<u>חשבון אינפיניטסימלי 1 – הרצאות – מר איתמר צביק, סמסטר א' , 2005 – 2006</u>

הי,
בעקבות בקשות רבות, החלטתי לשתף את הסיכומים שלי לטובת הכלל (לא התחלתי לכתוב מראש במחשב במחשבה שזה יעזור לעוד אנשים – פשוט אחרי היום הראשון בסמסטר, נזכרתי שאני לא מבין את כתב היד שלי, והתחלתי לכתוב במחשב).
אני מקווה שהמחברת תעזור לעוד רבים – אבל אני חייב להעיר: יתכן, ואפילו סביר, שיש בה טעויות. **אני לא לוקח אחריות** לאף ציון שתקבלו בגלל המחברת הזו. אם מצאתם טעות, אני אשמח אם תעדכנו אותי באימייל.

להערות/הארות/תיקונים : shuaavi@gmail.com

אבי שוע

<u>המספרים הממשיים (R)</u>

המספרים הממשיים מקיימים את האקסיומות:

1. מבנה אלגברי (סגירות) – חיבור וכפל מחזירים מספר ממשי גם כן.
2. סדר (ניתן לצייר על ישר)
3. שלמות(?)

<u>אקסיומות סכום (S):</u>

1. **אסוציאטיביות:** לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. **קומוטטיביות:** לכל $a,b\in R$ מתקיים $a+b=b+a$
3. **קיום 0:** a+0=0+a=0
4. **קיום נגדי:** a+(-a)=(-a)+a=0

<u>אקסיומות כפל (M)</u>

1. **אסוציאטיביות:** $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
2. **קוממטטיביות:** ab=ba
3. **קיום יחידה:** $a\cdot 1=1\cdot a=a$
4. **קיום הפכי:** $a\neq 0$, $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$

התכונה הדיסטריבוטיבית:

a(b+c)=ab+ac

<u>משפט:</u> יהיו $a,b,c\in R,a\neq 0$, קיים $x\in R$ יחיד עם התכונה $ax+b=c$.

הוכחה (יחידות): נניח ש $x,x'\in R$ מקיימים

$$ax+b=c$$

$$ax'+b=c$$

צ"ל

$$x=x'$$

1. $ax+b=ax'+b$
2. $(ax+b)+(-b)=(ax'+b)+(-b)$ - S4 קיום נגדי
3. $ax+(b+(-b))=ax'+(b+(-b))$ - S1 אסוציאטיביות
4. $ax+0=ax'+0$ - S4 קיום נגדי
5. $ax=ax'$ - S3 קיום 0
6. $\frac{1}{a}(a\cdot x)=\frac{1}{a}(a\cdot x')$ - M4 קיום הפכי
7. $(\frac{1}{a}\cdot a)\cdot x=(\frac{1}{a}\cdot a)\cdot x'$ - M1 אסוציאטיביות
8. $x=x'$ - M4 קיום הפכי , מ.ש.ל

הוכחה: קיום: נניח כי $x=\frac{1}{a}\cdot(c+-b)$

1. $a\cdot(\frac{1}{a}\cdot(c+(-b))+b=c$ הצבה
2. $(a\cdot\frac{1}{a})\cdot(c+(-b))+b=c$ - M1 אסוציאטיביות
3. $1\cdot(c+(-b))+b=c$ - M4 קיום הפכי
4. $(c+(-b))+b=c$ - M3 קיום יחידה
5. $c+((-b)+b)=c$ - S1 אסוציאטיביות
6. $(c+0)=c$ - S4 קיום נגדי
7. $c=c$

<u>מסקנות:</u>

1. $x+b=b, x=0$ יחידות ה0
2. x+b=0 - > x=-b יחידות הנגדי
3. $a\neq 0, ax=a$ $x=1$ יחידות ה1
4. $a\neq 0, ax=1, x=\frac{1}{a}$ יחידות ההפכי הכפלי.
5. $y\in R, 0y=0$

$x=0$

$x+0y=0y$

$0y+0y=0y$

6. $ax=0, a\neq 0\rightarrow x=0$

$x=1x=\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}0=0$

7. הנגדי של 1 כפול a = הנגדי של a

$a(-1+1)=a(-1)+a\cdot 1=a(-1)+a=0$

$(-1)a=-a$

8. חוק הסימנים: (-a)b=-(ab)=a(-b)
(-a)(-b)=ab

<u>אקסיומות של סדר</u>

1. טריכוטומיה - לכל $a,b\in R$ מתקיימת רק אחת מ3:
   a. a<b
   b. a=b
   c. b<a
2. טרנזיטיביות של הסדר $a<b\wedge b<c\rightarrow a<c$
3. לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a<b\rightarrow a+c<b+c$
4. אם 0<c, $a<b\rightarrow ac<bc$ - אי רגישות הסדר לכפל.

<u>הגדרות:</u>

$a\leq b\rightarrow a<b\vee a=b$

<u>משפטים</u>

1. $0<1$
2. $a,b \in P \to a+b \in P$
3. $a,b \in P \to ab \in P$

הוכחה ל1:

לפי טריכו', בגלל ש1 שונה מ0 מתקיים אחת ורק אחת מ:

$0<1$ או $1<0$

בדרך השלילה נניח ש$1<0$ ונראה שנגיע לסתירה.

$$1<0 \to 0<-1$$

לפי קונטיסטנטיות של הסדר עם הכפלה במס' חיובי:

$$0\cdot(-1)<(-1)(-1)$$

$$0<1$$

הוכחה ל(2)

$$0<a \in P$$

$$0<b \in P$$

$$0+0<a+b \in P$$

הוכחה ל(3)

$$0<a$$

$$0<b$$

$$o<ab$$

<u>שיעור 2</u>

הגדרות:

קבוצה המקיימת את 4 אקסיומות של סכום (S) נקראת חבורה (GROUP) או חבורה קוממוטטיבית.

קבוצה המקיימת את 4 אקסיומות של סכום ו4 אקסיומות הכפל, וקשורות על ידי התכונה הדיסטריביוטיבית, מהווה **שדה.**

המספרים הממשיים מהווים שדה.

קבוצה המקיימת טריכוטומיה וטרנזיטיביות נקראת **קבוצה עם סדר ליניארי.**

כאשר היא מקיימת סדר קונסיסטנטי עם חיבור וכפל, היא נקראת שדה סגור.

רישום:

$$A*B=\{a*b : a\in A, b\in B\}$$

$$A,B\subset R$$

הגדרה: $a^2=a\cdot a$

למה:

לכל $a\in R$ מתקיים $0\le a^2$. $a^2=0$ אם ורק אם a=0

הוכחה:

אם a=0 אז $a^2=0$

אם a>0 אז לפי המשפט הקודם - $0 < a \cdot a$ (חיובי כפול חיופי מביא חיובי)
אם a<0 אזי $0 < -a$ לכן $0 < (-a)^2 = a^2$

חלק שני
$$0 = a^2 -> a = 0\_or\_a = 0$$
$$0 = a -> 0 = a^2$$
מסקנונת: בR אין פתרון למשוואה $x^2 + 1 = 0$
$$x \in R -> 0 \le x^2 -> 1 = 0 + 1 \le x^2 + 1$$
הוכחונת:
$$0 < 1$$
$$0 < x^2 + 1$$

קשר בין קבוצות מספרים:
$$N \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset R$$

הגדרה: $S \subset R$ תיקרא אינדוקטיבית אם היא מקיימת את התכונות הבאות:
1. $1 \in S$
2. $x \in S \to x + 1 \in S$

__דוגמאות:__
R –
1. $1 \in R$
2. בגלל סגירות לחיבור, ובגלל שx וגם 1 שייך לקבוצה, היא מקיימת את תכונה 2.

P - (מספרים שלמים)

אנטי דוגמאות: כל קבוצה סופית, בפרט הקבוצה הריקה $\varnothing$.

כל קבוצה אינדוקטיבית, תכיל בתוכה את קבוצת המספרים הטבעיים N.
$$N = \cap S$$
הגדרה: N תהיה החיתוך של כל קבוצת S. $S \subset R$ S אינדוקטיבית.

"N היא הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר. "
__הערה:__ חיתוך של קב' אינדוקטיביות הינו קב' אינדוקטיבית.
1. 1 שייך לכל אחת מהקבוצות לכן שייך לחיתוך.
2. יהי x שייך לחיתוך אז x שייך לכל אחת מהקבוצות האינדוקטיביות, לכן גם x+1 שייך לכולן, לכן גם לחיתוך.

__עקרון האינדוקציה__
__משפט:__ אם $S \subset N$ אינדוקטיבית, אזי $S = N$
__הוכחה:__ אם $S \subset N \subset R$ אבל $N \subset S$ (וגם $S \subset N$) כלומר N=S

__עקרון האינדוקציה (2)__
עבור כל $n \in N$ נתונה טענה P(n) נניח כי

1. P(1) נכונה.
2. אם P(n) נכונה אזי P(n+1) גם נכונה.

במידה ו(1) ו(2) מתקיימות, אזי P(n) נכונה לכל $n \in N$.

<u>הוכחה:</u> תהי
$$S \subset N$$
$$\{n \in N : trueP(n)\}$$

צ"ל S=N. (S רשימת המספרים הטבעיים עבורם הטענה P(n) נכונה).
לפי המשפט הקודם, מספיק להראות שS אינדוקטיבית.
(1) $1 \in S$ שקול לP(1) נכונה.
(2) $n \in S$ שקול לP(n) נכונה (ע"פ הנחה) –P(n+1) נכונה (ע"פ הגדרת S). -> $n+1 \in S$.

למה
$$N + N \subset N$$
$$N \cdot N \subset N$$
(לנסות להוכיח באינדוקציה)

<u>הגדרה (רקורסיבית)</u>
יהי $x \in R$
$$x^1 := x$$
$$x^{n+1} := x^n \cdot x$$
<u>למה:</u> לכל $x \in R$ ולכל $n, m \in N$ מתקיים $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
הוכחה:
באינדוקציה על n
(1) כאשר n=1 -> $x^m x^1 = x^{m+1}$ נכונה על פי הגדרה (ברקורסיה) - > P(1) נכונה.
(2) נניח שP(n) נכונה, במילים אחרות: לכל m טבעי מתקיים ש $x^m x^n = x^{m+n}$ עבור אותו n.
נסיק מזה שP(n+1) נכונה.

$$x^m x^{n+1} = (defenition)$$
$$x^m \cdot (x^n \cdot x) = (M1)$$
$$(x^m x^n)x = (IH)$$
$$x^{m+n} \cdot x = (defenition)$$
$$(m, n \in N)$$
$$= x^{(m+n)+1}$$
$$= x^{m+(n+1)}$$

<u>אי שיוויון ברנולי (Bernoulli)</u>
לכל $n \in N$ ולכל $-1 < h \in R$ מתקיים $1 + nh \le (1+h)^n$
<u>הוכחה באינדוקציה:</u>
<u>(1)</u> P(1) - $1 + h \le (1+1)^1$, $1 + h \le 1 + h$ **הוכח**.
<u>(2)</u> אם P(n) נכון, אזי P(n+1) גם נכון:

$$(1+h)^n(1+h)=(1+h)^{n+1}$$
$$1+nh\le(1+h)^n$$
$$\ldots\le(1+nh)(1+h)\le(1+h)^n(1+h)$$
$$1+(n+1)h=1+nh+h$$

$$1+nh+h+nh^2=(1+nh)(1+h)$$
$$nh^2\ge 0$$
$$1+nh+h+nh^2\ge 1+nh+h$$
$$1+nh+h+nh^2\ge 1+(n+1)h$$

<u>שיעור 3</u>

<u>אי שיוויון ברנולי</u>

$$\forall n \in N, \forall h \in R, -1 < h$$
$$1 + nh \le (1+h)^h$$

הוכחה:

P(1) נכונה: $1 + 1h = (1+h)^1$

צ"ל P(n) נכונה -> P(n+1) נכונה

$$(1+nh) \le (1+h)^n \to$$
$$(1+h)(1+nh) \le (1+h)(1+h)^n$$
$$1+(n+1)h \le 1+h+nh+nh^2$$
$$0 \le nh^2$$

<u>תכונות של N (המספרים הטבעיים):</u>

N – היתוך כל הקבוצות האינדוקטיביות בR. $\begin{matrix} N := \cap I \\ I \subset R \end{matrix}$

מספר ממשי הוא טבעי אם הוא שייך לכל קבוצה אינדוקטיבית של R. N היא הקבוצה האינדוקטיבית **הקטנה ביותר** (נמצאת בתוך כל קבוצה אינדוקטיבית).

1. לכל $\forall n \in N$ מתקיים $1 \le n$
2. $N + N \subset N$
3. $N \cdot N \subset N$
4. $\forall n \in N, 1 < n$, קיים $m \in N$ כל ש $m + 1 = n \Leftrightarrow N \ni n - 1$
5. $\forall n, m \in N$ אם $n < m$ אזי $m - n \in N$ (ניתן להחסיר מספר טבעי קטן מגדול, ועדיין יהיה לנו מספר טבעי).
6. $\forall n \in N$ לא יתכן שקיים $m \in N$ המקיים $n < m < n+1$

<u>הוכחות:</u>

1. באינדוקציה:
   a. P(1) - $1 \le 1 \Leftarrow 1 \le n$
   b. נניח ש $\begin{matrix} 1 < 1+1 \le n+1 \Leftarrow 1 \le n \\ 0 < 1 \end{matrix}$
2. תרגיל
3. תרגיל
4. תהי $I = \{1\} \cup \{m+1 : m \in N\}$. I אינדוקטיבית. $1 \in I$ - P(1) מתקיים.

   נניח ש $n \in I$. יש שתי אלטרנטיבות: $n = 1 \Rightarrow 1+1 = n+1$.

   אחרת: קיים $m \in N$ עם $m + 1 = n$ ->

$$(m+1)+1 = n+1$$
$$(m+1) \in N$$

$I = N$ - מכאן המסקנה אם 1<n אז קיים $m \in N$ עם m+1=n

5. יש טענה עם שני אינדקסים. נעשה אינדוקציה על אחד מהם (m). הוכחה באינדוקציה על m:

$m=1$

P(1) - $\forall n\in N$

$n<1\Rightarrow 1-n\in N$

(נקרא – **מתקיים באופן ריק**)

למרות שאין מספר כזה, הטענה נכונה, כי **אין דוגמא שסותרת את הנוסחה.** (בואו נזכר במבוא ללוגיקה...)

P(m) נכונה <= P(m+1) נכונה.

יהי $n\in N$, $n<m+1$

$n-1<m \Leftarrow n<m+1$

$(m+1)-n=m-(n-1)$

אם n=1 אזי $m-(n-1)=m-0=m\in N$

אם $1<n<m+1$ $\Leftarrow$ $n-1\in N$, $(IH)n-1<m$ $\Leftarrow$ $m-(n-1)\in N$

6. בדרך השלילה, נניח שקיימים $m,n\in N$ עם התכונה $n<m<n+1$ <=

$m-n<1$

$(5)m-n\in N$

- שילוב שתי הטענות נותן לנו סתירה.

תכונה נוספת: (וחשובה):

<u>הגדרה:</u> תהי $S\subset R$ איבר $m\in S$ יקרא מינימום של S או מינימלי בS אם הוא מקיים:

(i) $m\le s, s\in S$

תרגיל: הוכח שהמינימום הוא יחיד.

<u>משפט: עקרון הסדר הטוב בN</u>

תהי $\varnothing\ne S\subset N$ אזי לS איבר מינימלי.

<u>הוכחה:</u>

אם $1\in S$ אזי 1 מינימלי בS.

אחרת, תהי $I=\{n:n\in N, n<s, s\in S\}$. נראה שטענה I אינדוקטיבית.

$1\in I$ = 1 שייך לI.

נניח ש $n\in I$ ונראה, בדרך השלילה, שאם לS אין איבר מינימלי, אזי $n+1\in I$

אחרת, אילו $n+1\notin I$ אזי קיים $s\in S$ כך ש $s\le n+1$. לS אין איבר מינימלי, לכן קיים

$n<t<s\le n+1$

$t\in S$ אשר $n<t<n+1$ - **סותר את 6**

מסקנה: בתנאים אלה הוכחנו שI אינדוקטיבית, לכן $I=N$, אבל $I\cap S=\varnothing$ בסתירה להנחה ש $S\ne\varnothing$.

לבדוק שעקרון הסדר הטוב שקול למשפט האינדוקציה.

שיעור 4 6.11.2005

אקסיומת השלמות

יהיו $L,U \subset R$ לא ריקות אשר מקיימות $L \le U$ (כלומר - לכל $l \in L, u \in U$ מתקיים $l \le u$),
אזי קיים $c \in R$ עם התכונה $l \le c \le u, \forall l \in L, u \in U$.
R הינו שדה סדור שלם .

הגדרה: קבוצה $S \subset R$ תקרא חסומה מלמעלה אם קיים $u \in R$ אשר מקיים $x \le u$ לכל $x \in S$.
במקרה זה u יקרא חסום מלמעלה של S .
דוגמאות: $S = \{0\}$ כל איבר בP הוא חסם מלמעלה של S.

P^- חסומה מלמעלה – למשל 0 חסם מלמעלה.
$\varnothing$ חסומה מלמעלה – כל מספר ממשי חסם מלמעלה. (אין מספר אשר סותר את הטענה).

אנטי דוגמא: R,P אינן חסומות מלמעלה.

הגדרה: $s \in R$ יקרא חסם עליון (או **סופרמום** – (List Upper Bound (LUB) של $S \subset R$ אם :
1. $\forall x \in S, x \le s$
2. לכל מספר $u \in R$ אשר מקיים $x \le u$ לכל $x \in S$ מתקיים $s \le u$.

משפט: תכונת החסם העליון
תהי $\varnothing \ne S \subset R$ חסומה מלמעלה, אזי לS יש חסם עליון.
הוכחה:
תהי U קבוצת כל החסמים מלמעלה של S. $U \ne \varnothing$ ע"פ ההנחה כי S חסומה מלמעלה.נשים לב ש $S \le U$. לפי אקסיומת השלמות, קיים $c \in R$ עם התכונה $x \le c \le u$ לכל $x \in S, m \in U$
טענה: $c = \sup S$.

$x \le c$ אומר שc חסם מלמעלה של S.
$c \le u$ אומר ש c הינו החסם מלמעלה הקטן ביותר (כי הוא קטן או שווה לכל החסמים מלמעלה של S).

תרגיל:
1. להגדיר מה זה חסם מלמטה של קבוצה.
2. קבוצה חסומה מלמטה.
3. להגדיר מה זה האינפימום (החסם התחתון) של קבוצה חסומה מלמטה.

דוגמאות:

$$\inf(P) = 0$$

$$\inf(N) = 1$$

מינימום של קבוצה הוא איבר **בתוך הקבוצה** אשר הוא הקטן ביותר. אקסיומת השלמות מבטיחה שקיים אינפימום, לא בהכרח מינימום.
משפט: יחידות הsup.
הוכחה: יהיו s,s' מקיימות את התכונות של $\sup S$. מכך נובע:
$s,s' \le x$ לכל $x \in S$. $s = \sup S \Leftarrow s \le s'$ (כי s' חסם מלמעלה של S).
בצורה דומה $s' = \sup S$, $s' \le s$. $s = s'$.

משפט: $R \supset x \neq \varnothing$ וחסומה מלמעלה אזי הטענות הבאות שקולות:

1. $s = \sup X$
2. (1) $\forall x \in X, x \leq s$ (s הוא חסם מלמעלה).
   (2) אם $l < s$ אזי קיים $x \in X: l < x \leq s$
3. (1) כנ"ל (2,1 ככה"נ).
   (2) לכל $0 < \varepsilon \in R$ קיים $x \in R$ אשר מקיים $s - x < \varepsilon$.

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$

$s = \sup X$ אזי s מקיים את (1) ע"פ הגדרה.

נשאר להוכיח את (2) – בדרך השלילה: נניח שקיים l<s כך ש לכל $x \in X$ מתקיים $x \leq l$.

לכן, בהיותו s=supX מתקיים $s \leq l$ בסתירה להנחה שl<s (טריטוכומיה)

הוכחה: $3 \Leftarrow 2$

צ"ל ש2 מוביל ל(3,2) – בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $l = s - \varepsilon, s - \varepsilon < s$, אזי לפי (2,2) קיים $x \in X$ עם התכונה $s - x < e \Leftarrow s - \varepsilon < x \leq s$.

$1 \Leftarrow 3$

יהי $R \ni u \geq x$ לכל $x \in X$. עלינו להראות ש $s \leq u$. נניח בדרך השלילה ש $u < s$. יהי $\varepsilon = s - u$. לפי (3,2) קיים $x \in X$ עם $u < x \Leftarrow s - x < s - u$. בסתירה להנחה שu חסם מלמעלה של X.

תרגיל למחשבה: איך אפשר לאפיין מצב שיש רק איבר אחד ויחיד שמפריד בין שתי קבוצות כאשר אחת גדולה מהשניה.

$N \subset Z \subset Q \subset R$

$Z = \bar{N} \cup \{0\} \cup N$

$Q = \frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0\}$

N שדה סדור.

על ישר:

x(0)=0, x(U)=1

משפט: לא קיים מס' $q \in Q$ עם התכונה $q^2 = 2$.

הוכחה:

בדרך השלילה:

$q \in Q, q^2 = 2$

$q = \frac{m}{n}, m, n \in Z, n \neq 0$

נניח שהצגנו את q כאשר לm וn אין גורמים משותפים.

$n^2 2 = m^2 \Leftarrow 2 \Leftarrow 2 = q^2 = (\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}$

זה גורר שm זוגי. $m = 2l, l \in Z$

$n^2 2l^2 \Leftarrow n^2 2 = (2l)^2 = 4l^2$

זה גורר ש n זוגי, $2r = n, r \in Z$. **סתירה.**

שיעור 5 – 8.11.2005

הלמה היסודית

משפט: יהיו $L,U \subseteq R$ לא ריקות $L \le U$ **אזי התנאים הבאים שקולים** (לא תמיד מתקיימים, אבל אם אחד מתקיים, כולם מתקיימים)**:**

(1) קיים מספר $c \in R$ יחיד עם התכונה $\forall l \in L, u \in U \ \ , l \le c \le u$

(2) $\sup L = s = i = \inf U$

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists l \in L, u \in U : u - l < \varepsilon$ (לכל מרחק שנבחר, אפשר יהיה למצוא מרחק יותר קטן בין הקבוצות).

הערות:

בתנאי הלמה, $L \ne \varnothing$ L חסומה מלמעלה

$U \ne \varnothing$ חסומה מלמטה

יתר על כן, לפי אקסיומת השלמות , קיים $\forall l \in L, u \in U, l \le c \le u$.

לכן, $\sup l = s \le c \le i = \inf u \Rightarrow s \le i$

הוכחה:

$(1) \Leftarrow (2)$

בדרך השלילה, אילו $s \ne i$, היינו מקבלים על פי ההערה הקודמת, כי $s < i$, אזי נקבל $l \le s < i \le u$, **בסתירה להנחה שיש מספר אחד עם התכונות הללו**.

$(2) \Leftarrow (3)$

בהינתן $\varepsilon > 0$, קיים $l \in L$ עם התכונה $s - \frac{\varepsilon}{2} < l \le s$

קיים $u \in U$ עם התכונה $i \le u < i + \frac{\varepsilon}{2}$

מכיון ש $s = i$, אזי $u - l < \varepsilon$

$(3) \Leftarrow (1)$

בדרך השלילה, נניח שקיימים c,c' עם התכונה $l \le c < c' \le u$ אזי $c' - c < u - l$, בניגוד להנחה (אילו היינו בוחרים $0 < \varepsilon < c' - c$, היינו סותרים את תנאי ההנחה).

שימוש במה שעשינו לעיל

שורשים

משפט: יהי $0 < y$ אזי לכל $n \in N$ קיים $0 < x \in R$ יחידי עם התכונה $x^n = y$ (ניתן לקחת כל שורש n'י).

הוכחה:

נתחיל בהוכחת היחידות – תרגיל באינדוקציה, לכל $n \in N$, $0 \le a < b$ נקבל ש $a^n < b^n$. מכאן נובעת היחידות – אם יש שני מועמדים, הרי שהחזקות ה-n-יות שלהם שונות.

מפורשות – יהי $0 < x < x'$ עם תכונה $x^n = y = (x')^n$, הסתירה נובעת מכך ש $x < x' \Leftarrow x^n < (x')^n$ בסתירה להנחה.

ב.ה.כ (בלי הגבלת הכלליות), ניתן להניח ש $1 < y$. אם $y = 1$ אז x=1

אם $1 > y > 0$ אזי $\frac{1}{y} > 1$. נניח ש $z > 0$ מקיים $z^n = \frac{1}{y}$, אזי $y = (\frac{1}{z})^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$

יהיו

$$L = \{l \in R : 0 \le l, l^n \le y\}$$
$$U = \{u \in R : y \le u^n\}$$

בואו נבדוק את אקסיומת השלמות:
לא ריקה:
בL יש את 1 בוודאות (בגלל ש 1<y)
בU יש את y בוודאות.

$$l^n \le y \le u^n \Rightarrow l^n \le u^n \Rightarrow l \le u$$

טענה: קיים $c \in R$ אחד ויחיד עם התכונה $l \le c \le u$. קיום הוא פועל יוצא של אקסיומת השלמות. נותרה היחידות.
לפי התנאי השני בלמה, מספיק להראות ש $s = i$ (s סופרמום של L, i הוא האינפימום של U), אחרת,
יהי $i < c < s \le 0 \Leftarrow c > 0$. נתבונן ב c^n.
אם $c^n = y$, אזי $c \in L \cap U$, אזי $i \le c \le s$ - **סתירה**.
אם $c^n < y$ אזי $c \in L$, אזי $c \le s$, **סתירה**.
אם $c^n > y$ אזי $c \in U$ אזי $i \le c$, **סתירה**

יהי $s = x = i$
למת עזר: לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $l \in L, u \in U$ כך ש $u^n - l^n < \varepsilon$.
לפי חישוב עזר:

$$u^n - l^n \le (u-l)nu^{n-1}$$

מותר להניח ש $u < (y+1)$, אזי $(u-l)nu^{n-1} < (u-l)n(y+1)^{n-1}$
לפי העובדה ש $s = i$ (קיים מס' אחד ויחיד בין L לבין U), תוך שימוש סעיף 3 בלמה היסודית, ניתן לבחור $l \in L, u \in U$ עם התכונה $u - l < \frac{\varepsilon}{n(y+1)^{n-1}}$, וזה גורר $u^n - l^n < \varepsilon$.

<u>טענה</u>: $x^n = y$.
אילו $x^n < y$, אזי $l \le x$, לכן $l^n \le x^n$, אזי $l^n \le x^n < y \le u^n \Leftarrow y - x^n < u^n - l^n$,
סתירה.
אילו $x^n > y$, אזי $x \le u \Leftarrow l^n \le y < x^n \le u^n \Leftarrow x^n - y < u^n - l^n$, **סתירה**.

שיעור 6 – 10.11

סימון: אם $0<y$, $n\in N$ ו $0<x$ מקיים $x^n=y$ נכתוב $x=y^{\frac{1}{n}}$

משפט: ארכימדיות של N בR.

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

משפט:

$N\subset R$ איננה חסומה מלמעלה.

הוכחה:

בדרך השלילה, אילו N היתה חסומה מלמעלה בR, אז לפי אקסיומת השלמות של R, אז היה קיים $s=\sup N\in R$, אזי היה קיים $n\in N$ אשר מקיים

$$s-1<n<\le s$$

$\Rightarrow$, בסתירה לכך שS (גם) חסם מלמעלה של N.

$$s<n+1\in N$$

מסקנה:

לכל $0<\varepsilon$ קיים $n\in N$ עם $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$

הוכחה: מספיק לבחור, לפי ארכימדיות, $n\in N$, כך ש $0<\frac{1}{\varepsilon}<n$, אזי $\frac{1}{n}<\varepsilon$

משפט: בהינתן $0<x$, לכל $y\in R$ ניתן למצוא $n\in N$ המקיים $y<xn$.

הוכחה: בדרך השלילה, נניח שלכל $n\in N$ מתקיים $xn\le y$.

$$n\le\frac{y}{x},\forall n\in N$$

בסתירה לארכימדיות.

משפט: צפיפות של Q בR. לכל $x,y\in R$, $x<y$ קיים $q\in Q$ עם $x<q<y$.

הוכחה: ב.ה.כ $0<x$. אילו $x=0$ נפעיל את מסקנת משפט הארכימדיות, בתרגום $y=\varepsilon$.

אם $x<0<y$ דיינו (0)

אם $x<y<0$ מספיק לעבוד עם $0<-y<-x$.

עלינו למצא $n,m\in N$ עם

$$0<x<\frac{m}{n}<y,n,m\in N$$

$nx<m<ny$ (שלב 3 - לפי ארכימדיות)

$$1<ny-nx=n(y-x)$$

לפי הנחה $0<y-x$, תוך שימוש במשפט הקודם, קיים $n\in N$ עם התכונה $1<n(y-x)$.

תהי $S=\{m\in N: nx<m\}$. היא מוכלת בN ולא ריקה – לפי ארכימדיות. לכן, לפי עקרון הסדר הטוב, יש לה מינימום, ונכנו m.
אם m=1 אזי $mx<1<ny$.
$1<m$ אז $m-1\le nx$, גורר

$$m\le nx+1$$

$$m\le nx+1<nx+n(y-x)$$

$$nx<m<ny\Rightarrow x<\frac{m}{n}<y$$

.

שיעור – 12.11.2005

כמה מילים על ערך מוחלט

הגדרה: לכל $x \in R$, $|x| = \{x \ge 0; x, x < 0, -x\}$

תכונות: -

חיובית: $0 \le |x|$. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

סימטריה:

$|x| = |-x|$

הערה: לכל $x \in R$ מתקיים $-|x| \le x \le |x|$.

משפט: לכל $0 < r \in R$ מתקיים $|x| \le r \Leftrightarrow -r \le x \le r$.

הוכחה:

כיוון א': $-r \le -|x| \le x \le |x| \le r$

כיוון ב': $0 \le x \Rightarrow |x| = x \le r$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \le r$

מסקנה:

לכל $0 < r$, $a \in R$, $|x-a| \le r \Leftrightarrow a-r \le x \le a+r$.

בזו הלשון ניתן לבטא את הצפיפות של Q בR ע"י:

לכל $x \in R$ ולכל $0 < \varepsilon$ קיים $q \in Q$ עם התכונה $|x-q| < \varepsilon$.

אי שיויון המשולש:

לכל $x, y \in R$ $|x+y| \le |x| + |y|$.

הוכחה:

$-|x| \le x \le |x|$

$-|y| \le y \le |y|$

$\Rightarrow -(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$

$|x+y| \le |x|+|y|$ (לפי ההערה הקודמת).

עוד אי שיוויון:

$|c-a| \le |c-b| + |b-a|$

כמו בקודם, כך ש:

$x = c-b$

$y = b-a$

רווחים: Intervals

הגדרה:

$I \subseteq R$ תקרא רווח אם $a<c<b; a,b \in I \Rightarrow c \in I$

קטעים בR

- $a,b \in R$

[--------------------]
a b

$[a,b]=\{x \in R : a \le x \le b\}$

[--------------------)
A b
[a,b)

(--------------------]
a b
(a,b]

(--------------------)
a b
(a,b)

] – אי שיויון חלש,) חזק

----------------------)b - $(-\infty,b)=\{x \in R : x<b\}$

<u>סדרות בR</u>

<u>הגדרה</u>: סדרה בR הינה פונקציה

$$fN \to R$$

$$1 \to f(1) = f_1$$
$$2 \to f(2) = f_2$$
$$3 \to f(3) = f_3$$
$$n \to f(n) = f_n$$

$$(f_n)_{n\in N}$$

<u>דוגמאות:</u>

$$f_n \equiv c \in R \to \{f_n\} = \{c\}$$
$$h_n = \frac{1}{n} \to \{h_n : \frac{1}{n}, n \in N\}$$
$$g_n = q^n, q \in R$$
$$a_n = (-1)^n, \{a_n\} = \{-1,1\}$$

P_n - 'המספר הראשוני שלם חיובי הn-י' (רמז – 1 לא ראשוני). – $\{2,3,5,7,11,13,...\}$

<u>לא להתבלבל!</u>

(f_n) - הסדרה.

$\overline{\{f_n\}}$ - איברי הסדרה.

<u>גבול של סדרה</u>

תהי (a_n) סדרה בR. $l \in R$ יקרא גבול של הסדרה (a_n) , אם לכל

$$(\forall 0 < \varepsilon)(\exists n \in N)(N < n \Rightarrow | a_n - l | < \varepsilon)$$

במקרה זה, נסמן

$$\underset{n \to +\infty}{Lim}(a_n) = l$$

$$\underset{n \to +\infty}{a_n \to l}$$

דוגמא: $\underset{n \to +\infty}{h_n = \frac{1}{n} \to 0}$

בהנתן $\varepsilon > 0$ עלינו למצוא $N = N(\varepsilon)$ כך ש $N < n \Rightarrow |h_n - 0| < \varepsilon$.

נתבונן ב $\frac{1}{\varepsilon}$ לפי ארכימדיות קיים $N \in N$ עם $\frac{1}{\varepsilon} < N$. נבחר N כזה ואזי יתקיים

$$N < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

☺ **והעולם יחייך אליך...** (הכותב לא לוקח שום אחריות, מפורשת, ישירה או עקיפה, לקיום משפט זה).

שיעור – 15.11.2005

$$l=\lim_{n\to\infty}a_n \Leftrightarrow (\forall 0<\varepsilon)(\exists N(\varepsilon)\in N)(\forall n\in N)(N(\varepsilon)<n \Rightarrow |a_n-l|<\varepsilon)$$

דוגמא:

$$(\frac{1}{2^n})\to 0$$

בהנתן $\varepsilon>0$, יהי $\frac{1}{\varepsilon}<N$ (לפי ארכימדיות) אזי

$$N<n\Rightarrow |a_n-l|=|\frac{1}{2^n}-0|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$$

$$2<2^n$$

דוגמא:

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\to 0$$

בהנתן $\varepsilon>0$ יהי

$$(\frac{1}{2\varepsilon})^2<N\in n$$

$$|\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}-0|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon\Rightarrow$$

$$(\frac{1}{2\varepsilon})^2<N<n\Rightarrow\frac{1}{2\varepsilon}<\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$$

<u>אנטי דוגמא:</u>

$$l\neq\lim_{n\to\infty}a_n \Leftrightarrow (\exists 0<\varepsilon)(\forall N\in n)(\exists n\in N)(N<n\wedge\varepsilon\leq|a_n-l|)$$

$$1\neq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2},2<n$$

$$|a_n-1|=|\frac{1}{n}-1|$$

$$\frac{1}{2}<|\frac{1}{n}-1|$$

<u>עוד אנטי דוגמא:</u>

ל $a_n=(-1)^n$ אין גבול.

בואו ונראה כי 1 איננו הגבול.

$$1 \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

יהי $\varepsilon = 1$

לכל $N \in N$, יהי $n \in N$ אי זוגי עם התכונה $N < n$. במקרה זה, יתרחש

$N < n \wedge |(-1)^n - 1| > 1 = \varepsilon$

באותה צורה ניתן לפסול את 1-.

פסילה אוניברסלית:

יהי $l \in R, l \neq 1, -1$

$$\varepsilon := \min\{|l-1|, |l-(-1)|\}$$

$$\forall n \in N, |a_n - l| \geq \varepsilon$$

$$0 < \varepsilon$$

הגדרה: סדרה a_n תקרא מתכנסת אם קיים $l \in R$ עם $l = \lim a_n$, אחרת נאמר ש a_n מתבדרת.

$P(n)$ נכונה תמיד אם היא נכונה לכל $n \in N$

$P(n)$ נכונה כמעט תמיד אם קיים $N \in N$ כך ש $P(n)$ נכונה לכל $N < n$.

$P(n)$ שכיחה אם היא נכונה לאינסוף $n \in N$. במילים אחרות, לכל $N \in N$ קיים $N < n$ עם $P(n)$ נכונה.

נניח ש $P_1, ..., P_r$ נכונות כמעט תמיד. $\Leftarrow$ $P_1 \wedge P_2 \wedge, ..., \wedge P_r$ נכונה כמעט תמיד.

<u>משפט:</u> יחידות הגבול של סדרה מתכנסת – אם $l' \leftarrow a_n \rightarrow l$ אזי

$$l = l'$$

<u>הוכחה:</u>

בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $n \in N$ כך ש $|a_n - l| < \varepsilon \wedge |a_n - l'| < \varepsilon$

עבור n כזה

$$|l - l'| = |l - a_n + a_n - l'|$$

$$\overset{TI}{\leq} |l - a_n| + |a_n - l'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow$$

$$|l - l'| = 0 \Leftrightarrow l - l' = 0 \Leftrightarrow l = l'$$

תרגיל: אם $x \geq 0$ ומתקיים שלכל $\varepsilon > 0$ $x < \varepsilon$ אזי $x = 0$.

<u>תזכורת:</u>

$X \subseteq R$ נקראת חסומה אם קיימים $m, M \in R$ עם $m \leq x \leq M$ לכל $x \in X$.

תנאי זה שקול ל:

1. קיים $0 < r \in R$ עם $|x| < r$

<u>הגדרה:</u> (a_n) תקרא חסומה אם $\{a_n\} \subseteq R$ קבוצה חסומה.

<u>הגדרה:</u> נסמן בC את הסדרות המתכנסות.

נסמן בB את קבוצת הסדרות החסומות.

נסמן בN את קבוצת הסדרות השואפות לאפס.

$N \subset C \subset B$

משפט: ($C \subset B$) – כל סדרה מתכנסת הינה חסומה.

<u>הוכחה:</u> נניח ש $a_n \to l \in R$ יהי $\varepsilon = 1$, אזי $|a_n - l| < \varepsilon = 1$ כמעט תמיד. במילים אחרות, קיים $N(\varepsilon = 1) \in N$ כך ש $N < n \Rightarrow |a_n - l| < 1$.

$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

יהו $M := \max\{a_1, a_2, ..., a_N, l + \varepsilon\}$

$m := \min\{a_1, a_2, ..., a_N, l - \varepsilon\}$

אזי מתקיים $m \le a_n \le M$ לכל $n \in N$.n

<u>שיעור – 17.11.2005</u>

פעולות עם סדרות

אנלוגיה לסדרה – מכונה, המקבלת n ומוציאה פלט.

משפט:

$$NB \subset N$$

$$(a_n) \in N$$
$$(b_n) \in B$$
$$\Rightarrow$$
$$a_b b_n \to 0$$

B – חסומה. N – שואפת לאפס.

הוכחה:

קיים $L \in R$, $|b_n| \le L$ תמיד אם L=0 <= $0 = |b_n| \le 0 = b_n$

$$a_n b_n = 0 \to 0$$

אחרת , לכל $\varepsilon > 0$ צ"ל

מתקיים $|a_n b_n - 0| < \varepsilon$ כמעט תמיד. (כ.ת.)

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \le |a_n| L$$

היות ו $a_n \to 0$, עבור אותו $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$ כמעט תמיד. מכאן נסיק

ש $|a_n b_n| \le |a_n| L \le \varepsilon L$ כמעט תמיד.

דוגמא:

$\frac{\sin n}{n}$ - ניתן להציג אותה כ $\frac{1}{n}\sin n$.

ידוע כי $-1 \le \sin \le 1$.

לכן

$$\frac{1}{n}\sin n \to 0$$

<u>סדרות מתכנסות וסדר</u>

משפט הסנדוויץ: יהו $(a_n),(b_n),(c_n)$ סדרות אשר מקיימות :

(1) $a_n \le b_n \le c_n$ (כמעט תמיד).

(2)
$$a_n \to l$$
$$c_n \to l$$
$$a_n \to l \leftarrow c_n$$

אזי:

$$b_n \to l$$

<u>הוכחה:</u> בהינתן $0<\varepsilon$,

$|a_n-l|<\varepsilon$ כמעט תמיד. $\Leftrightarrow$ $l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon$ (כמעט תמיד)

$|c_n-l|<\varepsilon$ כמעט תמיד. $\Leftarrow$ $c_n<l+\varepsilon$ כמעט תמיד.

לכן, $l-\varepsilon <_{(1)} a_n \le b_n \le c_n <_{(2)} l+\varepsilon$

(1) ע"פ הנחה. (2) על פי מה שראינו לעיל.

קיבלנו $|b_n-l|<\varepsilon$ כמעט תמיד.

<u>דוגמאות (הכוונה שימושים) – במשפט הסנדוויץ':</u>

(1) $-1<q<1$ $\quad q^n\to 0$

נניח $0<q<1$ $\Leftarrow$

$$a+h=\frac{1}{q},\exists h>0 \Leftarrow 1<\frac{1}{q}$$

$$0<q^n\le\frac{1}{1+nh}\Leftarrow 1+nh_B\le(1+h)^n=(\frac{1}{q})^n=\frac{1}{q^n}$$

$$0<q^n\le\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh}=\frac{1}{h}\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{h}\frac{1}{n}\to 0$$

$$0\to 0$$

$$\Rightarrow$$

$$q^n\to 0$$

אם q=0 - $q^n=0\Rightarrow q^n\to 0$.

אם $-1<q<0$ אזי

$$-|q|^n=-|q^n|\le q^n\le|q^n|=|q|^n$$

$$-|q|^n\to 0$$

$$|q|^n\to 0$$

$$\Rightarrow$$

$$q^n\to 0$$

(2) $|q|<1$ אזי $nq^n\to 0$

תזכורת:

$$(1+h)^n =_{BN} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h^i = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \ldots$$

$$\frac{n(n-1)}{2}h^2 \le (1+h)^n$$

- $0 < q < 1$

$$1 < \frac{1}{q}$$

$$1 + h = \frac{1}{q}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}h^2 \le (\frac{1}{q})^n = \frac{1}{q^n}$$

$$0 < q^n \le \frac{2}{n(n-1)h^2}$$

$$0n < nq^n < \frac{2n}{n(n-1)h^2}$$

$$0n \to 0$$

$$\frac{2n}{n(n-1)h^2} \to 0$$

$$\Rightarrow$$

$$nq^n \to 0$$

שיעור – 19.11.2005

$nq^n \to 0 \Leftarrow |q|<1$

הראנו עבור $0<q<1$

$q=0$ ברור

$-1<q<0$ - עם סנדויץ

$$-n|q|^n \le nq^n \le n|q|^n$$
$$-n|q|^n \to 0$$
$$n|q|^n \to 0$$

הגדרה:

$$\operatorname{sgn}(x)=\frac{|x|}{x}$$

(בקיצר- הסימן)

<u>משפט:</u> $b_n \to b \ne 0$ אזי $\operatorname{sgn}(b_n)=\operatorname{sgn}(b)$ כמעט תמיד. יתר על כן, אם $b_n \ne 0$ תמיד אזי $(\frac{1}{b_n})$ חסומה.

<u>הוכחה:</u> נניח $0<b$, יהי $0<\varepsilon=\frac{b}{2}$. קיים מספר טבעי $N \in N$ כך ש

$$N<n \Rightarrow b-\varepsilon<b_n$$
$$0<\frac{b}{2}<b_n$$

.

(כמעט תמיד)

נניח $0>b$, יהי $\varepsilon=-\frac{b}{2}>0$. קיים מספר טבעי N כך ש:

$N < n \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$

$|b_n - b| < \varepsilon$

$|b_n - b| < -\frac{b}{2}$

$\frac{b}{2} < b_n - b < -\frac{b}{2}$

$b_n < -\frac{b}{2} + b$

$b_n < \frac{b}{2}$

<u>בצורה אנלוגית, נוכיח עבור $b < 0$. לעשות – יהיה בבחינה.</u>

הוכחת החלק השני:

נניח שוב ש $0 < b$. יהי $N \in N$ כמו קודם

$$N < n \Rightarrow \frac{b}{2} = b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = \frac{3}{2}b$$

אם כך,

$$N < n \Rightarrow \frac{2}{3}b < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$$

$$\min\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, ..., \frac{1}{b_n}, \frac{2}{3b}\} \le \frac{1}{b_n} \le \max\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, ..., \frac{1}{b_n}, \frac{2}{b}\}$$

<u>להשלים עבור b<0. יהיה בבחינה גם כן...</u>

<u>אי שיויונות בין סדרות:</u>

<u>משפט :</u> נניח $a_n \to a, b_n \to b$. ומתקיים $a < b$ אזי: $a_n < b_n$ כמעט תמיד.

הוכחה: יהי $0 < \varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

יהי $N_1 \in N$ אשר מבטיח $N_1 < n \Rightarrow \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n$

יהי $N_2 \in N$ אשר מבטיח $N_2 < n \Rightarrow a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$

יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$, אם $N < n$ אזי בו"ז יתקיימו $a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$. לפי טרנזיטיביות נקבל $a_n < b_n$.

<u>משפט:</u>

נניח $a_n \to a, b_n \to b$ ומתקיים $a_n < b_n$ כמעט תמיד. (לא להתבלבל בין המשפט הקודם!)

אזי $a \le b$ (לשים לב לחולשת האי שיוויון).
הוכחה:
אחרת, לפי טריכוטומיה, היינו מקבלים b<a. לפי המשפט הקודם, היה מתקיים ש $a_n < b_n$ כמעט תמיד, בסתירה להנחה.

<u>אריתמטיקה של גבולות</u>

$a_n \to a, b_n \to b$.

(1) $(a_n + b_n) \to (a+b)$

(2) $(a_n b_n) \to ab$

(3) $(\frac{a_n}{b_n}) \to \frac{a}{b}$ תחת ההנחה $b \neq 0$ וגם $b_n \neq 0$ תמיד.

<u>הוכחה</u>

(1) בהנתן $\varepsilon > 0$ יהו $N_1 \in N$ אשר מקיים $N_1 < n \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

יהו $N_2 \in N$ אשר מקיים $N_2 < n \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

יהי $N = \max\{N_1, N_2\}$ אזי עבור $N < n$ יתקיים:

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le_{TI}$$

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(2)

$a_n b_n - ab = (a_n - a)b + a(b_n - b) + (an_a - a)(b_n - b)$ (להסתכל בציור!)

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b + a(b_n - b) + (an_a - a)(b_n - b)|$$

$$|a_n b_n - ab| \le |(a_n - a)||b| + |a||(b_n - b)| + |(an_a - a)||(b_n - b)|$$

$$a_n - a \to 0 \Rightarrow |(a_n - a)|b| \to 0$$

$$b_n - b \to 0 \Rightarrow |(b_n - b)||a| \to 0$$

$$|(a_n - a)||(b_n - b)| \to 0$$

$$NB \cdot BN + N \cdot N \to 0$$

נותר להראות: אם ורק אם $x_n \to 0$ אזי $|x_n| \to 0$

אם $a_n \to a \Leftarrow |a_n| \to |a|$

רמז: $||a_n| - |a|| \le |a_n - a|$

גורר - $-|x_n| \le x_n \le |x_n|$

(3) מקרה פרטי: $a_n = 1$

$\frac{1}{b_n} \to b$

לפי המשפט הראשון של היום - $0 < |\frac{1}{b_n}| \le L$ - $\frac{1}{b_n}$ חסומה מאפס.

בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in N$ אשר מקיים $N < n \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|}{L}$

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b - b_n|}{|b_n b|} \le \frac{L|b - b_n|}{|b|} < \frac{L}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon |b|}{L} = \varepsilon$$

מקרה כללי: מספיק להתבונן ב $\frac{a}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

דוגמאות:

אם $0 < a$ אזי $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \to 1$.

ב.ה.כ $a > 1$ אם $a = 1$ - דיינו - $a^{\frac{1}{n}} = 1$ סדרה קבועה.

אם $0 < a < 1$ אזי $1 < \frac{1}{a}$, $(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$ והוכחנו עבור a>1 אזי $\frac{1}{1} \to 1$

אם $1 < a$ אזי $1 < a^{\frac{1}{n}}$ (שורש מכבד את הסדר).

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n, h_n > 0$$

מספיק להראות $h_n \to 0$.

$$1 + nh_n \le_B (1 + h_n)^n = a$$

$$0 < h_n \le \frac{a-1}{n}$$

$$0 \to 0$$

$$\frac{a-1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow$$

$$h_n \to 0$$

דוגמא נוספת:

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

$$1 \le \sqrt[n]{n} \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1+h_n), h_n \ge 0$$

$$n = (1+h_n)^n \ge_{niuton's\_binum} \frac{n(n-1)}{2} h_n^{\ 2}$$

$$0 \le h_n^{\ 2} \le \frac{n \cdot 2}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

$$\frac{2}{n-1} \to 0, 0 \to 0 \Rightarrow h_n^{\ 2} \to 0$$

$$h^n \to 0$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

<u>סדרות מונוטוניות - M</u>

<u>הגדרה</u>: (a_n) תקרא עולה אם $a_n \le a_{n+1}$ תמיד.

עולה ממש (או עולה במובן החזק) אם $a_n < a_{n+1}$ תמיד.

יורדת ממש (או במובן החזק) אם $a_n > a_{n+1}$

יורדת אם $a_n \ge a_{n+1}$.

(a_n) תקרא מונוטונית אם היא מקיימת **אחת לפחות** מהתכונות הקודמות.

<u>משפט:</u> אם סדרה היא גם מונוטונית וחסומה, אזי היא מתכנסת - $M \cap B \subset C$.

<u>הוכחה:</u> נניח ש (a_n) עולה וחסומה מלמעלה. מכאן נובע שהקבוצה $\{a_n\}$ חסומה מלמעלה. יהי $a := \sup\{a_n\}$.

טענה: $a_n \to a$ בהנתן $\varepsilon > 0$ נתבונן ב $a - \varepsilon$. .בהיותו $a = \sup\{a_n\}$ קיים $N \in N$ עם

$$a - \varepsilon < a_N \le a$$

אם $N < n$ אזי $a - \varepsilon < a_N \le a_n \le a$

$$a - \varepsilon < a_n \le a$$

בצורה דומה מוכיחים יתר המקרים.

שיעור – 22.11.2005
הלמה של קנטור

תהינה $(a_n),(b_n)$ כך ש $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ לכל $n \in N$ אזי קיימים $a,b \in R$, $a \le b$ עם התכונה $\forall x \in R, a \le x \le b \Rightarrow a_n \le x \le b_n$.
יתר על כן, אם $b_n - a_n \to 0$ אז $\exists! c \in R$ (קיים c יחיד) עם התכונה $a_n \le c \le b_n$ לכל $n \in N$.

<u>הוכחה</u>: (a_n) מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה ע"י b_1.
לכן היא מתכנסת ל:

$$a := \sup\{a_n\}$$
$$a_n \to a$$

b_n מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ע"י a_1, לכן היא מתכנסת ל

$$b := \inf\{b_n\}$$
$$b_n \to b$$

<u>טענה:</u> $a \le b$. - $b_n - a_n$ מתכנסת (ע"פ אריתמטיקה של גבולות).

$$b_n - a_n \to b - a$$

וגם

$$b_n - a_n \ge 0$$

מכאן נקבל

$$b - a \ge 0$$

לכן, אם

$$a_n \le a \le x \le b \le b_n \Rightarrow$$
$$a_n \le x \le b_n, \forall n \in N$$

יתר על כן, אם $b_n - a_n \to 0$ אזי $a = b$ אחרת, $a < b \Rightarrow b - a > 0$ אזי, כמעט תמיד היינו מקבלים ש $0 < b - a < b_n - a_n$, בסתירה לעובדה ש $b_n - a_n \to 0$.

<u>הערת מירי:</u>
$\{a_n\} \le \{b_n\}$ לכל $l,m \in N$ יהי $n \in N$ $n \ge l,m$.

לכל a_l, b_m - $a_l \le a_n \le b_n \le b_m$ וידוע כי $a_l \le b_m$.

<u>דוגמא:</u>

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

(a_n) מונוטונית עולה וחסומה, לכן היא מתכנסת,

$$e := \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

(a_n) מונוטונית עולה חזק:

$$0 < a < b, r \in N$$
$$b^r < a^r + r(b-a)b^{r-1}$$

$$a = 1 + \frac{1}{n+1}, b = 1 + \frac{1}{n}, r = n+1$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1} < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} + (n+1)\cdot\frac{1}{n(n+1)}(1+\frac{1}{n})^n$$
$$(1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} - \frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

$$*b - a = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

(אפשר להסתכל אצל מייזלר)

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \dots$$
$$= 1 + 1 + 1(1-\frac{1}{n})\frac{1}{2!} + 1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{1}{3!}$$

$$n > 1$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = **1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

$$n > 1 \Rightarrow 2 < a_n < 3$$

$$*n > 1 \Rightarrow 2^{n-1} < n! \Rightarrow \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$**1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$e =\sim 2.718....$$

דוגמא:

$$(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$$

יהי $x \in R$

$a_n = (1+\frac{x}{n})^n$ - מונוטונית עולה כ.ת.

הערה:

$$GM \le AM$$

$$0 \le a_1, a_2, ..., a_n$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \le (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n})^n$$

ויש שיוויון כאשר $a_1 = a_2 = ... = a_n$

ובחזרה להוכחה:

יהי n מספיק גדול כך ש $0 < 1+\frac{x}{n}$. נפעיל את אי שיוויון $GM \le AM$ עבור $x \ne 0$ (שתי אופציות:)

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 1+\frac{x}{n}, a_{n+1} = 1$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot a_{n+1} = (1+\frac{x}{n})^n < (\frac{n(1+\frac{x}{n})+1}{n+1})^{n+1} = (\frac{1+n+x}{n+1})^{n+1} = (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}$$

$(1+\frac{1}{n})^n$ חסומה בדרך (מרגיזה) אחרת:

$$b^r < a^r + r(b-a)b^{r-1}$$

$$b = 1+\frac{1}{2n}, a = 1, r = n$$

$$(1+\frac{1}{2n})^n < 1 + n\frac{1}{2n}(1+\frac{1}{2n})^{n-1}$$

$$= (1+\frac{1}{2n})^n - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2n})^{n-1}$$

$$= (1+\frac{1}{2n})^{n-1}(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}) = (1+\frac{1}{2n})^{n-1}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n})$$

שיעור – 24.11.2005

תזכורת – למה נכון השוויון ?

$$b^r - a^r = (b-a)(b^{r-1} + b^{r-2}a + ... + a^{r-1})$$

מכיוון שb גדול מa, אז אפשר להחליף אותם, ולקבל אי שיוויון)

$$c_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

$$r \in N$$

$$0 < a < b \Rightarrow$$

$$b^r < a^r + (b-a)rb^{r-1}$$

$$a^r + (b-a)ra^{r-1} < b^r$$

$$b = 1+\frac{1}{2n}, a = 1, r = n$$

$$(1+\frac{1}{2n})^n < 1+\frac{1}{2n}n(1+\frac{1}{2n})^{n-1} < 1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2n})^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2n})^n < 1 \Rightarrow (1+\frac{1}{2n})^n < 2 \Rightarrow (1+\frac{1}{2n})^{2n} < 4$$

טיעון: c_n מונוטונית עולה. $c_{2n-1} < c_{2n} < 4$.

נכנה $(1+\frac{x}{n})^n = x_n$

תזכורת: אי שיוויון

$$GM \le AM$$

$$a_1 \cdot a_2 .... \cdot a_r \le (\frac{a_1 + a_2 + ... + a_r}{r})^r$$

יש שיוויון רק כאשר כל האיברים שווים.

אם x=0, סדרה קבועה.

אם $x \neq 0$, (x_n) כמעט תמיד עולה ממש.

למה?

$$0 < 1+\frac{x}{n} \Leftrightarrow -x < n$$

יהי $-x < n$. עלינו להראות כי $x_n < x_{n+1}$.

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = x_n = (1+\frac{x}{n}); a_{n+1} = 1$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n \cdot a_{n+1}$$

$$(1+\frac{x}{n})^n \cdot 1 < (\frac{n(1+\frac{x}{n})+1}{n+1})^{n+1} = (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}$$

<u>סדרות חלקיות וגבולות חלקיים (!YEY)</u>

<u>הגדרה:</u> תהי (x_n) סדרה ותהי (n_k) סדרה עולה <u>ממש</u> של מספרים טבעיים.

$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots.$ אזי הסדרה

$$(y_k) y_k := x_{n_k}$$

תקרא סדרה חלקית או תת-סדרה של x_n (וצביק נתן בהם סימנים - $((x_{n_k}) \lhd (x_n))$

$$(1,2,3,4,5,6,\ldots,n,\ldots)$$

$$(2,4,6,\ldots,2n,\ldots.)$$

$$(1,3,5,\ldots,2n-1,\ldots)$$

$$NOT\_SUB\_GROUP = (2,1,4,3,6,5,\ldots)$$

<u>לשים לב:</u>

$$\underline{k \le n_k}$$

<u>משפט:</u> (הירושה)

תהי (x_n) סדרה ו $((x_{n_k}))$ סדרה חלקית.

(1) אם (x_n) חסומה אזי (x_{n_k}) חסומה.

(2) אם $(x_n) \in N_{(ulled)}$ אזי $(x_{n_k}) \in N_{ulled}$ גם כן.

(3) אם $(x_n) \in C$ (מתכנסת) אזי $(x_{n_k}) \in C$ (מתכנסת) גם כן. יתר על כן x אז $x_n \to x$

$x_{n_k} \to x$

(4) אם $(x_n) \in M$ (מונוטונית) אזי $(x_{n_k}) \in M$ מונוטונית באותו כיוון, ולפחות באותה עוצמה.

<u>הוכחה:</u>

(1) $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ תת קבוצה של קבוצה חסומה, חסומה גם היא (ותודה לחאג')

(2) $x_n \to 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in N)(\forall n \in N)(N < n \Rightarrow |X_n - 0| < \varepsilon)$

יהי $\varepsilon > 0$. יהי N כמו קודם. נבחר K כך ש $n < n_K$.

לכל $K < k \in N$. מכך נובע כי $N < n_K < n_k$. לכן

$$K < k \Rightarrow$$

$$|x_{n_k} - 0| < \varepsilon$$

שיעור 13 – יום א' 27.11.2005
המשך משיעור קודם

3. אם $x_n \to x$ אזי $x_{n_k} \to x$. נבנה את הסדרה $(x_n - x) \to 0$ (מאריתמטיקה של גבולות) עבורה קיימת תת קבוצה $(x_{n_k} - x)$. מכאן נובע ע"פ סעיף 2 ואריתמטיקה של גבולות:

$$x_{n_k} - x \to 0$$
$$\Rightarrow$$
$$(x_{n_k} - x) + x \to x$$

4. אם $(x_n) \in M$ אזי $(x_{n_k}) \lhd (x_n)$ ו $(x_{n_k}) \subset M$.
נניח ש (x_n) מונוטונית עולה, אזי מתקיים $x_n \le x_m$ לכל $n \le m$.

$$n_k < n_{k+1} \Rightarrow x_{n_k} \le x_{n+1_k} \le x_{n_{k+1}}$$

"סדרה חלקית של סדרה חלקית (של סדרה) הינה סדרה חלקית של הסדרה המקורית. "
דוגמא: זנבות של סדרה (משהו ארוך שבא מאחורה)
תהי (x_n) סדרה.

<u>משפט:</u> לכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית

<u>הוכחה:</u> איבר x_n יקרא <u>פסגה</u> אם $x_m \le x_n$ לכל $n \le m$ (כלומר, אחריו אין איבר גדול יותר).

נניח שיש אינסוף פסגות. יהי $n_1 \in N$ כך ש x_{n_1} פסגה.
נגדיר באופן רקורסיבי – נניח שבחרנו $n_1 < n_2 < n_k$ כך ש $x_{n_k} \le x_{n_2} \le x_{n_1}$. יהי $n_k < n_{k+1}$ כך ש $x_{n_{k+1}}$ פסגה (בהסתמך על העובדה שיש אינסוף פסגות) ולכן נקבל:
$x_{n_{k+1}} \le x_{n_k}$ לכן x_{n_k} מונוטונית יורדת.

אחרת, יש מספר סופי של פסגות, לכן קיים $N \in N$ כך שלכל $N < n$ X_n אינו איבר פסגה.
יהי $N < n_1$. יהי $n_1 < n_2$ עם $x_{n_1} < x_{n_2}$. נבנה בצורה רקורסיבית: אם בחרנו $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ עם $x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots < x_{n_k}$. יהי $n_k < n_{k+1}$ כך ש $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$ (יש כזה, כי אחרת x_{n_k} היה פסגה).
לכן, קיבלנו (x_{n_k}) מונוטונית עולה (חזק).

<u>**מסקנה (מאוד מאוד חשובה) – משפט Bolzano-Weierstrass**</u> – לכל סדרה <u>חסומה</u> יש תת סדרה מתכנסת.
הוכחה: מספיק לבחור תת סדרה-מונוטונית.

<u>גבולות חלקיים</u>
תהי $(x_n) \in B_{locked}$. תהי $\varnothing \ne_{B.W.} S_{ubsequent} = \{p \in R : \exists (x_{n_k}) \lhd (x_n) \wedge x_{n_k} \to p\}$

דוגמאות: $a_n=(-1)^n$. $S=\{-1,1\}$

$b_n=\frac{1}{n}$ $S=\{0\}$

ועוד סדרה:

קבוצה:

$$C_n=\{1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\}$$

$$S=\{\frac{1}{n},n\in N\}\cup\{0\}$$

<u>משפט:</u> $p\in S$ שקול ל: $0<\varepsilon$, $p-\varepsilon<x_n<p+\varepsilon$ שכיחה.

<u>הוכחה:</u> נניח $p\in S$ - $(x_{n_k})\lhd(x_n)$, $x_{n_k}\to p$. בהנתן $0<\varepsilon$ יהי $K\in N$ אשר מבטיח $K<k\in N$:

$$p-\varepsilon<x_{n_k}<p+\varepsilon$$

לכן $p-\varepsilon<x_n<p+\varepsilon$ באופן שכיח, כלומר: בהנתן N, יהי $\max\{N,K\}<k$, אזי $K<k\le n_k$

וגם $N<n_k$, ולכן $p-\varepsilon<x_{n_k}<p+\varepsilon$.

בכיוון השני –

off the record:

נניח שהתנאי מתקיים. יהי n_1 עם התכונה $p-1<x_{n_1}<p+1$.

יהי $n_1<n_2$ עם $p-\frac{1}{2}<x_{n_2}<p+\frac{1}{2}$ (מותר לבחור, בגלל שהתכונה שכיחה)

<u>פורמלית:</u>

נבנה בצורה רקורסיבית – נניח שבנינו $n_1<n_2<...<n_k$ עם התכונה $p-\frac{1}{i}<x_{n_i}<p+\frac{1}{i}$ עבור $i=1,...,k$. יהי $\varepsilon=\frac{1}{k+1}$. התכונה $p-\frac{1}{k+1}<x_n<p+\frac{1}{k+1}$ שכיחה, לכן ניתן לבחור $n_k<n_{k+1}$ עם $p-\frac{1}{k+1}<x_{n_{k+1}}<p+\frac{1}{k+1}$. לכן נקבל סדרה חלקית (x_{n_k}) אשר מקיימת $p-\frac{1}{k}<x_{n_k}<p+\frac{1}{k}$ לפי משפט הסנדוויץ' - $x_{n_k}\to p$, $k\to+\infty$.

משהו אחר:

$(x_n) \in B$ - כלומר קיימים $m,M \in R$, $\{x_n\} \subset [m,M]$ - > $\varnothing \neq S \subset [m,M]$. לפי שלמות, יש לS גם אינפימום, וגם סופרמום. ונתנו בהם שמות:

$l := \inf S \leq \sup S =: u$

לכן

$S \subset [l,u]$

נרצה לטעון כי

$\{l,u\} \subset S \subset [l,u]$

ונתנו בהם סימנים:

$l = \underline{\lim} x_n = \liminf x_n = x_*$

$u = \overline{\lim} x_n = \limsup x_n = x^*$

ובואו נוכיח את הטענה: ($\{l,u\} \subset S \subset [l,u]$)

<u>למה:</u>

תהי $R \supseteq x \neq \varnothing$ וחסומה מלמעלה (מטה)

אזי קיימת סדרה בx $\{x_n\} \subset x$

$x_n \to \sup X$ $(x_n \to \inf X)$ (אם מלמעלה – שואפת לSUP. אם מלמטה – לinf). ***<u>לנסות להוכיח.</u>***

הוכחה: $l \in S$

תהי (p_n) בS, עם $p_n \to l$ (לפי הלמה).

יהי $n_1 \in N$ עם $p_1 - 1 < x_{n_1} < p_1 + 1$. נניח שבחרנו $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ עם התכונה $p_i - \frac{1}{i} < x_{n_i} < p_i + \frac{1}{i}$ עבור $i = 1,\ldots,k$

התכונה $P_{k+1} - \frac{1}{k+1} < x_n < P_{k+1} + \frac{1}{k+1}$ שכיחה, ולכן ניתן לבחור $n_k < n_{k+1}$ עם התכונה הזו.

לכן, קיבלנו $x_{n_k} \lhd x_n$ עם התכונה $P_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < P_k + \frac{1}{k}$.

לפי סנדביץ' נקבל $x_{n_k} \to l$. בצורה אנלוגית, ניתן להוכיח לגבי u.

הוכחה: $u \in S$

תהי (P_n) בS, עם $p_n \to u$.

נבחר $n_1 \in N$ המקיים $p - 1 < x_{n1} < p + 1$. ניתן לבחור $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ עם התכונה:

$p - \frac{1}{i} < x_{n_i} < p + \frac{1}{i}$ עבור $i = 1..k$.

התכונה $P-\frac{1}{k+1}<x_n<P+\frac{1}{k+1}$ שכיחה, ולכן ניתן לבחור $n_k<n_{k+1}$ עם התכונה. לכן,

קיבלנו קבוצה המוכלת ב x_n עם התכונה $p_k-\frac{1}{k}<x_{n_k}<p_k+\frac{1}{k}$.

מכיוון ש

$$p_k\to u,\frac{1}{k}\to 0$$

אזי

$$p_k-\frac{1}{k}\to u$$

$$p_k+\frac{1}{k}\to u$$

וממשפט הסנדביץ, $x_{n_k}\to u$

שיעור 14 – 29.11.2005

$p \in S \Leftrightarrow p-\varepsilon < x_n < p+\varepsilon$ (שכיח)

משפט :

תהי $(x_n) \in B_{locked}$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $l = \underline{\lim} x_n$
2. לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים עבור l
   a. $x_n < l+\varepsilon$ **שכיחה**
   b. $l-\varepsilon < x_n$ נכונה **כמעט תמיד.**

הוכחה (1) <= (2) :

l הינו גם גבול חלקי לכן (a) . בדרך השלילה, נניח ש(b) אינו נכון.

יהי $\varepsilon > 0$ במקרה זה $x_n \le l-\varepsilon$ שכיחה. לכן קיימת $(x_{n_k}) \lhd (x_n)$ עם התכונה $x_{n_k} \le l-\varepsilon$.

(x_{n_k}) גם היא חסומה (ירושה), לכן לפי BW יש לה $(x_{n_{k_l}}) \lhd (x_{n_k})$ תת סדרה מתכנסת.

אבל, $(x_{n_{k_l}}) \lhd (x_n)$ מתכנסת לגבול s , $s \le l-\varepsilon$, בניגוד להנחה ש $l = \underline{\lim} x_n$

הוכחה (2) <= (1):

(a+b) <= $l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon$ שכיחה, ולכן l גבול חלקי של (x_n). נניח בדרך השלילה שקיים $l' < l$ שהינו גבול חלקי של (x_n) .

יהי $\varepsilon = \frac{l-l'}{2} > 0$. מצד אחד, $x_n < \frac{l+l'}{2}$ שכיחה.

מצד שני, $\frac{l+l'}{2} < x_n$ כמעט תמיד. הגענו לאבסורד, סתירה.

S = Subsequenial limits
l = infS=minS
u = supS=maxS

צורת הסתכלות אחרת:

$$T_1 = \{x_1, x_2, ...\}$$
$$\cup$$
$$T_2 = \{x_2, x_3, ...\}$$
$$\cup$$
$$T_3 = \{x_3, x_4, ...\}$$
$$\cup ..$$
$$T_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$$

$$I_n := \inf T_n = \inf\{x_j : n \le j\}$$
$$S_n := \sup T_n = \sup\{x_j : n \le j\}$$

נשים לב: $I_n \le I_{n+1} \le S_{n+1} \le S_n$ (ונזכר בקנטור ולמתו)

לכן מהוכחת הלמה של קנטור, $(I_n) \le (S_n)$

יהי
$$i = \sup I_n = \sup inf\{x_j : n \le j\}$$
$$s = \sup S_n = \inf \sup\{x_j : n \le j\}$$
מתקיים $I_n \le i \le s \le S_n$:

משפט:

$$i = l = \underline{\lim} x_n$$

טענה: $i \in S$ (S קבוצת הגבולות החלקיים). צ"ל שבהנתן $\varepsilon > 0$ אזי $i - \varepsilon < x_n < i + \varepsilon$ שכיחה.

וגם $i - \varepsilon < x_n$ כמעט תמיד.

יהי $\varepsilon > 0$. נראה ש $i - \varepsilon < x_n$ כמעט תמיד. קיים $N \in N$ עם התכונה $i_N > i - \varepsilon$. מכאן נקבל, $i - \varepsilon < i_N \le x_n$ לכל $N \le n$.

נראה ש $x_n < i + \varepsilon$ שכיחה, אחרת, בדרך השלילה, $i + \varepsilon \le x_n$ כמעט תמיד. במילים אחרות, קיים $N \in N$ כך ש $i + \varepsilon \le x_n$ לכל $N \le n$.

$x_n \in T_N \Leftarrow i + \varepsilon \le x_n$ מכאן $i + \varepsilon$ חסם מלמטה של T_N, לכן $i + \varepsilon \le i_N$ - אבסורד (כי $i_n \le i$ לכל $n \in N$).

<u>משפט:</u> תהי $(x_n) \in B$ אזי $(x_n) \in C$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$ ובמקרה זה $x_n \to x$ כאשר $\underline{\lim} x_n = x = \overline{\lim} x_n$

<u>הוכחה:</u> אם $(x_n) \in C$, $x_n \to x$, אזי לפי משפט הירושה, לכל $(x_{n_k}) \lhd (x_n)$ מתקיים $x_{n_k} \to x$ ועל כן $S = \{x\}$. מספיק.

<u>בכיוון השני:</u>

אם $s = \{x\} \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$

נותר להראות כי $x_n \to x$.

$$i_n < x_n < s_n$$
$$i_n \to \underline{\lim} x_n$$
$$s_n \to \overline{\lim} x_n$$
$$\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = x$$
$$\Rightarrow$$
$$x_n \to x$$

שיעור 15 – 1.12.2005

סדרת קושי (Cauchy) – על שם הברון קושי. ילווה אותנו עד מועד ג'.

הגדרה: סדרה x_n תקרא סדרת קושי אם

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in N)(\forall n,m \in N)(N < n,m \Rightarrow | x_n - x_m |< \varepsilon)$$

(תן לי אפסילון, יש שלב כלשהו, שכל התזמונים שאחריו, מרחק בין הדגימות קטן מאותו אפסילון).

<u>משפט:</u>

$(x_n) \in C$ (מתכנסת) אמ"מ (x_n) סדרת קושי.

<u>הוכחה:</u>

$(x_n) \in C$ (מתכנסת), ועל כן יש לה גבול. נגדיר:

$$x = \lim x_n .$$

בהנתן $\varepsilon > 0$ קיים $N \in N$ עם $N < n \in N$ ואז $| x_n - x |< \frac{\varepsilon}{2}$

אם ניקח $N < n,m$ אזי

$$| x_n - x |< \frac{\varepsilon}{2}$$

$$| x_m - x |< \frac{\varepsilon}{2}$$

$$| x_n - x_m |\le_{TI} | x_n - x | + | x - x_m |< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

מ.ש.ל.

<u>**בכיוון השני:**</u>

נניח ש (x_n) סדרת קושי.

טענה: $(x_n) \in B$ (חסומה)

יהי $\varepsilon = 1$. אזי קיים $N \in N$ עם

$$N \le n,m \Rightarrow | x_n - x_m |< 1$$

נקבע את x_N . אזי לכל $N < n$

$$| x_n - x_N |< 1 \Leftrightarrow x_N - 1 < x_n < x_N + 1$$

כל איברי הסדרה יהיו חסומים בין $\min\{x_1,...,x_N, x_N - 1\} \le x_n \le \max\{x_1,...,x_N, x_N + 1\}$.

<u>***לכן סדרת קושי היא חסומה.***</u>

כעת, נוכיח כי היא מתכנסת:

<u>שני המשכים (הבמאי לא החליט איזה אחד הוא מעדיף):</u>

גרסת הבמאי:

יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $N \in N$ כך ש

$$N \le n,m \Rightarrow | x_n - x_m | < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \in N, N < n \Rightarrow | x_N - x_n | < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x_N + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$i_n \le x_n \le s_n$$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{2} \le i_N \le \sup i_n = \underline{\lim} x_n \le \overline{\lim} x_n = \inf s_n \le s_N \le x_N + \frac{\varepsilon}{2}$$

מכאן נסיק כי:

$$\overline{\lim} x_n - \underline{\lim} x_n \le (x_N + \frac{\varepsilon}{2}) - (x_N - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon \Rightarrow \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n \Rightarrow (x_n) \in C_{onvereged}$$

<u>מבוכה – ההוכחה לא נכונה. נגנוז ונמכור עותקים מוגבלים לאספנים במחיר מופקע.</u>

<u>המשך השני: גרסת העורך:</u>

$(x_n) \in B$ $\Leftarrow_{BW}$ $(x_{n_k}) \triangleleft (x_n)$ וגם הסדרה החלקית מתכנסת.

טענה:

$$(x_{n_k}) \to x$$

$$x_n \to x$$

בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי N (לפי קושי) אשר מקיים

$$N < n,m \Rightarrow | x_n - x_m | < \frac{\varepsilon}{2}$$

נבחר K לפי התכנסות הסדרה החלקית עם התכונה $| x_{n_k} - x | < \frac{\varepsilon}{2}$ כאשר $K < k$.

נקבע $k \in N$ אשר מקיים $\begin{matrix} K < k \\ N < n_k \end{matrix}$. לכן עבור $N < n$ יתקיים

$$| x_n - x | \le_{TI} | x_n - x_{n_k} | + | x_{n_k} - x | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

שיעור 16, 4.12.2005

משפט: $(Cesaro)$

אם

$$x_n \to 0 \Rightarrow$$
$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \to 0$$

הוכחה:

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $M \in N$ כך ש

$$n > M \Rightarrow \left| \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in N$ כך ש $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $n > N$. נניח ש $|a_n| < k$ לכל $n \in N$. ,

וגם $M \in N > \frac{2NK}{\varepsilon}$ אזי עבור $n > M$ נקבל

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + ... + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + ... + a_n}{n} \right| < \frac{Nk}{n} + \frac{(n-N)}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{NK}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

כמה מילים על סדרות לא חסומות (שואפות לאינסוף):

הגדרה: $x_n \to +\infty$ אם ורק אם לכל $M \in R$ קיים $N \in N$ עם $n > N \Rightarrow x_n > M$. במקרה זה נאמר (x_n) שואפת ל $+\infty$ (מתבדרת ל $+\infty$).

הגדרה: $x_n \to -\infty$ אם ורק אם לכל $m \in R$, קיים $N \in N$, עם $n > N \Rightarrow x_n < m$.

דוגמאות:

$$a_n = n \to +\infty$$
$$b_n = (-a)^n n$$

a_n שואפת לאינסוף, ו b_n לא.

$$c_n = (1,0,3,2,5,4,...) \to +\infty$$

אין דרישה שהסדרה תהיה מונוטונית.

בואו וננסח מספר תכונות:

גבולות וסדר:

משפט: $a_n \le b_n$ -

$$a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$$
$$b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$$

כל כך פשוט – נשאיר כתרגיל.

משפט: (אריתמטיקה של גבולות)

$$x+(\pm\infty)=\pm\infty$$
$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$$
$$(x\neq 0)x\cdot(\pm\infty)=(\operatorname{sgn} x)(\pm\infty)$$

משפט:

$$0<x_n;x_n\to+\infty\Leftrightarrow\frac{1}{n}\to 0$$

גם – תרגיל.

מסקנות:

$$|x_n|\to+\infty\Rightarrow\frac{1}{x_n}\to 0;(x_n\neq 0)$$

וגם:

$$x_n\to 0\Rightarrow\frac{1}{|x_n|}\to+\infty$$

(כל כך פשוט, שזה תרגיל)

דוגמא:

$$(q^n)$$
$$q>1\Rightarrow q^n\to+\infty$$
$$(q=1+h\Rightarrow_B q^n=(1+h)^n$$

$q\leq -1$ - הסדרה מתנדנדת.

משפט:

אם (x_n) מונוטונית עולה ואינה חסומה מלמעלה, $x_n\to+\infty$.

אם (x_n) מונוטונית יורדתואינה חסומה מלמעלה, $x_n\to-\infty$.

משפט: אם $(x_n)\to\pm\infty$ אזי $(x_{n_k})\to\pm\infty$.

משפט: לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב

הוכחה: תהי $(x_{n_k})\lhd(x_n)$ מונוטונית. אם x_{n_k} חסומה, אז יש לה גבול סופי, אחרת, יש לה גבול אינסופי.

משפט: לכל סדרה שאינה חסומה מלמעלה(מלמטה), יש לה סדרה חלקית ששואפת ל $+\infty$ ($-\infty$)

הגדרה: אם $S\subset R$ שאינה חסומה מלמעלה (מלמטה) $\sup S=+\infty$ ($\inf S=-\infty$).

הגדרה: אם (x_n) אינה חסומה מלמעלה אז $\overline{\lim} x_n=+\infty$

אם (x_n) אינה חסומה מלמטה אז $\underline{\lim} x_n=-\infty$

משפט: $x_n\to L$ אמ"מ $L=\underline{\lim} x_n=\overline{\lim} x_n$

(L במובן הרחב).

הוכחה: במקרה $L\in R$ ראינו.

במקרה שL הוא אחד מהאינסופים:

$$x_n \to +\infty \Rightarrow x_n \notin B_{lockedFromUpper}$$
$$\overline{\lim} x_n = +\infty (byDefenition)$$
$$x_n \to +\infty \Rightarrow i_n \to +\infty \Rightarrow \lim i_n = \underline{\lim} x_n = +\infty$$

בכיוון השני:

$$\underline{\lim} x_n = +\infty \Rightarrow \lim i_n \to +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty \to \overline{\lim} x_n = +\infty$$

<u>חזקות ממשיות:</u>

יהי $0 < a \in R$. מטרה : להגדיר a^x לכל $x \in R$. להדפיס מהאתר.

שיעור 17, 6.12.2005

טורים

פינת ההיסטוריה: מימים ימימה, הסתקרנו יוונים משועממים כיצד אפשר לחבר טורים אינסופיים. כמה חבל שבגללם גם אנחנו צריכים ללמוד את זה.

תהי (a_n) סדרה בR. נגדיר סדרה (s_n) כך:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \ldots$$
$$\ldots.$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=i}^{n} a_i$$

(s_n) תקרא סדרת הסכומים החלקיים שמתאימה לסדרה (a_n).

הגדרה: (a_n) תקרא סכימה (או ניתנת לסכימה) אם (s_n) מתכנסת.

נסמן את (s_n) על ידי:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

ובמקרה ש $(s_n) \to s$ נכתוב $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$. ביטוי זה יקרא הטור המתאים לסדרה (a_n).

(a_n) יקרא האיבר הn-י של הטור.

אם (s_n) מתבדרת נאמר שהטור $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ מתבדר.

דוגמאות:

(1) הטור הגיאומטרי -

$$a_n = q^n, q \in R$$

אם $q = 0$ אז $a_n = 0$ ואז $s_n = 0$ ואז $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = 0$

אחרת :

$$s_0 = 1$$
$$s_1 = 1 + q$$
$$s_2 = 1 + q + q^2$$
$$\ldots.$$
$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

אם $q = 1$ אזי $s_n = n + 1 \to \infty$

אם $0 \neq q \neq 1$ אזי

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

אם $-1<q<1$ אזי

$$q^{n+1} \to 0$$

$$s_n \to \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(אם מגדירים $1:=0^0$ ביטוי זה תקף גם עבור $q=0$)

אם $q>1$ אזי $n+1<s_n \to \infty$ ואזי הטור מתבדר.

אם $q<-1$ הטור מתנדנד.

.2

$$a_n = (-1)^n$$

עבור n אי זוגי $s_n=-1$, עבור זוגי $s_n=0$. ולכן הטור מתבדר.

.3

$$b_n = n$$

$$s_n \to +\infty$$

הטור מתבדר.

שיעור 18 – 8.12.2005

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} (!JeJe!)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

.4

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

טור שכזה נקרא 'טור טלסקופי'

.5

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots. + \frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

מתבדר.

6. הטור ההרמוני:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots. + \frac{1}{n} \to +\infty$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

מסקנה: הטור ההרמוני מתבדר לאינסוף.

.7

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$
$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$s_3 = s_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$s_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

הטור מתכנס.

.8

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$
$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots.$$
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} < \frac{4}{4^2} = \frac{1}{2^2}$$
$$\dots. < \frac{8}{8^2} = \frac{1}{2^3}$$

$$s_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2$$
$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

.9

$$a_n = \frac{1}{n^p}$$

אם $p > 1$ הטור מתכנס. אפשר לחקות את צביק בבית.

אם $p \le 1$ הטור מתבדר.

בואו נפתח תורה.

<u>משפט:</u>

הקריטריון של קושי (CAUCHY)

$(x_n) \in C_{onvergent}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in N \Rightarrow < N < n,m \Rightarrow | x_n - x_m | < \varepsilon$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ מתכנס אמ"מ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in N)(N < n < m \Rightarrow | a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m | < \varepsilon$

<u>משפט:</u>

אם $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ מתכנס אזי $a_n \to 0$. ***תנאי הכרחי, אך לא מספיק.***

<u>הוכחה:</u> בהנתן $\varepsilon > 0$, לפי קושי, יהי $N \in N$ אשר מבטיח

$N < n \le m \Rightarrow | a_{n+1} + ... + a_m | < \varepsilon$

מספיק לבחור m

$|a_{n+1}| < \varepsilon$

(צריך להראות כי $| a_n | < \varepsilon$ כמעט תמיד. מספיק להראות כי $| a_{n+1} | < \varepsilon$ כמעט תמיד.)

<u>הוכחה אחרת:</u>

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + (a_2 - a_1)$

$a_3 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2)$

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$...$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \Leftrightarrow (s_n) \in C_{onvergent}$:

$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \to 0$

$s_n \in C_{onvergent}$

$s_{n+1} \subset s_n$

שיעור 19, 11.12.2005

משפט: התכנסות בהחלט <= התכנסות)

אם $\sum |a_n|$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס.

הוכחה: נשתמש בקריטריון CAUCHY . בהנתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in N$ עם התכונה
$(\forall n, m \in N)(N < n < m \Rightarrow || a_{n+1} | + ... + | a_m || < \varepsilon$
בתנאים אלה נקבל

$$| a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m | \leq_{T.I} | a_{n+1} | + | a_{n+2} | + ... + | a_m | < \varepsilon$$

ולכן $\sum a_n$ מקיים את תנאי CAUCHY.

"אנטי דוגמא (זה לא עובד הפוך)":

$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס אבל הטור ההרמוני $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר.

כמה מילים על טורים עם איברים חיוביים

(a_n) , $0 \leq a_n$ (גם 0 חיובי, לצורך זה)

הערה: אם $\sum a_n$ טור עם איברים חיוביים, אזי $\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ (s_n) הינה חסומה.

משפט: (מבחן ההשוואה – Comparison Test)

(1) אם $| a_n | \leq c_n$ כמעט תמיד, ו $\sum c_n$ מתכנס, אזי $\sum a_n$ מתכנס.

(2) אם $0 \leq d_n \leq a_n$ ו $\sum d_n$ מתבדר, אזי $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה: (1)

$\sum a_n$ מקיים את תנאי קושי

$$\forall n, m \in N, (N < n < m \Rightarrow | c_{n+1} + ... + c_m | < \varepsilon)$$
$$| a_{n+1} + ... + a_m | \leq_{TI} | a_{n+1} | + ... + | a_m | \leq | c_{n+1} + ... + c_m | < \varepsilon$$

לכן $\sum a_n$ מקיים את תנאי קושי להתכנסות.

(2) – נובע מ(1) – אילו $\sum a_n$ מתכנס, לפי (1) $\sum d_n$ מתכנס, סתירה.

דוגמא:

$\sum \frac{1}{n^p}$ מתכנס עבור $p > 1$, מתבדר עבור $p \leq 1$.

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}$$
$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{2}{2^p}$$
$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{4}{4^p}$$
$$\ldots<\frac{8}{8^p}$$
$$s_1=2-1$$
$$s_3<1+\frac{2}{2^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}$$
$$s_7<1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}$$
$$s_{15}<1+\ldots+\frac{1}{(2^{p-1})^3}$$

נטען:

$$s_{2^k-1}<1+\frac{1}{2^{p-1}}+\ldots+(\frac{1}{2^{p-1}})^{k-1}<\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{p-1}}$$

ומכאן ההתכנסות.

במקרה $p\le 1$ אזי $n^p\le n$ ואזי $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}$ ומכאן ההתבדרות (מבחן ההשוואה)

<u>משפט:</u> (מבחן ההשוואה גבולי) – נניח ש $0<a_n,c_n$.

(1) אם $0<\lim\frac{a_n}{c_n}$ אז $\sum c_n$ מתכנסים $\Leftrightarrow$ $\sum a_n$ מתכנסים.

(2) $0=\lim\frac{a_n}{c_n}$ ו $\sum c_n$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס.

<u>**הוכחה (1) :**</u> קיימים $0<\alpha<\beta$ עם $0<\alpha<\frac{a_n}{c_n}<\beta$ כמעט תמיד. מכאן:

$$\alpha c_n<a_n<\beta c_n$$

אם $\sum c_n$ מתכנס, אזי (אריתמטיקה של טורים מתכנסים – ראו המשך הלא רחוק) $\sum \beta c_n$ על כן, על

פי קריטריון ההשוואה $\sum a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n$ מתכנס , מכאן $\sum \alpha c_n$ מתכנס, מכאן $\sum c_n$ מתכנס.

__**הוכחה:**__ __**(2)**__ אם $\lim \frac{a_n}{c_n} = 0$ נבחר $\varepsilon = 1$ (כלשהו), אזי

$\frac{a_n}{c_n} < 1$ כמעט תמיד – מכאן $a_n < c_n$ כמעט תמיד, ומכאן המסקנה (קריטריון ההשוואה).

__**משפט:**__ (מבחן המנה). נניח ש $0 < a_n$ לכל $n \in N$. יהיו $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = u$ ו $l = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(1) אם $u < 1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.

(2) אם $1 < l$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

__**הוכחה:**__ (1) יהי $u < q < 1$ אז $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ כמעט תמיד. <= קיים $N \in N$ עם

$$
\begin{aligned}
&a_{N+1} < a_N q \\
&a_{N+2} < a_{n+1} q < a_N q^2 \\
&.... \\
&a_{N+m} < a_N q^m
\end{aligned}
$$

מכאן:

$$a_{N+1} + ... + a_m < a_n \sum_{i=1}^{m} q^i < a_N \cdot (\frac{1}{1-q} - 1)$$

$$\Uparrow$$

$$s_m - s_N \Rightarrow N < m, s_m < s_N + a_N(\frac{1}{1-q} - 1)$$

הוכחנו כי (s_n) היא חיובית וחסומה כמעט תמיד ולכן המסקנה.

(2)

$$1 < l = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$1 < \alpha < l$$

$$(almost\_always), \alpha < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

במילים אחרות, $\alpha a_n < a_{n+1}$ כמעט תמיד. מכאן, a_n לא שואף ל0, ולכן $\sum a_n$ מתבדר.

למה?

$$0 < a_N < \alpha a_N < a_{N+1}$$
$$\alpha^2 a_N < \alpha a_{N+1} < a_{N+2}$$
$$\alpha^m a_N < a_{N+m}$$

הערה: אם $a_n = \frac{1}{n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot n \to 1$, $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר.

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 \to 1$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

דוגמא: ('מאוד, מאוד, מאוד חשובה')

הטור:

$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ מתכנס, לכל $x \in R$.

($e_n = \frac{x^n}{n!}$)

נראה שהוא מתכנס בהחלט:

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

$E(x)=ex$

תזכורת:

$$e = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$$
$$e^x = \sup\{e^r : r \in Q, r < x\} = \inf\{e^t : t \in Q, x < t\}$$
$$(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

טענה:

$$(x \ge 0);\lim(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

הוכחה:

$$(1+\frac{x}{n})^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{x^3}{n^3} + \ldots$$

$$= 1 + x + 1(1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + 1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

$$< 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \lim(1+\frac{x}{n})^n \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

המשך:

$$m < n;$$

$$(1+\frac{x}{n})^n \ge 1 + x + 1(1-\frac{1}{n})\frac{x^2}{2!} + 1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{x^3}{3!} + \ldots +$$

$$1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{m-1}{n})\frac{x^m}{m!}$$

אם נקבע את m וניתן לn לשאוף לאינסוף נקבל אי שיוויון בין גבולות של סדרות מתכנסות

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \ge 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^m}{m!}$$

עכשיו, ניתן לm לשאוף לאינסוף, נקבל $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \ge \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

עוד שתי דוגמאות (שוב – 'מאוד מאוד מאוד חשובות')

$$\cos(x) := C_{os}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) := S_{in}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

תנסה להראות, שהסדרות מתכנסות בהחלט. כאילו יש סיכוי, אבל אופטימיות זו ברכה.

<u>משפט:</u> (מבחן השורש) – אם $0 < a_n$ לכל $n \in N$ יהי $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} = u$

(1) אם $u < 1$ אז $\sum a_n$ מתכנס.

(2) אם $1 < u$ אז $\sum a_n$ מתבדר.

הוכחה:

(1)

יהי $0 \le u < q < 1$

$\sqrt[n]{a_n} < q$ כמעט תמיד.

$a_n < q^n$ כמעט תמיד (השוואה) <= $\sum a_n$ מתכנס.

(2)

יהי $1 < \alpha < u$

$\alpha < \sqrt[n]{a_n}$ כמעט תמיד

$1 < \alpha^n < a_n$ ולכן a_n לא שואפת ל0 ועל כן $\sum a_n$ מתבדר.

שיעור 20, 13.12.2005

$$e^x = \lim(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

עבור x>0.

ראינו בשיעור קודם כי עבור $p \in N$.

$$e^P = \lim(1+\frac{p}{n})^n$$

עבור $p < 0 \in Z$

$$e^{-p} = \lim(1-\frac{p}{n})^n =$$

$$= \lim(\frac{n-p}{n})^n$$

$$= \lim\left(\frac{1}{\frac{n}{n-p}}\right)^n = \lim\left(\frac{1}{\frac{n-p+p}{n-p}}\right)^n = \lim\left(\frac{1}{1+\frac{p}{n-p}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^n} = \frac{1}{\lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p}\cdot\lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^p} = \frac{1}{\lim\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p}}$$

$$\left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p} \lhd (1+\frac{p}{n})^n \Rightarrow \left(1+\frac{p}{n-p}\right)^{n-p} \to \lim(1+\frac{p}{n})^n$$

בואו נראה עכשיו עם רציונליים:

$$r = \frac{p}{q}, p, q \in Z, q > 0$$

$$e^{p}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{n}=_{n_k=qk}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{qk}\right)^{qk}=\lim\left\{\left[\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{k}\right)^{k}\right]^{q}\right\}=$$

$$\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{k}\right)^{k}\right]^{q}\Rightarrow$$

$$e^{\frac{p}{q}}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\frac{p}{q}}{k}\right)^{k}$$

תזכורת (והוכחה לאחריה):

$$\sup\{e^{r}:r\in Q,r<x\}=e^{x}=\inf\{e^{t}:t\in Q,x<t\}$$

$$r<x<t$$

$$\frac{r}{n}<\frac{x}{n}<\frac{t}{n},n\in N$$

$$1+\frac{r}{n}<1+\frac{x}{n}<1+\frac{t}{n}$$

$$**\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}\Rightarrow$$

$$e^{r}\le\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\le e^{t}$$

$$\Rightarrow e^{x}=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

** עבור n מספיק גדול (כמעט תמיד). (המסקנה האחרונה – משלמות)

'במתמטיקה, יוצא לך טוב – מצוין. לא – תגדיר את הדברים ככה שיצא'

<u>על שאריות וזנבות</u>

בהינתן הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ הטור $\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n$ יקרא ה-m-זנב שלו.

תשומת לב בבקשה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_k = a_1 + \dots + a_m$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$$

$$t_1 = a_{m+1} = s_{m+1} - s_m$$

$$t_2 = a_{m+1} + a_{m+2} = s_{m+2} - s_m$$

$$t_k = a_{m+1} + \dots + a_{m+k} = s_{m+k} - s_m$$

נסמן את $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ ע"י r_m.

<u>משפט:</u>

1. אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס לs אזי $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס לכל $m \in N$ ומתקיים $s_m + r_m = s$.
2. אם קיים $m \in N$ כך ש $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס ומתקיים $s_m + r_m = s$.

<u>הוכחה:</u>

$$t_k = s_{m+k} - s_m$$

(1)

$$(s_n) \to s$$

$$(s_{m+k}) \to s$$

$$t_k \to s - s_m = r_m$$

(2)

$$s_{m+k} = t_k + s_m \to r_m + s_m$$

$$s_{m+k} \to s$$

<u>טור עם סימנים מתחלפים</u>

<u>משפט</u> (לייבניץ): תהי (x_n) $0 < x_n, x_{n+1} < x_n, x_n \to 0$ אזי, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ מתכנס.

יהי S סכום הטור, אזי $0 < s < x_1$.

<u>הוכחה:</u> (נשתמש בלמה של CANTOR)

$b_1 = s_1 = x_1$

$a_1 = s_2 = x_1 - x_2$

$b_2 = s_3 = x_1 - x_2 + x_3$

$a_2 = s_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$

$a_n = s_{2n}$

$b_n = s_{2n-1}$

נגדיר שתי סדרות : $a_n := s_{2n}; b_n = s_{2n-1}$.

<u>**טענה :**</u> $(a_n),(b_n)$ עומדות בתנאי הלמה של CANTOR.

$a_{n+1} - a_n = s_{2n+2} - s_{2n} = s_{2n} + x_{2n+1} - x_{2n+2} - s_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n+2} \Rightarrow$

$0 < a_{n+1} - a_n$

צ"ל כי $b_{n+1} < b_n$, כלומר כי $0 < b_n - b_{n+1}$

$b_n - b_{n+1} = s_{2n-1} - s_{2n+1} = s_{2n-1} - \left(s_{2n-1} - x_{2n} + x_{2n+1}\right) = x_{2n} - x_{2n+1} > 0$

צ"ל כי $a_n < b_n$, כלומר $0 < b_n - a_n$:

$s_{2n-1} - s_{2n} = s_{2n-1} - \left(s_{2n-1} - x_{2n}\right) = x_{2n} > 0$

יתר על כן, $b_n - a_n \to 0$:

$b_n - a_n = x_{2n} \to 0$

$\Leftarrow (x_{2n}) \lhd (x_n)$

לכן, לפי הלמה של קנטור קיים S (אחד ויחיד) אשר מקיים:

$a_n \to S \leftarrow b_n$

<u>מסקנה:</u> $s_n \to s$

<u>הסבר:</u>

$(a_n) = (s_{2n}) \lhd (s_n)$

$(b_n) = (s_{2n-1}) \lhd (s_n)$

בהינתן $\varepsilon > 0$ קיימים $N_1, N_2 \in N$ עם

$(\forall n \in N)(N_1 < n \Rightarrow | s_{2n} - s | < \varepsilon)$

$(N_2 < n \Rightarrow | s_{2n-1} - s | < \varepsilon)$

על כן , עם $N := \max\{N_1, N_2\}$ אז יתקיים $N < n \Rightarrow | s_n - s | < \varepsilon$

שיעור 21 – 15.12.2005

תזכורת - משפט לייבניץ

$\left\{\begin{array}{c} 0<a_n \\ a_{n+1}<a_n \\ a_n \to 0 \end{array}\right\} \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס ל $S \in R$ ו $0<S<a_1$.

מסקנה:

באותם התנאים ה m זנב של הטור, $\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}a_n$ מתכנס ל r_m ומתקיים:

m זוגי <= $0<r_m<a_{m+1}$

m אי זוגי <= $-a_{m+1}<r_m<0$.

בשני המקרים: $|r_m|<a_{m+1}$ ו $0<(-1)^m r_m$

הערה: אם תנאי המשפט הם תנאים חלשים, קרי $a_{n+1} \le a_n, 0 \le a_n$ אז המסקנות תהנה חלשות אף הן, בהתאם.

קצת חזרה ל-e - 'משהו יפהפה':

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$s_n:=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$$

טענה:

$$e \notin Q$$

נתבונן:

$$e=s_n+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots$$

בדרך השלילה נניח שe ניתן לייצוג כ $e=\frac{p}{q}, p,q \in Z, q>0$.

$$e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{(n+1)!}{(n+2)!}+\frac{(n+1)!}{n(+3)!}\right]<\frac{1}{(n+)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots\right]$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{(n+1)-1}$$

$$e-s_n<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)}{n}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}\Rightarrow n!(e-s_n)<\frac{1}{n}$$

$$(***)n=q\Rightarrow q!(e-s_q)<\frac{1}{q}$$

$$(*)\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}$$

$$(**)\frac{(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}<\frac{1}{(n+1)^2}$$

*** - מה הבעיה?

$q!s_q\in Z$

$q!e\in Z$

כפולה של שלמים חיובי לא יכולה לתת לנו שבר. $\left(0<e-s_n\right)$.

<u>ובחזרה לטורים:</u>

<u>דוגמא:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\dots.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}\pm 1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=2$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}=\frac{2}{3}$$

<u>טור זה לא מתכנס:</u>

משפט:

תהי $\left(a_n\right)$ חיובית יורדת כך ש $\sum a_n$ מתכנס. אזי $na_n \to 0$.

הוכחה (מאוד נחמדה):

$$na_n \le a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$ma_n \le a_1 + \ldots + a_m$$

$$m < n \Rightarrow (n-m)a_n \le s_n - s_m$$
$$na_n \le s_n - s_m + ma_n$$

בהנתן $\varepsilon > 0$ יהו $N_1, N_2 \in N$:

1. ע"פ Cauchy - $N_1 < n,m$, $|s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}$
2. נבחר $N_1 < m \in N$, נבחר N_2 אשר מבטיח $N_2 < m \Rightarrow ma_n < \frac{\varepsilon}{2}$. עבור

$n > max\{N_1, N_2\} \Rightarrow na_n \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

חשוב: זה סוף השבוע האחרון שיש עם שמש. תנצלו אותה. אפשר גם לקרוא בים את הפיתוח העשרוני של המספרים הממשיים – משפט העיבוי של קושי, הבל.

שיעור 22, 18.12.2005

כמה תכונות של טורים מתכנסים

יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים, אזי:

(1) $a_n \geq 0 \Leftarrow \sum a_n \geq 0$ (חיוביות)

(2) $a_n \leq b_n \Leftarrow \sum a_n \leq \sum b_n$ (מונוטוניות)

(3) $\sum (a_n + b_n) = \left(\sum a_n + \sum b_n \right)$ - ליניאריות

(4) $k \sum a_n = \sum k a_n , k \in R$

הערה: (רק בלחישה) – התכונות נכונות גם כאשר יש גבול רק במובן הרחב.

<u>משפט:</u> משפט העיבוי (Condensation) של קושי

תהי (a_n) חיובית מונוטונית יורדת אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. <u>הוכחה:</u> נסמן

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + +4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^k a_{2^k}$$

הערה:

$$n < 2^k \Rightarrow$$
$$s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots. + a_{2^{k+1}-1})$$
$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k$$

$$2^k < n \Rightarrow$$
$$a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}) \geq$$
$$\frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k$$

$$n < 2^k \Rightarrow 0 \leq s_n \leq t_k$$
$$2^{k+1} < n \Rightarrow 0 \leq t_k \leq 2 s_n$$

אם $\sum a_n$ מתכנס, אזי (s_n) חסומה, כלומר $s_n \leq M$ לכל $n \in N$.

לכן t_k סדרה חסומה, לכן $\sum 2^m a_{2^n}$ מתכנס. טיעון סימטרי נותן את הצד השני.

דוגמאות:

$\sum \frac{1}{n^p}$ - מתכנס אמ"מ

$$\sum 2^n \frac{1}{\left(2^n\right)^p} =$$

$$\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

טור גאומטרי זה מתכנס אמ"מ $p>1 \Leftrightarrow 1<2^{p-1} \Leftrightarrow 0<q<1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ מתכנס אמ"מ $\sum 2^n \frac{1}{2^n \log(2^n)} = \sum \frac{1}{n \log 2}$, מתכנס, אבל הוא אינו מתכנס.

$\sum \frac{1}{n(\log n)^2}$ מתכנס אמ"מ $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\log 2^n)^2} = \sum \frac{1}{n^2 (\log 2)^2}$ שכן מתכנס.

מדובר על log בבסיס 10...

מומלץ הספר של Hardy וWright – A course in pure math – פונט קטן.

מספרים עשרוניים

'אנשי מדעי המחשב – איפה שאתם רואים 10, כתוב 2. אנשי מתמטיקה – איפה שרשום 10, זה 2 שהפך ל3'.

יהו $a_0, a_1, \dots, a_n \in Z, 0 \le a_1, \dots, a_n < 10$.

$$a_0.a_1a_2\dots a_n := a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

'מה יש לנו כאן – ציד אחרי מספר ' (האם צביק חשב על סטייק, במקום מספר?)

קיים מספר שלם אחד ויחיד [a] אשר מקיים :

$$a_0 := [a] \le a < [a] + 1$$

$$\left[\sqrt{2}\right] = 1$$

$$[\pi] = 3$$

$$\left[-\sqrt{2}\right] = -2$$

$$[-\pi] = -4$$

$$a_0 \le a < a_0 + 1$$
$$0 \le a - a_0 < 1$$
$$0 \le 10(a - a_0) < 10$$

$$a_1 \le 10(a-a_0) < a_1+1$$

$$\frac{a_1}{10} \le a-a_0 < \frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$$

קיים $a_1 \in Z$ אחד ויחיד, $0 \le a_1 \le 9$,
$$a_0+\frac{a_1}{10} \le a < a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$$

$$a_0.a_1 \le a < a_0 \cdot a_1+\frac{1}{10}$$

ממשיכים בצורה רקורסיבית ונקבל בכל שלב:

$$a_0,...,a_n \in Z$$

$$0 \le a_1,...,a_n \le 9$$

למעשה, a הינו הגבול של סדרת הקירובים העשרוניים. **<u>מפורשות:</u>** הסדרה $(a_0,a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ שבנינו קודם באופן רקורסיבי ומתקיים כי a הוא הסכום של הטור שמתאים לסדרה:

$\left(a_0,\frac{a_1}{10},\frac{a_2}{10^2},...,\frac{a_n}{10^n}\right)$. במילים אחרות, $a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$.

אם $\pi = 3.1415.....$, אז ההצגה העשרונית של $-\pi = -4."1-0.1415."$

'התלמיד הרציני שלומד ספרות, ישים לב שלכל מספר עשרוני יש הצגה עשרונית, אבל לא יחידה דווקא'

<u>'הדבר האחרון שאני אגיד' – לא צביק, אל תלך – אוהבים אותך:</u>

בהנתן סדרה $(a_0,...,a_m,...)$, $a_n \in Z$, $0 \le a_n \le 9$ עבור $1 \le n$

אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ מתכנס וסכומו a, מספר ממשי אשר הסדרה מייצרת הצגה עשרונית שלו. למה מתכנס?

$$\frac{a_n}{10^n} \le \frac{9}{10^n}$$

$$a_0+\frac{a_1}{10}+...+\frac{a_n}{10^n} \le a_0+9\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{10^4}\right) \le a_0+1$$

נשים לב שהחלק בסוגריים הוא חלק של טור גאומטרי.

<u>(כמה) קריטריונים ('יפהפיים') להתכנסות של טורים עם איברים כלליים:</u>

<u>למה (יפהפיה) של ABEL</u>

'מה ההבדל בין למה להוכחה – על למה לא תקבל דוקטוראט'

(יש ציור עם מלבנים – אפשר להסתכל אצל דינה)

בהנתן סדרות $(a_i),(b_i)$

$$1 < m < n$$

$$\sum_m^n a_k b_k = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m - \sum_m^n (a_{k+1}-a_k)B_{k+1}$$

כאשר:

$$B_k := b_1 + \ldots + b_{k-1}$$

(מדברים עכשיו על אינטגרלים וכאלה. אם אני אבין יום אחד – אז להסתכל אצל דינה).

<u>הוכחה:</u> בהנתן סדרה $\left(c_k\right)$ נגדיר $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$

בסימון זה:

$$\Delta B_k = B_{k+1} - B_k = b_k$$

$$\Delta\left(a_k B_k\right) = a_{k+1} B_{k+1} - a_k B_k = \left(a_{k+1} - a_k\right) B_{k+1} + \left(B_{k+1} - B_k\right) a_k$$

נסכם מm עד n :

$$a_{m+1} B_{m+1} - a_m B_m$$

$$a_{m+2} B_{m+2} - a_{m+1} B_{m+1}$$

$$a_{m+3} B_{m+3} - a_{m+2} B_{m+2}$$

....

$$a_{n+1} B_{n+1} - a_n B_n$$

$$-------------$$

$$a_{n+1} B_{n+1} - a_m B_m$$

וכל זה שווה ל

$$\sum_{k=m}^{n} \left(a_{k+1} - a_k\right) B_{k+1} + \sum_{k=m}^{n} a_k b_k$$

מ.ש.ל.

שיעור 23, 20.12.2005

משפט: (קריטריון Dirichlet)

יהי $\sum b_n$ טור חסום (במילים אחרות, סדרת הסכומים החלקיים חסומה) ו (a_n) סדרה חיובית

מונוטונית שואפת לאפס, אזי הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

*** תזכורת *****

ניזכר בלמה של ABEL :

$$\sum_m^n a_k b_k = a_{n+1}B_{n+1} - a_m B_m - \sum_m^n \left(a_{k+1} - a_k\right) B_{k+1}$$

כאשר

$$B_k := b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}$$

*** סיום תזכורת***

הוכחה: נשתמש בקריטריון CAUCHY – יהי $M \in R$ עם $|B_n| \le M$ לכל $n \in N$

בהינתן $\varepsilon > 0$ יהי $N \in N$ עם $|a_n| = a_n < \frac{\varepsilon}{2M}$ לכל $n > N$, אזי עבור N כזה ולכל $n > m > N$ מתקיים:

$$|\sum_m^n a_k b_k| \le_{ABEL\_LEMA,TI} M\left[|a_{n+1}| + |a_m| + |\sum_m^n a_{k+1} - a_k|\right]$$

בגלל החיוביות, ניתן להשמיט את הערך המוחלט, ונשים לב שהטור בסכימה הוא טלסקופי

$$M\left[a_{n+1} + a_m + |a_{n+1} - a_m|\right] =_* M\left[a_{n+1} + a_m + a_m - a_{n+1}\right] \le 2Ma_m < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

- * - בגלל ש a_m חיוביות מונוטונת שואפת ל0, ועל כן $a_{n+1} \le a_n$

<u>מסקנה / הערה :</u> המשפט נכון גם במקרה שניח את את אותן ההנחות ובמקום ההנחות ובמקום החיוביות של (a_n) נדרוש ש (a_n) שלילית.

<u>הערה:</u> אם $b_n = (-1)^n$ אזי $B_n = \begin{Bmatrix} 0, n\_even \\ -1, n\_odd \end{Bmatrix}$ ואז נקבל את משפט לייבניץ.

<u>דוגמא:</u> הטור $\sum(\cos n\alpha)$ חסום עבור $0 < \alpha < 2\pi$. מדוע:

$$\sum_1^N \cos(n\alpha) = \frac{\frac{\sin(2N+1)\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

לכן $\sum \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ מתכנס.

<u>מסקנה:</u> הקריטריון של ABEL:

אם $\sum b_n$ מתכנס ו (a_n) מונוטונית וחסומה אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה: (בנאלית)

(a_n) מונוטונית וחסומה $\Leftarrow (a_n)$ מתכנסת. נניח ש $a_n \to a$. אזי $(a_n - a)$ מונוטונית ושואפת לـ0. על כן, ע"פ קריטריון $Dirichlet$

$\sum b_n$ מתכנס, ועל כן $\sum b_n$ חסום. ועל כן:

$\sum (a_n - a) b_n$ מתכנס.,

$$a_n b_n = (a_n - a) b_n + a b_n$$

$$\sum a_n b_n = \sum (a_n - a) b_n + \sum a b_n$$

$\sum b_n$ מתכנס גורר כי $\sum a b_n$ מתכנס.

גם $\sum (a_n - a) b_n$ מתכנס, ולכן גם סכימתם מתכנסת.

(1) משפט (חוק הצירוף)

אם טור מתכנס וסכומו S אזי לאותו סכום יתכנס כל טור שמתקבל מהראשון ע"י הכנסת סוגריים.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots.$$

$$-----------------------$$

$$S + \frac{1}{2} S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

הוכחה (1)

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots.$$

בהנתן הטור $\sum a_n$ וסדרה בN: $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ נגדיר:

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}$$

$$b_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}$$

$$\ldots.$$

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$$

נאמר ש $\sum b_n$ התקבל מ $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים.

נגדיר:

$$t_k := \sum_{n=1}^{k} b_n$$

אבל מהו t_k ?

$$t_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k = a_1 + \ldots + a_{n_k} = \left(s_{n_k}\right) \lhd \left(s_n\right)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(t_k\right) = \lim_{k\to\infty}\left(s_{n_k}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

<u>לשים לב :</u> זה לא עובד הפוך – הוצאת סוגריים לא תמיד תשאיר לנו טור מתכנס.!
לדוגמא:

$$\left(1-1\right)+\left(1-1\right)+\left(1-1\right)+\ldots$$
$$1-1+1-1+1-1+\ldots.$$

<u>(2) משפט:</u> אם $\sum b_n$ מתכנס שיתקבל מהטור $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים שבתוכם כל איבריה בעלי

אותו סימן אזי $\sum a_n$ מתכנס לאותו סכום.

<u>הוכחה:</u>
(באותם הסימנים כמו הקודם)
אנו מניחים ש $\left(t_k\right)$ מתכנסת, וכל האיברים $\forall k, a_{n_{k-1}+1},\ldots,a_{n_k}$ בעלי אותו סימן.
בהנתן $\varepsilon > 0$ קיים $K \in N$ עם התכונה ש $|t_k - t_l| < \varepsilon$ לכל $K < k,l$.
ניזכור: $t_k = s_{n_k}$.
יהי $N := n_K$.
עבור $N < n \in N$, קיים $K < k$ אשר $n \in \left\{n_k + 1,\ldots,n_{k+1}\right\}$.

$$|s_n - t_k| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n - \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_k}\right)| =$$
$$|a_{n_k+1} + \ldots + a_n| \le_* |a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}| = t_{k+1} - t_k < \varepsilon$$

* - בגלל שבסוגריים יש איברים מאותו סימן
מ.ש.ל.

שיעור 24 – 22.12.2005

משפט:

אם $\sum b_n$ טור מתכנס, אשר יתקבל מטור $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים כך שכל האיברים בתוך הסוגריים בעלי אותו סימן, אז $\sum a_n$ מתכנס ולאותו סכום $\sum b_n$.

$$\left(a_1, a_2, ..., a_n, ...\right)$$
$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n_1}, a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}\right), n_1 < n_2 < ...., n_i \in N$$
$$\left(a_1 + a_2 + ... + a_{n_1}\right) + \left(a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}\right) + ... + \left(a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k}\right) + ...$$

$$b_1 := \left(a_1 + a_2 + ... + a_{n_1}\right)$$
$$b_2 := \left(a_{n_1+1} + ... + a_{n_2}\right)$$
$$b_k := \left(a_{n_{k-1}+1} + ... + a_{n_k}\right)$$

נייצר את סדרת הסכומים של b_i:

$$t_k = b_1 + b_2 + ... + b_k = s_{n_k}$$

הוכחה:

נראה ש $\sum a_n$ מקיים את הקריטריון של $Cauchy$ להתכנסות, וע"כ מתכנס. מכאן, בהסתמך על 'חוק הצירוף' $\sum b_n$ שמתקבל מ $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים, סכומו מתלכד עם $\sum a_n$

$\sum b_n$ מתכנס, וע"כ מקיים את קריטריון קושי:

יהי $\varepsilon > 0$, אזי קיים $K \in N$ כך שלכל $K \le k, l$ מתקיים $\left|t_k - t_l\right| < \varepsilon$

נבחר את $N = n_k$. אם $n > N$, נשים לב כי $n \ge n_K + 1$. עבור n כזה קיים $K \le k \in N$ כך ש $n_k < n$ יחד עם התכונה הבאה:

$$n \in \left\{n_k + 1, ..., n_{k+1}\right\}$$
$$\left|s_n - t_k\right| = \left|a_{n_k+1} + ... + a_n\right| \le_{(*)} \left|a_{n_k+1} + ... + a_n + ... + a_{n_{k+1}}\right| = \left|t_{k+1} - t_k\right| <_{(**)} \varepsilon$$

(*) כולם בסוגריים בעלי אותו סימן.

(**) - $k, l = k+1$

צביק: 'אין שאלות: זה אומר שאו שהסברתי היום נכון, או שכולכם מיואשים לגמרי. אין סתירה ביניהם.'

אם $N < m$ עבורו קיים $K \le l \in N$ עם אותן התכונות

$$\left|s_m - t_l\right| < \varepsilon$$

(כמו לעיל)

$$\left|s_n - s_m\right| \le_{TI} \left|s_n - t_k\right| + \left|t_k - t_l\right| + \left|t_l - s_m\right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

'התלמיד הליברלי – יקבל את זה כהוכחה' – האם גם הבוחן יהיה ליברלי?

<u>הגדרה:</u>

נאמר שהסדרה $\left(b_n\right)$ מתקבלת ע"י שינוי סדר בסדרה $\left(a_n\right)$ אם קיימת $p:N\to N$ תמורה $\left(permutation\right)$. (במילים אחרות – p חד-חד ערכית ועל) עם $b_n:=a_{p(n)}$.

<u>משפט:</u>

(חוק החילוף) – יהי $\sum a_n$ טור **<u>חיובי</u>** מתכנס. אם $\left(b_n\right)$ מתקבלת מ $\left(a_n\right)$ ע"י שינוי סדר אז

$$\sum b_n=\sum a_n.$$

<u>הוכחה:</u>

תהי $p:N\to N$ תמורה כך ש $b_n:=a_{p(n)}$. בהינתן $n\in N$ כלשהו קיים $k\in N$ מספיק גדול כך ש $\left\{p(1),p(2),...,p(n)\right\}\subset\left\{1,2,3,...,k\right\}$:

$$t_n=b_1+...+b_n=a_{p(1)}+a_{p(2)}+...+a_{p(n)}$$

$$t_n\le s_k=a_1+a_2+....+a_k\le\sum a_n$$

מכאן $\left(t_n\right)$ סדרה חסומה (חיובית) ולכן מתכנסת. נניח $t_n\to T \Leftarrow \sum b_n=T\le S=\sum a_n$.

נשים לב ש $\left(a_n\right)$ מתקבלת מהסדרה $\left(b_n\right)$ ע"י שינוי סדר באמצעות p^{-1} ואז נקבל אי שיוויון $S\le T$ בכיוון השני ונצא במחול לסופ"ש.

שיעור 25 – 25.12.2005

משפט:

(חוק החילוף) : יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט. תהי $p: N \to N$ חד-חד ערכית ועל (תמורה) ויהי $b_n := a_{p(n)}$ אז $\sum b_n = \sum a_n$. (הוכחה בהמשך)

תזכורת: $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum |a_n|$ מתכנס.

הגדרה: בהינתן $\sum a_n$ נגדיר

$$P_n := \frac{|a_n| + a_n}{2},$$

$$N_n := \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

$$a_n > 0, \Rightarrow 0 < P_n = a_n, N_n = 0$$

$$a_n < 0 \Rightarrow P_n = 0, 0 < N_n = -a_n$$

משפט: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אזי $\sum P_n + \sum N_n$ מתכנסים ומתקיים $S = P - N$ כאשר:

$$S = \sum a_n$$

$$P = \sum P_n$$

$$N = \sum N_n$$

ולהפך, אם $\sum P_n$ ו $\sum N_n$ מתכנסים אזי $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

הוכחה: נניח ש $\sum a_n$ מתכנס בהחלט (תזכורת 2: $\sum |a_n| < \infty$), ואז :

$$P_n \le |a_n| \Rightarrow \sum P_n \le \sum |a_n| < \infty$$

$$N_n \le |a_n| \Rightarrow \sum N_n \le \sum |a_n| < \infty$$

נשים לב כי $a_n = P_n - N_n$ ולכן $\sum^m a_n = \sum^m P_n - \sum^m N_n \Rightarrow S = P - N$

מצד שני, אם $\sum P_n$ ו $\sum N_n$ מתכנסים אזי :

$$|a_n| = P_n + N_n \Rightarrow \sum |a_n| = \sum P_n + \sum N_n$$

סכום של טורים מתכנסים.

ובחזרה למשפט המקורי (חוק החילוף):

אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum P_n$ ו $\sum N_n$ (ראה הגדרות לעיל) מתכנסים. מספיק לשים לב:

$$\sum a_n = \sum P_n - \sum N_n$$

אבל $\sum P_n = \sum P_{p(n)}$ וגם $\sum N = \sum N_{p(n)}$, לפי חוק החילוף עבור טורים עם איברים חיוביים, לכן

$$\sum a_n = \sum P_{p(n)} - \sum N_{p(n)} = \sum a_{p(n)} = \sum b_n$$

<u>הגדרה: (חשובה)</u>

$\sum a_n$ מתכנס בתנאי (Conditionally convergent) אם $\sum a_n$ מתכנס אבל $\sum |a_n|$ לא מתכנס.

דוגמא:

$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ מתכנס בתנאי.

<u>מסקנה:</u> אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\sum P_n$ ו N_n מתבדרים לאינסוף.

מספיק לשים לב $\sum^m a_n = \sum^m P_n - \sum^m N_n$ לפי אריתמטיקה של סדרות מתכנסות, התכנסות של שתי סדרות תגרור התכנסות של השלישית.

<u>משפט (Riemenn)</u> – אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי לכל $S \in R$ קיים סידור לאיברי הטור

$b_n = a_{p(n)}$ (p פונקציית פרמוטציה) כך ש $S = \sum b_n$

<u>הוכחה:</u> יהיו

$$(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots)$$
$$(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots.)$$

סדרת האיברים החיוביים (או אפס) וסדרת האיבריים השליליים של **הטור** בסדרם המקורי.

<u>נשים:</u>

$$\sum P_n = \sum p_n \Rightarrow +\infty$$

(ראה הגדרה לעיל של P_n), וגם:

$$\sum -(N_n) = \sum q_n \rightarrow -\infty$$

יהי n_1 כך ש

$$p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}\le S<p_1+\ldots+p_{n_1}$$

יהי m_1 כך ש

$$p_1+\ldots+p_{m_1}+q_1+\ldots+q_{m_2}<S\le p_1+p_{m_1}+q_1+\ldots+q_{m_1-1}$$

נשים לב להגדרה:

$$A_1:=p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{m_1}$$
$$A_2:=q_1+\ldots+q_{m_1}$$

נמשיך בצורה רקורסיבית ונקבל :

$$s<A_1+\ldots+A_j\Rightarrow\left|A_1+A_2+\ldots+A_j-S\right|<$$

(עבור j אי זוגי)
(הוכחה יפה – תהיה באינטרנט)

<u>מכפלה של טורים</u>
ניזכר – מכפלה של טורים סופיים היא מכפלה קרטזית.

סידורים אפשריים:
"סידור בריבועים":

$$\left(a_0b_0,a_0b_1,a_1b_1,a_0b_2,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_0,\ldots\right)$$

"סידור 'אלכסון' (קושי):

$$\left(a_0b_0,a_0b_1,a_1b_0,a_0b_2,a_1b_1,a_2b_0,\ldots\right)$$

<u>משפט:</u> יהו $\sum b_n$, $\sum a_n$ מתכנסים **<u>בהחלט</u>** עם סכומים b וa בהתאם. נגדיר (על שם הברון קושי)

$$c_n:=\sum_{i+j=n}a_ib_j$$

נטען: $\sum c_n$ מתכנס ל $c\in R$ ומתקיים כי $c=ab$.

<u>הוכחה:</u>
נתבונן ב"סדרה הכפולה" – קרי הקבוצה

$\left\{a_ib_j\right\}0\le i,0\le j$ - קבוצת האיברים של הסדרה הכפולה

תהי : $o:N\rightarrow N\times N$ חח"ע ועל אזי $w:=N\rightarrow N\times N\rightarrow R$ תיתן סידור למכפלת הטורים.

טענה: אזי $\sum\left|w_n\right|$ מתכנס.

הוכחת הטענה:

יהי $\sum^m\left|w_n\right|$ סכום חלקי. נתבונן ב N שהוא $N:=\max\left\{i,j\right\}$ אינדקססים שמופיעים באיברי המכפלות ב $w_1,\ldots,w_m$.

$$\sum^m\left|w_n\right|\le\left(\sum^N\left|a_i\right|\right)\left(\sum^N\left|b_j\right|\right)\le a\cdot b$$

מכאן ההתכנסות בהחלט.

לפי חוק החילוף, הטור $\sum w_n$ מתכנס לסכום שאינו תלוי בסדר של האיברים.לכן, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס לאותו סכום.

נתבונן ב

$$s_n = a_1 + ... + a_n$$
$$t_n = b_1 + ... + b_n$$

אזי $s_n \cdot t_n \to ab$ - מספיק לשים לב ש

$s_n t_n =$ סכום חלקי שמתאים בסידור הריבועים לסכום חלקי מסדר n^2

<u>שיעור 26 – 27.12.2005</u>

סדרה כפולה (תזכורת:)

$$x : N \times N \to R$$
$$(i, j) \to x(i, j) = x_{ij}$$

לשים לב – לא מדובר במכפלה .

$$x : N \to R$$
$$n \to x(n) = x_n$$
$$x : (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$$

$$x : (x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \\ x_{21} & x_{22} & & \\ & & & \\ & & & x_{ij} \end{pmatrix}$$

סדרה (y_n) תקרא 'סידור' של הסדרה הכפולה (x_{ij}) אם קיימת $\sigma : N \to N \times N$ חד-חד ערכית ועל כך ש:

$$n \to \sigma(n) = (i_n, j_n) \to x_{i_n j_n}$$

ואז:

$$y_n = x\sigma(n) = x_{\sigma(n)} = x_{i_n j_n}$$

דוגמא של סדרה כפולה:

בהינתן $\sum a_n, \sum b_n$ טורים נגדיר סדרה כפולה $x_{ij} = a_i b_j$, וניתן לסמנו כ (x_{ij})

<u>משפט:</u> יהי $\sum a_n, \sum b_n$ שני טורים. נבנה כמו קודם את הסדרה הכפולה $x_{ij} := a_i b_j$. נניח שקיים סידור (y_n) של הסדרה הכפולה כך שהטור $\sum y_n$ **מתכנס בהחלט,** וסכום הטור הינו S. אזי לכל סידור (z_n) של אותה סדרה, הטור $\sum z_n$ מתכנס בהחלט ולאותו סכום.

יתר על כן, אם $\sum a_n, \sum b_n$ **מתכנסים בהחלט** וסכומם A, B בהתאמה, אזי נקבל ש

$$\left(off\_the\_record : \sum x_{ij} = \sum a_i b_j = A \cdot B \right)$$

לכל (y_n) סידור של הסדרה הכפולה $(x_{ij} = a_i b_j)$ מתקיים $\sum y_n = A \cdot B$ ו $\sum y_n$ מתכנס בהחלט.

'"תלמידה (רצינית?): מה אתה מוכיח עכשיו? צביק: 'מה שכתוב על הלוח'"

<u>הוכחה:</u>

נראה קודם כל ש $\sum|a_n|<\infty,\sum|b_n|<\infty,\Rightarrow \sum|y_n|<\infty$. נתבונן בסכום חלקי

$M:=\max\{i_n,j_n\}$

$$\sum^m|y_n|=|y_1|,...,|y_m|\le(|a_1|+|a_2|+...+|a_M|)(|b_1|+...||b_M|)\le\left(\sum|a_n|\right)\left(\sum|b_n|\right)$$

מכאן - $\sum y_n$ מתכנס בהחלט.

נמשיך:

$a_1b_1 \quad a_2b_1 \quad a_3b_1$
$a_1b_2 \quad a_2b_2 \quad a_3b_2$
$a_1b_3 \quad a_2b_3 \quad a_3b_3$
a_3b_4

נתבונן בסידור 'לפי ריבועים':

$(a_1b_1,a_2b_2,a_2b_2,a_2b_1,...)$

$a_1b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_1b_3+....+=\sum d_n$

(לפי חילוץ)

$d_n:=(a_1b_1),(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1),(a_1b_3+....+a_3b_1)$

$\sum d_n=(a_1+a_2+....+a_n)(b_1+....+b_n)=AB$

מה ראינו – יש סידור שסכומו הוא AB , ולכן זה יהיה נכון לכל סידור (לפי חוק הצירוף, לאותו סכום יתכנס כל סידור $\sum z_n$ של הסדרה הכפולה).

<u>מסקנה:</u> (משפט $(Cauchy)$ - אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ ו $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתכנסים בהחלט עם סכומים A,B בהתאם, אזי $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=A\cdot B$ כאשר $c_n=\sum_{n=i+j}a_ib_j$.

נתבונן בסידור $Cauchy$:

$(a_0b_0,a_0b_1,a_1b_0,a_0b_2,a_1b_1,a_2b_0,....)$

$AB=c_0:=(a_0b_0)+c_1:=(a_0b_1+a_1b_0)+....=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$

נתקנח בדוגמא:

$$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

$$E(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$$

נטען:

$$\underline{E(x+y)=E(x)+E(y)}$$

לפי מכפלת הטורים בנוסח קושי, נקבל את הטענה.
מדוע ולמה?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{n!}\right)^n$$

$$\frac{(x+y)^n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-1}=\frac{1}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\,j!}x^i y^j=\sum_{i+j=n}\frac{x^i y^j}{i!\,j!}$$

$$j:=n-i$$

לפי נוסחת Cauchy:

$$c_n=\sum_{i+j=n}a_i b_j=\sum_{i+j=n}\frac{x^i y^j}{i!\,j!}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}\frac{x^i y^j}{i!\,j!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y^n)}{n!}=E(x+y)$$

מסקנה:

$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (ראינו עבור $x\geq 0$ בעבר).

$e^x=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ לכל $x\in R$. אם $x<0$ אז

$$1=e^x\cdot e^{-x}=e^x\cdot E(-x)$$

$$E(x)\cdot E(-x)=E(0)=1$$

$$\Rightarrow$$

$$E(x)=e^x,\forall x\in R$$

פונקציות ממשיות

קצת הגדרות:

$$f : A \to B$$

$$dom(f) = A$$

$$codom(f) = B$$

כמו בליניארית, גם כאן יש לנו:

$$imF = \{b \in codom(f) : \exists a \in dom(f), f(a) = b\}$$

$b = f(a)$ - אומרים שb התמונה (תחת f) של a.

דרך מאוד סימפטית, לחשוב על פונקציה כ: (פסאודו קוד)

```
Object func(Object a)
{
        assert (a.exists(domF));
        return (codom(f)[a]);
};
```

פ' מספריות ממשיות:

$dom(f), codom(f) \subseteq R$ - מודגם איך לצייר גרף של פונקציה.

$$g(f)\{(x,y) \in R^2 : x \in dom(f), y \in codom(f), y = f(x)\}$$

דוגמא:

סדרות הינן דוגמא של פ' ממשיות:

$$f : N \to R$$

$$n \to f(n) = f_n$$

שיעור 26 – 29.12.2005

המשך פונקציות ממשיות:

$$A \subseteq R$$
$$f : A \to R$$

$$f\left(x\right) = y$$

x משתנה בלתי תלוי. y – משתנה תלוי.

(עוד כמה) **דוגמאות:**

$$c \in R$$
$$f : R \to R, f\left(x\right) \equiv c$$
$$domf = R$$
$$imf = \left\{c\right\}$$

(הפונקציה הקבועה)

$$n \in N$$
$$P_n : R \to R, P_n\left(x\right) = x^n$$

$$n \in N$$
$$r_n\left(x\right) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

(3)

$$0 < a \in R, a \neq 1$$
$$\exp_a : R \to R$$
$$x \to \exp_a\left(x\right) = a^x$$

(4)

$$sgm : R \to R$$
$$sgm\left(x\right) = \begin{Bmatrix} \dfrac{|x|}{x} x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{Bmatrix}$$

(5)

$$y = f\left(x\right) = \lfloor x \rfloor$$

(6)

$$D : R \to R$$
$$D\left(x\right) = \begin{Bmatrix} 1, x \in Q \\ 0, x \notin Q \end{Bmatrix}$$

מושג הרציפות:

הגדרה:

קבוצה $U \subseteq R$ תיקרא <u>סביבה</u> של $a \in R$ אם קיים קטע פתוח I עם התכונה $a \in I \subseteq U$.

הגדרה: תהי $f:A\to R$ מוגדרת בסביבה של $a\in A$. נאמר ש f רציפה בa. אם

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon\right)$$

(נשים לב - ה δ תלויה ב ε, וגם בa) ולכן לעיתים כותבים $\delta=\delta(\varepsilon)=\delta(\varepsilon,a)$).

דוגמאות:

(0) אם $f(x)\equiv c$ אז f רציפה בכל $a\in domf$.

(1) $s(x)=x^2$ - נטען: s רציפה ב $a=0$. מה אמרנו בעצם?

(עלינו להסיק כי $s(x)-s(0)=|x^2-0|<\varepsilon$) ופורמלית - בהינתן $\varepsilon>0$ יהי

$\delta=\sqrt{\varepsilon}$

$|x-0|<\delta\Rightarrow$

$|x|<\delta=\varepsilon\Rightarrow$

$|x|^2<\varepsilon$

שיעור 27 – 3.1.2006

תזכורת:

תהי $f:A\to R$ מוגדרת בסביבה של $a\in A$. נאמר ש f רציפה בa. אם

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon\right)$$

עוד דוגמאות:

$s(x)=x^2$ רציפה לכל $a\in R$. בהנתן $\varepsilon>0$ יהי $0<\delta<\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$. אזי, אם $|x-a|<\delta$, אזי:

$$|x-a|<\delta\Rightarrow|x-a|<1\Rightarrow|x+a|=|x-a+2a|\le|x-a|+2|a|<1+2|a|$$

$$\left|x^2-a^2\right|=|x-a||x+a|\Rightarrow(1+2|a|)|x-a|<\varepsilon$$

עוד דוגמא (בנאלית, אבל דוגמא):

$Id(x)=x$ רציפה לכל $a\in R$. לכל $\varepsilon>0$ ניתן לבחור $\delta=\varepsilon$.

נתנו הגדרה. עכשיו צריך לתת

__אנטי הגדרה:__

f אינה רציפה ב $a\in R$. קיים

$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)\left(|x-a|<\delta\wedge|f(x)-f(a)|\ge\varepsilon\right)$.

דוגמא: $g(x)=\begin{Bmatrix}0;x\le0\\1;<x\end{Bmatrix}$. g אינה רציפה ב $a=0$.

יהי $\varepsilon=1$ לכל $0<\delta$, $0<x<\delta$ $\Leftarrow$ $g(x)=1$, עבורם

$g(x)-g(0)=1-0\ge\varepsilon=1$.

הערה : פונקציה רציפה **__כל עוד לא הוכח אחרת__**. (הוא זכאי!)

__הערה:__ (יש באתר את מה שאני לא כותב עכשיו)

__דוגמא לגבול של פונקציה (המשך אחרי מה שיש באתר):__

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},D_f=R-\{1\}$$

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=2$$

$$|x-1|<\delta=\varepsilon\Rightarrow$$

$$|f(x)-2|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|(x+1)-2|=|x-1|<\varepsilon$$

(משפט)/ (הגדרה) : תהי f מוגדרת בסביבה של a. אזי f רציפה בa אמ"מ $f\left(a\right)=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$.

במילים אחרות: 1. $a\in D_f$ .2 $\lim_{x\to a}f\left(x\right)$ קיים .3. השיוויון מתקיים.

הגדרה: (גבול של פונקציה בנקודה בשפה של סדרות). תהי f מוגדרת בסביבה מנוקדת של a. $l\in R$ יקרא גבול של f בa אמ"מ לכל סדרה $\left(x_n\right)$ עם התכונות:

1. $x_n\in D_f$
2. $x_n\neq a$
3. $x_n\to a$

מתקיים $f\left(x_n\right)\to l$.

" f מעבירה סדרות שואפות לa לסדרות שואפות לl"

משפט: שתי ההגדרות שקולות.

הוכחה: נניח ש $l\in R$ מקיים את ההגדרה (לפי $Cauchy$) בשפת $\delta-\varepsilon$. תהי $\left(x_n\right)$ סדרה עם התכונות של (הגדרת $Heine$) ההגדרה לפי סדרות.

בהינתן $\varepsilon>0$ יהי $\delta>0$ אשר מקיים $\left(\forall x\right)\left(0<\left|x-a\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon\right)$

בהסתמך על אותו δ :

$$\left(\exists N\in N\right)\left(\forall n\in N\right)\left(N<n\Rightarrow\left|x_n-a\right|<\delta\right)$$

(האי שיוויון עם δ מתוקף 3, השמאלי מתוקף 1)

על כן,

$$N<n\Rightarrow\left(0<\left|x_n-a\right|<\delta\right)\Rightarrow\left|f\left(x_n\right)-l\right|<\varepsilon$$

לכן $\left(f\left(x_n\right)\right)$ שואפת לl.

בכיוון השני:

נניח בדרך השלילה ש $l\in R$

$$\left(\exists\varepsilon>0\right)\left(\forall\delta>0\right)\left(\exists x\right)\left(0<\left|x-a\right|<\delta\wedge\left|f\left(x\right)-l\right|\geq\varepsilon\right)$$

יהי

$$0<\left|x_n-a\right|<\frac{1}{n}=\delta n\wedge\left|f\left(x_n\right)-l\right|\geq\varepsilon$$

$\left(x_n\right)$ מקיימת את שלושת התנאים של הגדרה לפי סדרות.

שיעור 28, 5.1.2006

משפט : קריטריון $Cauchy$:

קיים $l \in R$ עם $\lim_{a} f(x) = l$ אמ"מ :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y)\left(0 < |x-a| < \delta \wedge 0 < |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right)$$

הוכחה: (בדרך הנוסטלגיה)

נניח ש $\lim f(x) = l \in R$ אזי בהינתן $0 < \varepsilon$ קיים $\delta > 0$ עם :

$$(\forall x)\left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

עבור אותו $\varepsilon > 0$ ולאותו $0 < \delta$

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |y-a| < \delta \Rightarrow |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - l| + |l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

בכיוון השני: נניח שהקריטריון מתקיים . נבנה סדרה עם התכונות הבאות:

$x_n \in D_f$

$x_n \ne a$

$x_n \to a$

נסתכל בסדרה $(f(x_n))$. **טענה:** $(f(x_n))$ היא סדרת $Cauchy$. יהי $\varepsilon > 0$ יהי $0 < \delta$ מתאים ל ε לפי הקריטריון. בהנתן אותו $0 < \delta$, היות ש $x_n \to a$ קיים $N \in N$ כך ש:

$$(\forall n)\left(N < n \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta\right)$$

אם $N < n, m$ בו"ז מתרחש

$$\begin{Bmatrix} 0 < |x_n - a| < \delta \\ 0 < |x_m - a| < \delta \end{Bmatrix} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m) < \varepsilon|$$

(הערה (פדאנטית) – נשים לב ש x_n, x_m שייכים ל D_f לפי (1))

$(f(x_n))$ אזי היא מתכנסת, ויהי $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = l$.

טענה: $\lim_{x\to a} f(x) = l$

הוכחה: נראה זאת באמצעות δ, ε. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $0 < \delta$ המתאים לפי הקריטריון, $f(x_n) \to l$ ועל כן :

$$(\exists N_1 \in N)(\forall n)\left(N_1 < n \Rightarrow |f(x_n) - l| < \frac{\varepsilon}{2}\right)(*)$$

$\left(\exists N_2 \in N\right)\left(\forall n\right)\left(N_2 < n \Rightarrow 0 < \left|x_n - a\right| < \delta\right)(**)$

יהי $N = \max\left\{N_1, N_2\right\}$. נקבע n עם התכונה $N < n$.

יהי $x \in D_f$ עם התכונה $0 < \left|x - a\right| < \delta$.

$\left|f(x) - l\right| \leq_{TI} \left|f(x) - f(x_n)\right| + \left|f(x_n) - l\right|(***)$

$N_1 < n$ ועל כן $\left|f(x_n) - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*) , וגם $N_2 < n \Rightarrow 0 < \left|x_n - a\right| < \delta$ (**) ולכן

$\left|f(x) - f(x_n)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ לפי הקריטריון, מכאן נקבל ש

$\left|f(x) - l\right| \leq_{TI} \left|f(x) - f(x_n)\right| + \left|f(x_n) - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

שיעור 29, 8.1.2006

משפט: אם $0 \neq l = \lim_{x\to a} f(x)$ אז לכל $q < l$

$$(\exists\delta>0)(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta \Rightarrow q<f(x)\right)$$

(נכון גם בכיוון השני, עבור $l < r$

הוכחה (טריביאלית):

יהי $q < l$ - נתבונן ב $\varepsilon = l - q$. לכן קיים $0 < \delta$ עם התכונה

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$$

$$q<f(x)$$

פעולות עם פונקציות:

$$f\square g=f(x)\square g(x)$$

$$\square=\cdot/-+$$

אריתמטיקה של גבולות:

נניח שקיימים $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to a} g(x)$ אזי:

$$\lim_{x\to a}\left((f\square g)(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\square\lim_{x\to a} g(x), \square=+,-,\cdot$$

אם $g(x)\neq 0$ לכל x, וגם $0\neq\lim_{x\to a} g(x)$, אז זה עובד גם בחילוק:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

גבולות וסדר:

משפט (הסנדביץ'): אם

$$(\exists\delta>0)(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)\le g(x)\le h(x)\right)$$

וקיים הגבול

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=l$$

אזי:

$$\lim_{x\to a} g(x)=l$$

הרכבת פונקציות:

$$f\cdot g:=f\left(g(x)\right)$$

(כרגע מוסבר מעולם הדימויים של צביק בעזרת ריבת חלב, למה $g\cdot f\neq f\cdot g$)

משפט (כלל ההצבה):

1. $\lim_{x\to a} g(x)=b$
2. $(\exists\delta>0)(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta \Rightarrow g(x)\neq b\right)$

3. $\lim_{x\to b} f(x)=l$

אזי $\lim_{x\to a} f(g(x))=l$.

<u>הוכחה:</u>

צ"ל

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|f(g(x))\right|<\varepsilon\right)$$

בהינתן $\varepsilon>0$, לפי (3)

$$(\exists\gamma>0)(\forall y)\left(0<|y-b|<\gamma\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

לפי (2) יהי $0<\delta_1$ עם

$$(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow g(x)\neq b\right)(**)$$

לפי (1) עבור $\gamma>0$ קיים $0<\delta_2$ עם

$$(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta_2\Rightarrow|g(x)-b|<\gamma\right)(*)$$

יהי $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, ואז:

$$(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow 0<_{**}|g(x)-b|<_{*}\gamma\right)\Rightarrow$$

$$(\forall x)\left(0<|x-a|\Rightarrow\left|f(g(x))-l\right|<\varepsilon\right)$$

<u>גבולות חד צדדיים: (one sided limits)</u>

יהי $a\in R$ ו f פונקציה עם

$$(\exists\delta>0)(\forall x)\left(0<x-a<\delta\Rightarrow x\in D_f\right)$$

במקרה זה נגיד ש f מוגדרת **בסביבה ימנית מנוקבת** של a.

<u>הגדרה:</u> (גבול מימין של פונקציה בנקודה) $l\in R$ הוא הגבול מימין של f כאשר x שואף לa מימין אמ"מ:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\left(0<x-a<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon\right)$$

סימון:

$$l=\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\lim_{x\downarrow a} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a+)$$

בצורה אנלוגית, הגדר את הכיוון ההפוך.

דוגמא:

$$f(x)=\begin{Bmatrix}0,0\geq x\\1,x>0\end{Bmatrix}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

<u>משפט:</u> $\lim_{x\to a,x>a} f(x)=l\in R$ אמ"מ:

לכל (x_n) מתקיים:

1. $x_n \in D_f$
2. $x_n > a$
3. $x_n \to a$

מתקיים : $f\left(x_n\right) \to l$.

משפט: תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a אזי

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f\left(x\right) = l = \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f\left(x\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f\left(x\right) = l \in R$$

משפט: תהי f מוגדרת בסביבה של a אזי שלושת התנאים הבאים הינם שקולים:

1. $\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right)\left(\forall x\right)\left(\left|x-a\right|<\delta \Rightarrow \left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<\varepsilon\right)$ (ההגדרה המקורית של רציפות).
2. $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = f\left(a\right)$
3. לכל $\left(x_n\right)$ עם:

   א. $x_n \in D_f$

   ב. $x_n \to a$

מתקיים $f\left(x_n\right) \to f\left(a\right)$.

הגדרה: f רציפה מימין בa אמ"מ ________________________ (להשלים).

משפט: f רציפה בa אמ"מ ___________________ (להשלים).

הגדרה: f תקרא רציפה ב $A \subset D_f$ אם f רציפה בa לכל $a \in A$.

f תקרא <u>רציפה</u> אם f רציפה ב D_f .

דוגמונת: $f\left(x\right) = xD\left(x\right)$ ($D\left(x\right)$ היא פונקציית דיריכלה)

f רציפה ב $a=0$ ואינה רציפה ב $a\neq 0$.

רציפות בקטע

משפט (האפסים של ויירסטרס): תהי f רציפה בקטע I. $a,b \in I$.

$f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$, אזי קיים $c\in I$ בין a לבין b עם התכונה $f\left(c\right)=0$. (כי התחלף הסימן...).

הוכחה: בה"כ נניח ש $a<b$ ו $f\left(a\right)<0<f\left(b\right)$.

נפעל בצורה רקורסיבית. יהו $a_0=a, b_0=b$. נסתכל ב $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$ אם $0=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

אם $0<f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$ נגדיר $\begin{array}{l} a_1 = a_0 \\ b_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2} \end{array}$

אם $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$ נגדיר $a_1=\frac{a_0+b_0}{2}, b_1=b_0$.

נניח שהגדרנו $a_0\le a_1\le\ldots\le a_n\le b_n\le\ldots.\le b_0$

נסתכל ב $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$. אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ - סיימנו.

אם $0<f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ אזי $a_{n+1}:=a_n; b_{n+1}:=\frac{a_n+b_n}{2}$

אם $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0$ אזי $a_{n+1}:=\frac{a_n+b_n}{2}; b_{n+1}=b_n$.

אם התהליך לא נפסק, נעמוד בתנאי הלמה של CANTOR.

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$$

יהי $c\in R$ עם $a_n\le c\le b_n$ לכל n.

$$a_n\to c\leftarrow b_n$$
$$f(a_n)\to f(c)\leftarrow f(b_n)$$
$$f(a_n)<0\Rightarrow f(c)\le 0$$
$$0<f(b_n)\Rightarrow 0\le f(c)$$

מכאן המסקנה.

שיעור 30 – 10.1.2006

רציפות בקטע

משפט:

תהי f רציפה בקטע I. $a,b\in I$, $a<b$ ו $f(a)\cdot f(b)<0$, אזי קיים $a<c<b$ עם $f(c)=0$.

הוכחה: (אחרת). בה"כ $f(a)<0<f(b)$.

$a,b\in I$, ומכיוון ש I קטע, אזי $[a,b]\subset I$ (הקטע הסגור a,b מוכל בI). נתבונן ב $S\subset[a,b]$.

$S=\{x\in[a,b]:f(t)<0,a\le t\le x\}$ (בעברית – כל הקטעים **משמאל** לנקודה בה הפונקציה היא 0).

נשים לב: $a\in S\neq\emptyset$. $S\subset[a,b]$, ועל כן חסומה.

על כן, לפי שלמות, יהי $c=\sup S$. נראה ש $a<c<b$ ו $f(c)=0$.

f רציפה (מימין) בa ועל כן

$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=f(a)<0\Rightarrow(\exists\delta>0)(\forall x)\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<0\big)$$

אם ניקח $a<x<a+\delta$, $x\in S$. מכיוון שc הסופרמום, אזי $a<x\le c$.

טענה:

$c<b$. אחרת, לפי טריטוכומיה $c=b$ (לא יכול להיות גדול, כי c הסופרמום בקבוצה החסומה על ידי a,b).

f רציפה (משמאל) בb. ועל כן:

$$0<f(b)=\lim_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)\Rightarrow(\exists\delta>0)(\forall x)\big(0<|x-b|<\delta\Rightarrow 0<f(x)\big)$$

אם ניקח $x-\delta<x<b$ אזי $x\notin S$, כי עבור $b-\delta<t<x$, $0<f(t)$, ומכאן $c<b$.

טענה: $f(c)=0$, אחרת, נניח $f(c)<0$. f רציפה בc, ועל כן

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c)<0\Rightarrow(\exists\delta>0)\big(0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)<0\big)$$

יהי $c<e<c+\delta$ אזי f שלילית הן ב$[a,c]$ והן ב$[c,e]$ לכן f שלילית ב$[a,e]$ ואז כל הקטע $[a,e]\subset S$ (בסתירה לעובדה ש $e\le c=\sup S$).

בצורה אנלוגית – **לעשות לכיוון השני**.(שוללים את האפשרות ש $f(c)>0$.

מ.ש.ל.

מסקנה:

משפט IVT - ערך הביניים

תהי f רציפה בקטע I. אזי נתבונן ב $J:=f(I)$ אזי J הינו קטע.

במילים אחרות – לכל $c,d\in J$ ולכל y בין c לבין d קיים $x\in I$ עם $f(x)=y$.

הוכחה (ב'ציק צאק'/בשיטת האסיסטנט):

יהו $c,d\in J$ (מה זה אומר? קיימים $a,b\in I$ עם $c=f(a),d=f(b)$). בה"כ $c<d$.

בה"כ ניתן להניח $a<b$ (אחרת נעבוד עם $-f$).

יהי $c<y<d$. תהי $g:=f-y$. כלומר $g\left(t\right)=f\left(t\right)-y$. g רציפה בI (אריתמטיקה של פונקציות רציפות), ומקיימת

$$g\left(a\right)=f\left(a\right)-y<0$$
$$g\left(b\right)=f\left(b\right)-y>0$$

לפי משפט ויירשטארס קיים $x\in I$, $a<x<b$ עם

$$f\left(x\right)-y=g\left(x\right)=0\Rightarrow$$
$$f\left(x\right)=y$$

<u>משפט (1):</u> תהי f רציפה בקטע החסום וסגור $\left[a,b\right]$, אזי f חסומה בקטע $\left[a,b\right]$.

<u>משפט (2):</u> תהי f רציפה בקטע $\left[a,b\right]$ אזי f מקבלת ב$\left[a,b\right]$ הן ערך מקסימלי והן ערך מינימלי.

<u>הגדרה פורמלית:</u> בהינתן $f:D_f\to R$ נאמר ש f חסומה ב $A\subset D_f$ אם $f\left(A\right)$ קבוצה חסומה.

במילים אחרות: קיימים $k,K\in R$ עם $k\le f\left(a\right)\le K$ לכל $a\in A$.

<u>הוכחה (משפט 1):</u> נתבונן ב $S\subset\left[a,b\right]$ מוגדרת ע"י

(f $\left[a,x\right]$ חסומה ב***)

$$S=\left\{x\in\left[a,b\right]:***\right\}$$

$a\in S\neq\varnothing$. יתר על כן, S חסומה. יהי $c=\sup S$.

<u>טענה:</u> $c=b$. יתר על כן, $c=b\in S$.

<u>למה:</u> אם קיים $\lim_{x\to c}f\left(x\right)=l$ אזי

$$\left(\exists\delta>0\right)\left(0<\left|x-c\right|<\delta\Rightarrow f\ \ blocked\right)$$

<u>הוכחת למה:</u> יהי $\varepsilon=1$.

$$\left(\exists\delta>0\right)\left(\forall x\right)\left(0<\left|x-c\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-l\right|<1\right)\Rightarrow$$
$$k=l-1<f\left(x\right)<l+1=K$$

<u>מסקנת הלמה:</u> אם f רציפה בc אז f חסומה בסביבה של c.

<u>בחזרה לטענה:</u> נניח בשלילה ש $c<b$. לפי הלמה, יהי $\delta>0$ כך ש f חסומה בקטע $\left(c-\delta,c+\delta\right)$. בה"כ ניתן להניח, ע"י הקטנת δ, $a<c-\delta<c<c+\delta<b$.

יהו $c-\delta<d<c<e<c+\delta$. f חסומה ב$\left[a,d\right]$ (כי $d\in S$). f חסומה ב$\left[c,e\right]$ (כי $\left[c,e\right]\subset\left(c-\delta,c+\delta\right)$). לכן, היינו מקבלים f חסומה ב$\left[a,e\right]\Leftarrow e\le c$ בסתירה.

פירוט לטיעון: $d\in S$ - $d<c\Rightarrow\exists s\in S\wedge d<s\le c$ גורר ש f חסומה ב$\left[a,s\right]$, ומכאן f חסומה ב$\left[a,d\right]$, ולכן $d\in S$. (יש להודות לאסיסטנטית על פירוט זה)

נוכיח כי $b\in S$, אחרת, f איננה חסומה ב$\left[a,b\right]$. f רציפה בb. לכן, לפי המסקנה של הלמה, f חסומה בסביבה שמאלית של b. כלומר, $\left(\exists\delta>0\right)$ כך ש f חסומה ב$\left(b-\delta,b\right]$.

אבל, $b=\sup S$. יהי $s\in S$, $b-\delta<s\le b$. f חסומה ב$\left[a,s\right]$ וב$\left[s,b\right]$ ואז f חסומה ב$\left[e,b\right]$.

שיעור 31, 12.1.2006

משפט: תהי f רציפה ב$[a,b]$ אזי קיימים $x_{\min},x_{\max}\in[a,b]$ עם

$f(x_{\min})\le f(x)\le f(x_{\max})$ לכל $a\le x\le b$ ("f מממשת הן מקסימום והן מינימום")

הוכחה: לפי משפט החסימות, f חסומה ב$[a,b]$ - במילים אחרות - $f([a,b])$ חסומה. יהי

$$M:=\sup\{f(x)\}(a\le x\le b)$$

נניח בדרך השלילה שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)<M$, נתבונן בפונקציה

$g(x):=\frac{1}{M-f(x)}$ בקטע $[a,b]$ לפי אריתמטיקה של פו' רציפות, g רציפה ב$[a,b]$. היות

ו$M:=\sup\{f(x)\}a\le x\le b$, לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in[a,b]$ כך ש $M-\varepsilon<f(x)\le M$,

$$0<M-f(x)<\varepsilon\Rightarrow$$

אבל מכך $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}>\frac{1}{\varepsilon}$, אבל לכן g איננה חסומה מלמעלה ב$[a,b]$, וזוהי סתירה

למשפט החסימות.

בצורה דומה מממשים את $m:=\inf\{f(x)\}(0\le x\le b)$ (התלמיד הרציני ישלים בבית)

פונקציות מונוטוניות

הגדרה: יהו f ו $A\subset D_f$. f תקרא עולה בA אם

$$\forall x,y\in A,x<y\Rightarrow f(x)\le f(y)$$

עולה ממש – אי שיוויון חזק

יורדת (ממש) – הפוך.

f תקרא מונוטונית בA אם היא מקיימת אחת מ4 האופציות לעיל.

משפט:

(מופיע בעמוד 16 ברישומי צביק)

תהי f מונוטונית עולה ב(a,b). לכל $x\in(a,b)$ קיימים $f(x^-),f(x^+)$ ומתקיים

$$\sup\{f(t),a<t<x\}=f(x^-)\le f(x)\le f(x^+)=\inf\{f(t)x<t<b\}$$

הוכחה:

יהי $x\in(a,b)$ $\underline{\{f(t),a<t<x\}\neq\varnothing}$ וחסומה מלמעלה (למשל ע"י $f(x)$). יהי A

הסופרמום שלה.

טענה: $A=f(x^-)$ צ"ל

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(0<x-t<\delta\Rightarrow|f(t)-A|<\varepsilon\right)$$

$$off\ The\ \mathrm{Re}cord:$$

$$x-\delta<t<x\Leftrightarrow 0<x-t<\delta$$

יהי $0<\varepsilon$. נתבונן ב$A-\varepsilon$. אזי קיים $a<s<x$.

$$A-\varepsilon<f(b)\le A$$

יהי $0 < \delta = x - s$.

$$0 < x - t < \delta \Rightarrow s < t < x \Rightarrow A - \varepsilon < f(s) \le f(t) \le A < A + \varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(t) - A| < \varepsilon$$

נשים לב ש $f(x^-) = A \le f(x)$. בצורה דומה מראים את האי שיוויונים האחרים.

<u>מסקנה:</u> באותם התנאים (באמצע עמ' 17, רישומי צביק)

$$a < x < y < b$$

$$f(x^-) \le f(x) \le f(x^+) \le_* f(y^-) \le f(y) \le f(y^+)$$

למה * נכון?

אם $x < y$, יהי $x < t < y$. מתקיים

$$f(x^+) \le f(t) \le f(y^-)$$

(ענייני סופרמום ואינפימום) .

שיעור 32, 15.1.2006

תוספת למשפט הקודם (שבוע שעבר): (הוכחה כתרגיל):
אם f חסומה מלמטה אז קיים $f(a+)$, ומתקיים $f(a+)=\inf(t), a<t$. יתר על כן, אם f מוגדרת בa, אזי $f(a)\le f(a+)$. **בצורה אנלוגית לצד הימני**. (אם f חסומה מלמעלה)

משפט: (ממש חשוב): יהי $I\subset R$ קטע ו $f:I\to R$ **מונוטונית**. אזי, f רציפה ב I אמ"מ $J=f(I)$ קטע.
הוכחה: f רציפה $\Leftarrow$ J קטע – ראינו בעבר (תכונת IVT - תכונת ערך הביניים).
בכיוון השני: בה"כ, נניח ש f עולה ב I. תהי $x\in I$ נקודה **פנימית**. אילו f אינה רציפה ב x, אזי לפי המשפט הקודם,

$$f(x-)<f(x+)$$

יהי z המקיים $f(x-)<z<f(x+)$. לפי המשפט הקודם
$\sup\{f(t),a<t<x\}=f(x-)$ קיים $t<x$ עם $f(t)\le f(x-)$. בצורה אנלוגית,
$f(x+)=\inf\{f(s),x<s<b\}$, קיים $x<s$ עם $f(x+)\le f(s)$. לכן,
$f(t)\le f(x-)<z<f(x+)\le f(s)$ ועל כן J קטע.

אזי, קיים $y\in I$ עם $z=f(y)$. טענה: $y=x$. אחרת, אם $x<y$ אזי:

$$z<f(x+)\le f(y)$$

אם $y<x$ אז:

$$f(y)\le f(y+)\le f(x-)<z$$

ועל כן $x=y$.

תרגיל: להראות את נכונות המשפט עבור נקודות קצה (אם ישנן).

נקודות **אי-רציפות:**
הגדרה: אם f אינה רציפה ב $a\in D_f$ נאמר שa נקודת אי רציפות של f.
a תקרא נק' אי רציפות **מסוג ראשון** אם קיימים $f(a+)$ ו $f(a-)$.
במקרה מיוחד ש $f(a-)=f(a+)$ נאמר שהאי רציפות בa הינה **סליקה**.
אם אחד מבין הגבולות הצדדיים אינו קיים האי רציפות תקרא **מסוג שני.**
המחשות:

$$f(x)=\left\{\begin{matrix}\frac{x^2-1}{x-1}x\neq 1\\ 1,x=1\end{matrix}\right\}$$

(ב1 הנקודה היא 1, במקום '2' שהיינו מצפים). כאן אי הרציפות היא **מסוג 'סליקה'** ב $a=1$

$$\operatorname{sgn}(x)$$

(במינוס היא -1, ב0 היא 0, בחיוביים היא 1. כאן אי הרציפות היא **מסוג ראשון** ב $a=0$).
פונקציית דיריכלה $D(x)$ - אי רציפה בכל נקודה עם אי רציפות **מסוג שני**.

<u>הערה:</u> אם f מונוטונית ב I אזי ל f **נקודות אי רציפות מסוג ראשון.**

<u>הערה:</u> קבוצת נקודות האי-רציפות של f מונוטונית בקטע הינה **<u>בת מניה</u>**.

אם $x\in I$ נקודת אי-רציפות של f נבחר $q(x)\in Q$ עם התכונה

$f(x-)<q(x)<f(x+)$. נשים לב:

$$x<y\Rightarrow f(x-)<q(x)<f(x+)\le f(y-)<q(y)<f(y+)$$

אם y גם נקודת אי רציפות, אז $q(x)<q(y)$. לכן מספר נקודות האי –רציפות של f **לכל היותר** כגודל הקבוצה הq שהינה בת מנייה.

<u>גבולות אינסופיים וגבולות באינסוף</u>

(מופיע באתר).

לדוגמא:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

נגיד:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty,\lim_{\substack{x\to0\\0<x}}=\infty$$

<u>הגדרה:</u>

נאמר ש $l\in R$ הינו הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל ∞ אם

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists X\in R)(\forall x)\left(X<x\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon\right)$$

במקרה זה נסמן $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$.

ניתן להגדיר גם במינוס אינסוף באופן אנלוגי.

<u>משפט:</u> $\lim_{x\to\infty}f(x)=l\in R$ אמ"מ **לכל** (x_n) המקיימת:

1. $x_n\in D_f$.
2. $x_n\to\infty$.

מקיים : $f(x_n)\to l$.

ניתן להגדיר גם במינוס אינסוף באופן אנלוגי.

<u>הגדרה:</u> נאמר ש ∞ הוא גבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל a אמ"מ:

$$(\forall Y\in R)(\exists\delta>0)(\forall x)\left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow y<f(x)\right)$$

בצורה דומה ניתן להגדיר ל $-\infty$.

נאמר ש ∞ הוא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל ∞ אמ"מ:

$$(\forall Y)(\exists X\in R)(\forall x)\left(X<x\Rightarrow Y<f(x)\right)$$

<u>פונקציות הפוכות</u>

זוג של פונקציות f ו g תקראנה זוג של פונקציות הפוכות אמ"מ :

1. $I_f=D_g$
2. $D_f=I_g$

3. לכל $x \in D_f$, $y \in D_f$ מתקיים $g\left(f\left(x\right)\right)=x$ וההפך: $f\left(g\left(y\right)\right)=y$.

<u>הגדרה:</u> פונקציה תקרא **<u>הפיכה</u>** אם קיימת g כך ש f,g זוג של פ' הפוכות.
<u>משפט:</u> תהי f רציפה **ועולה ממש** (או יורדת ממש) בקטע I**.** אזי, קיימת פו' g כך ש g ההפוכה של f , עם:
1. $D_g=I_f=f\left(I\right)=J$
2. g ההפוכה של f .
3. g עולה ממש (יורדת ממש) בJ.
4. g רציפה בJ.

אין צורך להוכיח – הכל ברור מהנתונים.

<u>הפ' האלמנטריות</u>
לכל $0<a\in R,a\neq 1$ מתקיים $\exp_a$ רציפה.

$$\exp_a\left(x\right)=a^x$$

נניח ש $1<a$.
תזכורת:

$$\sup\left\{a^4,r\in Q,r<x\right\}=a^x=\inf\left\{a^s:s\in Q,x<s\right\}$$

נראה ש $\exp_a$ רציפה לכל x. יהי $\varepsilon>0$, קיימים $r<x<s$ עם $a^s-a^r<\varepsilon$. תהי $\delta=\min\left\{s-x,x-r\right\}$, אזי לכל $t\in R$, אם $x-\delta<t<x+\delta$ מתקיים:

$$a^r<a^t<a^s\Rightarrow\left|a^t-a^x\right|<\varepsilon$$

שיעור 33, 17.1.2006

$$\exp(x) := e^x$$

(שלשום ראינו ש $\exp$ רציפה

$$\exp : R \to J$$

(בהמשך נראה כי $J = R > 0$)

תזכורת: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. לכן, עבור $x > 0$ מתקיים

$$1 + x < e^x$$

(למה? זה פשוט שני האיברים הראשונים של הטור)
ועל כן, ע"פ קריטריון השוואה

$$+\infty = \lim_{x\to\infty}(1+x) \le \lim_{x\to+\infty} e^x$$

$$e^x e^{-x} = 1 \Rightarrow$$

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

מסקנה: $I_{\exp} = J = R > 0$ (ע"פ משפט ערך הביניים)

הערה: $1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x$ לכל $n > 1$ ולכל $x > 0$.

ועל כן $\frac{e^x}{x^n} > \left(\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)}{x^n} + \frac{x}{(n+1)!} \right) \to \infty$

מה זה אומר? ש $\frac{e^x}{x^n} \to \infty$ - הריצה האקספוננציאלית יותר מהירה מכל גידול פולימוניאלי. לשים לב: n קבוע, **x** מושאף לאינסוף.

עוד משחק כוחות:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

למה זה נכון?

$$x^n e^x = x^n e^{--x} = \frac{x^n}{e^{-x}} = \frac{-(-x)^n}{e^{(-x)}} = (-1)^n \frac{(-x)^n}{e^{-x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

$\exp$ מונוטונית עולה במובן החזק, לכן קימת פ' הפוכה $\ln : R > 0 \to R$ **עולה** ורציפה.
נשים לב:

$$\ln(1)=0$$
$$\ln(e)=1$$
$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b),\forall a,b>0$$

(למה זה נכון? – הסעיף האחרון? – הוכחונת:)

$$e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\cdot e^{\ln b}=ab\Rightarrow$$
$$\ln\left(e^{\ln a+\ln b}\right)=\ln(ab)\Rightarrow$$
$$\ln a+\ln b=\ln(ab)$$

בנוסף, בצורה אנלוגית ניתן להראות כי

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0,x>0}\ln(x)=-\infty$$

<u>וגם (חשוב!):</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\0<x}}x\ln(x)=0$$

<u>בסיסים אחרים:</u>

$$\exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$$
$$\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

<u>לתלמיד המבולבל:</u> $\log_a$ ו $\exp_a$ זוג של פונקציות הפוכות.

$$P_a(x)=x^a,a\in R$$
$$P_a(x)=e^{a\ln(x)}$$

ועל כן P_a הינה רציפה ("הרכבה של רציפות") . עבור $a\neq 0$ מתקיים P_a מונוטונית במובן החזק.
(עבור a חיובי, היא עולה, עבור שלילי – יורדת)

רציפות במידה שווה

נניח ש f מוגדרת בA. מה אומר ש f רציפה ב $a \in A$?

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists \delta > 0\right)\left(\forall x \in A\right)\left(\left|x-a\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(a)\right| < \varepsilon\right)$$

נשים לב: ה δ תלויה ב ε וגם ב a.

מה אומר ש f רציפה בA?

$$\left(\forall a \in A\right)\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists \delta > 0\right)\left(\forall x \in A\right)\left(\left|x-a\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(a)\right| < \varepsilon\right)$$

הגדרה: f תקרא רציפה במידה שווה ב A אם :

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists \delta > 0\right)\left(\forall x \in A, y \in A\right)\left(\left|x-y\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right| < \varepsilon\right)$$

המחשות, דוגמאות, ואנטי דוגמאות:

כל פונקציה ליניארית (לדוגמא: $y = 2x+1$)היא רציפה במידה שווה.

פונקציית החזקה (לדוגמא: $y = x^2$) היא **לא** רציפה במידה שווה.

$y = \frac{1}{x}$ לא רציפה במידה שווה על $x < 1$. רציפה במידה שווה עבור $x \geq 1$.

הערה: אם f רציפה במ"ש (במידה שווה) בA אזי f רציפה בכל $a \in A$.

משפט: (*) f מוגדרת בA אינה רציפה במידה שווה אמ"מ:

$$\left(\exists \varepsilon > 0\right)\left(\forall \delta > 0\right)\left(\exists x \in A, \exists y \in A\right)\left(\left|x-y\right| < \delta \wedge \left|f(x)-f(y)\right| \geq \varepsilon\right)$$

(**) הגדרה בסדרות:

קיים $\varepsilon > 0$ וסדרות בA $(x_n),(y_n)$ אשר מקיימות $(x_n - y_n) \to 0$ ובו"ז

$$\left|f(x_n)-f(y_n)\right| \geq \varepsilon$$

הוכחה: שתי ההגדרות שקולות:

$(*) \Leftarrow (**)$ בהינתן $\varepsilon > 0$ עבור $\delta_n = \frac{1}{n}$ קיימים x_n ו y_n עם $\left|x_n - y_n\right| < \delta_n = \frac{1}{n}$ וגם $\left|f(x_n)-f(y_n)\right| \geq \varepsilon$. ועל כן $(x_n - y_n) \to 0$ (מסנדביץ).

כיוון שני – לתלמידה החרוצה.

המחשה:

$y = s(x) = x^2$ אינה רציפה במידה שווה בR. יהו $x_n = n, y_n = n + \frac{1}{n}$

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

אבל:

$$\left|s(x_n)-s(y_n)\right| = \left|n^2 - \left(n+\frac{1}{n}\right)^2\right| = \left|-2-\frac{1}{n^2}\right| = \left|2+\frac{1}{n^2}\right| \geq 2 = \varepsilon$$

משפט: אם f רציפה ב$[a,b]$ אזי f רציפה בו במ"ש.

הוכחה: בדרך השלילה, נניח ש f אינה רציפה במידה שווה ב$[a,b]$, אזי קיים $\varepsilon>0$ ו (x_n) ו (y_n) עם $x_n-y_n\to 0$ וגם $\varepsilon \ge |f(x_n)-f(y_n)|$.

x_n חסומה, לכן יש לה תת-סדרה מתכנסת. $(x_{n_k}) \lhd (x_n)$, ועל כן $x_{n_k}\to x$, $x\in[a,b]$.

טענה: תהי $(y_{n_k}) \lhd (y_n)$(על אותו n_k). אזי $(y_{n_k})\to x$. **זהירות:** אין סיבה להניח שגם y_{n_k} מתכנסת). מה עושים? לפי טיעון ציבורי, תהי $(y_{n_{k_l}}) \lhd (y_{n_k})$.

$(x_{n_{k_l}}) \lhd (x_{n_k})$ מתכנסת ולאותו x, נתון כי $(x_n-y_n)\to 0$ ועל כן $(x_{n_{k_l}}-y_{n_{k_l}})\to 0$ ועל כן ע"פ אריתמטיקה של **סדרות מתכנסות** מתקיים :

$$\lim_{l\to\infty}\left(x_{n_{k_l}}-y_{n_{k_l}}\right)=0$$

$$x=\lim_{l\to\infty}x_{n_{k_l}}=\lim_{l\to\infty}y_{n_{k_l}}$$

$x_{n_{k_l}}\to x\leftarrow y_{n_{k_l}}$. לפי הרציפות של f, $f(x_{n_{k_l}})\to f(x)\leftarrow f(y_{n_{k_l}})$, מכאן היה צריך להתקיים כי $f(x_{n_{k_l}})-f(y_{n_{k_l}})\to 0$ אבל $\varepsilon \ge \left|f(x_{n_{k_l}})-f(y_{n_{k_l}})\right|$.

<u>שיעור 34, 19.1.2006</u>

עוד כמה מילים על **<u>רציפות במידה שווה</u>**

<u>דוגמאות:</u>

$y=f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ רציפה במידה שווה החל מ 1 $x\geq 1$.

<u>משפט:</u> אם f רציפה במ"ש בתחום A, אם $\left(x_n\right)$ בA סדרת $Cauchy$ אזי $f\left(x_n\right)$ הינה סדרת קושי.

<u>הוכחה:</u>

מה זה f רציפה במ"ש? (תזכורת)

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right)\left(\forall x\in A,\forall y\in A\right)\left(\left|x-y\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon\right)$$

יהי $\varepsilon>0$ ו $\left(x_n\right)$ סדרת קושי בA. יהי $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)$ לפי רציפות במידה שווה בA. עבור $\delta>0$ זה קיים $N\in N$ עם

$$\left(\forall n,m\in N\right)\left(N<n,m\Rightarrow\left|x_n-x_m\right|<\delta\right)$$

לכן

$$\left(N<n,m\Rightarrow\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_m\right)\right|<\varepsilon\right)$$

ולכן $\left(f\left(x_n\right)\right)$ סדרת $Cauchy$.

<u>משפט:</u> תהי f מוגדרת ורציפה ב$\left(a,b\right)$, אזי f רציפה במידה שווה ב$\left(a,b\right)$ אמ"מ f ניתנת להרחבה רציפה ב$\left[a,b\right]$.

<u>הוכחה:</u> אם קיימת הרחבה רציפה של f ל$\left[a,b\right]$, הרחבה זו רציפה במידה שווה ב$\left[a,b\right]$לכן הצמצום של ההרחבה לקטע ל$\left(a,b\right)$ היא גם רציפה במידה שווה ב$\left(a,b\right)$.

בכיוון השני: נראה שקריטריון $Cauchy$ תקף בשני הקצוות. צ"ל (אין ערך מוחלט, בגלל שאנחנו בצד השמאלי):

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta>0\right)\begin{pmatrix}0<x-a<\delta\\0<y-a<\delta\end{pmatrix}\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$$

היות ו f רציפה במידה שווה ב$\left(a,b\right)$ בהינתן $\varepsilon>0$ יהי $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)$ שמבטיח

$$\left(\forall x,y\right)\left(a<x,y<b\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon\right)$$

אם $0<x-a<\delta$ וגם $0<y-a<\delta$, אזי $\left|x-y\right|<\delta$ ועל כן (בגלל הרציפות במידה שווה) $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

אסטרטגיה נוספת להוכחה: לקחת סדרה ב$\left(a,b\right)$ ששואפת לa. הסדרה מתכנסת בR, ועל כן סדרת קושי. מכיוון שהיא סדרת קושי, אז $\left(f\left(x_n\right)\right)$ סדרת קושי, ועל כן מתכנסת, ועל כן יש לה גבול, והוא יהיה גם הערך שנבחר בa. צריך להוכיח שזה לא תלוי בסדרה שבחרנו. איך עושים את זה? לוקחים

$f\left(y_n\right)-l$ ומראים שהמרחק הזה שואף ל0 . איך נעשה את זה?
$\left|f\left(y_n\right)-l\right| \le \left|f\left(y_n\right)-f\left(x_n\right)\right|+\left|f\left(x_n\right)-l\right|$.

<u>כמה הערות כלליות על רציפות:</u>
מה זה בעצם אומר, ש f רציפה בa ?

$$f\left(a\right)=\lim_{x\to a} f\left(x\right)$$

(קיום שני הדברים מובלע).
מה עוד אפשר להגיד?

$$f\left(\lim_{x\to a}\right)=f\left(a\right)$$

תכונות נקודתיות - לדוגמא – הפו' חיובית בנקודה
תכונות לוקאליות – תכונות לגבי סביבה.
תכונות גלובליות – תכונות לגבי כל תחום ההגדרה
פונקציה רציפה בנקודה היא תכונה **לוקאלית**

<u>שיעור 35, 22.1.2006</u>

<u>פונקציות טריגונומטריות</u>

$$S=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$$

מעגל היחידה.

נעמוד על הנקודה $(1,0)$. בהינתן $t\in R$ אם $t>0$ נטייל על מעגל היחידה בכיוון החיובי t יחידות עד שנגיע לנקודה $P(t)=P_t$. אם $t<0$ נטייל בכיוון השלילי.

<u>כיוון חיובי</u>: נגד כיוון השעון. (לפתוח מקלחת חמה – חיובי. לסגור – שלילי).

$$x(P(t)):=\cos t$$

$$y(P(t)):=\sin t$$

תכונות שנובעות מההצגה:

מחזוריות:

$$P(t+2\pi)=P(t)$$

$$\cos(t+2\pi)=\cos t$$

$$\sin(t+2\pi)=\sin t$$

<u>לשים לב: שיוויון בין פונקציות: (יחס פיתגורי):</u>

$$x^2+y^2=1\Rightarrow$$

$$\underline{\cos^2+\sin^2=1}$$

<u>חסימות:</u> $\forall x,-1\le\cos(x),\sin(x)\le 1$

<u>סימטריות:</u> P_t,P_{-t} סימטריות ביחס לציר ה-x., ועל כן:

$$\cos(-t)=\cos(t)$$

$$\sin(-t)=-\sin(t)$$

(קוסינוס היא פונקציה **זוגית**, סינוס היא **פונקציה אי זוגית**)

$$\sin(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

$$\cos(t-s)=\cos t\cos s+\sin t\sin s$$

(עם פלוס משמאל, יש מינוס מימין)

<u>הצגה פורמלית:</u>

$$Co\sin e(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$Sine(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

שני הטורים האלה מתכנסים בהחלט, ועל כן מתכנסים לכל x.

בואו ונראה:

$$C(x-y)=C(x)C(y)+S(x)S(y)$$

מתקיים מתוך שיקולים של אריתמטיקה של טורים מתכנסים בהחלט.

$C\left(-x\right)=C\left(x\right)$ - מתקיים כי החזקות הם זוגיות.

$S\left(-x\right)=-S\left(x\right)$ - מתקיים כי כל החזקות הן אי זוגיות, ועל כן אפשר להוציא את המינוס החוצה.

$C\left(0\right)=1$

$$1=C\left(0\right)=C^2\left(x\right)+S^2\left(x\right)$$

חסימות: $-1\le C,S\le 1$.

מה חסר לנו בחיים: מיהו π ?

בואו ננסה לחשב את סכום הטורים:

עבור $0<x$, מתי מתקיים:

$$\frac{x^{n+2}}{\left(n+2\right)!}<\frac{x^n}{n!}\Leftrightarrow\frac{x^{n+2}}{x^n}<\frac{\left(n+2\right)!}{n!}$$

$$x^2<\left(n+1\right)\left(n+2\right)$$

$$n\le 1\Rightarrow$$

$$x^2<\left(n+1\right)\left(n+2\right)$$

$$0<x<\sqrt{6}$$

כאשר מתקיים $0<x<\sqrt{6}$ הטורים C , S עומדים בתנאי הקריטריון של לייבניץ לטורים עם סימנים מתחלפים.

כאשר $x>0$ מתקיים:

$$x-\frac{x^3}{3!}<\sin\left(x\right)<x$$

$$1-\frac{x^2}{2!}<\cos(x)<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

נחלק בx 'שם למעלה':

$$1-\frac{x^2}{3!}<\frac{\sin x}{x}<1$$

$$x\to 0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}<\frac{1-\cos x}{x}<\frac{x}{2!}$$

$$x\to 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

מה ראינו? $\sin$, $\cos$ רציפה ב0 .

$$\cos\left(2\right) <_{2<\sqrt{6}} 1-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}=1-2+\frac{16}{24}<0$$

$$0<\cos\left(0\right)$$

מה הדבר מלמדנו? אם $\cos$ רציפה (עוד שניה נוכיח), ולפי IVT קיים שורש (אפס ל $\cos$) ממש בין 0 לבין 2.

הגדרה:

$$\pi := 2\inf\left\{0<x\in R:\cos\left(x\right)=0\right\}>0$$

$$\Rightarrow$$

$$0<\frac{\pi}{2}<2\Rightarrow 0<\pi<4$$

למה $\cos$ רציפה? מספיק להסתכל על $\cos\left(x+y\right)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\lim_{y\to 0}\cos\left(x+y\right)=\cos x\lim_{y\to 0}\cos\left(y\right)-\sin x\lim_{y\to 0}\sin y=\cos x\cdot 1-\sin x\cdot 0=$$

$$\cos\left(x\right)$$

למה $\sin$ רציפה? לפי היחס הפיתגורי,

$$\cos\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow_{pitagoras}$$

$$\sin\frac{\pi}{2}=\pm 1$$

אבל

$$0<\frac{\pi}{2}<2<\sqrt{6}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x\right)\cos\frac{\pi}{2}+\sin\left(x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x\right)$$

דבר אחרון שנשאר להראות:

$$\cos\left(x+2\pi\right)=\cos x\cos\left(2\pi\right)-\sin x\sin 2\pi=$$

$$*\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\cos x4x=\cos^2\left(2x\right)-\sin^2\left(2x\right)$$

$$\cos 2\pi=\cos^2\left(\pi\right)-\sin^2\left(\pi\right)$$

$$\cos\pi=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1=-1$$

מיהו:

$$y=\sin\frac{1}{x}$$

$xt=1,t=\frac{1}{x}$. מה זה? פונקציית האקורדיון רק הרבה יותר 'עדינה' ולא מוגדרת ב0.

$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **<u>לא קיים</u>**. מדוע ולמה? ניקח סדרה $x_n\to 0$, ואז $f\left(x_n\right)\to 1$. ניקח סדרה שניה $y_n\to 0$ עם $f\left(y_n\right)\to -1$. איך נבחר את הסדרות?

$$x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n2\pi}$$

$$y_n=\frac{1}{3\frac{\pi}{2}+n2\pi}$$

<u>הנגזרת</u>

תהי f רציפות מוגדרות בקטע I ויהי $a\in I$. לכל $a\neq x\in I$ נסתכל על $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. ביטוי זה מוגדר בסביבה מנוקבת של a .

<u>הגדרה:</u> f תיקרא גזירה בa (דיפרציאבילית בa) אמ"מ קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ובמקרה זה נסמנו $f'(a)$ או כ $Df(a)$.

<u>משמעות:</u> נדרשת סביבה מנוקבת של הפונקציה, מספיק חד צדדית.
<u>הערה:</u> אם a נקודת קצה של I, אז נדרוש קיום הגבול החד צדדי.
<u>דוגמא פשטנית (דוגמונת):</u>

$$f(x)=x^2,a=1$$
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,x\neq 1$$
$$f'(1)=2$$

<u>הערה טריוואלית לסיום:</u>

$$\varphi(x):=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

בגלל שיש לה אי רציפות סליקה, ניתן להרחיבה בצורה רציפה.

שיעור 36, 24.1.2006

משפט: תהי $f:I\to R$ אזי f גזירה בa אמ"מ קיימת $\varphi:I\to R$ רציפה בa עם התכונה $\forall x\in I, f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$.

במקרה זה, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=f'(a)$

הוכחה: נניח ש f גזירה ב a, תהי

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, x\neq a\\ f'(a), x=a\end{cases}$$

נשים לב: φ רציפה ב a לפי ההגדרה של $f'(a)$.

נטען:

$$f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$$

ואכן, זה נכון גם כאשר $x\neq a$ וגם כאשר $x=a$.

בכיוון השני:

נתבונן ב $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, x\neq a$. אבל φ רציפה ב a לכן הגבול $\varphi(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים.

דוגמאות:

$f(x)=x^n, n\in N$. נטען: $f(x)$ גזירה לכל n.

$$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-1}+a^{n-1}\right)$$

נגדיר: $\varphi(x)=\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)$. ולכן:

$$f'(a)=\varphi(a)=na^{n-1}$$

נסתכל ב $g(x), x^{-n}$. גזירה לכל $a\neq 0$

$$x\neq 0$$

$$x^{-n}-a^{-n}=\frac{1}{x^n}-\frac{1}{a^n}=\frac{a^n-x^n}{a^nx^n}=(a-x)\left(\frac{a^{n-1}+a^{n-2}x+\ldots+ax^{n-2}x^{n-1}}{x^na^n}\right)$$

$$\psi(x)=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}x+\ldots+ax^{n-2}x^{n-1}}{x^na^n}$$

$$g'(a)=\frac{na^{n-1}}{a^{2n}}=na^{-n-1}$$

אנטי דוגמא:

$v(x)=|x|$ אינה גזירה ב $a=0$. מדוע ולמה? (יש כאן שפיץ!). ננסה בכל זאת:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\operatorname{sgn}(x)$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\operatorname{sgn}(x)=-1\neq1=\lim_{\substack{x\to0\\0<x}}\operatorname{sgn}(x)$$

משפט: אם f גזירה ב a אזי f f רציפה ב a. (אם, לא אמ"מ!)

הוכחה: ('בקלי קלותו'):

לפי המשפט הקודם , קיימת φ **רציפה ב a** עם התכונה $f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$

ומכאן:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=_{\lim it\_arithmetics}\left(\lim_{x\to a}\varphi(x)\right)\left(\lim_{x\to a}(x-a)\right)=\varphi(a)\cdot 0=0.$$

הגדרה: f תיקרא גזירה ב I אמ"מ f גזירה בכל $a\in I$.

אריתמטיקה של נגזרות: תהינה f,g גזירות ב I .$a\in I$. אזי:

1. $(f+g)'=f'(a)+g'(a)$ (השיוויון מצביע על קיום שני הביטויים, והתלכדותם)
2. $(f\cdot g)'=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.
3. אם $g'(a)\neq 0$ אזי $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\left(\frac{-g'(a)}{g^2(a)}\right)$
4. אם $g'(a)\neq 0$ אזי – $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

הוכחה:

נתון בעצם:

$$f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$$
$$g(x)-g(a)=\psi(x)(x-a)$$

וגם φ,ψ רציפות בa.

1. <u>לתלמיד הרציני.</u>
2.

$$\begin{aligned}&f(x)g(x)-f(a)g(a)=\\&\left(f(x)-f(a)\right)g(a)+f(a)\left(g(x)-g(a)\right)+\left(g(x)-g(a)\right)\left(f(x)-f(a)\right)=\\&\varphi(x)g(a)(x-a)+f(a)\psi(x)(x-a)+\varphi(x)\psi(x)(x-a)(x-a)=\\&\left[\varphi(x)g(a)+f(a)\psi(x)+\varphi(x)\psi(x)(x-a)\right](x-a)\end{aligned}$$

כל הביטוי שהגענו אליו רציף, ולכן כולו רציף.

3.

$$\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)=\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}$$

למה הביטוי הזה מוגדר? (או ליתר דיוק, מוגדר?) ביטוי זה מוגדר בסביבה של a , $g(a)\neq 0$, g גזירה ב a ועל כן g רציפה ב a ועל כן $g(x)\neq 0$ בסביבה של a.

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}=\frac{-\left(g(x)-g(a)\right)}{g(x)g(a)}=\left[-\frac{\psi(x)}{g(x)g(a)}\right](x-a)$$

כל הסוגריים המרובעים למעלה מייצגים פונקציה רציפה ב a, מאריתמטיקה.

ולסיום:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

<u>משפט('מאוד חשוב'): כלל השרשרת</u>

תהיינה g גזירה ב a ו f גזירה ב $b:=g(a)$.

אזי: $f\circ g$ גזירה ב a ושווה ל: $f'(g(a))\cdot g'(a)$.

<u>הוכחה :</u>

$$(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)=f(g(x))-f(g(a))$$

יהיו $g(x)-g(a)=\psi(x)(x-a)$ עם ψ רציפה בa

$f(y)-f(b)=\varphi(y)(y-b)$ עם φ רציפה בb.

$$(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)=f(g(x))-f(g(a))=$$

$$\varphi(g(x))(g(x)-g(a))=\left[\varphi(g(x))\psi(x)\right](x-a)$$

הפונקציה במלבן לעיל רציפה, למה – g גזירה בa לכן g רציפה בa לכן $\varphi\circ g$ רציפה בa.

ψ רציפה בa, ועל כן על סמך אריתמטיקה של רציפות מתקיים $\psi(\varphi\circ g)$ רציפה בa, ועל כן $f\circ g$ גזירה בa, ועל כן :

$$(f\circ g)'(a)=f'(b)\cdot g'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

<u>דוגמאות:</u>

<u>$\exp(x)$ גזירה</u>

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$h:=x-a\Rightarrow$$

$$x=a+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

נתבונן:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h}=e^a\left[\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right]$$

נשים לב שהגזירה ב0 גוררת את הגזירה בכל הנקודות

נסתכל במקרה של $0<h$, ועל כן $1+h<e^h$ (שני איברים ראשונים בטור)

מכאן:

$$1<\frac{e^n-1}{h}$$

off_the_record:

$$\frac{e^h-1}{h}<e^h$$

למה?

$$e^h < 1 + he^h$$
$$e^h(1-h) < 1 \Rightarrow$$
$$e^h < \frac{1}{1-h}$$

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{h}{n}\right)^i\binom{n}{i} = 1 + h + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{h^3}{n^3} + \ldots =$$
$$1 + h + 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{h^2}{2!} + 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{h^3}{3!} + \ldots < 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots + \frac{h^n}{n!} <$$
$$1 + h + h^2 + \ldots + h^n$$

בהסתמך על מה שראינו לעיל, ומכיוון שאנחנו מסתכלים על גבול ב0, עבור $0 < h < 1$ מתקיים

$$\frac{e^h - 1}{h} \le 1 + h + h^2 + \ldots + h^n = \frac{1}{1-h} \Rightarrow 1 < \frac{e^h - 1}{h} \le \frac{1}{1-h} \Rightarrow$$
$$\frac{e^h - 1}{h} \to 1$$
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ 0<h}} \frac{e^n - 1}{h} = 1$$
$$e^h = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{h}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}$$

מה קיבלנו בסופו של דבר:

exp'=exp

$$\frac{e^h - 1}{h} = e^h\left(\frac{1-e^{-h}}{h}\right) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} e^h\left(\frac{e^{-h}-1}{-h}\right) = 1$$

עבור $h < 0$ חזרנו לתנאי המקרה הקודם

שיעור 37, 26.1.2006

נגזרת של פונקציה הפוכה

f,g פו' הפוכות

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

ומכלל השרשרת:

$$1=(f\circ g)'(b)=f'(g(b))\cdot g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

משפט: תהי $f:I\to R$ פונקציה הפיכה, גזירה ב a ומקיימת $f'(a)\neq 0$. (נניח ש $f(I)=J$ קטע). נניח ש g רציפה ב b, אזי אם $f(a)=b$, g (הפו' ההפוכה) גזירה ב b ומתקיים:

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(g(b))}$$

הוכחה:

$$g'(b)=\lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{f(x)-f(a)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}=$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\frac{1}{f'(a)}$$

off the record:

להגיד ש f גזירה בa שקול ל $f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$, ו φ רציפה בa.

$$g(y)-g(b)=x-a=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)}$$

למה מותר? $\varphi(a)\neq 0$, ועל כן φ רציפה בa, ועל כן $\varphi(x)\neq 0$ בסביבה של a.

$$=(y-b)\frac{1}{\varphi(g(y))}$$

$$y\xrightarrow{g}x\xrightarrow{\varphi}\varphi(g(y))$$

$$b\to a\to\varphi(g(a))$$

$$g'(b)=\frac{1}{\varphi(g(y))}:=\psi(b)=\frac{1}{\varphi(a)}=\frac{1}{f'(a)}$$

end_of_the_record

דוגמאות:

דוגמא 1:

$$\exp:R\to R>0$$

$\exp$ גזירה והנגזרת (ששווה לפו') שונה מ0 בכל תחום ההגדרה, לכן ההפוכה שלה $\ln$, גזירה בכל תחום ההגדרה ומתקיים:

$$\ln'(b)=\frac{1}{\exp'(\ln(b))}=\frac{1}{\exp(\ln(b))}=\frac{1}{b}$$

דוגמא 2:
(הערה : סינוס אינה הפיכה, כי היא מחזורית, אבל בתחום ספציפי היא יכולה להיות הפיכה).

$$Sin:=\sin|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

(הגדרנו פונקציה שמוגדרת כסינוס בתחום סגור).

$$Sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$$

בתנאים אלה, ניתן להגדיר $\arcsin$ כפונקציה ההפיכה של $\sin$.

$$\arcsin'(b)=\frac{1}{S\text{in}'(\arcsin(b))}=\frac{1}{\cos(\arcsin(b))}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin)}}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

לא גזיר ב$1,-1$ (למה? הנוסחה לעיל תקפה רק כשהנגזרת שונה מ0).
תזכורת:

$$\cos^2+\sin^2=1$$
$$\cos^2=1-\sin^2$$
$$\cos=\pm\sqrt{1-\sin^2}$$

בתחום שבו אנו עובדים, מספיק לקחת את החלק החיובי

<u>שיעור 38 , 29.1.2006</u>

<u>הערה:</u>

כשכתוב:

$\sin(x)' = \cos x$ מתכוונים בעצם $\sin'(x) = \cos(x)$.

אותו דבר גם עם $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

סימון לייבניץ:

במקום $f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ מסמנים:

$$t - x = \Delta t$$

$$f(t) - f(x) = \Delta f$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{df}{dt}$$

<u>כמה נגזרות נוספות</u>

$$\left(x^n\right) = nx^{n-1}, n \in N, n \in Z\left(n \neq 0\right)$$

$$\left(\exp' = \exp\right)$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

(למה נכונה הנגזרת של cos?

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos' x = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin(x)$$

)

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2}$$

נשים לב – הפונקציות ההפוכות לטריגונומטריות לא הפוכות לכל x, אלא רק בקטע.

נמשיך:

$$\left(a^x\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\ln a$$

$$\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

$$a\in R,\left(x^a\right)'=\left(e^{a\ln x}\right)'=e^{a\ln x}\cdot a\frac{1}{x}=\frac{x^a}{x}a=ax^{a-1}$$

<u>הגדרה:</u> $f:I\to R$ מקבלת מקסימום (מינימום) מקומי ב $a\in I$ אמ"מ קיים $\delta>0$ עם התכונה
$x\in(a-\delta,a+\delta)\Rightarrow f(x)\le f(a)$

אם רוצים מינימום, אז מן הסתם זה $f(x)\ge f(a)$).

מה זה מקסימום או מינימום חזק? הופכים את האי שוויון החלש לחזק, ושמים לב שאז $x\neq a$.

<u>משפט (פרמה):</u> אם $f:I\to R$ מקבלת מקסימום או מינימום בנקודה פנימית $a\in I$ ו f גזירה ב a אזי $f'(a)=0$.

<u>הגדרה:</u> פו' עולה בנקודה a אם משמאלה $f(x)<f(a)$ ומימינה $f(a)<f(x)$.

<u>הוכחה:</u> נניח על ש f מקבלת מקסימום ב a. אם $0<f'(a)$ אזי קיים $\delta>0$ עם

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\left.\begin{array}{l}a-\delta<x<a\Rightarrow f(x)<f(a)\\ a<x<a+\delta\Rightarrow f(a)<f(x)\end{array}\right\}$$ בסתירה לעובדה שהפונקציה מקבלת מקסימום בנקודה

בצורה דומה נשלול את המקרה $f'(a)<0$.

<u>מסקנה :</u> אם f רציפה ב$[a,b]$ אזי מועמדים לנקודות קיצון (מקס', מינ') של f ב$[a,b]$ הן:

- נקודות קריטיות של f - כלומר - f' מתאפסת
- נקודות סינגולריות - f' לא מוגדרת בהן.
- נקודות שפה (במובן *boundary* - סוף/התחלת הקטע)

צביק:'אני מדבר שטויות, שתיתי אתמול'

<u>משפט: Rolle</u> – תהי f רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b) אזי אם $f(a)=f(b)$ גורר שקייםc $a<c<b$ עם $f'(c)=0$.

<u>הוכחה:</u> f רציפה ב$[a,b]$ ולכן מקבלת בו הן מקסימום ומינימום. אם שניהם בקצוות, אזי בגלל $f(a)=f(b)$ נובע כי f קבועה ולכן נגזרתה מתאפסת ומספיק לבחור $c\in[a,b]$ כלשהו.
אחרת, אחת מנקודות מהקיצון הינה פנימית ולפי המשפט הקודם קיימת ומתאפסת בה.

<u>משפט:</u> (*Lagrange*) – נקרא גם משפט *MVT* - משפט ערך הממוצע– תהי f רציפה ב$[a,b]$ וגזירה ב(a,b) אז קיים $a<c<b$ עם $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

נשים לב: אם $a=b$ המשפט עדיין נכון, אולם באופן ריק.

__הוכחה:__

תהי $\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$

φ עומדת בתנאי משפט ROLLE: φ רציפה ב$[a,b]$ (אריתמטיקה של פו' רציפות). φ גזירה ב(a,b) (אריתמטיקה של פו' גזירות).

נשים לב:

$$\varphi(b)=0=\varphi(a)$$

לכן קיים $a<c<b$ עם $0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ דיינו.

__משפט:__ $(Cauchy)$ - תהיינה f,g רציפות ב$[a,b]$, גזירות ב(a,b) ו$g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$.

אזי: קיים $a<c<b$ עם

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

הערה: נשים לב ש$g(b)\neq g(a)$ אחרת ע"פ משפט ROLLE היה $g'=0$ בנקודה כלשהיא ב(a,b) בניגוד להנחה.

__אינטואיציה:__ שנינו יוצאים לטייל. אחד מיצה 80 ק"מ בפרק זמן כלשהו, השני 20 ק"מ. כלומר, היחס בין המרחקים הוא 4. קיים תזמון בו היחס בין המהירויות היה שווה בדיוק 4. ☺

__הוכחה:__ תהי $\varphi(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)\right]$

φ עומדת בתנאי משפט $LAGRANGE$ (רציפה בקטע סגור – אריתמטיקה של רציפות, גזירה בקטע פתוח – אריתמטיקה של גזירות), אזי קיים $a<c<b$ עם

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=\varphi'(c)=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\frac{0-0}{b-a}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$$

ומכאן המסקנה.

__משפט:__ תהי f גזירה בקטע I. אזי, לf' תכונת ערך הביניים בו.

__הוכחה:__ נניח קודם ש$a,b\in I$ $a<b$, ו$f'(a)<0<f'(b)$.

שיעור 39, 31.1.2006

תזכורת: ל $f:I\to R$ תכונת ערך הביניים (IVP) אמ"מ לכל $a,b\in I$ ולכל γ בין $f(a)$ לבין $f(b)$ קיים c בין a לבין b עם $f(c)=\gamma$.

משפט: אם $f:I\to R$ (I קטע) גזירה בו ל f' תכונת ערך הביניים בI.

הוכחה: (יפה) – נבדוק קודם כל מקרה פרטי : $a<b,a,b\in I$, $f'(a)<0<f'(b)$. נראה במקרה זה שקיים $a<c<b$ עם $f'(c)=0$.

דוגמא:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

הנגזרת שלה לא רציפה! למה? מה הנגזרת:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

הפו' לא רציפה ב0 בגלל ה $\cos$.

המשך הוכחה:

יהי $b-a>h>0$ כך ש$a<x\leq a+h$ $\Leftarrow$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ועבור אותו h, אם $b-h\leq x<b$ $\Leftarrow$ $\frac{f(b)-f(x)}{b-x}>0$.

'נסיט את הקטע h ימינה בt יחידות' - תהי

$$\varphi(t)=\frac{f(a+h+t)-f(a+t)}{(a+h+t)-(a+t)}=\frac{f(a+h+t)-f(a+t)}{h}$$

$$t\leq 0\leq b-a-h$$

$f(x)$ גזירה, ועל כן רציפה , ועל כן φ רציפה בקטע סגור זה .

נסתכל ב:

$$\varphi(0)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<0$$

$$\varphi(b-a-h)=\frac{f(b)-f(b-h)}{h}>0$$

מכיוון ש φ רציפה , לפי משפט ערך הביניים, עבור רציפות, קיים $0<s<b-h$ עם $\varphi(s)=0$,

אזי על פי משפט ROLLE עבור f בקטע $[a+s,a+h+s]$ קיים

$a<a+s<c<a+h+s<b$ עם $f'(c)=0$.

המקרה הכללי נקבלו תוך התבוננות בפונקציה $g(x)=f(x)-\varphi x$.

שימושים:

1. לפולינום ממשי ממעלה n יש לכל היותר n שורשים ($ROLLE$)
2. תהי $f: I \to R$ גזירה אזי $f' \equiv 0$ בI, $\Leftarrow$ f קבועה בI.
3. $f' \le 0$ בI $\Leftarrow$ f יורדת (חזק אם זה נהפך לאי-שיוויון חזק).
4. $f' \ge 0$ בI $\Leftarrow$ f עולה (חזק אם זה נהפך לאי שיוויון חזק).

<u>הוכחה :</u> (בדרך הדגימה – כלומר נוכיח רק אחד מהם)

3. יהו $a,b \in I$, $a < b$, נפעיל את משפט ערך הממוצע ($Lagrange$) ל f בקטע הסגור $[a,b]$.
כלומר קיים c :

$$0 \le f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, a < c < b$$

ועל כן

$$f(a) \le f(b)$$

<u>שימוש נוסף (חשוב!): קירובים ליניאריים</u>

תזכורת:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a)$$
$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a)$$

אז אם $x \approx a$ (קרוב, לא איזומורפי), אז $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ (נשים לב שקיבלנו פונקציה ליניארית!)

נחשב קירוב ליניארי ל $\sqrt{1.01}$ ונעריך את גודל השגיאה.

$$f(x) = \sqrt{x}, a = 1$$

$$f(1) = \sqrt{1}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

$$x \approx 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\sqrt{1.01} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}(1.01-1) = 1.005$$

מהו סדר גודל של השגיאה בקירוב ?

$$\sqrt{1.01} \approx \sqrt{1}$$

$$\frac{\sqrt{1.01}-\sqrt{1}}{1.01-1}=\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$$1<c<1.01$$

$$1=\sqrt{1}<\sqrt{c}<\sqrt{1.01}<\sqrt{1.21}=1.1\Rightarrow 2<2\sqrt{c}<2.2$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2.2}<\frac{1}{2\sqrt{c}}<\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2.2}\leq\sqrt{1.01}-1<\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$1+\frac{1}{220}<\sqrt{1.01}<1+\frac{1}{200}$$

למה זה דומה: (בדיחה איזומורפית לבדיחה של צביק) : 'באת לסוכן נסיעות, ביקשת כרטיס טיסה לריו. הוא אומר – יש ב200$, אבל לא לריו, קרוב.... עולה על המטוס, אחרי רבע שעה, המטוס נוחת בפתח תקוה. אתה שואל, מה קשור? הסוכן אומר 'לא שאלת סדר גודל...'

.4

$$1<\alpha\in R,-1<x$$

$$1+\alpha x\leq(1+x)^{2}$$

$$d(x)=(1+x)^{\alpha}-(1+\alpha)x$$

$$d'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left[(1+x)^{\alpha-1}-1\right]$$

$$\operatorname{sgn}\left(\alpha\left[(1+x)^{\alpha-1}-1\right]\right)=\begin{cases}-1, x\in(-1,0)\\ 0, x=0\\ 1, x>0\end{cases}$$

d מקבלת מינימום מוחלט ב $x=0$. $0=d(0)\leq d(x)$ ומכאן אי שיוויון ברנולי.

<u>שיעור 40 (ואחרון!) 2.2.2006</u>
<u>טיול קצר בעולם הקמורות</u>
<u>פונקציות קמורות (Connex Functions) – עבורנו פונקציות קמורות הן ☺ (מחייכות, לא ☹ - כמונו אחרי המבחן)</u>

לכל השיעור: יהי I קטע **<u>פתוח</u>** בישר.
<u>הגדרה:</u> $f : I \to R$ תקרא **<u>קמורה</u>** בI אמ"מ לכל $a,b \in I$, $a<b$,

$$a<x<b \Rightarrow f\left(x\right) \le L\left(x\right)$$

כאשר $y = L\left(x\right)$ זו הפונקציה שהגרף שלה הוא הישר שעובר דרך הנקודות $\left(a,f\left(a\right)\right),\left(b,f\left(b\right)\right)$, ופורמלית ניתנת לכתיבה כ:

$$L = f\left(a\right)+\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-a\right)$$

חשוב לשים לב בלי קשר – משוואה של ישר.ניתנת לכתיבה גם כ:

$$= f\left(b\right)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-b\right)$$

$$a<x<b \Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(a\right)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-a\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$a<x<b \Rightarrow f\left(x\right) \le f\left(b\right)+\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\left(x-b\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(a\right)}{x-a} \le \frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a} \le \frac{f\left(b\right)-f\left(x\right)}{b-x}$$

האי שיוויון האחרון (בעיקר מצד ימין) מתבסס על לקחת את המשוואה השניה, להעביר אגפים, ולהחליף את כיוון האי שיוויון בגלל שחילקנו ב $x-b$ שהוא שלילי.
יש כאן ציור יפה (ויתכן חשוב – ניתן להסתכל אצל דינה למשמעות גאומטרית – בקצרה – האי שיוויון הימני זה השיפוע מx לקצה הימני , השמאלי מx לשמאלי, ובאמצע – הישר בין שני הקצוות).

עוד דרך להציג את תנאי הקמירות:

$$0 \le \alpha,\beta,\alpha+\beta=1 \Rightarrow f\left(\alpha \cdot a+\beta \cdot b\right) \le \alpha f\left(a\right)+\beta f\left(b\right)$$

עוד דרך:

$$0 \le \lambda \le 1 \Rightarrow f\left(\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\right) \le \lambda f\left(a\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(b\right)$$

<u>משפט 1:</u> I קטע פתוח. $f : I \to R$ קמורה $\Leftarrow$ f רציפה.
<u>משפט 2:</u> I קטע פתוח. $f : I \to R$ קמורה $\Leftarrow$ לכל $x \in I$ קיימות נגזרות חד צדדיות.
<u>משפט 3:</u> I קטע פתוח. אם $f : I \to R$ גזירה אז f קמורה $\Leftrightarrow$ f' עולה.
<u>משפט 4:</u> I קטע פתוח. אם $f : I \to R$ גזירה אז f קמורה $\Leftrightarrow$ הגרף של f עובר מעל הישר המשיק לגרף בכל נקודה.
<u>משפט 5:</u> $f' : I \to R$ גזירה, f קמורה $\Leftrightarrow$ f'' חיובית.

הוכחת משפט 2 (יגרור את משפט 1):
בהנתן $x \in I$ (I פתוח) $s < x < t$ ($s,t \in I$ אף הם).

$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \le \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

$$\varphi(s) := \frac{f(x)-f(s)}{x-s}$$

$\varphi(s)$ פונקציה עולה וחסומה מלמעלה ע"י $\psi(t)$, מכאן קיומו של הגבול

$f_-^{'}(x) = \lim\limits_{\substack{s\to x \\ s<x}} \frac{f(x)-f(s)}{x-s}$. באופן דומה מוכיחים את קיומה של הנגזרת מצד ימין ב x ומקבלים $f_-^{'}(x) \le f_+^{'}(x)$.

הוכחת משפט 3 (יפהפיה!): נניח ש צ"ל f' עולה , צ"ל f קמורה (אחד מהצדדים). יהי $x < y \in I$. תהי $x < t < y$ (מותר לבחור כי זה קטע).

לפי משפט ערך הממוצע בקטע $[x,t]$ קיים s , $x < s < t$ עם :

$$f'(s) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

לפי משפט ערך הממוצע בקטע $[t,y]$ קיים u, $t < u < y$ עם

$$f'(u) = \frac{f(y)-f(t)}{y-t}$$

ומתקיים

$$f'(s) \le f'(y)$$