל-12 כאיבר אחד, ולכן יש לנו $8! \cdot 2!$ (ה-2! כי אפשר להחליף את הסדר).

כמובן ש $|A_{34}| = |A_{45}| = |A_{12}|$.

מהו $|A_{12} \cap A_{34}|$ - דורשים ש 12 יהיו ביחד, וגם 34. לכן זה שווה ל- $7! \cdot 2! \cdot 2!$. כמובן שזה שווה גם ל- $|A_{12} \cap A_{45}|$.

מה נעשה עם $|A_{34} \cap A_{45}|$? נתייחס ל-345 כגוש אחד, ואז יש לנו $7! \cdot 2!$ (למה 2! - כי אנחנו מאפשרים או 345 או 543, לא שום אופציה אחרת).

מהו $|A_{12} \cap A_{34} \cap A_{45}|$ - נאחד את '12', נאחד את '345'. לכן יש לנו $6! \cdot 2! \cdot 2!$ אפשרויות.

עכשיו נותר רק להציב בנוסחה המקורית.

5.12.2006

תמורות ללא נקודת שבת

הניסוח הפורמלי:

הגדרה: אם $f(1)f(2)\dots f(n) = f$ תמורה על $[n]$ נאמר של n יש נקודת שבת אם קיים i כך ש $f(i) = i$.

לדוגמא: n מלחים, n כובעים. בכמה אופנים אף מלח לא יקבל את הכובע בחזרה. מזכירה רשלנית: n מכתבים, n מעטפות, בכמה אופנים אף מכתב לא יגיע ליעדו. ועוד דוגמאות...

משפט: מספר התמורות על $[n]$ ללא נקודות שבת הוא $n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

הערה: זה יוצא בערך $\frac{1}{e} n!$ (קצת יותר מ $\frac{1}{3} n!$).

הוכחה: לכל $i = 1 \dots n$ נגדיר את A_i כאוסף כל התמורות המקיימות $f(i) = i$ (משאירות את i במקום).

דוגמא: עבור $[3]$, $A_1 = \{123, 132\}$, $A_2 = \{123, 321\}$, $A_3 = \{123, 213\}$.

אנו רוצים לחשב בעצם את $\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \right| = \left| \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \right|$.

נסמן $P =$ אוסף כל התמורות על $[n]$.

ע"פ דמורגן:

$$\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \right| = \left| \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \right| = \left| \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} \right| = |P| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = *$$

$$|P| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

(*) נוסחת הכלה והדחה)

חשבוניות עזר:

$|A_i| = (n-1)!$ לכל i . $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (n-2)!$ (אנו מקבעים את $i_1 \neq i_2$).

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ באופן כללי, $f(i_1) = i_1, f(i_2) = i_2$.

נחזור לביטוי המקורי, ונקבל:

$$= n! - n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \binom{n}{3} (n-3)! + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

מ.ש.ל.

בואו נדבר קצת על $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

נשים לב כי $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. לכן, $\sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^k}{k!} \right)$ ישאף ל $\frac{1}{e}$, כש $n \rightarrow \infty$.

בעיית המלחים השיכורים – כל מלח לוקח כובע באופן אקראי, מה ההסתברות שאף אחד לא יקבל את כובעו בחזרה? ההסתברות היא בקירוב $\frac{1}{e} \approx \frac{1}{3}$, כשמספר המלחים שואף ל ∞ (או סתם גדול).

הפונקציה של אוילר

הגדרה: $\lfloor x \rfloor$ = המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה ל x (לעגל למטה בקיצור)

$$9 = \lfloor 9.99 \rfloor$$

$$-2 = \lfloor -1.5 \rfloor$$

טענה: לכל $x, n \in \mathbb{N}^+$ יש בדיוק $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ מספרים טבעיים שקטנים או שווים ל n ומתחלקים ב x .

דוגמא: $x = 4, n = 13$. כמה מספרים יש ב $[13]$ שמתחלקים ב 4 – התשובה היא 3 , שזה

$$\left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor = 3. \text{ המספרים הם כמובן } \{4, 8, 12\}.$$

הוכחה: המספרים ב $[n]$ שמתחלקים ב x הם $x, 2x, \dots, kx$, כאשר $kx \leq n$. זה שקול כמובן

$$k \leq \frac{n}{x}. \text{ מכיוון ש } x \text{ שלם, אזי } k = \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor.$$

הגדרה: יהיו $a, b \in \mathbb{N}^+$. נקראים זרים אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1 .

דוגמא: $8, 12$ לא זרים, כי 4 מחלק משותף של שניהם. $5, 12$ דווקא כן זרים.

הגדרה: פונקציית אוילר מוגדרת כך $\varphi(1) = 1$ ולכל $n > 1$ $\varphi(n)$ הוא מספר המספרים הטבעיים

ב $[n]$ שזרים ל n .

דוגמאות:

$$\varphi(2) = 2$$

$$\varphi(3) = 2$$

$$\varphi(12) = 4$$

10.12.2006

ציטוט השיעור: 'הלכתי בקניון לקנות ג'ינס, וראיתי את העיתון עם מודעה שאומרת 'אם אין לך מישהי, למישהו יש שתיים' – זו הדגמה של עקרון שובך היונים, כמובן'

הודעות:

בוהן – אמור להיות 'עד 10 דקות', אבל נותנים לנו שעה.

תומר: עד סוף שבוע 6, כולל – בלי הכלה והדחה.

ישומים לנוסחת הכלה והדחה

הפונקציה של אוילר

סקירת הגדרות + משפטים עיקריים

יהיו $a, b \in \mathbb{N}^+$.

הגדרות:

1. $a | b$ (a מחלק b) אם $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}^+$ (דוגמאות: $3 | 12$, $8 | 12$)

a. דוגמא: המחלקים של 18 הם $(1, 2, 3, 6, 9, 18)$

2. a, b נקראים **זרים** אם המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1.

a. דוגמאות: 8, 12 לא זרים. 7, 12 כן זרים.

3. a נקרא ראשוני אם $a > 1$ ואם המחלקים היחידים שלו הם $1, a$.

a. לדוגמא: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$

4. משפט הפירוק: לכל מספר טבעי יש הצגה יחידה כמכפלה של גורמים ראשוניים.

טענה – הוכחנו בפעם הקודמת

כל $x, n \in \mathbb{N}^+$ יש ב $[n]$ בדיוק $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ מספרים טבעיים שמתחלקים ב x .

הגדרה: פונקציית אוילר היא $\varphi: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת כך:

$\varphi(1) = 1$. גודל קב' המספרים ב $[n]$ שזרים ל n $\varphi(n)$.

$$\varphi(1) = 1$$

$$\varphi(2) = 1$$

$$\varphi(3) = 2$$

$$\varphi(4) = 2$$

$$\varphi(5) = 4$$

$$\varphi(6) = 2$$

משפט: יהי $1 < n \in \mathbb{N}^+$ והיו $p_1, \dots, p_k$ המספרים הראשוניים השונים המחלקים את n , אז:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

קצת דוגמאות – עבור

$$2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$$

$$4\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2$$

$$12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4, 12, \text{ עבור } 12.$$

טענת עזר:

$$\prod_{i=1}^k (1 - a_i) = 1 = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} a_{i_1} a_{i_2} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} + \dots + (-1)^k a_1 a_2 \dots a_k$$

הוכחה א' - באינדוקציה - להשלמה בבית ע"י התלמיד החרוץ.

$$\text{הוכחה ב' - } \prod_{i=1}^k (1 - a_i) = *$$

או $-a_i$ מכל גורם $(1 - a_i)$ ומכפלה של כל הבחירות שביצענו.

עבור 1, יש לבחור 1 מכל הגורמים.

בשביל להגיע ל $-a_i$ - יש לבחור 1 מ $k-1$, ואת $-a_i$ מאחד הגורמים.

וכך הלאה...

הוכחה: יהי $n \in \mathbb{N}^+$. צריך לחשב את גודל קב' באיברים ב $[n]$ שזרים ל n

נציג את n ע"י הפירוק הראשוני שלו $n = \prod_{i=1}^k p_i^{i_i}$ (ז"א $p_1, \dots, p_k$ הם המספרים הראשוניים השונים

שמחלקים את n).

לכל $t \in [n]$ מתקיים של t, n אינם זרים אם t מתחלק (לפחות) באחד המספרים $p_1, \dots, p_k$.

דוגמא: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

$$p_1 = 2$$

$$p_2 = 3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

הוכחת המשפט האחרון: t, n אינם זרים $\Leftrightarrow$ יש ל t, n מחלק משותף > 1 . אפשר להניח כי

הוא ראשוני, p . מופיע בפירוק הראשוני של t וגם בזה של n , כלומר p הוא אחד ה p_i ים,

ולכן t מתחלק ב p .

נגדיר: לכל $1 \leq i \leq k$ נגדיר $A_i =$ אוסף המספרים ב $[n]$ שמתחלקים ב p_i .

אנו צריכים לחשב את גודל קבוצת כל המספרים שלא מתחלקים באף אחד מהמספרים $p_1, \dots, p_k$,

$$\left| \bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right| - \text{כלומר}$$

$$\left| \bigcap_{i=1}^k \overline{A_i} \right| = \left| \overline{\bigcup_{i=1}^k A_i} \right| = \left| [n] \right| - \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = n - \sum_{i=1}^k |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$$

כעת נצטרך מעט חשבונות עזר:

$$|A_i| = \left| \left\{ t \in \mathbb{N}^+ : t \mid p_i \right\} \right| = \frac{n}{p_i}$$

להוריד את הערך השלם מאחר ו p_i מחלק את n .

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdot p_{i_2}}, \quad i_1 \neq i_2$$

לכל a, b זרים, ו $t \in \mathbb{N}^+$ אז $a \mid t, b \mid t$ אם ורק אם $ab \mid t$. זרים מאחר והם ראשוניים (p_{i_1}, p_{i_2}) .

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_l}}, \quad 1 \leq l \leq k$$

לכל $1 \leq l \leq k$ מתקיים

נחזור לחישוב המקורי.

$$\begin{aligned} &= n - \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k} \\ &=_{\text{teanat ezer}} n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i} \right) \end{aligned}$$

כנדרש.

עקרון שובך היונים

יש לנו כיתה עם למעלה מ-100 סטודנטים, ואנחנו מניחים כי ציון הוא מוכל ב-[100], אזי יש לפחות שני סטודנטים עם אותו ציון.

עקרון שובך היונים: אם מכניסים $n+1$ יונים ל n שובכים אזי קיים שובך בו יש לפחות 2 יונים.
הוכחה: נניח בשלילה שבכל שובך יש לכל היותר יונה אחת. אז בכולן יש לכל היותר n יונים, בסתירה לכך שיש לנו $n+1$ יונים.

ניסוח מתמטי: אין פונקציה חח"ע $f: [n+1] \rightarrow [n]$

ניסוח מהקניון: אם אין לך מישהי, למישהו אחר יש שתיים.

n בחורים.

n בחורות.

יש מישהו בלי בחורה, לכן יש $n-1$ שובכים, עם n יונות.

יישומים של העקרון

משפט: תהי $A = [9]$. אז בכל תת קבוצה של 6 מספרים יש שני מספרים שסכומם 9.

הוכחה: נתבונן ב-5 הקבוצות הבאות בקבוצות הבאות: $\{0, 9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$

לכל תת קבוצה B של 6 מספרים (שונים) $i_1, \dots, i_6$ תהיה לפחות קבוצה אחת מבין 5 הקבוצות שלמעלה שתכיל שני מספרים מתוך B .

טענה: אם ניקח 101 מספרים מתוך $[200]$, אזי יהיו שני מספרים כך שאחד מהם מחלק את השני.

טענה 2: אם ניקח 101 מספרים מתוך $1 \dots 200$ אזי יהיו 2 מספרים זרים.

באופן כללי:

משפט: תהי x תת קבוצה של $n+1$ איברים מתוך $[2n]$, אזי ב x יש שני מספרים כך שהאחד מחלק את השני ללא שארית.

משפט 2: תהי x תת קבוצה של $n+1$ איברים מתוך $[2n]$, אז ב x יש שני מספרים זרים.

הערה: החסם לשני המשפטים הוא הדוק (לדוגמא, במשפט הראשון – קיימת קבוצה בת n איברים שאף אחד מאיבריה לא מחלק איבר אחר).

לדוגמא: $2n, n+1, n+1, \dots, n+1$ אף אחד מהאיברים לא מחלק איבר אחר.

לגבי משפט 2: באוסף כל המספרים הזוגיים ב $[2n]$ אין שני מספרים זרים.

הוכחת משפט 1:

טענת עזר: כל מספר $t \in \mathbb{N}^+$ ניתן להציג באופן יחיד: $t = 2^k \cdot b$ כאשר $k \in \mathbb{N}$ ו b מספר טבעי אי זוגי. (כמובן, אם t אי זוגי, $k=0$).

הוכחה: יהי $t \in \mathbb{N}^+$. יהי k המספר הטבעי המקסימלי כך ש $\frac{t}{2^k}$ מספר שלם (יתכן כי

$k=0$). אזי מתקיים $\frac{t}{2^k} = b$. כמובן ש b איזוגי (אחרת נחלק את שני האגפים ב2, ונקבל סתירה למקסימליות של k).

יהו $x_1, \dots, x_{n+1}$ המספרים שבחרנו מתוך $[2n]$. ניתן לרשום $x_i = 2^{k_i} \cdot b_i$, כאשר כל k_i ים טבעיים, b_i אי זוגי. מתקיים $1 \leq b_i \leq 2n-1$. בקבוצה $[2n]$ יש בדיוק n מספרים אי זוגיים, לכן בקבוצה יש $b_1, \dots, b_{n+1}$ יש שני איברים שווים (ע"פ שובך היונים). נסמנם $b = b_i = b_j$, $i \neq j$.

$$x_i = 2^{k_i} \cdot b_i = b \cdot 2^{k_i}$$

$$x_j = 2^{k_j} \cdot b_j = b \cdot 2^{k_j}$$

נניח בה"כ ש $k_i > k_j$, אזי $\frac{x_i}{x_j} = \frac{b \cdot 2^{k_i}}{b \cdot 2^{k_j}} = 2^{k_i - k_j}$. $k_i - k_j$ חיובי, ועל כן $2^{k_i - k_j}$ שלם, כלומר x_i

מתחלק ב x_j , כלומר x_j מחלק את x_i .

19.12.2006

עקרון שובך היונים

אם מכניסים $n + 1$ יונים ל n שובכים, אז קיים שובך עם לפחות 2 יונים.

הרחבה לעקרון שובך היונים

אם מכניסים $kn + 1$ יונים ל n שובכים, אז קיים שובך עם לפחות $k + 1$ יונים.

הוכחה: אחרת, בכל שובך יש $k \geq$ יונים, ובסה"כ $kn \geq$ יונים, בסתירה לכך שיש לנו $kn + 1$ יונים.

נוסח כללי יותר: אם מכניסים m יונים ל n שובכים אז יש שובך שיש בו לפחות $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ יונים.

הגדרה: ערך שלם עליון של x , המסומן $\lceil x \rceil$ הוא המספר השלם הקטן ביותר שגדול או שווה ל x .

הוכחה: נסמן ב c_i את מספר היונים בשובך ה i . נניח בשלילה כי $c_i < \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$. מספר שלם, ועל כן

$$c_i < \frac{m}{n} \cdot n = m. \text{ סתירה. } m = \sum_{i=1}^n c_i$$

הוכחה 2: טיעון הממוצע. יש לנו m יונים, n שובכים. המס' הממוצע של יונים בשובך הוא $\frac{m}{n}$. על

כן, לפחות אחד ה $c_i \leq \frac{m}{n}$. מאחר ו c_i מספר שלם, אזי $c_i \leq \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$.

תרגיל מהפעם הקודמת

תהי x תת קבוצה של $[2n]$, עם $n + 1$ איברים. הוכיחו שיש ב x שני מספרים זרים.

הערה: ראינו שהחסם הדוק - $\{2, 4, \dots, 2n\}$ היא קבוצה בת n איברים ואין בה 2 זרים.

פתרון: נתבונן ב $\{1, 2, \dots, 2n\}$. יש בסה"כ n זוגות של מספרים עוקבים.

$c_1 = \{1, 2\}, c_2 = \{3, 4\}, \dots, c_n = \{2n-1, 2n\}$. ב x יש $n + 1$ איברים, לכן יש ב x שני איברים עוקבים. לכל n , מתקיים כי $n, n + 1$ זרים, ומכאן הפתרון.

למה הם זרים? a, b זרים $\Leftrightarrow$ המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1. נניח ש $n, n + 1$ לא זרים. יהי $k > 1$ מחלק משותף שלהם.

$n = kl$ $\Leftrightarrow k | n$ כעת, $n + 1 = kl + 1 < kl + k$ - ועל כן $n, n + 1$ זרים.

הגדרה: סדרה $a_1, \dots, a_n$ נקראת מונוטונית עולה אם $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

סדרה $a_1, \dots, a_n$ נקראת מונוטונית יורדת אם $a_1 > a_2 > \dots > a_n$.

הגדרה: תהי $a_1, \dots, a_n$ סדרה, ויהו $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ מספרים טבעיים אז $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ היא

תת סדרה של $a_1, \dots, a_n$.

משפט Erdos-Szekeres: בכל סדרה של $pq + 1$ מספרים ממשיים שונים $(p, q \in \mathbb{N})$ קיימת תת סדרה מונוטונית עולה של $p + 1$ איברים או תת סדרה יורדת של $q + 1$ איברים.
דוגמא: $4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9$. יש כאן $3 \cdot 4$ איברים.

האם קיימת תת סדרה עולה של 3 איברים? כן. $4, 8, 10$.
האם קיימת תת סדרה עולה של 4 איברים? לא. קיימים 3 'בלוקים' – כל אחד מהם הוא תת סדרה יורדת. לכן, תת סדרה עולה מכילה לכל היותר איבר אחד מכל 'בלוק'.
האם קיימת תת סדרה יורדת של 5 איברים? כי כל האיברים בכל בלוק קטנים מכל האיברים בבלוק שאחריו, ועל כן כל התת סדרה צריכה להיות מוכלת בבלוק אחד.

דוגמא שמראה שהמשפט הדוק: נראה סדרה של pq מספרים ממשיים כך שאין תת סדרה עולה בגודל $p + 1$ ואין תת סדרה יורדת בגודל $q + 1$
 $q, q - 1, \dots, 1, 2q, 2q - 1, \dots, q + 1, 3q, 3q - 1, \dots, 2q + 1, \dots, pq, pq - 1, \dots, (p - 1)q + 1$

סה"כ יש לנו כאן p בלוקים – אין תת סדרה עולה בגודל $p + 1$ (כל תת סדרה עולה חייבת להכיל עד איבר 1 מכל בלוק). יש p בלוקים, ועל כן אורך סדרה כזו $p \geq$.

אין תת סדרה יורדת בגודל $q + 1$ - כל תת סדרה יורדת צריכה להכיל איברים מאותו בלוק, ואורך כל בלוק הוא q .

24.12.2006

תזכורת: הרחבה לעקרון שובך היונים: אם מכניסים $kn + 1$ יונים ל n שובכים, אז קיים שובך עם לפחות $k + 1$ יונים.

משפט Erdos-Szekeres: בכל סדרה של $pq + 1$ מספרים ממשיים שונים $(p, q \in \mathbb{N})$ קיימת תת סדרה מונוטונית עולה של $p + 1$ איברים או תת סדרה יורדת של $q + 1$ איברים.

דוגמא: $4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9$. יש כאן $3 \cdot 4$ איברים.

הוכחה: נניח בשלילה כי שבסדרה של $pq + 1$ מספרים ממשיים שונים אין תת סדרה עולה של $p + 1$ איברים ואין תת סדרה יורדת של $q + 1$ איברים.

נסמן את הסדרה $x_1, \dots, x_{pq+1}$. לכל x_k , $1 \leq k \leq pq + 1$, נגדיר $(I(k), D(k))$. (Increasing, Descresing)

$I(k)$ מוגדר כאורך המכסימלי של תת סדרה עולה שמתחילה ב x_k .

$D(k)$ מוגדר כאורך המכסימלי של תת סדרה יורדת שמתחילה ב x_k .

נתבונן בהגדרות אלו עבור הסדרה שלנו

$\frac{4}{(I(1) = 3, D(0) = 4)}$	$\frac{3}{(3, 3)}$	$\frac{2}{(3, 2)}$	$\frac{1}{(3, 1)}$	$\frac{8}{(2, 4)}$	$\frac{7}{(2, 3)}$	$\frac{6}{(2, 2)}$	$\frac{5}{(2, 1)}$	$\frac{12}{(1, 4)}$	$\frac{11}{(1, 3)}$	$\frac{10}{(1, 2)}$	$\frac{9}{(1, 1)}$
----------------------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	---------------------	---------------------	---------------------	--------------------

לפי הנחת השלילה, $1 \leq I(k) \leq p$ ו $1 \leq D(k) \leq q$ לכל k , ולכן, מס' הזוגות האפשריים $(I(k), D(k))$ הוא $p \cdot q$, לכל היותר. נגדיר זו כמספר ה'שובכים'.

כעת, יש שני המשכים אפשריים להוכחה:

1. (לפי עקרון שובך היונים). בסדרה יש $pq + 1$ זוגות [יונים] $(I(k), D(k))$. לכן,

קיימים 2 זוגות זהים, ז"א קיימים $1 \leq l < k \leq pq + 1$ כך ש $(I(l), D(l)), (I(k), D(k))$ קיימות 2 אפשרויות:

a. $x_l < x_k$. נסמן $a := I(k) = I(l)$. יש סדרה עולה באורך a שמתחילה ב x_k ,

אבל אפשר להרחיב אותה לסדרה באורך $a + 1$ אם נוסיף את x_l . סתירה לכך

$$I(l) = a$$

b. $x_l > x_k$. נסמן $b := D(l) = D(k)$. קיימת סדרה יורדת באורך b שמתחילה

ב x_k . אבל אפשר להרחיב אותה לסדרה באורך $b + 1$ אם נוסיף את x_l . סתירה לכך

$$D(l) = b$$

2. (לפי עקרון שובך היונים המוכלל). יש p אפשרויות לערך של $I(k)$ בכל צמד

$(I(k), D(k))$. יש $pq + 1$ צמדים כאלו. לכן, מעקרון השובך המוכלל $q + 1$ צמדים

$(I(k), D(k))$ עם אותו ערך $I(k)$. נתבונן באיברים המתאימים

x_{k_1}	x_{k_2}	x_{k_3}	...	$x_{k_{q+1}}$
$(a, D(k_1))$	$(a, D(k_2))$	$(a, D(k_3))$		$(a, D(k_{q+1}))$

טענה: $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{q+1}}$ היא תת סדרה יורדת באורך $q+1$ (ולכן מקבלים סתירה)

הוכחה: נראה למשל ש $x_{k_1} > x_{k_2}$. נניח בשלילה $x_{k_1} < x_{k_2}$. תהי $(x_{k_2}, \dots)$ סדרה עולה באורך a שמתחילה ב x_{k_2} . אזי $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots)$ היא תת סדרה עולה באורך $a+1$ שמתחילה ב x_{k_1} , בסתירה לכך ש $I(k_1) = I(k_2) = a$.

תרגילון: הוכיחו כי מתוך 10 מספרים דו ספרתיים שונים אפשר תמיד לבחור שתי תתי קבוצות זרות לא ריקות כך שסכומי האיברים שלהם זהים:

פתרון: $A = (a_1, \dots, a_{10})$. $\forall i, 10 \leq a_i < 100$.

מספר תתי הקבוצות הלא ריקות של A הן $2^{10} - 1 = 1023$, בטווח $\{10, \dots, 1000\}$ (נשים לב ש 1000 זו הגזמה – המקסימום הוא $90 + 98 + \dots + 99$). זוהי קבוצה בגודל $1000 > 1023$. יש 1023 תתי קבוצות מאשר סכומים אפשריים, וע"כ קיימות שתי תת קבוצות עם אותו סכום, ע"פ שובך היונים. יהו A_1, A_2 קבוצות שסכומן שווה. אם החיתוך שלהם אינו ריק, נחסר אותו משניהן, ונקבל קבוצות זרות עם אותו סכום.

מספרי Catalan

הקדמה: לכל השמת סוגריים על הביטוי $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$ נתבונן בסדרת הסוגרים, וניצור תרגום ל-0 ול-1 ($0 \equiv (, 1 \equiv)$).

$$((a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_3)) \leftrightarrow ((\)(\)) \leftrightarrow 001011$$

$$(a_1((a_2 \cdot a_3) \cdot a_4)) \leftrightarrow (((\))) \leftrightarrow 000111$$

נשים לב שלא כל השמה תקינה – לדוגמא $(())$ - לא תקין.

צריך להתקיים:

1. מספר האפסים $\equiv$ מספר האחדות.
2. בכל רישא (קטע התחלתי של הסדרה) מספר האפסים $\leq$ מספר האחדות.

הגדרה: תהי $(a_1, \dots, a_{2n})$ סדרת $\{0,1\}$. הסדרה נקראת **מאוזנת** אם מתקיימים התנאים $(1,2)$

שצוינו לעיל ('תעשו Copy paste', ח.ל.):

1. מספר האפסים $\equiv$ מספר האחדות.
2. בכל רישא (קטע התחלתי של הסדרה) מספר האפסים $\leq$ מספר האחדות.

דוגמא: עבור $n=2$ - 2 אחדות, 2 אפסים.

כמה סדרות (בכלל) יש של 2 אחדות, 2 אפסים: $\binom{4}{2} = 6$. כמה מהן מאוזנות וכמה לא מאוזנות?

$$(0110)$$

$$(1010)$$

$$(1100)$$

$$(1001)$$

$$(0011)$$

$$(0101)$$

מאוזנות: כל השאר לא מאוזנות.

$$\binom{2n}{n}$$

באופן כללי: מהו מספר הסדרות עם n אחדים ו- n אפסים?

מהו מספר הסדרות **המאוזנות** של n אחדים ו- n אפסים?

משפט: יהי c_n מספר הסדרות המאוזנות של n אחדים ו- n אפסים, אז: $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

$$c_2 = \frac{1}{2+1} \binom{4}{2} = 2, n=2 \text{ אזי ראינו } \text{דוגמאות:}$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = 5, n=3 \text{ אזי}$$

הוכחה: נסמן S קבוצת כל הסדרות המאוזנות עם n אפסים ו- n אחדות.

נסמן A - קבוצת כל הסדרות (מאוזנות או לא) עם n אפסים ו- n אחדות.

נסמן B - קבוצת כל הסדרות **הלא** מאוזנות עם n אפסים, ו- n אחדות.

$$|S| = |A| - |B| \text{ מתקיים כמובן}$$

אפשר להסתכל על כל סדרה של n אפסים ו- n אחדים כמהלך סריגי $(0,0)$ ל- (n,n) , כאשר 0

הוא צעד ימינה, ו-1 הוא צעד למעלה. $A \equiv$ אוסף כל המהלכים הסריגיים מ- $(0,0)$ ל- (n,n) .

מתקיים $A \equiv$ אוסף כל המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ ל $(n+1,n)$.
 נשים לב כי S היא אוסף כל המהלכים הסריגיים מ $(0,0)$ ל (n,n) שנמצאים בגזרה $x \geq y$. זה
 שווה גם לאוסף כל המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ ל $(n+1,n)$ שנמצאים בגזרה $x > y$.
 $B \equiv$ אוסף כל המהלכים הסריגיים מ $(0,0)$ ל (n,n) שנמצאים בגזרה $x < y$. זה גם אוסף המהלכים
 הסריגיים מ $(0,0)$ ל (n,n) שחוצים ממש את האלכסון $y = x$.

26.12.2006

מספרי Catalan

תזכורת: סדרה של אפסים ואחדים נקראת מאוזנת אם:

1. מספר האפסים = מספר האחדים
2. בכל רישא של הסדרה מספר האפסים $\leq$ מספר האחדים.

הצגה גאומטרית

כל סדרה $0,1$ מתאימה למהלך סריגי באופן הבא:

0 – צעד ימינה

1 – צעד למעלה

נגדיר –

A = אוסף המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ ל $(n+1,n)$.

S = אוסף המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ ל $(n+1,n)$ שאינם נוגעים בישר $y = x$.

B = אוסף המהלכים הסריגיים מ $(1,0)$ ל $(n+1,n)$ שנוגעים (או חוצים ממש) את הישר $y = x$.

הערה: מהלך ב B מתאים לסדרה לא מאוזנת.

הערה: מהלך ב A מתאים לסדרה של n אפסים ו n אחדים.

הערה: מהלך ב S $\leftrightarrow$ סדרה מאוזנת.

הסבר: מהלך שנוגע בישר $y = x$ נוגע בנקודה (a,a) , עד לנקודה זו הלכנו $(a-1)$ צעדים ימינה,

a צעדים מעלה. הליכה זו מתאימה לרישא של הסדרה שיש בה $a-1$ אפסים, a אחדים, ולכן זו סדרה לא מאוזנת. (מהלך שנוגע ב $y = x$ מתאים לסדרה לא מאוזנת).

גם ההפך נכון – מהלך שמתאים לסדרה לא מאוזנת יגע (ואפילו עלול לחצות) את $y = x$.

ניזכר מה אנחנו מנסים למצוא – מהו מספר הסדרות המאוזנות של n אפסים ו n אחדים (מספר זה נקרא מספר catalan) ומסומן $c(n)$. כמובן שזה זהה ל $|S|$.

$$|S| = |A| - |B|$$

$$|A| = \binom{2n}{n}$$

כלומר, עלינו למצוא את $|B|$. נגדיר C = אוסף המהלכים הסריגיים מ $(0,1)$ ל $(n+1,n)$. כל מהלך

ב C מורכב מ $n+1$ צעדים ימינה, ו $n-1$ צעדים למעלה. $|C| = \binom{2n}{n+1}$.

נראה התאמה חח"ע ועל בין C לבין B , ומכאן נסיק $|B| = |C| = \binom{2n}{n+1}$ ולכן

$$|S| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

נגדיר $f: C \rightarrow B$. כל מהלך ב C חותך בנקודה k , את הישר $y = x$ (שכן הוא מתחיל מעל הישר, ומסיים מתחת) (יתכן שהוא חותך ביותר מנקודה אחת, אבל לא עקרוני). נתאים למהלך כזה את המהלך הבא ב B : עד לנקודה k , נשקף את כל הצעדים $y = x$ (כלומר - מ $(0,1)$ זה יהפך

ל $(1,0)$. מעלך מקורי מעלה יהפך ימינה, מהלך מקורי ימינה יהפך מעלה). את שאר הצעדים נשאר אותו דבר.

נגדיר $g: B \rightarrow C$ באותו אופן בדיוק כמו שהגדרנו את f . כל מהלך ב B נוגע בנק' כלשהיא בישר $y = x$. נסמן נקודה זו באות k . נשקף את כל הצעדים עד ל k , ביחס ל $y = x$. את שאר הצעדים לא נשנה.

נשים לב כי $f \circ g = I, g \circ f = I$. מכאן f - חח"ע ועל.

$$c(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{בקצרה: הוכחנו כי}$$

נוסחת נסיגה למספרי Catalan

משפט: יהי $c(n)$ מספר הסדרות המאוזנות של n אחדות ו n אפסים, אזי $c(n)$ מקיימת את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$c(0) = c(1) = 1$$

$$n > 1, c(n) = \sum_{k=1}^n c(k-1)c(n-k)$$

הערות: $c(0)$ - מספר הסדרות המאוזנות עם 0 אחדים ו 0 אפסים. יש אחת כזו - $\emptyset$.

$c(1)$ - מספר הסדרות המאוזנות עם אחד ואפס. היחידה היא 01.

$$\text{דוגמא: נחשב בעזרת המשפט את } c(2). \text{ זה צריך לצאת } 2. \frac{1}{2} \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 2$$

$$\sum_{k=1}^2 c(k-1)c(2-k) = c(0)c(1) + c(1)c(0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

על פי נוסחת הנסיגה, כנדרש.

31.12.2006

הודעה:

בוחן 2 יתקיים בשבוע 13. נושאים לבוחן:

1. משפט ES

2. משפט catalan

תתבקשו להוכיח משפט / למה מההרצאה + תרגיל קל

מספרי Catalan

$$(C(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}) \text{ - מספר Catalan (תזכורת: מספר Catalan)}$$

דברים שמתנהגים כמו מספרי Catalan:

1. ההגדרה המקורית: מספר הסדרות המאוזנות של n אפסים ו- n אחדות. (מאוזנת $\equiv$ בכל רישא מספר האפסים $\leq$ מספר האחדים).
2. מספר המהלכים הסריגיים (מסלולים) מ $(0,0)$ ל (n,n) שמוכלים בגזרה $x \geq y$.
3. הצגה גאומטרית מסובכת ב 45° - מהלך שמתחיל ב $(0,0)$ ומסתיים ב $(2n,0)$, וכל הצעדים הם מהצורה $+1$ (עליה באלכסון $\nearrow$ כזה) או מהצורה -1 (ירידה באלכסון $\searrow$ כזה). סדרה לא מאוזנת $\leftrightarrow$ מסלול שאיננו אי שלילי. סדרה מאוזנת $\leftrightarrow$ מסלול אי שלילי.
4. בעיית בחירות - שני מועמדים. כל מועמד קיבל n קולות. $C(n)$ - מספר האופנים לספור n מצביעי מועמד א' ו- n מצביעי מועמד ב' כך שבכל שלב של הספירה מס' הקולות שמועמד א' צבר $\leq$ מס' הקולות שמועמד ב' צבר.

תרגיל: מהו מספר המסלולים מ $(0,0)$ ל (n,n) שמוכלים בגזרה $x > y$ (פרט לקצוות המסלול).
תשובה: כל מסלול חוקי חייב ללכת בראשית ימינה, ובסוף מעלה. המספר הנ"ל = מספר כל המסלולים מ $(1,0)$ ל $(n,n-1)$ שלא חוצים את האלכסון ביניהם, כלומר - את הישר $y = x - 1$. זה שווה למספר כל המסלולים מ $(0,0)$ ל $(n-1,n-1)$ שלא חוצים את הישר $y = x$, כלומר -

$$C(n-1) = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$$

נוסחת הנסיגה למספרי Catalan

משפט: יהי $C(n)$ מספר הסדרות המאוזנות של n אחדות ו- n אפסים, אז $C(n)$ מקיים את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$C(0) = C(1) = 1$$

$$C(n) = \sum_{k=1}^n c(k-1)c(n-k)$$

הוכחה:

הגדרה: $\vec{x}$, סדרה מאוזנת של n אפסים ו- n אחדות נקראת מאוזנת מינימלית אם בכל רישא שלה ששונה מ $\vec{x}$, $\emptyset$, מספר האפסים $<$ מספר האחדים.
דוגמאות: $(0,1,0,1,0,1)$ מאוזנת, אבל לא מאוזנת מינימלית.
 $(0,0,1,0,1,1)$ מאוזנת מינימלית.

הערה: משמעות גאומטרית של סדרה מאוזנת מינימלית היא מתאימה למסלול מ $(0,0)$ ל (n,n) שפרט לקצותיו מוכל בגזרה $x > y$.

כעת, נגדיר D_k = אוסף המסלולים שחותכים את הישר $y = x$ בפעם הראשונה בנקודה (k, k) .
נשים לב כי מהגדרה $k \neq l, D_k \cap D_l = \emptyset$.

הערה: אוסף הסדרות המאוזנות $\bigcup_{k=1}^n D_k$.

$|D_k|$ = (מספר המסלולים מ $(0,0)$ ל (k,k) שמוכלים (בפרט לקצוות) בגזרה $x > y$ * (מס' המסלולים מ (k,k) ל (n,n) שמוכלים בגזרה $x \geq y$) $C(k-1) \cdot C(n-k)$.

לכן $c(n) = \sum_{k=1}^n c(k-1)c(n-k)$.

הגדרה: מהלך סריגי (מסלול) נקרא מטיפוס (a,b) אם הוא מורכב מ a צעדים ימינה ו b צעדים שמאלה.

הכללה למשפט Catalan: יהי $a > b$ אזי מספר המהלכים הסריגיים מ $(0,0)$ ל (a,b) המוכלים

(פרט לראשית) בגזרה $x > y$ הוא $\frac{a-b}{a+b} \binom{a+b}{a}$.

הערה: זו הכללה למשפט Catalan כי: מס' המסלולים מ $(0,0)$ ל (n,n) שמוכלים בגזרה $x \geq y$ =

מס' ה מסלולים מ $(0,0)$ ל $(n+1,n)$ שמוכלים בגזרה $x > y$ = הצבה במשפט $a = n+1, b = n$ ונקבל שמספר המסלולים הנ"ל = מספר $\frac{n+1-n}{2n+1} \binom{2n+1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = \frac{2n!}{n!n!} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ Catalan.

הוכחה: נשתמש בניסוח המתאים לבעיית בחירות. נקח סדרת מספרים a מספרים חיוביים שונים (מצבי מועמד '+') , b מספרים שליליים שונים (מצביעי מועמד '-').

זה דומה לבעיית בחירות גלויות – בהנתן סדרה של $a+b$ המספרים הנ"ל $\leftrightarrow$ בחירות גלויות. לדוגמא, אם המספרים הם : בחירות גלויות:

2,-3,5,7,-8,9

זה מתאים ל בחירות חשאיות:

+, -, +, +, -, +

הגדרה: נאמר שסדרות $a+b$ מספרים מתוך $A \cup B$ ($A = \{x_1, \dots, x_a\}, B = \{y_1, \dots, y_b\}$) אם בכל רישא שלה יש יותר מספרים חיוביים מאשר שליליים.

נאמר שסדרות a "+" ים , b "-" ים נקראת חוקית אם בכל רישא שלה יש יותר "+" ים מאשר "-" ים. לכל סדרת $(a+b)$ מספרים מתאימה סדרת a "+" ים ו b "-" ים. נגדיר מחלקות שקילות:

$f(z_1, \dots, z_n) = (+, -, \dots)$

$f(2, -3, 5, -8, 9) = (+, -, +, -, +)$

יש $\binom{a+b}{a}$ מחלקות שקילות (מספר הסדרות של a "+" ו-" b "-"ים). בכל מחלקת שקילות יש $a!b!$ סדרות.

מהי מחלקת שקילות? $(+, -, +, +, -)$ - היא מחלקת שקילות - אם $A = \{3, 5, 8, 4\}$ אזי $B = \{-2, -3\}$ במחלקת השקילות יש את כל הסידורים של A, B .

טענה 1: יש $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)(a+b)!$ סדרות חוקיות של איברים מ $A \cup B$.

הערה: יש סה"כ $(a+b)!$ של סדרות מ $A \cup B$.

טענה 2: מטענה 1 נובע כי יש $\binom{a+b}{a} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ מחלקות שקילות חוקיות.

הערה: יש סה"כ $\binom{a+b}{a}$ מחלקות שקילות.

הוכחה: בשיעורי בית.

הוכחת טענה 1: נתבונן ב $(a+b)!$ הסדרות. נסדר כל סדרה באוסף זה במעגל עם כיוון השעון. שתי סדרות יקראו שקולות ציקלית אם מתאימה להן אותה סדרה מעגלית. לדוגמא: עבור $1, -2, 5, 7, -8, 3$, היא תהיה שקולה ל:

$-2, 5, 7, -8, 3, 1$

$5, 7, -8, 3, 1, -2$

...

ברור שיהיו $(a+b)$ סדרות כאלה.

על כן, הסדרות המעגליות הן מחלקות שקילות. יש $(a+b-1)!$ מחלקות שקילות (סדרות מעגליות) ובכל מחלקת שקילות $(a+b)$ סדרות.

נראה: שבכל מחלקת שקילות יש $(a-b)$ סדרות חוקיות.

(וההמשך מכאן: $\frac{a-b}{a+b}$ מכל מחלקת שקילות הן סדרות חוקיות לכן $\frac{a-b}{a+b}$ מסה"כ הסדרות הן

$$((a-b)(a+b-1)!) = \frac{a-b}{a+b}(a+b)!$$

חוקיות. או - סה"כ החוקיות - $\frac{a-b}{a+b}(a+b)!$ -

הגדרה: מספר בסדרה המעגלית נקרא "טוב" אם הוא התחלה של סדרה חוקית.

הערה: מספר שלילי הוא לא "טוב" ומספר חיובי שמיד אחריו (עם כיוון השעון) מספר שלילי הוא גם לא טוב.

אלגוריתם: מציאת $(a-b)$ האיברים ה"טובים" שבסדרה.

מוציאים זוג חיובי $\leftarrow$ שלילי מהסדרה המעגלית. ממשיכים את התהליך על הסדרה המעגלית שנותרה וכן הלאה. הוצאנו b זוגות איברים מתוך $a+b$ ונשארו עם $a-b$ איברים "טובים".

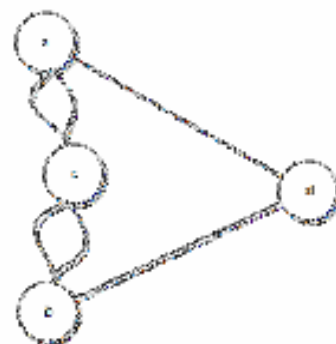
2.1.2007

הודעה : הבוחן ידחה לשבוע 14, על משפט ES, מספרי Catalan, ויש ללמוד גם הוכחות.

תורת הגרפים

דוגמא 1: העיר Königsberg בגרמניה . שוכנת משני צידיו של נהר pregel. יש שני איים בנהר (c,d). יש גשרים בין האיים לבין החופים, ובין האיים עצמם. נחפש טיול שבו עוברים על כל גשר בדיוק פעם אחת, וחוזרים לנקודת המוצא. האם טיול כזה אפשרי? במקרה הספציפי שצויר בלוח, לאו.

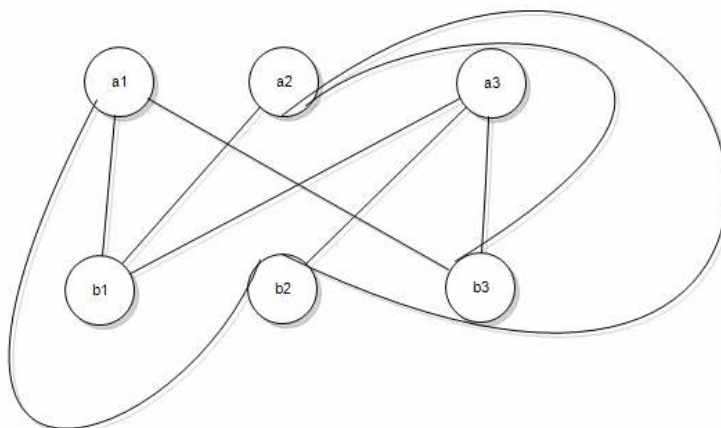
בלשון תורת הגרפים:



שאלה: האם יש מסלול סגור שעובר על כל צלע בדיוק פעם אחת? (מסלול Euler). במקרה זה – לאו.

שאלה 2:

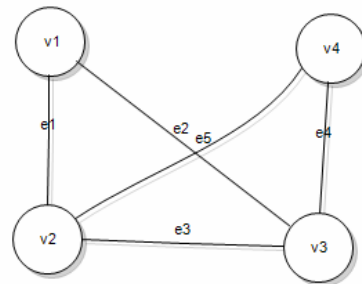
יש לנו 3 בתיים, ויש 3 בארות. כל בית רוצה להיות מחובר לכל הבארות, אבל אנו רוצים שהתעלות לא יחתכו. האם זה אפשרי? לא. בלשון שפת הגרפים : יש לנו גרף עם 6 קודקודים $K_{3,3}$ מוגדר כגרף עם 6 קודקודים שמורכב משתי קבוצות, בנות 3 קודקודים A, B כך שכל קודקוד ב A מחובר לכל קודקוד ב B :



$K_{3,3}$ אינו גרף מישורי – כלומר בכל ציור שלו במישור יהיו שתי צלעות נחתכות.

הגדרות: תהי V קבוצה סופית לא ריקה. E קבוצת זוגות של איברים שונים מ V . נקרא $G(V, E)$ גרף. איברי V נקראים קודקודים, איברי E נקראים צלעות. **סימון לצלע:** $\{u, v\}$ - מסמנת שיש צלע בין u ל v . אם $e = \{u, v\} \in E$ אז נאמר ש u, v הם שכנים. נאמר ש u חל בצלע e . נאמר ש e חלה בקודקודים u, v .

דוגמא:



- כאן

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$$

v_1 לא שכן של v_4 .
 v_3 שכן של v_1
 הצלע e_4 חלה ב v_3, v_4
 v_1 חל בצלעות e_1, e_2 .

הרחבות למושג גרף

1. גרף מכוון – ההגדרה כמו קודם, אבל הזוגות ב E סדורים.
2. מולטי גרף – בין שני קודקודים תתכן יותר מצלע אחת, ולולאות (צלע שיוצאת מקודקוד לעצמה). (לדוגמא, גרף הגשרים שראינו קודם).

מסלול: סדרה של קודקודים $(v_0, v_1, \dots, v_p)$ כך ש $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, $i = 0, \dots, p-1$, וכך שאין בסדרה קטע מהצורה $\dots v_i, v_j, v_i \dots$.

בדוגמא המצוירת הקודמת, מסלול לדוגמא הוא $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_1)$. (הערה: במסלול, בהחלט ייתכן שחזרנו על אותו קודקוד או צלע יותר מפעם אחת).

דוגמא ל"לא מסלול": v_1, v_2, v_4, v_2, v_3 - מיד אחרי שהלכנו על צלע, מיד חזרנו עליה בכיוון ההפוך.

אם בסדרה הנ"ל $v_0 = v_p$ והצלע $\{v_{p-1}, v_p\} \neq \{v_0, v_1\}$ אז המסלול נקרא **מעגל** (v_p הוא האחרון).
 דוגמא למעגל: (v_1, v_2, v_3, v_1) (קודקודים בהתאם לדוגמא לעיל)

$$, \text{וגם } (v_2, v_4, v_3, v_1, v_3, v_2) \text{ וגם } (v_2, v_4, v_3, v_1, v_3, v_2)^+$$

הערה: במעגל יתכן שעוברים על אותו קודקוד / צלע יותר מפעם אחת.

הגדרה: מסלול נקרא **פשוט** אם כל קודקוד מופיע בו לכל היותר פעם אחת.

הגדרה: מעגל נקרא **פשוט** אם כל קודקוד מופיע בו לכל היותר פעם אחת (פרט לקצוות).²

¹ נמחק עקב בקשה של חגית לסט, בשל טעות שנפלה – הגדרה מתוקנת תבוא בשיעור הבא.

14.1.2007

הודעות:

• בוחן 2 – יום ג' בשבוע הבא, בזמן ההרצאה

מקדמים מולטינומיים

המקדם המולטינומי - $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}$. המקדם המולטינומי מוגדר אם $\sum_{i=1}^k a_i = n$. הוא ההרחבה של מקדם בינומי.

אם אחד ה a_i ים מקיים $a_i < 0$ אזי $\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = 0$, אחרת -

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$$

משמעות קומבינטורית:

(הוכח בתרגיל 5) - $\binom{n}{a_1, \dots, a_k}$ משמעו מספר האפשרויות לצבוע n איברים שונים ב k צבעים כך

ש a_i איברים יצבעו בצבע i , כך ש $1 \leq i \leq k$ מספר הסדרות באורך n של איברי $[k]$ כך שלכל $i \in [k]$ המספר i מופיע a_i פעמים בסדרה.

לדוגמא:

$\binom{7}{2,3,2}$ - זה מספר הסדרות $x_1, \dots, x_7$ של האיברים $\{1, 2, 3\}$ שבהם המספר 1 מופיע 2 פעמים, המספר 2 מופיע 3 פעמים, המספר 3 מופיע 2 פעמים. לדוגמא - $(1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$. כל פרמוטציה של זה היא תקינה. אם נניח שכל האיברים שונים, יהיו לנו $7!$ סידורים. אבל יש לנו פעמיים 1, 3 פעמים 2, ופעמיים 3 – צריך לכן לחלק במספר הפרמוטציות הזהות, ולכן סה"כ - $\frac{7!}{2!3!2!}$.

ההוכחה של המשמעות הקומבינטורית היא באינדוקציה. איך עובד שלב האינדוקציה? כמה אפשרויות יש לנו לצבוע בצבע הראשון? $\binom{n}{a_1}$. לשאר - $\binom{n-a_1}{a_2, \dots, a_k}$ (ע"פ הנחת האינדוקציה). אם פותחים סוגריים זה יוצא.

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \binom{n}{a_1, \dots, a_k, 0} \quad \text{הערה:}$$

תכונות:

1. הרחבה לזהות פסקל (הוכחה בתרגיל 5) -

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{a_1, \dots, a_{i-1}, a_i-1, a_{i+1}, \dots, a_k} \quad \text{במקום ה } i \text{ - מחליפים את } a_i \text{ ב } (a_i - 1).$$

a. מדוע זה הרחבה? נזכור את זהות פסקל הרגילה -

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{a_1, a_2} = \binom{n-1}{a_1-1, a_2} + \binom{n-1}{a_1, a_2-1}$$

b. **הוכחה:** סדרה $(x_1, \dots, x_n)$ נקראת חוקית אם לכל i המספר $i \in [k]$ מופיע a_i ש פעמים בסדרה. באגף שמאל רשום מספר הסדרות החוקיות (הוכחנו קודם). כעת נספור את הסדרות החוקיות לפי החלטה מהו x_i . על פי הגדרה זו, D_i = מספר הסדרות החוקיות שבהן $x_i = i$. על כן, נותר לצבוע $a_i - 1$ איברים בצבע i . שאר הצבעים – אותה דרישה.

$$2. \text{ עבור } n \text{ נתון סכום כל המקדמים המולטינומיים הוא } k^n = \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \\ \sum_{i=1}^k a_i = n}} \binom{n}{a_1, \dots, a_k}$$

a. **הבהרה:** אגף שמאל הוא סכום של מחוברים כאשר כל מחובר מתאים לסדרה

$$\sum_{i=1}^k a_i = n \text{ המקיימת } (a_1, \dots, a_k)$$

דוגמא:

$$\sum_{\substack{(a_1, a_2, a_3) \\ \sum a_i = 4}} \binom{4}{a_1, a_2, a_3} = 3 \underbrace{\binom{4}{4, 0, 0}}_{\substack{(4, 0, 0) \\ (0, 4, 0) \\ (0, 0, 4)}} + 6 \underbrace{\binom{4}{3, 1, 0}}_{\substack{(3, 1, 0) \\ (1, 3, 0) \\ \dots}} + 3 \underbrace{\binom{4}{2, 2, 0}}_{\substack{(2, 2, 0) \\ (2, 0, 2) \\ (0, 2, 2)}} + 3 \underbrace{\binom{4}{1, 2, 1}}_{\substack{(1, 2, 1) \\ (2, 1, 1) \\ (1, 1, 2)}} =$$

$$3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 12 = 81 = 3^4$$

b. **הוכחה:** כל מחובר המתאים לסדרה $(a_1, \dots, a_k)$ הוא מספר הסדרות $(x_1, \dots, x_n)$ עם ההגבלה ש $i \in [k]$ מופיע a_i פעמים בסדרה. על כן, סכום כל המחברים הוא סה"כ הסדרות $(x_1, \dots, x_n)$ של איברי k , ללא כל הגבלה שהיא.

עצים מתוייגים

גרף מתויג הוא גרף עם קודקודים מסומנים $v_1, \dots, v_n$. שני גרפים מתוייגים הם זהים אם יש להם אותה רשימת צלעות.

טענה: יש עץ בעל n קודקודים שסדרת הדרגות (סדרת הערכויות) שלו היא $(d_1, \dots, d_n)$ אם

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1) \text{ ו } d_i \geq 1 \text{ לכל } i$$

כיוון 1 (קל) – הכרחיות התנאי

אם $G = (V, E)$ הוא עץ, $|V| = n$, אז $|E| = n - 1$. ועל כן $\sum_{i=1}^n \deg V_i = 2(n-1)$. כמו כן,

$d_i \geq 1$ לכל i קשיר, ולכן לכל i

הכיוון הלא טריוויאלי – נובע מהטענה הבאה :

טענה: מספר העצים המתוייגים בעלי n קודקודים $n \geq 2$, שסדרת הערכויות שלהם $d_1, \dots, d_n$

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2 \text{ הוא } \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$$

הערה: טענה $\Leftarrow$ כיוון לא טריוויאלי - אם $d_1 \geq 1$ לכל i אז המספר $\binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$ הוא

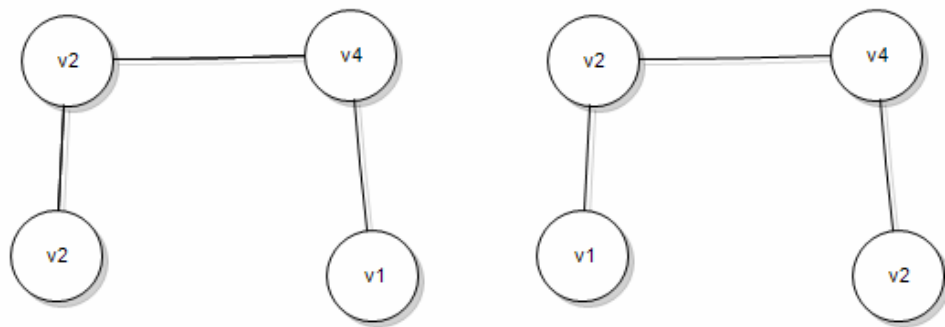
$$\binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$$

חיובי, ועל כן יש לנו מספר עצים מתוייגים $\binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}$.
דוגמא לטענה: - עבור $n = 2$, $(d_1, d_2) = (1, 1)$ היא האופציה החוקית האפשרית. נשים לב כי $d_1 + d_2 = 2n - 2 = 4 - 2 = 2$. העץ כאן הוא בשני קודקודים מחוברים.

דוגמא נוספת: עבור $n = 4$, $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 1, 2, 2)$. מספר העצים המתוייגים המתאים

$$\deg v_1 = \deg v_2 = 1, \deg v_3 = \deg v_4 = 2 \text{ בצורה ישירה } \binom{4-2}{0, 0, 1, 1} = \frac{2!}{1!} = 2$$

האופציות הן:



הוכחת הטענה: אם אחד ה d_i הוא אפס אז סיימנו. לכן נניח שלכל i , $d_i \geq 1$. עבור $n = 2$ בדקנו את הטענה לעיל, לכן נניח ש $n \geq 3$.

הערה: קיים i כך ש $d_i = 1$ (אחרת $d_i \geq 2$ לכל i , ו $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2n$ בסתירה לכך

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2). \text{ על כן, נניח בה"כ ש } d_n = 1.$$

לכל $i \neq n$ נתבונן בסדרה הבאה - $(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \dots, d_{n-1})$. זוהי סדרה באורך $n - 1$.

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} d_i - 1 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n d_i \right)}_{2n-2} - \underbrace{d_n}_{=1} - 1 = 2(n-1) - 2$$

לכן הסדרה $x_1, \dots, x_{n-1}$ מקיימת את תנאי המשפט, ועל כן אפשר להשתמש בהנחת האינדוקציה, ועל

$$D_i = \binom{(n-1)-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{i-1}-1, d_i-2, d_{i+1}, \dots, d_{n-1}-1}$$

פיה יש $x_1, \dots, x_{n-1}$ סדרת הערכויות שלהם.

לכל עץ כזה נוסיף את הקודקוד v_n ואת הצלע $\{v_n, v_1\}$ ונקבל שיש D_i עצים מתוייגים שבהם מופיעה הצלע $\{v_n, v_1\}$.

סה"כ מספר העצים המתוייגים הוא $\sum_{i=1}^{n-1} D_i = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-3}{d_1-1, \dots, d_i-2, \dots, d_{n-1}-1}$ ועל פי זהות פסקל המורחבת, זה שווה ל $\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_{n-1}-1} = \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_{n-1}-1, d_n-1}$ (מדוע מתקיים השוויון הימני? כי $d_n-1=0$).

משפט קיילי

מספר העצים המתוייגים בעלי n קודקודים הוא n^{n-2} . נסמן מספר זה ב C . נסמן ב $D(d_1, \dots, d_n)$ מספר העצים המתוייגים עם סדרת ערכויות $d_1, \dots, d_n$.

$$c = \sum_{\substack{(d_1, \dots, d_n) \\ \sum_{i=1}^n d_i = 2n-2 \\ \forall i, d_i \geq 1}} D(d_1, \dots, d_n) = \sum_{\substack{(d_1, \dots, d_n) \\ \sum_{i=1}^n d_i = 2n-2 \\ d_i \geq 1}} \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1} = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_n) \\ j_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n j_i = n-2}} \binom{n-2}{j_1, \dots, j_n} = n^{\binom{n}{\sum_{i=1}^n j_i}} = n^{n-2}$$

כנדרש.

דוגמא: $n=4$. כמה עצים מתוייגים יש לנו עם 4 קודקודים? $4^2 = 16$. אין לי כוח להעתיק.

16.1.2007

קב' גברים $M = \{m_1, \dots, m_4\}$, קבו' נשים $W = \{w_1, \dots, w_5\}$. הגרף G מוגדר באופן הבא -

$$\{m_i, w_j\} \in E \text{ אם יש יחס הכרות בין } m_i \text{ ל } w_j.$$

האם קיים שידוך לכל הגברים? שידוך מוגדר כך שאסור לשדך את אותה אישה לשני גברים, ומותר לשדך רק נשים שמכירות את הגברים. בשפת הגרפים – אוסף של צלעות זרות. נאמר ששידוך מכיל את M אם כל קודקוד ב- M חל באיזושהי צלע של השידוך.

ועכשיו לפורמליזציה

גרף דו צדדי (G, V_1, V_2, E) הוא גרף המקיים - $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ כך שאין צלעות בין קודקודי V_1 ואין צלעות בין קודקודי V_2 .

זיווג בגרף $G(V, E)$: קב' $D \subseteq E$ כך שכל הצלעות ב- D הן זרות (צלעות הן זרות אם הן לא חלות באותו קודקוד). (נשים לב שההגדרה מאפשרת זיווג גם בגרפים שאינם דו צדדיים).

תהי $S \subset V, D$ זיווג, **נאמר ש- D מכיל את S** אם כל איבר ב- S חל בצלע כלשהי ב- D .

הגדרה: תהי $G(V, E)$ גרף. $S \subset V$. נסמן ב- $N_G(S)$ את אוסף השכנים של קודקודי S בגרף G .

שאלה: באילו תנאים קיים זיווג בגרף G שמכיל את M ?

אילו מכשולים יתכנו?

- קודקוד מבודד m_i
- שני גברים שמכירים ביחד רק אישה אחת
 - באופן כללי - k גברים שמכירים פחות מ- k נשים
 - **פורמלית** – מכשול אפשרי הוא קיום של $S \subset M$ כך ש- $|N_G(S)| < |S|$

משפט החתונה של Hall

יהי $G = (M, W, E)$ גרף דו צדדי. ל- G יש זיווג המכיל את M אםם לכל $S \subset M$ מתקיים כי

$$|N_G(S)| \geq |S|$$

תנאי Hall: לכל $S \subset M$ $|N_G(S)| \geq |S|$.

המשפט שקול ל – קיים זיווג שמכיל את $M \Leftrightarrow$ מתקיים תנאי Hall.

הוכחה:

$\Leftarrow$ טריוויאלי – נובע מעקרון שובך היונים.

$\Rightarrow$ נניח את תנאי Hall, צ"ל שקיים זיווג שמכיל את M .

הוכחה באינדוקציה שלמה על $|M|$:

בסיס: עבור $|M| = 1$. יהי $M = \{m_1\}$. תנאי Hall - $|N_G\{m_1\}| \geq 1$, כלומר יש ל- m_1

לפחות שכנה אחת, w_1 , ולכן יש זיווג – הצלע $\{w_1, m_1\}$.

שלב: נניח כי הטענה נכונה עבור $|M| \leq n$ ונוכיח עבור $|M| = n + 1$. $G(M, W, E_G)$. יש לנו שתי אפשרויות:

א. לכל $S \subsetneq M$ מתקיים $|N_G(S)| \geq |S| + 1$

ב. קיימת $S \subsetneq M$ כך ש $|N_G(S)| = |S|$.

במקרה א' ניקח $m_1 \in M$ - מתקיים $|N_G\{m_1\}| \geq 2$. בפרט יש לו שכנה w_1 . נשמיט מג m_1, w_1 (וכמובן את $\{m_1, w_1\}$). נסמן את הגרף המתקבל כ G' .

טענה: $G'(V', E')$ מקיים את תנאי Hall ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה קיים בו זיווג שמכיל את $M \setminus \{m_1\}$.

הוכחה: תהי $S \subseteq G'$. $N_{G'}(S)$ מכיל את w_1 או לא מכיל את w_1 , אבל בכל מקרה - $|N_{G'}(S)| \geq |S| + 1$, ועל כן $|N_{G'}(S)| \geq |S|$. אם $w_1 \in N_{G'}(S)$ אז $|N_{G'}(S)| = |N_G(S)| - 1$. אם $w_1 \notin N_{G'}(S)$ אז $|N_{G'}(S)| = |N_G(S)|$. בכל מקרה $|N_{G'}(S)| \geq |S|$.

סיימנו עם מקרה א'.

במקרה ב', קיימת קב' חלקית ממש S כך ש $|N_G(S)| = |S|$. נסמן $S = M_1$. נסמן $M \setminus M_1 = M_2$. נראה קיום זיווג שמכיל את M בגרף. ראשית, נזווג את M_1 - אפשרי מהנחת האינדוקציה - $|M_1| < |M|$ ו M_1 מקיימת את תנאי Hall בגרף הדו צדדי שקודקודיו הם $M_1, N_G(M_1)$. כעת נזווג את M_2 . נתבונן בגרף G^* שקודקודיו הם $M_2, W \setminus (N_G(M_1))$ וצלעותיו הן צלעות בג G שמחברות בין M_2 ל $W \setminus (N_G(M_1))$.

נתבונן ב G^* ונראה שמתקיים תנאי Hall - אם הוא לא היה מתקיים, אז קיימת $S \subset M_2$ כך ש $|N_{G^*}(S)| < |S|$. זה גורר אי קיום תנאי Hall בגרף G עבור הקבוצה $S \cup M_1$ כיון ש $N_G(S \cup M_1) = N_G(M_1) \cup N_{G^*}(S)$ ומדובר באיחוד זר. לכן $|N_G(S \cup M_1)| = \underbrace{|N_G(M_1)|}_{|M_1|} + \underbrace{|N_{G^*}(S)|}_{<|S|}$. סתירה. מ.ש.ל.

21.1.2007

הודעות:

- היום השיעור האחרון ☺
- יום ג' – בוחן.
- שיעור חזרה – יום א' 18.2 10:00

מבנה המבחן:

דומה לשנים קודמות – למבחנים של פרידגוט
השאלות יהיו מהטיפוס של:

מספר האופנים לחלק 5 תפוזים ל-3 ילדים הוא – (מלא את החסר). $\binom{7}{2}$. (סיפור המקלות

והתפוזים)

יהיו 14 שאלות כאלה – כל אחת מהן 8 נקודות. אין דרך.

אין הוכחות במבחן – אבל שאלות יכולות לדרוש הבנה עמוקה של ההוכחות.

מעגל אוילר

הגדרה: יהי $G(V, E)$ גרף קשיר. מסלול שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא מסלול אוילר.

מעגל שמבקר בכל צלע בדיוק פעם אחת נקרא מעגל אוילר.

אם קיים מעגל אוילר, אז כל קודקוד היה בעל ערכיות זוגית. כל מעבר של המעגל דרך קודקוד תורם לארכויותו 2.

תנאי הכרחי לקיום מעגל אוילר בגרף (או מולטי גרף) הוא שערכיות כל קודקוד היא זוגית.

תנאי הכרחי לקיום מעגל אוילר בגרף מכוון הוא שדרגת כניסה = דרגת יציאה

משפט: אם G קשיר אז התנאי ההכרחי הוא גם תנאי מספיק.

משפט אוילר

יהי G גרף קשיר. יש G מעגל אוילר אם כל הדרגות בגרף הן זוגיות

הוכחה:

טענת עזר: יהי $G(V, E)$ גרף שכל דרגותיו זוגיות, אז כל קודקוד ב- G שדרגתו חיובית
שייך למעגל.

הוכחה: אלגוריתם לבניית המעגל, שמכיל קודקוד v_0 , $\deg v_0 > 0$. נצא מ- v_0 - ובחרים
ללכת על צלע כלשהיא שחלה בו.

שלב k : הגענו לקודקוד v_k . בוחרים ללכת על צלע כלשהיא שחלה בו בתנאי שלא השתמשנו
בה בשלבים קודמים.

האלגוריתם מגדיר מסלול (לא חזרנו על אף צלע פעמיים). מספר השלבים באלגוריתם הוא סופי,
כי מס' הצלעות בגרף סופי. נראה שהאלגוריתם נעצר בקודקוד v_0 . נניח בשלילה שהאלגוריתם
נעצר בקודקוד $x \neq v_0$.

כל מעבר של המסלול שבנינו בקודקוד x תורם לדרגתו 2 פרט לצעד האחרון, שתורם 1.
מכיוון שאי אפשר להמשיך, נובע שאין עוד צלעות שלא השתמשנו בהן אשר חלות ב- x . לכן
 $\deg x$ אי זוגית – סתירה לכך שכל הדרגות זוגיות.

יהי c מעגל מקסימלי באורכו. קיים מעגל בגרף – והראנו טענה חזקה יותר – שלכל קודקוד ב- G קיים
מעגל שמכיל אותו.

טענה: C הוא מעגל אוילר.

הוכחה: נניח כי C איננו מעגל אוילר. נשמיט את כל צלעות C מהגרף G ונקרא לגרף החדש G^* .

טענה 1: כל הדרגות ב G^* הן זוגיות.

הוכחה: מכל קודקוד ב G השמטנו צלעות שחלות בו ונמצאות במעגל. כל מעבר של מעגל דרך קודקוד משתמש בשתי צלעות. לכן, סה"כ, השמטנו מספר זוגי של צלעות. מכיוון שהדרגה של כל קודקוד ב G היא זוגית לפי ההנחה, אזי גם אחרי השמטת מספר זוגי של צלעות (לקודקוד), נשארים עם מספר זוגי.

טענה 2: יש ב C קודקוד שדרגתו ב G^* חיובית

הוכחה: קיימות שתי אפשרויות:

1. יש ב G^* צלע שחלה בקודקוד השייך ל C . במקרה זה: v_0 הוא קודקוד בעל דרגה

חיובית ב G^* .

2. אחרת, תהי $\{u_0, v_0\}$ צלע ב G^* כך ש u_0, v_0 אינם קודקודים במעגל C . יהי w

קודקוד ב C . G קשיר, ולכן קיים ב G מסלול המחבר בין u_0 לבין w . יהי x הקודקוד

הראשון במעגל C . הנמצא במסלול. נטען שדרגתו של x ב G^* היא חיובית (כי x הוא הראשון במעגל שמופיע במסלול)

יהי x קודקוד ב C שדרגתו ב G^* חיובית. נשתמש בטענת העזר ונקבע שקיים מעגל C_1 ב G^* ש x נמצא בו.

טענה: $C_1 C$ (שרשור) הוא מעגל ארוך יותר מהמעגל C .

הוכחה: $C_1 C$ זרים בצלעות, ולכן השרשור הוא מעגל.

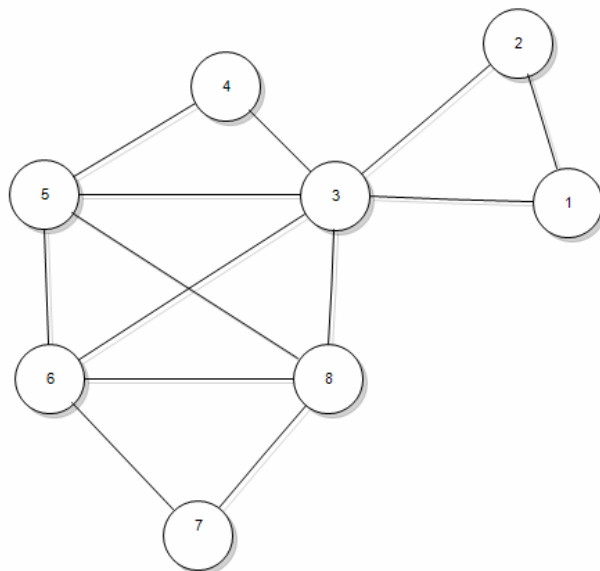
הערה: ההוכחה נותנת לנו אלגוריתם למציאת מעגל אוילר.

1. קח מעגל כלשהו – מתקדמים עד שנתקעים (בלי לחזור פעמיים על אותה צלע) – כך נחזור לקודקוד המקורי.

2. השמיטו צלעותיו של המעגל – אם לא סיימנו, יש קודקוד עם דרגה חיובית – אז נמצא מעגל שיוצא ממנו, כמו בסעיף הקודם. כך נקבל מעגל גדול יותר בגרף המקורי.

3. המשיך עד שסיימו.

לדוגמא:



ואז :

$$c_0 = 5, 3, 4, 5, 8, 6, 5$$

$$c_1 c_0 = \left(\underbrace{8, 3, 6, 7, 8}_{c_1} \underbrace{6, 5, 3, 4, 5, 8}_{c_0} \right)$$

$$c_2 = 3, 1, 2, 3$$

$$c_2 c_1 c_0 = \left(3, 1, 2, 3, \underbrace{4, 5, 8, 3, 6, 7, 8, 6, 5, 3}_{old\ cycle} \right)$$

משפט לסיום: אם בגרף קשיר יש בדיוק שני קודקודים, עם ערכיות אי זוגית, אז יש בגרף מסלול אוילר.