24.10.2006

מתרגל: אלון פינטו – allalon@math.huji.ac.il טלפון בבית - 02-6521565
שעת קבלה: יום א' – 16:00 – 17:00 – בקנדה עליון.
ספר: מתמטיקה בדידה – נתי לינאל ומיכל פרנס

מנהלות:

קורס = הרצאות + תרגולים + תרגילים + בחנים + בחינה.
תרגיל כל שבוע. חובה להגיש לפחות 9. תרגילים – 10% מהציון הסופי **מגן בלבד**(נלקח מה11 תרגילים הטובים ביותר). .
בחנים – $2\times 5\%$ - גם מגן. סה"כ מגן של 20%.

הגשה – אפשר להגיש בכל קבוצת תרגול – אבל אין הגשה אחרי קבוצת התרגול.

אינדוקציה מתמטית

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

דרך אחת להוכיח – טריק.
עבור $n=1$ $1=\frac{1\cdot 2}{2}=\frac{2}{2}=1$.
אפשר לבדוק גם עבור $n=2$.

עקרון האינדוקציה:

רוצים להוכיח טענה לכל מספר טבעי. בשלב הראשון – מוכיחים עבור $n=1$ (בד"כ – בדיקה רגילה).
שלב שני – מניחים כי הטענה נכונה עבור איזשהו n טבעי, ובשלב השלישי – מראים שמכך נובע כי הטענה נכונה עבור $n+1$.
נוכיח את נוסחת הטור הנ"ל. את שלב הבסיס עשינו. נניח כי הטענה נכונה עבור n, ונוכיח עבור $n+1$.

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{n(n+1)+2n+2}{2}=$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+2}{2}=_{IH}(1+...+n)+(n+1)$$

דוגמא מסובכת יותר:

טענה: כל מספר טבעי $1<$ הוא מכפלה של ראשוניים.
תזכורת: מספר טבעי $p>1$ נקרא ראשוני אמ"מ בכל מקרה בו $p=k\cdot l$ כאשר k,l טבעיים אזי $k=1,l=p$ או להפך.
הוכחה: נתון $n\in N$. יתכנו 2 אופציות.

1. אם n ראשוני – סיימנו
2. אחרת - $n=k\cdot l$ כאשר k,l טבעיים ו $1<k,l<n$.
   a. מה עושים עכשיו?

כעת נשתמש בעיקרון שנקרא

עקרון האינדוקציה המלאה

שוב, רוצים להוכיח שטענה מסויימת נכונה לכל מס' טבעי.לכל n טבעי מניחים שהטענה נכונה לכל $m<n$, ומראים שמכך נובע שהטענה נכונה עבור n. אם עשינו זאת לכל n אזי הטענה נכונה לכל מס' טבעי. **לא צריך להוכיח את הבסיס!**
בכמה צעדים פשוטים:

1. קובעים n טבעי כלשהו.
2. מניחים שהטענה נכונה לכל $m < n$ טבעי.
3. מראים שמכך נובע שהטענה נכונה עבור n.

אם עשינו זאת לכל n טבעי – אזי הטענה נכונה לכל מס' טבעי.
למה זה נכון?
טענה: עקרון האינדוקציה המלאה עובד.
הוכחה: נניח בשלילה שלא, כלומר קיים איזשהו מספר עבורו הטענה המתמטית אינו נכונה. בפרט קיים אישזהו מספר מינימלי n כנ"ל – אבל הראנו כי הטענה נכונה לכל $m < n$, כולל n כנ"ל. אבל שהשתמשנו באינדוקציה מלאה הראנו שמכך נובע שהטענה נכונה עבור n.
סתירה!
איפה הבסיס? באינדוקציה רגילה – אני מראה עבור $n = 1$. באינדוקציה מלאה – כשאני מוכיח לכל n, ומראה שזה נכון לכל $m < n$, זה יהיה נכון ל $n = 1$ - כי לא יהיה m שכזה...

31.10.2006 – תרגול 2

תזכורת שעת קבלה: יום א' 17:00 – 16:00 , קנדה עליון

יחסים (Relations):

$3<5$ אומר שהזוג $(3,5)$ מקיים את היחס *"קטן מ"*. כשאנו אומרים $x=y$ זה אומר ש (x,y) מקיים את היחס *"שווה ל"*

"לעידו יש עיניים ירוקות" אומר ש(עידו, ירוק) מקיים את היחס "*צבע עינים של*".

הגדרה: בהנתן קבוצות A,B, יחס R בין A וB הינו קבוצה מהצורה $R\subset A\times B$. אם $a\in A$ ו $b\in B$, ו $(a,b)\in R$, נאמר ש (a,b) מקיים את היחס R, ונסמן aRb.

נשים לב – R ממלא שלושה תפקידים:

- R הוא שם היחס
- R הוא קבוצת הזוגות המקיימים את היחס
- R מסמן את היחס (aRb).

הגדרות :יהי $R\subset A\times A$, יחס על A

- R יקרא **רפלקסיבי** אם $\forall a(aRa)$.
- R יקרא **סימטרי** אם $\forall a,b(aRb\Rightarrow bRa)$
- R יקרא **טרנזיטיבי** אם aRb וגם bRa גורר aRc
- R יקרא **אנטי סימטרי** אם aRb וגם bRa גורר $a=b$

הערה: לכל קבוצה A מוגדר תמיד יחס השיוויון $\{(a,a)\mid a\in A\}$.

תכונות	יחס 'שווה' =	יחס קטן / שווה $\le$	יחס קטן $<$
רפלקסיבי	כן	כן	לא
סימטרי	כן	לא	לא
טרנזיטיבי	כן	לא	לא
אנטי-סימטרי	כן	כן	כן – באופן ריק.

הגדרה: יחס R נקרא יקרא 'יחס שקילות' אם הוא מקיים:

- רפלקסיביות
- סימטריות
- טרנזיטיביות

הגדרה: יחס R יקרא יחס סדר (או יחס סדר חלש) אם הוא מקיים:

1. רפלקסיבי – במקרה של חלש בלבד
2. אנטי סימטרי
3. טרנזיטיבי

דוגמאות:

1. נגדיר יחס R על $N\times N$ כך : $R=\{(a,b)\in N\mid a+b\ \ is\ \ even\}$
   a. רפלקסיבי. יהי a. צ"ל aRa, אבל $a+a=2a$, ולכן מתקיים.
   b. סימטרי , שכן $a+b=b+a$
   c. טרנזיטיבי – כן. נניח שaRb וגם bRc. כלומר - $a+b$ זוגי וגם $b+c$ זוגי. ועל כן $(a+b)+(b+c)=2n$.$a+c=2n-2b=2(n-b)$.

נשים לב כי $R=\{(a,b)\mid a,b\ odd\ or\ a,b\ even\}$. כמסקנה, R **<u>הינו יחס שקילות</u>**.

2. נגדיר יחס R על $N\times N$, כלומר - $R\subset(N\times N)\times(N\times N)$.

מתקיים $(a,b)R(c,d)$ אמ"מ $a+d=b+c$.

- רפלקסיבי - כמובן - $a+b=b+a$
- סימיטריות – נניח כי $(a,b)R(c,d)$, כלומר $a+d=b+c$, האם $(c,d)R(a,b)$, כלומר $c+b=a+d$, וזה מתקיים.
- טרנזיטיביות – נניח כי $(a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(e,f)$, כלומר - $a+d=b+c$, וגם $c+f=d+e$. צ"ל $(a,b)R(e,f)$, כלומר - $a+f=b+e$. ע"י סכימה נקבל $a+d+c+f=b+c+d+e\Rightarrow a+f=b+e$.

מ.ש.ל.

מה משמעות היחס? כל מספר שלם ניתן לייצג ע"י $a-b$ כאשר $a,b\in N$. היחס R אומר $(a+b)R(c,d)$ אמ"מ (a,b) מייצג אותו מספר שלם כמו (c,d).

7.11.2006

תרגול 3

פתרון לשאלה 4 - תרגיל 1

נתון מלבן ומחלקים אותו ע"י n ישרים. צריך להראות שניתן לצבוע את האיזורים בין הישרים בשחור ולבן כך ששני אזורים סמוכים צבועים בצבעים שונים.

הוכחה: באינדוקציה על n (מספר הישרים).

בסיס האינדוקציה: $n=1$ ברור, שכן ישר בודד מחלק את המלבן לכל היותר לשני חלקים ולכן אם נצבע אחד בשחור ואחד בלבן, אזי דיינו.

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור n ישרים ונוכיח עבור $n+1$. ע"פ הנחת האינדוקציה, יש צביעה ל n הישרים. בהנתן ישר $n+1$, נגדיר צביעה חדשה באופן הבא. בה"כ הישר ה$n+1$ מחלק את המלבן לחלק עליון וחלק תחתון. כל אזור בחלוקה המקורית נמצא באחד מ3 מקומות:

- מעל הישר
- מתחת הישר
- מתחלק על ידי הישר לחלק עליון ותחתון

כעת נצבע את החלקים במלבן החדש בעזרת הצביעה המקורית כאשר אנו הופכים את הצביעה מעל הישר ה$n+1$.

צ" שכל שני איזורים סמוכים הם בעלי צבעים שונים. יהיו A,B שטחים סמוכים כלשהם. אם שניהם נמצאים בחלוקה המקורית מעל או מתחת לישר ה$n+1$, אזי ע"פ הנחת האינדוקציה יש להם צבעים שונים.

מה קורה כאשר A,B נמצאים משני צידי הישר? במקרה זה, בהכרח A וB הם תוצאה של חלוקה של קטע במלבן עם הn ישרים (כי אם היה להם גבול משותף שהוא ישר במלבן עם ה n ישרים, אזי הגבול הנ"ל נוצר ע"י ישר המתלכד עם הישר ה$n+1$. כמסקנה, לA ולB היה במקור אותו צבע ולכן בצביעה החדשה יש להם צבעים שונים.

14.11.2006

פתרון תרגיל 3 , שאלה 4

<u>טענה:</u> אם קיימת העתקה $g: A \to A$ שהיא חח"ע **ולא** על אזי קיימת בA קבוצה בת מניה. זה שקול לטענה בתרגיל (כי $A := \mathrm{Im}(g)$).

אילו A היתה סופית, אזי העתקה חח"ע מA לA בהכרח על, לכן התנאי בטענה רומז שA אינה סופית.
נראה שA מכילה קבוצה בת מניה (ולכן היא בהכרח אין סופית).

<u>הוכחת הטענה:</u> נבחר a שאינו בתמונה ל g , ונתבונן בשרשרת הבאה:

$$a \to g(a) \to g^2(a) \to \ldots \to g^n(a)$$

לא קיים $i < j$ כך ש $g^i(a) = g^j(a)$, בגלל החח"ע.

תהי $C = \{g(a), g^2(a), \ldots,\}$

<u>דוגמא (קנונית לקבוצה אינסופית חח"ע ולא על מהקבוצה לעצמה):</u>

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x+1$$

נניח $C \subseteq A$ $\{x_1, x_2, \ldots\}$. נגדיר $g: A \to A$, $\begin{matrix} \forall x_i \in C, g(x_i) = x_{i+1} \\ x \notin C, g(x) = x \end{matrix}$. פונקציה חח"ע ועל.

<u>תרגיל 3, שאלה 3ב</u>

נתונות A, B סופיות. $|A| = n, |B| = k$. יש k^n פונקציות מA לB, כי לכל איבר בA אנו צריכים לבחור איבר כלשהו בB, ולכן יש לנו n בחירות, ולכל אחת, k אפשרויות.

כמה פונקציות חח"ע מA לB? אם $|B| < |A|$ אזי אין פונקציות חח"ע.

אחרת, $|A| \le |B|$. עבור $f(1)$ יש לי k אופציות, עבור $f(2)$ $k-1$ אפשרויות, ובסה"כ $\prod_{i=1}^{n} k-(i-1)$ אפשרויות.

<u>"בכמה דרכים ניתן"</u>

דוגמא: בכד נמצאים k כדורים הממוספרים ב $1,\ldots,k$. מוציאים n כדורים בזה אחר זה.

1. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, אם בכל פעם מחזירים את הכדור לכד? k^n.
2. אם לא מחזירים - אז מדובר ב $\prod_{i=1}^{n} k-(i-1)$ (כמו פונקציה חח"ע).

21.11.2006

תרגול 5

פתרונות - תרגיל 3, שאלה 2א.

f צמצימה מימין $\Leftarrow$ f על –צ"ל לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a)=b$. נניח בשלילה ש f לא על – כלומר קיים $b \in B$ שאינו בתמונה של f. נגידר $g,h: B \to \{0,1\}$ ע"י $g(x)=0$ $\forall x$, $h(x)=\begin{cases}0, x \neq b \\ 1, x=b\end{cases}$. אזי $g \neq h$, אבל $g \circ f = h \circ f$. אבל סתירה, כי הנחנו ש f צמצימה מימין.

תרגיל 4, שאלה 1

יהו A,B. $|A|=n, |B|=m$. מה הגודל של $A \times B$? $n \cdot m$

ב. כמה יחסים על A וB? 2^{nm}. יחס הוא $R \subset A \times B$. השאלה היא מהו $|p(A \times B)| = 2^{nm}$.

ג. כמה יחסים על A הם רפלקסיביים? 2^{n^2-n}. נייצג כל יחס בעזרת מטריצה. אנו דורשים כאן ש aRa תמיד. אם נייצג את $f(a_i,a_j)$ כמטריצה A של 0 ו1, אז האלכסון בה קבוע (1) – שכן $f(a_i,a_i)=1$. לכן, אנו יכולים לבחור $2^{(n^2-n)}$ יחסים שונים.

כמה יחסים סימטריים ורפלקסיביים יש לנו? $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ אופציות.

כמה מילים על התרגיל החדש

מהו המקדם המולטינומי – הכללה של הבינומי. המקדם הבינומי הוא $\binom{n}{k}$ - מס' הדרכים לבחור קבוצה בגודל k מקבוצה בגודל n.

המקדם המולטינומי - $\binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_n}$ - כאשר $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$ - מספר הדרכים לחלק קבוצה בגודל n לקבוצות בגודל $k_1,\dots,k_n$

<u>תרגול 6</u>

<u>פתרון שאלה 4, סעיף 4 - אלגברי</u>

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n}{k}+\binom{2n}{k-1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=2^{2n}$$

<u>פתרון קומבינטורי:</u>

$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$ - כמה תתי קבוצות בגודל $n \geq$ יש לקבוצה בגודל $2n+1$.

מספר תתי הקבוצות של $[2n+1]$ הוא $2^{2n+1}=2\cdot 2^{2n}$ וזה שווה למספר תתי הקבוצות בגודל $n \geq$ + מספר תתי הקבוצות בגודל גדול מn. כמובן שמספר תתי הקבוצות בגודל $n \geq$ = מספר תתי הקבוצות בגודל גדול מn, מהכללת הזהות $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$.

<u>המקדם המולטינומי</u>

$$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot ..k_t!}=\binom{n}{k_1,\ldots,k_t}$$

5.12.2006

הודעה: הבוחן שבוע הבא בשיעור אצל חגית, הכל עד שבוע שעבר. תרגילים עד 6. כנראה שכל השיעור ביום שלישי.

תרגול 7

תרגיל 6, פתרון שאלה 1

הטענה שציפו שנמצא היא $p \mid \binom{p}{k}, \forall 0 < k < p$.

שאלה 4:

תהי $S \neq \varnothing$ קבוצה סופית, אזי מס' תתי הקבוצות מגודל זוגי = מס' תתי הקבוצות מגודל אי זוגי.

$|S| = n$, אם n אי זוגי, ידוע ש $A \to A^C$ חח"ע ועל, ובמקרה זה היא מהווה התאמה בין קבוצות מגודל זוגי לקבוצות מגודל אי זוגי.

אם n זוגי, נתבונן על קבוצות מגודל זוגי המכילות את n, וקבוצות מגודל זוגי שלא מכילות את n. לחילופין, קבוצות מגודל אי זוגי המכילות את n, קבוצות מגודל אי זוגי, שלא מכילות את n.

אנחנו רואים התאמה של הקבוצות שמכילות את n לתתי הקבוצות המתאימות של $S \setminus \{n\}$.

5.א. כמה דרכים לחלק 100 תפוחים לשישה ילדים? $\binom{105}{5}$.

תוספת:

כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש ל $x_1 + \ldots + x_6 = 100$ כך ש $x_1, x_2, x_3 \leq 10$?

כאן צריך להכניס את עקרון ההכלה וההדחה. נספור פתרונות בכלל, ונחסיר את "הפתרונות הרעים".

סה"כ יש לנו $\binom{105}{5}$ פתרונות, כולל את הרעים. נסמן $A_i, i \in \{1,2,3\} =$ מספר הפתרונות כך ש $x_i > 10$. מהכלה והדחה נקבל כי מספר הפתרונות הרעים הוא

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|A_3| = |A_2| = |A_1| = \binom{100-11+5}{5}.$$

$$|A_3 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2| = \binom{100-22+5}{5}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{100-33+5}{5}$$

בואו נפתור תרגילים, לקראת הבוחן:

$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}=2^{2n-1}$ - אגף שמאל מדבר על סכימת כל תתי הקבוצות מגודל זוגי של קבוצת בעלת $2n$ איברים. זה כמובן $\frac{1}{2}$ ממספר הקבוצות האפשרי($\frac{2^{2n}}{2}=2^{2n-1}$), ע"פ מה שהוכחנו בתרגיל, וניסינו להוכיח בתרגול.

$\binom{n}{k}=\sum_{m=k-1}^{n-1}\binom{m}{k-1}$ - $m+1$ - האיבר הגדול ביותר. $k-1$ - $k-1$ איברים מ $1,...,m$.

בכמה דרים ניתן להושיב n אנשים בשורה של m כיסאות כך שאין שניים סמוכים?
אם $m<2n-2$ - אזי אפס דרכים. אחרת, נניח שהכסא הימני ביותר ריק, ואז לכל איש, יש כסא ריק מימינו. נוציא n כסאות, נושיב אנשים באופן כלשהו, ואז נחזיר את הכסאות, כסא מימין לכל יושב. ואז הפתרון יהיה $\binom{m-n}{n}n!$ ($n!$ בשביל הפרמוטציות של האנשים).

אם הכסא הימני ביותר תפוס, אם נסתכל ב $m-1$ הכסאות הנותרים , חזרנו למקרה הקודם עבור $n-1$ אנשים, כלומר - $\binom{m-1-(n-1)}{n-1}n!$. התשובה הסופית היא סכימת התשובות -

$$\left(\binom{m-n}{n-1}+\binom{m-n}{n}\right)n!=_{Pascal}\binom{m-n+1}{n}n!.$$

12.12.2006

ציטוט השיעור: 'אחח... יש יותר מדי דברים טובים'

מתרגל אלמוני נאנח כשהוא רואה כמה חומר טוב אנו לא נספיק.

תרגול 8

עקרון שובך היונים (או עקרון דיריכלה)

1. אם נתונות A,B, כך ש $|A|=n,|B|=m$ ו $m<n$ אזי $f:A\rightarrow B$ אינה חח"ע ופונקציה $g:B\rightarrow A$ אינה על.
2. אם מחלקים $a_1,\dots,a_n$ מספרים עם ממוצע $x<$, אזי קיים i כך ש $a<a_i$
3. אם מכסים קטע I בקטעים שהסכום הכולל של אורכם גדול מאורכו של I, אזי יש נקודה בI המכוסה על ידי יותר מקטע אחד.

דוגמאות:

1. בכל בחירה של 6 ספרות יש זוג שסכומן 9
   a. **הוכחה:** נחלק ל5 קבוצות $\{0,9\},\{1,8\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,5\}$. יש לנו 5 קבוצות שסכום האיברים בהם הוא 9. בכל בחירה של 6 ספרות, מעקרון שובך היונים בהכרח שתי ספרות שבחרנו שייכות לאותה קבוצה.
2. בין כל 100 מספרים שונים יש שניים שההפרש ביניהם מתחלק ב99.
   a. הוכחה: ניקח מודולו 99 של כל המספרים. יש 99 אפשרויות לשארית, לכן, לשני מספרים אותה שארית, וההפרש ביניהם הוא מתחלק ב99.
3. **הראו שקיימת חזקה של 3 המסתיימת בספרות 001.**
   a. הוכחה: ניקח $m<n$ כך ש $3^n \bmod 1000 = 3^m \bmod 1000$ (קיים מעקרון שובך היונים). 1000 מחלק את $3^n-3^m=3^m\left(3^{n-m}-1\right)$. על כל 1000 מחלק את $3^m\left(3^{n-m}-1\right)$, אבל 1000 ו 3^m הם זרים. על כן 1000 מחלק את $3^{n-m}-1$. על כן $3^{n-m}-1=k\cdot 1000$, על כן $3^{n-m}=k\cdot 1000+1$.
4. צובעים קטעים על מעגל באורך כולל קטן $<\frac{1}{2}$ היקף המעגל, אזי קיים קוטר למעגל שאינו צבוע.
   a. הוכחה: לכל קטע, נצבע את הקטע שנמצא ממש מולו. לכל היותר, הכפלתי את השטח הצבוע. כעת נבחר נק' כלשהיא שאיננה צבועה, וסיימנו.
5. **דומה לתרגיל:** מציירים 7 מעגלים בקוטר $1\frac{1}{2}$ על דף מלבני 10×10. הראו שקיים קו המקביל לצלעות המלבן שנוגע ביותר ממעגל אחד.
   a. הוכחה: ניקח היטל של המעגלים על 2 צלעות המרובע. כל מעגל תורם 3. בסה"כ – המעגלים תורמים 21. מאחר ואורך הצלעות הוא 20, מעקרון שובך היונים יש נק' המכוסה ע"י הטלים של שני מעגלים, והישר דרך נק' זו הוא המבוקש.
6. הראו שבין כל 7 אנשים יש זוג אנשים שיש להם אותו מספר של חברים (חברות היא יחס רפלקסיבי)
   a. הוכחה: מספר החברים של כל אחד נע בין $0..6$, אבל אם יש אדם לו 6 חברים, אז לא יתכן שיש אדם לו 0 חברים, לכן, למעשה, הטווח הוא בגודל 6 ($0,\dots,5$ או $1,\dots,6$)ומעקרון שובך היונים, יש שניים עם אותו מספר חברים.
7. יש לוח שחמט תקני (8×8), מסירים שתי פינות נגדיות. האם ניתן לכסות את הלוח ע"י קוביות דומינו בגודל 1×2 או 2×1.

a. המשבצות הנגדיות צבועות באותו צבע. אם הורדנו שתי פינות נגדיות, נשאר לנו מספר לא שווה של משבצות באותו צבע, ועל כן אי אפשר (כי כל אבן דומינו מכסה אבן לבנה ושחורה יחדיו).

26.12.2006
תרגול 10
תרגיל 9 – שאלה 4
בכל סידרה אינסופית של מספר ממשיים שונים, קיימת תת סדרה מונוטונית.

פתרון **לא נכון** (ע"פ ארדס דקרדס) – נניח בשלילה שלא קיימת תת סדרה אינסופית מונוטונית. יהי M החסם על האורך של הסדרות המונוטוניות. נתבונן ב M^2+1 האיברים הראשונים בסדרה. ע"פ ES, קיימת סדרה מונוטונית באורך $M+1$ - סתירה.

למה זה לא נכון? יתכן ויש תת סדרה מונוטונית באורך סופי לכל n טבעי, אבל אין תת סדרה באורך אינסופי. איך?
נתבונן בסדרה הבאה של תתי קבוצות של הטבעיים –

$$\{1\}$$
$$\{2,3\},\{2,4\}$$
$$\{5\},\{5,6\},\{5,6,7\}$$
$$\{8\},\{8,9\},\{8,9,10\},\{8,9,10,11\}$$

יש כאן תת סדרה **בכל אורך**, אבל אין תת סדרה באורך אינסופי.

הוכחה נכונה: נתונה הסדרה $a_1,\ldots,$. נאמר על a_i שהוא **פסגה** אם לכל $j>i$, $a_i>a_j$. נחלק לשני מקרים:
1. יש מספר סופי של פסגות – ואז החל ממקום מסוים N לכל $m>N$, קיים $n>m$ כך ש $a_m<a_n$. על כן באינדוקציה ניתן לבנות סדרה מונוטונית עולה.
2. יש אינסוף פסגות – ומעצם הגדרתן, הן סדרה מונוטונית יורדת.

שאלה 6 – שאלת חנוכה
יש לנו חנוכיה (9 כנים), 5 צבעים של נרות. בכמה דרכים ניתן לסדר את החנוכיה כך שיופיעו כל הצבעים. נסמן את הצבעים ע"י מספרים $(1,\ldots,5)$, ואז השאלה שקולה לכמה העתקות על יש מקבוצה בעלת $\{1,\ldots,9\}\rightarrow\{1,\ldots,5\}$.

אפשר לפתור את זה גם בעזרת הכלה והדחה (ראו נוסחה בתרגיל 7). ניקח את מספר הפונקציות שיש בכלל, ונוריד ממנו את מס' הפונקציות שאינן על. תהי A_i , $i=1,\ldots,5$ פונקציות כך ש i אינו בטווח.

אזי $\bigcup_{i=1}^{5}A_i$ הוא איחוד הפונקציות שאינן על.

$$|A_i|=4^9\ .$$
$$i\neq j\left|A_i\cap A_j\right|=3^9\ .$$
$$i\neq j\neq k\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|=2^9$$
$$i\neq j\neq k\neq l,\left|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\right|=1^9=1$$

התוצאה תהיה מספר הפונקציות הכולל 5^9 פחות מספר הפונקציות ה'רעות'.

שאלה: כמה צביעות יש עד כדי סיבוב החנוכיה? יהי X מס' הצביעות מהסעיף הקודם. על פניו, התשובה היא $\frac{x}{2}$ (שכן כל צביעה נספרה פעמיים). **אבל**, יש מקרים בהם השיקוף זהה לעצמו, ואז אסור לנו 'לחלק' את מקרה זה. ולכן התשובה היא $\frac{5!}{2}+\frac{x}{2}$ ($5!$ הן מספר הצביעות הסימטריות – בהן עלינו לקבוע צד אחד של החנוכיה, והשני נקבע על ידיו. בחישוב $\frac{x}{2}$ הורדנו חצי מהסימטריות).

שאלה 3: יהי G גרף מלא על 6 קודקודים. בין כל שני קודקודים ישנה צלע. צובעים כל צלע באדום או בכחול. צריך להראות שקיים משולש בעל צבע אחד (אדום או שחור) .

פתרון:

נבחר את קודקוד מספר 6, ונחלק את קודקודי הגרף לשתי קבוצות - A - הקודקודים שבינם לבין v יש צלע אדומה. B - הקודקודים שבינם לבין v יש צלע כחולה. מתקיים $|A|+|B|=5$, ומעקרון שובך היונים המוכלל קיימת קבוצה בה מספר האיברים הוא $\geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$. נניח בה"כ כי זו הקבוצה A. כעת, אם בצלעות בין קודקודי הקבוצה A יש צלע אחת אדומה, נבחר את שני הקודקודים שהיא מחברת ואת 6, וקיבלנו משולש אדום. אחרת, יש לנו קבוצה של 3 קודקודים ביניהם מחברות רק צלעות כחולות, ועל כן – כל בחירה של צלעות ביניהן תסגור משולש כחול. מ.ש.ל.

9.1.2007
תרגול 12

טענה: לעץ T יש לפחות 2 עלים (עבור $|V| = n \geq 2$).

הוכחה: נניח $V = \{1,...,n\}$ קבוצת הקודקודים ו d_iג הדרגה של הקודקוד ה i. אז מאחר ולעץ עם n קודקודים יש $n-1$ צלעות וכל צלע תורמת 2 לסכום הדרגות של הגרף נקבל $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.
מאחר ועץ הוא גרף קשור, $\forall i, d_i > 0$ ולכן יש 2 קודקודים עם דרגה 1, כלומר – עלים.

טענה: $G = (V,E)$ גרף. G קשיר וחסר מעגלים $\Leftarrow$ בין כל שני קודקודים קיים מסלול יחיד.

הוכחה שגויה: G קשיר ולכן בין כל שני קודקודים קיים מסלול. בשביל לראות שהוא יחיד – נניח בשלילה שקיימים שני מסלולים שונים $\begin{matrix} u = v_0,...,v_n = v \\ u' = v'_0,...,v'_k = v \end{matrix}$. אם כך, נחבר אותם - $v_0,...,v_n,v'_{k-1},...,v'_0$ - ואנו מקבלים מסלול מ v ל u מחובר למסלול מ u ל - v - בסה"כ מעגל.
נשים לב שלא הוכחנו – כי יתכן שאנו חוזרים על אותן צלעות פעמיים, ולכן לא הגדרנו באמת מעגל תקין.

הוכחה תקינה: נבנה מעגל באופן הבא: קיים i מינימלי כך ש $v_{i-1} \neq v'_{i-1}$. קיימים $i < j, j'$ מינימליים כך ש $v_j = v'_{j'}$. כעת מובטח ש $v_i, v_j, v'_{j'-1},...,v'_i$ מעגל "חוקי" ב G - בסתירה לכך ש G חסר מעגלים.

צביעת גרפים:
בהנתן גרף $G = (V,E)$ צביעה של (קודקודי) G ב n צבעים היא פונקציה $f: V \to [n]$ כך שלכל צלע $\{i,j\} \in E$ מתקיים $f(i) \neq f(j)$.

טענה:
1. G ניתן לצביעה אםם G אינו מכיל מעגל באורך אי זוגי.
2. אם G קשיר וקיימת צביעה כנ"ל של G אזי קיימות בדיוק 2 צביעות של G.

הוכחה:
1. בתרגיל הבית
2. הוכחה באינדוקציה על מרחק בגרף. נתחיל בקודקוד v_0 ב G כלשהו ונראה באינדוקציה על n כל הקודקודים במרחק n מ v_0 יש אותו צבע – והצבע נקבע ע"פ הצבע של v_0.
   עבור $n = 1$ - שכנים של v_0 כולם צבועים בצבע ההפוך ל v_0.
   שלב – נניח נכונות עבור n ונוכיח עבור $n+1$. כל קודקוד במרחק $n+1$ הוא שכן של קודקוד במרחק n. מאחר וכל הצבעים של הקודקודים במרחק n נקבעו, אזי הצבע של כל הקודקודים במרחק $n+1$ הוא ההפוך. מ.ש.ל.

מספרי קטלן: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, $C_0 = 1, C_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i c_{n-1}$

שאלה 2 מתרגיל 11
השאלה היתה כמה עצים בינאריים יש – כאשר מבחינים בין בן שמאלי לבן ימני. התשובה היא מתבססת על ההגדרה הרקורסיבית של מספרי קטלן. התשובה:

$S_1 = 1$, שכן שושלת עם אדם אחד מכילה אם קדמונית, ותו לו. $S_2 = 2$, שכן האופציה היא אם קדמונית, ובן / בת. לשם פשטות הגדרת S_n נגדיר את $S_0 = 1$ - שכן יש רק אופציה אחת של שושלת ריקה $S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{S_{n-k}}_{\substack{girl \\ family\, tree}} \cdot \underbrace{S_{k-1}}_{\substack{boy\, family \\ tree}}$, שכן יש לקחת בחשבון כל חלוקה של העץ המשפחתי כך שבסה"כ גודל תת העץ המתחיל בבן + תת העץ שמתחיל בבת הוא $n-1$, כולל אפשריות שאין תת עץ שמתחיל בבן / בבת (ואז אנו מתייחסים אליו בתור תת עץ בגודל 0).

16.1.2007

הודעות:

1. תרגיל 13 באתר – לא להגשה. למי שחסר, יכול להגיש אותו.
2. בוחן ביום ג'.

גרפים אויילריאנים

הערה: כל הגרפים שנדבר עליהם פה קשירים

הגדרות:י

1. מסלול אוילריאני[1] הוא מסלול הכל את כל **צלעות** הגרף (בדיוק פעם אחת – זה נובע מהגדרת מסלול)
2. מעגל אוילריאני הוא מסלול אויילריאני המתחיל ומסתיים באותו קודקוד.
3. גרף אוילריאני הוא גרף המכיל מעגל אויילריני.

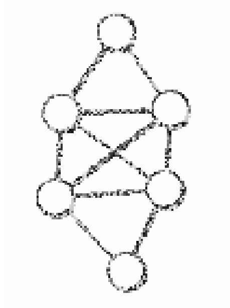
משפט: גרף הוא אוילריאני אם ורק אם כל קודקודי הגרף הוא מדרגה זוגית.

הרעיון: מתחילים בקודקוד שרירותי, v_0, ופשוט ממשיכים עד שנתקעי.

טענה: אם $v \neq v_0$ ול v דרגה זוגית אזי לא נתקע ב v.

מסקנה: אם נתקעים אז נתקעים ב v_0

טענה 2: המסלול הארוך בגרף (המתחיל ב v_0) הוא מעגל אויילריאני

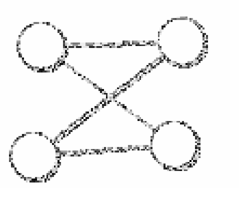


דוגמא לאויילריאני: (וגם המילטוני)

גרפים המילטוניים

הגדרה:

- מסלול המילטוני הוא מסלול הנוגע בכל **קודקודי** הגרף בדיוק פעם אחת.
- מעגל המילטוני הוא מסלול המתחיל ומסתיים באותה נקודה, ונוגע בכל קודקוד פרט מהראשון בדיוק פעם אחת.
- גרף המילטוני הוא גרף המכיל מעגל המילטוני.



דוגמא להמילטוני:

הערה: לא יודעים לאפיין גרפים המילטוניים. למעשה הבעיה של הכרעה האם גרף הוא המילטוני או לא היא קשה במושגי מדמח. (np קשה)

בעיית הסוכן הנוסע: נתונה לנו קבוצה מסויימת של ערים, וסוכן נוסע צריך לעשות מסע מכירות המתחיל ונגמר בעיר מסויימת X ועובר דרך כל הערים.

שאלה: האם יש מסלול שעובר דרך כל עיר פעם אחת ואם יש מהו המסלול הקצר ביותר?

דוגמאות:

---

[1] 'זה מסלול אוילר, לא מסלול אוילריאני, אל תאמין לו!!!1' (ש.ש.)

1. כל גרף שלם (בין כל שתי נקודות יש צלע) הוא המילטוני.
2. כל גרף תחרות מכיל מסלול המילטוני והוא המילטוני אםם הוא קשיר לחלוטין.
   a. **גרף תחרות:** גרף שלם מכוון.
   b. **קשיר לחלוטין:** גרף מכוון הוא קשיר לחלוטין אם בין כל שני קודקודים u,v יש מסלול מ v ל u ומ u ל v.

<u>כל גרף תחרות מכיל מסלול המילטוני. מדוע?</u>

נוכיח באינדוקציה מלאה על מס' הקודקודים בגרף. נבחר קודקוד שרירותי v_0. נסמן בA את קבוצת כל הקודקודים עם צלע ל v_0. נסמן בB את קבוצת כל הקודקודים עם צלע מ v_0 אליהם. כעת נשתמש בהנחת האינדוקציה – יש מסלול בA ומסלול בB. נחבר אותם בעזרת v_0 למסלול המילטוני. נקבל מסלול שמכיל את כל הקודקודים בגרף.

<u>תרגיל 12, שאלה 5</u>

גרף קשיר הוא 2 צביע $\Leftrightarrow$ אין בו מעגל באורך אי זוגי.

$\Leftarrow$ קל (נניח בשלילה כי G 2-צביע, ויש ב G מעגל $c=\left(c_1,\dots,c_{m-1},c_m\right)$, $c_1=c_m$, כאשר m זוגי. תהי f פונקציית הצביעה. בה"כ $f\left(c_1\right)=white$. על כן הצבע של כל c_i זוגי הוא שחור, וכל c_i אי זוגי הוא לבן. מכאן נובע כי הצבע של c_m הוא שחור, ושל c_1 הוא לבן, בסתירה לכך שהם אותו קודקוד).

$\Rightarrow$ מגדירים צביעה, ומסיימים.

23.1.2007

הגדרה:

1. גרף $G=(V,E)$ יקרא דו-צדדי אם $V=V_1\cup V_2$ (איחוד זר) ו $E\subset V_1\times V_2$ כלומר לכל צלע יש קודקוד ב V_1 וב V_2.
   a. לדוגמא – כל פונקציה וכל יחס ניתנים להצגה ע"י גרף דו צדדי.
2. **שידוך** – בגרף דו צדדי $G=(V_1,V_3,E)$ זוהי קבוצה $E'\subset E$ כך שאין זוג צלעות עם קודקוד משותף.
   a. לדוגמא: פונקציה היא זיווג אםם היא חח"ע
3. **שידוך** – יקרא ממצה אם כל קודקוד ב V_1 מופיע בשידוך.
4. **שידוך** – יקרא מושלם אם כל קודקוד מופיע בשידוך.
   a. לדוגמא – פונקציה חח"ע ועל מיוצגת ע"י שידוך מושלם.

הערה: שידוך ממצה הוא מושלם אםם $|V_1|=|V_2|$.

סימון: לכל קבוצת קודקודים $S\subset V$ נסמן $\Gamma(S)=$ קבוצת השכנים של S.

משפט (Hall): בגרף דו צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ קיים שידוך ממצה אםם לכל $S\subset V$ מתקיים

$$|S|\le|\Gamma(S)|$$

הוכחה: התבצעה בכיתה.

דוגמאות:

a. גרף דו צדדי מלא - $G=(V_1,V_2,V_1\times V_2)$ קיים זווג אםם $|V_2|\ge|V_1|$
b. גרף יקרא K רגולרי אם כל קודקוד הוא מדרגהK.
   i. טענה: בגרף דו צדדי $K>0$ רגולרי יש שידוך מושלם.
   ii. הוכחה : $G=(V_1,V_2,E)$. $|E|=|V_1|\cdot k=|V_2|\cdot k\Rightarrow|V_1|=|V_2|$
      בהנתן $S\subset V_1$, צ"ל $|S|\le|\Gamma(S)|$ - $|S|k\le\Gamma(S)\cdot k$
      (שכן צלעות שיוצאות מ $\Gamma(S)$ $\subseteq$ צלעות שיוצאות מS) - ועל כן $|S|\le\Gamma(S)$
c. חיזוקים:
   i. בגרף דו צדדי k רגולרי יש בדיוק k שידוכים מושלמים זרים
      $E=E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n$ כשהכל שידוכים זרים, כאשר E_i שידוך מושלם.
   ii. אם כל קודקוד ב V_1 הוא מדרגה k וכל קודקוד ב V_2 הוא מדרגה l ו $|V_1|\le|V_2|$ אזי קיים שידוך ממצה.

דוגמאות:

- נתונה טבלה בגודל $k\times10$ ($1\le k\le10$) כך ש:
  - בכל שורה מופיעים המספרים $1,\ldots,10$
  - באף עמודה לא מופיע מספר פעמיים.

  הראו שניתן להשלים את הטבלה לטבלת 10×10 המקיימת את התנאים הבאים.

הוכחה:

בצד ימין נרשום את מספרי השורות, בצד שמאל את מספרי העמודות. נחבר אותם אםם המספר אינו מופיע בעמודה.

טענה: בגרף שנוצר לכל קודקוד בצד שמאל יש דרגה $10-k$. לכל קודקוד בצד ימין יש דרגה $10-k$, לכן הגרף הוא $10-k$ רגולרי, ולכן קיים שידוך ממצה (ואפילו מושלם), ושידוך זה מראה לנו איך לבנות את השורה הבאה. נמשיך כך רקורסיבית עד לסיום.

<u>דוגמא נוספת:</u>

הראו שקיימת העתקה חח"ע ועל $f:\binom{[19]}{9}\to\binom{[19]}{10}$ המקיימת $T\subset f(T)$, לכל $T\in\binom{[19]}{9}$.

הוכחה: בהנתן $T\in\binom{[19]}{9}$, 10 קבוצות מ $\binom{[19]}{10}$ מכילות אותה. בהנתן $S\in\binom{[19]}{10}$, כמה קבוצות בגודל 9 מ $\binom{[19]}{9}$ מכילות את S? גם 10.

נגדיר גרף דו צדדי 10 רגולרי. $V_1=\binom{[19]}{9}, V_2=\binom{[19]}{10}$, ונוסיף צלע בין T ל S כאשר $T\subset S$. לפי הסעיפים הקודמים הגרף הוא 10 רגולרי, ולכן קיים בו שידוך מושלם, כלומר ההעתקה חח"ע ועל. מ.ש.ל.