<u>חשבון אינפינטיסימלי 1 – תרגולים - סמסטר א' , 2005 – 2006</u>

הי,
בעקבות בקשות רבות, החלטתי לשתף את הסיכומים שלי לטובת הכלל (לא התחלתי לכתוב מראש במחשב במחשבה שזה יעזור לעוד אנשים – פשוט אחרי היום הראשון בסמסטר, נזכרתי שאני לא מבין את כתב היד שלי, והתחלתי לכתוב במחשב).
אני מקווה שהמחברת תעזור לעוד רבים – אבל אני חייב להעיר: יתכן, ואפילו סביר, שיש בה טעויות.
אני לא לוקח אחריות לאף ציון שתקבלו בגלל המחברת הזו. אם מצאתם טעות, אני אשמח אם תעדכנו אותי באימייל.

להערות/הארות/תיקונים : shuaavi@gmail.com

אבי שוע

נהלי הגשה:
חובת הגשה - להגיש תרגילים אי זוגיים בלבד. על תרגילים זוגיים נבחנים בשבוע לאחר מכן.
לשם חישוב הציון יחשבו 5 התרגילים הטובים ביותר ו5 הבחנים הטובים ביותר. הציון הסופי:
80% מבחן
10% תרגילים
10% בחנים.

e-mail:
noanitzan@math.huji.ac.il
אתר הקורס: owl.huji.ac.il
מכיל, תרגילים, פתרונות, חומר עזר – מומלץ.

קבוצה – {1,2,3} – בד"כ אות גדולה.

A={1,2,3}
F={a,b,1,3}

חזרה על איברים לא משנה.

{1,2}={1,2,2,2}

סדר האיברים לא משנה

{3,1,2}={1,2,3}

$\varnothing$ קבוצה ריקה.
N – קבוצת המספרים הטבעיים – {1,2,3,…}
Z – קב' השלמים – {…,-2,-1,0,1,2,…)
Q – קב' הרציונליים - $\{\frac{a}{b} : a \in Z\}$
R – קב' הממשיים – |A| - גודל של הקב' A = מס' האיברים בקב' A. 3=|{1,1,2,2,3}|

$|Q| = \infty$
|{{1,2},3}|=2

סימן השייכות $\in$

B={{1,2},3}
$3 \in B$
$\{2,3\} \in B$
$1 \notin B$

<u>גרירה לוגית</u>
תהינה a,b שתי טענות. נסמן a->b (a גורר את b) אם כאשר a טענה נכונה אז גם b טענה נכונה.

a<->b (a אם ורק אם b): גם a->b וגם b->a, כלומר הטענות a וb נכונות או לא נכונות יחדיו.

הגדרה: אם A,B קבוצות, אז A=B אם: $x \in A$ <-> $x \in B$
סימן ההכלה:
$A \subseteq B$ אם לכל $x \in A$ מתקיים $x \in B$ ($x \in A$ -> $x \in B$)
הג': כאשר $A \subseteq B$ כאשר A תת קבוצה של B.

לכל קב' A : $\varnothing \subset A$, $A \subset A$.
הכלה : A מוכלת בB כאשר $B \subseteq A$ וגם יש איבר בB שאיננו בA.

הכלה ממש $A \subset B$

הכלה $A \subseteq B$

<u>עוד קצת צורות הצגה</u>

$$A = \{x \mid if\_x\_...\}$$

$$\{1,2,...\} = \{x \in N \mid x \le 1000\}$$

קבוצת ריבועי המספרים:

$$\{x \in N \mid y^2 = x, y \in N\} = \{x^2 \mid x \in N\}$$

<u>פעולות על קבוצות</u>

<u>איחוד:</u>

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

פעולת האיחוד מקיימת קומוטטיביות $A \cup B = B \cup A$ וגם אסוציאטיביות

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

<u>חיתוך:</u>

$$A \cap B = \{x \mid x \in A\_and\_x \in B\}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap A = A$$

גם פעולת החיתוך היא **קוממוטטיבית ואסוציאטיבית.**

<u>הפרש</u>

$$A - B = \{x \mid x \in A\_and\_x \notin B\}$$

$$A - B = A - (A \cap B)$$

$$A - A = \varnothing$$

$$A - \varnothing = A$$

<u>לא קוממוטטיבית.</u>

<u>מכפלה קרטזית</u>

$$AxB = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$(a,b) \ne (b,a)$$

לא קוממוטטיבית

$$A = \{1,2\}$$

$$B = \{2,3,4\}$$

$$AxB = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$|AxB| = |A| x |B|$$

<u>כמתים</u>

$\forall$ - לכל

$\exists$ - קיים

$\sim$, $\neg$ - לא.

$\varphi = \forall x \in Z, x^2 \geq 0$ - טענה – לכל x שלם x בריבוע גדול או שווה ל0

שלילה:

$$\neg\varphi = \exists x \in Z \_ x^2 < 0$$

טענה:

$$\delta = \exists x \in R : x^2 = -1$$

$$\neg\delta = \forall x \in R \_ x^2 \neq -1$$

$$\tau = \forall n \in N \exists n \in N, m > n$$

$$\neg\tau = \exists n \in N \forall m \in N, m \leq n$$

הג' : יהיו $a_1, a_2, ..., a_n$ ממשיים

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

(סיגמא – סימן הסכום)

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_n$$

<u>תכונות:</u>

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$ אין משמעות לI

(2) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

(3) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

(4) $\sum_{i=1}^{n} C = n \cdot C$

$$\sum_{i=3}^{10} i = \sum_{j=1}^{8}(j+2) = \sum_{j=i}^{8} j + \sum_{j=1}^{8} 2 = \frac{8\cdot 9}{2} + 8\cdot 2$$

$$j = i - 2$$

$$i = j + 2$$

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

דוגמאות:

$$\sum_{i=1}^{n}(a^i b^{2i}) = ab^2 + a^2b^4 + \ldots + a^n b^{2n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{i}(x_j) = x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + \ldots + x_1x_2\ldots x_n$$

<u>אינדוקציה:</u>

(1) בסיס האינדוקציה: מוכיחים הטענה על n=1

(2) צעד האינדוקציה: מניחים נכונות הטענה על n ומוכיחים עבור n+1

צ"ל: n^2=1+3+5+…(2n-1)

הוכחה: (1) – בסיס האינדוקציה עבור n=1 - > 1=1 .

(3) צעד : נניח $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

צ"ל:

$$1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$$

$$n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

מ.ש.ל.

טענה: כל לוח שחמט בגודל 2n*2n אפשר לכסות עם L (שלוש משבצות בצורת L) כך שנשארת משבצת פינתית לא מכוסה.

תרגול 2, 8.11.2005
הבינום של ניוטון
A קבוצה
קבוצת החזקה של A, $P(A)$, 2^A, מוגדרת להיות קבוצת כל תת הקבוצות של A.

$$A=\{1,2\}$$
$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

<u>הג': המקדם הבינומי:</u>

המקדם הבינומי, מסומן $\binom{n}{k}$ (n מעל k):

בהנתן קב' A בגודל n, למשל $1,2,\dots,n$:

$$\binom{n}{k}=|\{B\subseteq A \mid |B|=k\}|$$

כלומר, מס' הדרכים לבחור קבוצה בגודל k מתוך קבוצה בגודל n.

$$\binom{2}{1}=2$$

$$\binom{2}{0}=1$$

$$\binom{2}{2}=2$$

<u>תמיד:</u>
לכל n:

$$\binom{n}{0}=1$$

$$\binom{n}{1}=n$$

$$\binom{n}{n}=1$$

$$C=\{1,2,3,4\}$$

$$\binom{4}{2}$$

כמה תתי קבוצות של c קיימות שגודלן 2:

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$$

התשובה היא 6 .

נוסחת המקדם הבינומי היא:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

נוסחת הבינום של ניוטון:
אנו מחפשים נוסחה ל

$$(a+b)^n, n \in N$$

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) =$$
$$a^3+aab+aba+abb+baa+bab+bba+b^3$$
$$1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+b^3 =$$
$$1\cdot a^3+\binom{3}{2}\cdot a^2b+\binom{3}{1}\cdot ab^2+1\cdot b^3$$

(מסתכלים מעל a)

$$(a+b)^7 =$$
$$a^7+....+\binom{7}{3}a^3b^4+....+b^7$$

<u>נוסחת הבינום של ניוטון:</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$
$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}a^kb^{1-k} = 1\cdot 1\cdot b+1\cdot a\cdot 1 = b+a$$

<u>זהות (והוכחה):</u>

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$
$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

<u>זהות (2)</u>

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>
מה מספר הדרכים לבחור ועד כיתה בגודל k מתוך כיתה בגודל n ?
יש יוסי בכיתה.

הוועדות עם יוסי : $\binom{n-1}{k-1}$

הוועדות בלי יוסי: $\binom{n-1}{k}$

<u>מסקנות הנובעות מנוסחת הבינום של ניוטון:</u>

כמה תתי קבוצות יש לA? (P זה POWER)

$$|A|=n$$

$$|P(A)|=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

שאלה: האם מס' הקב' בגודל זוגי = מס' הקב' בגודל אי זוגי?

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots.$$

מס' הקבוצות בגודל אי זוגי-מס הקבוצות בגודל זוגי=

נציב בנוסחת הבינום של ניוטון a=-1,b=1

נקבל

$$(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

<u>חסמים</u>

$$A\subseteq R$$

הגדרות:

מס' M יקרא מקס' של A ויסומן maxA אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\le M$ **וגם** $M\in A$.

לא לכל קבוצה יש מקסימום – לדוגמא, קבוצה שלא חסומה מלמעלה, כמו הטבעיים.

$$\{1-\frac{1}{n}\mid n\in N\}$$

גם לקבוצה זו אין מקסימום, כי אמנם יש מספר יותר גדול ממנה, אבל לא מוכל בקבוצה.

מס' m יקרא מינימום של A, ויסומן mina אם $m\in A$ וגם לכל $m\le a, a\in A$

<u>טענה:</u>

אם ל $A\subseteq R$ יש מינימום, אזי הוא יחיד:

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיימים שני מינימה : m,m', כך ש $m\neq m'$. נראה האם נגיע לסתירה?

בלי הגבלת הכלליות $m<m'$, וקבלנו סתירה לכך ש'm מינימום.

<u>טענה:</u>

אם ל-A יש מקס' אזי הוא יחיד.

הוכחה: נתבונן בקבוצה $B=\{-a,\mid a\in A\}$, מהטענה הקודמת, אם לB קיים מינימום, אזי הוא יחיד.

אם x הוא מקס' של A, x- הוא מינ' של B.

מטענה קודמת, אם בB מינימום, אזי הוא יחיד.

עקרון המינ': אם A תת קבוצה של הטבעיים, אז לA קיים מינימום – נקרא לעיתים גם עקרון הסדר הטוב.
טענה : לכל תת קבוצה **סופית** של R, קיימים גם מינ' וגם מקס'.

<u>הגדרה נוספת:</u>
$A \subseteq R$
x יקרא **חסם מלעיל** של A אם לכל $a \in A$ קיים $a \leq x$. אם יש אחד, יש אינסוף.
y יקרא **חסם מלרע** של A אם לכל $a \in A$ קיים $a \geq y$

דוג'
$$A = \{x \in R \mid x \leq 1\}$$
$$\max A = 1$$
$$\sup A = 1$$
1,3,1000 כולם חסמי מלעיל של A
$$B = \{x \in R \mid x < 1\}$$
אין מקס', אבל 1,3,1000 כולם חסמי מלעיל.

אם לA קיים חסם מלעיל, נאמר: A חסומה מלעיל.
אם לA קיים חסם מלרע, נאמר : A חסומה מלרע.

<u>הגדרה:</u>
תהי $\varnothing \neq A \subseteq R$ קב' חסומה מלעיל, $s \in R$ נקרא חסם עליון (סופרמום של A, supA) אם הוא חסם מלעיל **<u>מינימלי</u>**.
$g \in R$ נקרא חסם תחתון של A (אינפימום של A, infA) אם g הוא חסם מלרע **<u>מקסימלי</u>**.
<u>הערה:</u> אם M=maxA אז M=supA. **זה לא עובד בכיוון ההפוך**.

למה בדוגמא למעלה
?supA=1
נניח בשלילה כי קיים חסם מלעיל קטן מ1.

$$x < 1$$
$$x < x + \frac{1-x}{2} < 1$$

x שייך לA, בסתירה.

supB=1 (מהדוגמא למעלה)

נניח בשלילה x חסם מלעיל קטן יותר מ1. ניקח $x < x + \frac{1-x}{2} < 1$, ולכן שייך לB בסתירה.

ארכימדיות: לכל $\varepsilon \in R$ קיים $n \in N$ כך ש $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

נוכיח כי :

$$A=\{\frac{1}{n}\mid n\in N\}$$
$$\sup A=\max A=1$$
$$\inf A=0$$

נוכיח כי 0=infA. ראשית, 0 הוא חסם מלרע כי לכל n $0<\frac{1}{n}$.
נראה כי 0 חסם מלרע מקס' – נניח בשלילה כי קיים x חסם מלרע כך ש x>0. מהארכימדיות קיים n כך ש $\frac{1}{n}<x$, סתירה לכך שx חסם מלרע.

תרגול 3 – 15.11.2005

<u>חסם עליון</u>: $A \neq \emptyset$ וחסומה מלעיל.

חסם מלעיל S הוא <u>חסם עליון</u> אם לכל חסם מלעיל t של A מתקיים $s \leq t$.

הגדרה שקולה: חסם מלעיל s הוא חסם עליון אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $s - \varepsilon \leq a \leq s$.

חסם מלרע g הוא <u>חסם תחתון</u> אם לכל חסם מלרע x של A מתקיים $x \leq g$.

באופן שקול- חסם מלרע g הוא חסם תחתון אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $g \leq a \leq g + \varepsilon$.

$$A = \{a^2 \mid a \in Q, 1 < a < 2\}$$

<u>טענה:</u> $\inf A = 1$

(I) 1 חסם מלרע כי לכל $1 < a < 2$ מתקיים $1 < a^2$ ולכן 1 חסם מלרע.

<u>טיוטת הוכחה</u> (II) יהי $\varepsilon > 0$. מחפשים $1 < a < 2$ כך ש $a^2 \leq 1 + \varepsilon$.

נחפש איבר מהצורה $a = 1 + \frac{1}{n}$, כלומר צריך למצוא n טבעי כך ש

$$(1 + \frac{1}{n})^2 \leq 1 + \varepsilon$$

$$1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} =$$

$$1 + \frac{3}{n} \leq 1 + \varepsilon$$

קיים n מתאים כך ש $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

(II) – מסודר:

יהי $\varepsilon > 0$. קיים $n \in N$ כך ש $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ (מארכימדיות). נסמן $a = 1 + \frac{1}{n}$, מתקיים $1 < a < 2$,

וכן $a \in Q$, ולכן $a^2 \in A$.

נראה ש

$$a^2 \leq 1 + \varepsilon$$

$$a^2 = (1 + \frac{1}{n})^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{3}{n} < 1 + \varepsilon$$

קיבלנו – 1 חסם תחתון של A.

$$A = \{\frac{2n+3}{n+3} \mid n \in N\} = \{2 - \frac{3}{n+3}\}$$

טענה 1: הסדרה $a_n = \frac{2n+3}{n+3}$ היא עולה. לכן $a_0 = \inf A = \min A = \frac{5}{4}$

מסקנה: supA=2 – I – 2 חסם מלעיל.

$$2-\frac{3}{n+3}\ge 2-\varepsilon$$

II – יהי $\varepsilon>0$. נבחר מארכימדיות n כך ש $e\ge\frac{3}{n+3}$.

$$\frac{e}{3}\ge\frac{1}{n+3}$$

מתקיים

$$2-\frac{3}{n+3}\ge 2-\varepsilon$$

לכן $\sup A=2$

<u>הערות תרגיל 3 – אינפי</u>

כמעט כל הטבעיים :=כל הטבעיים למעט מס' סופי.

כמה טבעיים מקיימים $n\ge 7$? כמעט כל הטבעיים ☺

$(-1)^n=1$ - אינסוף טבעיים.

$\{n^2\mid n\in N\}$ - אינסוף טבעיים.

<u>טענה:</u>

$A,B\ne\varnothing$ וחסומות. $A\cap B\ne\varnothing$

. נטען :

$$\sup(A\cap B)\le\min\{\sup A,\sup B\}$$

<u>הוכחה:</u>

$A\cap B$ לא ריקה וחסומה ולכן sup מוגדר.

נראה כי min(supA,supB) הוא חסם מלעיל של $A\cap B$.

ראשית נראה כי supA מלעיל: יהי $x\in A\cap B$, בפרט $x\in A$ ולכן $x\le\sup A$

supB חסם מלעיל: יהי $x\in A\cap B$, בפרט $x\in B$ ולכן $x\le\sup B$.

קבענו כי גם supA וגם supB חסמי מלעיל ולכן גם המינימום ביניהם הוא חסם מלעיל.

$A,B\subseteq R^+$ לא ריקות וחסומות מלעיל.

אז

$$\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$$

<u>הוכחה:</u>

$A,B\ne\varnothing$ ולכן $A\cdot B\ne\varnothing$

(I) נראה ש $A\cdot B$ חסומה מלעיל ע"י supAsupB.

יהי $z\in AB$ אזי $z=ab, a\in A, b\in B$.

$$0<a\le\sup A$$

$$0<b\le\sup B$$

$$z=a\cdot b\le\sup A\sup B$$

קיבלנו מסקנה: supAsupB חסם מלעיל של AB.

(II) יהי $\varepsilon > 0$ צ"ל קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש $ab \geq \sup A \sup B - \varepsilon$

יהי $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2\sup B}$ קיים $a \in A$ כך ש $a \geq \sup A - \varepsilon_2$

יהי $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\sup A}$ קיים $b \in B$ כך ש $b \geq \sup B - \varepsilon_2$.

$$
\begin{aligned}
& a \cdot b \geq (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_2) = \\
& \sup A \sup B - \varepsilon_1 \sup B - \varepsilon_2 \sup A + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\
& \geq \sup A \sup B - \varepsilon_1 \sup B - \varepsilon_2 \sup A = \\
& \sup A \sup B - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A \sup B - \varepsilon \\
& \Rightarrow \\
& ab \geq \sup A \sup B - \varepsilon
\end{aligned}
$$

ציטוט השיעור: *אני לפי השעון של המפקד.*

ציטוט השיעור 2: *לא הגדרנו את המושג 'סופי'*

תרגול 4- 22.11.2005

סדרות:

הג': סדרה אינסופית: $(a_1,a_2,...)$ היא פונ' מN לR.

$(a_i)_{i=1}^{\infty}$

דוגמאות:

1. הסדרה הקבועה a $\forall i, a_i = a \Rightarrow (a,a,a,a,...)$
2. הסדרה ההרמונית $a_n = \frac{1}{a}$

הגדרה:

סביבת ε של $a \in R$ מוגדרת:

$$B_\varepsilon(a) = \{x \,||\, x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

סביבה של a = כל קטע פתוח (x,y) כך ש $a \in (x,y)$.

הערה: תכונה $p(n)$ מתקיימת עבור כמעט כל הטבעיים אמ"מ קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים $p(n)$.

הג': סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל$a \in R$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $\varepsilon > |a_n - a|$

במילים אחרות: בכל סביבת ε של a נמצאים כמעט כל אברי הסדרה. נסמן:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

הג': אם לא קיים $a \in R$ כך ש $a_n \to a$ נאמר שהסדרה <u>מתבדרת.</u>

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in N \forall n > N \,|a_n - a| < \varepsilon$$

a אינו גבול של הסדרה:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in N, \exists n > N, |a_n - a| \geq \varepsilon$$

<u>טענה:</u>

$a_n = \frac{n-1}{n}$, נוכיח $a_n \to 1$. הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. צ"ל: קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|1 - \frac{n-1}{n}| < \varepsilon$$

נבחר $N > \frac{1}{\varepsilon}$ קיים מארכימדיות, ולכן

$$|1 - \frac{n-1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

טענה: אם a_n מתכנסת אז גבולה יחיד.
הוכחה: נניח בשלילה כי $a \neq b$ שני גבולות של הסדרה.
נבחר $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$. קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$
קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ אבל $\begin{matrix} a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \\ a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \end{matrix}$, בסתירה, כי הסביבות זרות.

$(0,1,0,1,0,1,0,...)$ - נטען: הסדרה מתבדרת.
<u>הוכחה:</u>
נניח בשלילה

$a_n \to a$

עבור $\varepsilon = \frac{1}{3}$, קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ $|a_n - a| < \frac{1}{3}$. קיים $n_1 > N$ כך ש n_1 זוגי - >

$a_{n1} = 1$ - > $\begin{matrix} |1-a| < \frac{1}{3} \Rightarrow \\ a > \frac{2}{3} \end{matrix}$.

מאידך, קיים $n_2 > N$ כך ש n_2 אי זוגי, מכאן $\begin{matrix} a_{n2} = 0 \Rightarrow \\ |a_{n2} - a| = |0-a| = |a| < \frac{1}{3} \end{matrix}$.

עוד דוגמא:
$a_n = \frac{3n+8}{5n+10}$ - נטען –
$a_n \to \frac{3}{5}$. הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$, נבחר $N > \frac{2}{\varepsilon}$, לכל $n > N$,

$$|a_n - \frac{3}{5}| = |\frac{3n+8}{5n+10} - \frac{3}{5}| = |\frac{3n+8-3n-6}{5n+10}| = |\frac{2}{5n+10}| < \frac{2}{n}$$

$$\frac{2}{5n+10} < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

$a_n = \frac{n^2-17}{n^2+n+1}$ נטען $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ נבחר $N > \max\{18, \frac{2}{\varepsilon}\}$ לכל $n > N$

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2-17-n^2-n-1}{n^2+n+1}\right| = \left|\frac{-n-18}{n^2+n+1}\right| = \frac{n+18}{n^2+n+1} <_{n>18}$$

$$< \frac{2n}{n^2+n+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

$a_n = \frac{2n+5}{n^2-3}$, נטען: $a_n \to 0$

<u>הוכחה:</u>

יהי $\varepsilon > 0$, נבחר $N = \max\{2, 5, \sqrt{6}, \frac{6}{\varepsilon}\}$ לכל $n > N$

$$|a_n| =^{n>2} \frac{2n+5}{n^2-3} <^{n>5} \frac{3n}{n^2-3} <^{3>\frac{n^2}{2} \Rightarrow \sqrt{6}<n} \frac{3n}{n^2-\frac{n^2}{2}} = \frac{3n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{6n}{n^2} = \frac{6}{n} < \varepsilon$$

תרגול 5 – 29.11.2005
מתרגל חדש: זיו

zivg@math.huji.ac.il

הערות לתרגיל קודם:
ננסה לנחש גבול של

$$\frac{n+5}{n^2-3} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

עבור $n \geq 2$ אפשר להגיד:

$$n+5 < 4n$$

$$n^2 - 3 \geq \frac{n^2}{4}$$

ולכן:

$$\frac{n+5}{n^2-3} < \frac{16}{n}$$

$$\left|\frac{n+5}{n^2-3} - 0\right| = \frac{n+5}{n^2-3} \leq \frac{16}{n} < \varepsilon$$

הגדרה: סדרה (a_n) מתכנסת ל$a \in R$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים .

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

הגדרה: סדרה שלא מתכנסת נקראת **סדרה מתבדרת**, כלומר לכל $a \in R$ לא מתקיים $a_n \to a$.

הביטוי:
$\lim a_n = a$ אומר:
(א) (a_n) סדרה מתכנסת
(ב) הגבול של (a_n) שווה לa.

$\lim a_n \neq a$ אומר שהיא מתכנסת, אבל לא לa.

$\neg(\lim a_n = a)$ - (a_n) לא מתכנסת
או
(a_n) מתכנסת לגבול שונה מa.

דוגמא: $a_n = n$ (מתבדרת כמובן) לכל a לא מתקיים $a_n \to a$, כי היא לא חסומה, ולכן היא לא מתכנסת.
<u>טענה:</u> תהי (a_n) סדרה מתכנסת אזי (a_n) סדרה חסומה.
הוכחה: יהי a הגבול של הסדרה. יהי $\varepsilon = 1$ אזי קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - a| < 1$ או
$$a - 1 < a_n < a + 1$$

נסמן

$A=\{a_1,...,a_N\}$

$M=\max A$

$m=\min A$

אזי לכל n מתקיים $a_n \le \max\{M,a+1\}$

ומהצד השני:

$a_n \ge \min\{m,a-1\}$

דוגמא: $a_n=(-1)^n$

נניח בשלילה כי $a_n \to l$. אם $a \ne 1$ אזי יהי $e=|l-1|>0$ קיים N כך ש $n>N$,

$|a_n-l|<\varepsilon$, אבל קיים $n>N$ כך ש $a_n=1$ ואז $|a_n-l|=\varepsilon$ בסתירה לכך ש $|a_n-l|<\varepsilon$.

באותו אופן לא יתכן כי $l \ne -1$ וקיבלנו סתירה להנחה ש $a_n \to l$.

הגדרת התכנסות:

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N,\forall n>N,|a_n-a|<\varepsilon$

עוד הגדרות:

לכל N קיים $\varepsilon>0$ שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-a|<\varepsilon$ - לא גורר התכנסות.

לדוגמא: לכל a נבחר $\varepsilon=\max\{|a+1|,|a-1|\}$ אזי לכל n מתקיים $|a_n-n|<\varepsilon$

קיים N (שאינו תלוי ב ε, להבדיל מהגדרת ההתכנסות) כך שלכל $\varepsilon>0$ ולכל $n>N$

$|a_n-a|<\varepsilon$ - גורר התכנסות.

יהי $n>N$ $|a_n-a|<\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$.

כלומר עבור $n>N$ $a_n=a$.

חישובי גבולות:

מה אפשר לעשות עם שורשים?

$a_n \to a \Rightarrow a_n^2 \to a^2$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a-b=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

טענה: תהי (a_n) סדרה כך ש $(a_n)>0$ וגם $a_n \to a$ אזי

$\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$

הוכחה:

נחלק לשני מקרים:

(1) a=0 יהי $\varepsilon>0$, מתקיים $a_n \to a$ ולכן קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$|a_n-0|=|a_n|<\varepsilon^2$

ולכן, לכל $n>N$ מתקיים $|\sqrt{a_n-0}|=\sqrt{a_n}<\varepsilon$

(2) כאשר $a > 0$:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}|\frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} =$$

$$\frac{\sqrt{(a_n)^2 - (\sqrt{a})^2}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}$$

יהי $\varepsilon > 0$ מתקיים $a_n \to a$, ולכן קיים N כך שלכל $n > N$

$$|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$$

ולכן לכל $n > N$ מתקיים:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \le \frac{1}{\sqrt{a}}|a_n - a| < \varepsilon$$

דרך אחרת להוכחה:

$$a_n \to a \Rightarrow a_n - a \to 0 \Rightarrow |a_n - a| \to 0$$

$$0 \le |\sqrt{a_n} - a| \le \frac{1}{\sqrt{a}}|a_n - a|$$

$$0 \to 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}|a_n - a| \to 0$$

ממשפט הסנדוויץ':

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \to 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{a} \to 0$$

$$\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$$

<u>דוגמא:</u>

$$\lim(1 + \frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n \to e$$

$$\sqrt{(1 + \frac{1}{n})^n} \to \sqrt{e}$$

דוגמא 2:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}$$

$$1 < \frac{n+1}{n-1} < 2$$

$$1 = \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} < \sqrt[n]{2} \to 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \to 1$$

אריתמטיקה של גבולות:

$$a_n \to a, b_n \to b$$

$$a_n + b_n \to a + b$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}, b_n \neq 0, b \neq 0$$

דוגמא:

$$\lim \frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} \to \frac{1}{6} =$$

$$\frac{\frac{n^3}{n^3} - \frac{5}{n^3}}{\frac{6n^3}{n^3} + \frac{n^2}{n^3}} = \frac{1 - \frac{5}{n^3}}{6 + \frac{1}{n}}$$

עוד כמה גבולות, בשביל הכייף:

$$\lim \left(\frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} \right)^n$$

$$\frac{n^3 - 3}{6n^3 + n^2} \to \frac{1}{6},$$

$$n > N$$

$$0 \leq \left(\frac{n^3 - 5}{6n^3 + n^2} \right)^n < (\frac{1}{2})^n \to 0$$

טענה: אם $a > 0$ אז $\sqrt[n]{a} \to 1$

נניח $a > 1$ אזי $\sqrt[n]{a} > 1$. נסמן

$$\sqrt[n]{a} = 1+\alpha_n, \alpha_n > 0$$

$$a = (1+\alpha_n)^n \geq_{bernoli} 1+\alpha_n \cdot n$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{n} \geq \alpha_n \geq 0$$

$$\frac{a-1}{n} \to 0$$

$$\frac{a-1}{n} \to 0$$

$$\alpha_n \to 0$$

מאריתמטיקה מתקיים $\sqrt[n]{a_n} = 1+\alpha_n \to 1$.

עבור a=1 ברור.

$$\frac{1}{a} > 1$$

$0 < a < 1$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$$

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} \to \frac{1}{1} = 1$$

תרגול 6, 6.12.2005

ננסח שוב את משפט הסנדביץ':

תהינה $(a_n),(b_n)$ סדרות כך ש $(a_n)\to l\leftarrow(c_n)$ ומתקיים $a_n\le b_n\le c_n$, אזי החל מN מתקיים

$$n>N\Rightarrow(b_n)\to l$$

(ותודה לדינה!)

גבולות חלקיים:

הגדרה: תהיה (a_n) סדרה ותהי (n_k) סדרה של מספרים טבעיים ועולה ממש. הסדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $b_k=a_{n_k}$ היא תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

$$b_k=(a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},...)$$

דוגמא (לא מוצלחת מדי):

$$a_n=(-1)^n$$
$$(-1,1,-1,1,-1,...)$$
$$n_k=k\Rightarrow(-1,1,-1,1,-1,...)$$

$$n_k=2k=(2,4,6,8,...)$$
$$a_{n_k}=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1....)$$
$$n_k=2k^2$$
$$(2,8,18,32,...)$$
$$a_{n_k}=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,...)$$

"יש לנו סדרות – מה טבעי לעשות? לחפש גבולות!"

הגדרה:

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. מספר $a\in R$ הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-a.

עבור $n_k=2k$ הסדרה $a_{n_k}=(1,1,...,)$ מתכנסת ל1 ולכן 1 גבול חלקי של (a_n).

באותו אופן גם -1 גבול חלקי של (a_n).

יהי $|a|\neq 1$. נניח בשלילה כי קיימת תת סדרה (b_k) המתכנסת לa.

לכל k $b_k=1$ או $b_k=-1$. נסמן $\varepsilon=\min(|a-1|,|a+1|)>0$. אזי לכל k

$$|b_k-a|=\begin{cases}|1-a|,b_k=1\\|1+a|,b_k=-1\end{cases}$$
$$|b_k-a|\ge\varepsilon$$

ולכן לא יתכן ש $b_k\to a$ וa לא גבול חלקי.

דוגמא:

$(1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,...)$

קבוצת הגבולות החלקיים היא כל הטבעיים עצמם.

<u>טענה:</u> תהי (a_n) מתכנסת לa אזי a הוא הגבול החלקי היחיד של הסדרה.

<u>הוכחה:</u>

הסדרה עצמה היא תת סדרה של עצמה, המתכנסת לa ולכן a הוא גבול חלקי.

<u>נוכיח יחידות:</u>

תהי (b_k) תת סדרה של (a_n), יהי $(\varepsilon > 0)$ מתקיים $a_n \to a$ ולכן קיים N כך שלכל $n > N$

$|a_n - a| < \varepsilon$

יהי $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרת האינדקסים המתאימה ל b_k, כלומר $b_k = a_{n_k}$. מתקיים $n_k \geq k$. נבחר $K = N$,

אזי לכל $k > K$

$|b_k - a| = \left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon$

(כי $n_k \geq k > K = N$)

<u>משפט (B-W) (בולצאנו ויירסטראס):</u>

תהי (a_n) סדרה חסומה, אזי קיימת ל(a_n) תת סדרה מתכנסת.

<u>מסקנה:</u> תהי (a_n) סדרה חסומה, ונסמן את L כקבוצת הגבולות החלקיים של (a_n).

אזי L קבוצה חסומה, וL לא ריקה, ולכן קיימים supL וinfL.

<u>הגדרה:</u> תהי (a_n) סדרה חסומה ותהי L קבוצת הגבולות החלקיים של (a_n). <u>הגבול העליון</u> של (a_n) הוא supL ומסומן $\limsup a_n$, <u>הגבול התחתון</u> הוא infL ומסומן $\liminf a_n$.

<u>כמה הערות:</u>

1. $\liminf a_n \leq \limsup a_n$
2. לכל גבול חלקי a מתקיים $\liminf a_n \leq a \leq \limsup a_n$.

<u>טענה:</u> סדרה (a_n) חסומה מתכנסת אמ"מ קיים לה גבול חלקי יחיד אמ"מ $\liminf a_n = \limsup a_n$.

$a_n = (-1)^n$

$L = \{-1,1\}$

$\limsup a_n = \sup L = 1$

$\liminf a_n = \inf L = -1$

<u>טענה:</u> תהי (a_n) סדרה חסומה אזי $\limsup a_n$ ו $\liminf a_n$ הם גבולות חלקיים של (a_n).

תרגול 7, 13.12.2005

הגדרה: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותהי L קבוצת הגבולות החלקיים שלה, אזי הגבול העליון של (a_n)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup L$$

לכל n נסמן:

$$A_n = (a_k)_{k=n}^{\infty} = (a_n, a_{n+1}, ...)$$

ויהי $s_n = \sup\{A_n\}$. $\{A_n\} \supseteq \{A_{n+1}\}$ ומכאן $S_n \geq S_{n+1}$.

$(s_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת וחסומה ולכן קיים $\inf\{s_n\} = \lim_{n\to\infty} s_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

פתרון מתרגיל קודם – חשוב גם לנוכחי:

3 . אי שיוויון הממוצעים:

חשוב:

יהיו $x_1,...,x_n > 0$ אזי $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+....+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1+...+x_n}{n}$

$$a_1, b_1 > 0$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$a_n, b_n > 0$$

ולכן:

$$b_{n+1} \leq a_{n+1}$$

.

נראה a_n מונוטונית יורדת:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

נראה b_n מונוטונית עולה:

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$$

לכל $n > 1$ $\begin{matrix} a_n \geq b_n \geq b_2 \\ b_n \leq a_n \leq a_2 \end{matrix}$ ולכן, הסדרות חסומות, ולכן מתכנסות.

נסמן $\begin{matrix} a=\lim a_n \\ b=\lim b_n \end{matrix}$, ידוע שקיים (ראינו השניה), אז

$$a=\lim a_{n+1}=\lim\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{\lim a_n}{2}+\frac{\lim b_n}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{2}\Rightarrow a=b$$

<u>הערות לתרגיל 7:</u>

1.ג, ד. מתוקן.
יהיה שימוש במשפט CESARO ב5.
לשים לב:

$$0<a_n<\frac{3}{4}\Rightarrow a_n{}^n\to 0$$

$$a_n\to\frac{1}{2}\Rightarrow a_n{}^n\to 0;\sqrt[n]{a_n}\to 1$$

בנוסף: $a_n\to 0$ ו b_n חסומה, אז $a_nb_n\to 0$.

$$a_n\to\frac{1}{2},b_n\in B$$

אם $a_n+\frac{b_n}{n}\to\frac{1}{2}$.

$$b_n(a_n)^n\to 0$$

דוגמא:

תהי $a_n\to\frac{1}{2}$ ונגדיר $b_n=a_1\cdot\ldots\cdot a_n$

קיים N כך ש $a_n<\frac{3}{4}$, לכל $n>N$, אז:

$$|b_n| = |a_1 \dots a_N \cdot a_{N+1} \cdot \dots a_n| \le |a_1 \dots a_N| \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} \to 0$$

$$\Rightarrow$$

$$|a_1, \dots, a_n| \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} \to 0 \Rightarrow$$

$$|b_n| \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$$

.

קצת סדרות לא מתכנסות:

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_n = n$$

שתיהן מתבדרות, אבל שונות לחלוטין.

<u>הגדרה:</u> תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הסדרה שואפת ל $+\infty$ אם לכל M קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$.

ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

<u>הגדרה:</u> סביבה של ∞ היא קבוצה מהצורה $\{x : x > M\} = (M, \infty)$.

<u>הערה:</u> $a_n \to +\infty$ אמ"מ בכל סביבה של ∞ נמצאת כמעט כל איברי הקבוצה.

<u>הגדרה:</u> סדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב אם (a_n) סדרה מתכנסת או $\lim a_n = \pm\infty$.

אם (a_n) מתכנסת במובן הרחב אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים:

1. (a_n) מתכנסת
2. $(a_n) \to +\infty$.
3. $(a_n) \to -\infty$

סדרה מתכנסת היא חסומה (לא להפך...). סדרה ששואפת לאינסוף לא חסומה (גם כאן – להפך זה לא נכון). – לדוגמא, הסדרה על שם דינה:

$$d_n = (1,1,2,1,3,1,4,1,\dots)$$

<u>משפט הסנדביץ':</u> תהינה (a_n) ו (b_n) סדרות כך ש $a_n \le b_n$, אז אם $a_n \to \infty$, אזי כמובן $b_n \to \infty$.

בכיוון השני : $b_n \to -\infty$ אז $a_n \to -\infty$.

<u>אריתמטיקה של גבולות אינסופיים:</u>

- סכומים:
  - $a_n \to \infty$, (b_n) חסומה מלרע, אזי $a_n + b_n \to \infty$.
  - אם $(a_n - b_n)$ מתכנסת, אזי $a_n \to \infty$ אמ"מ $b_n \to \infty$.

- מכפלות:
  - אם (a_n) ו (b_n), $b_n \neq 0$ סדרות כך ש $\frac{a_n}{b_n} \to c$ אזי
    - אם $a_n \to \infty$ גורר $b_n \to \infty$
    - אם $b_n \to \infty$ ו $c \neq 0$ גורר $a_n \to \infty$.

<u>קצת על קושי:</u>

סדרה (a_n) נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש $n,m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

<u>טענה:</u> אם (a_n) מתכנסת, אזי (a_n) קושי.

<u>משפט:</u> כל סדרת קושי מתכנסת.

כן, כל סדרת קושי היא מתכנסת. ההוכחה פשוט לא ממש פשוטה. (זיו: "אם לא הבנת את ההוכחה בכיתה, לא תבין גם פה – לא תהיה פה הוכחה").

תרגול 8 - 20.12.2005

תזכורת –

הטור, מיהו:

הגדרה: תהי $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. סדרת הסכומים החלקיים של $\left(a_n\right)$ היא הסדרה $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $s_n := a_1 + ... + a_n$

טענה: תהי $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אז קיימת סדרה (יחידה) $\left(a_n\right)$ כך ש $\left(s_n\right)$ היא סדרת הסכומים החלקיים של $\left(a_n\right)$.

הוכחה:

נגדיר $a_1 = s_1$ ו $a_n = s_n - s_{n-1}$ עבור $n > 1$.

הגדרה:

תהי $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, ו $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרת הגבולות החלקיים שלה. אם $\left(s_n\right)$ מתכנסת (במובן הרחב) אזי נסמן את גבולה ע"י הטור האינסופי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

כלומר: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$$

נשתמש גם בסימון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כדי לייצג את סדרת הסכומים החלקיים $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$.

במקרה זה אפשר לדבר על $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ גם כאשר הסדרה $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת, ונאמר ש $\sum a_n$ מתכנס במקום ש $\left(s_n\right)$ מתכנסת.

דוגמא:

יהי $|q| < 1$ ותהי $a_n = q^{n-1}$ אזי לכל n מתקיים $s_n = \sum_{i=1}^{n} q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

ובמקרה זה $\left(s_n\right)$ מתכנסת :

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$$

סבבה אגוזים.

טענה: כדי שטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***יתכנס,*** $a_n \to 0$.

הוכחה: יהי s גבול של $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$. לכל $n > 1$ מתקיים כי

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$
$$\lim s_n = \lim s_{n-1} = s$$

ולכן:

$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$$

<u>דוגמא:</u>

$\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ מתבדר

מדוע:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1} \neq 0$$

ולכן לא ייתכן שהטור מתכנס.

<u>עוד דוגמא:</u>

עבור $|q| \geq 1$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ מתבדר מאחר והאיבר הכללי לא שואף ל-0.

<u>משפט:</u> סדרה (s_n) מתכנסת אמ"מ (a_n) סדרת קושי – כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N שלכל $m,n > N$ מתקיים:

$$|s_m - s_n| < \varepsilon .$$

גם בטורים, יש לנו התכנסות, ותנאי קושי צריך להתקיים גם בטורים:

<u>מסקנה:</u>

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים (s_n) מתכנסת אמ"מ הסדרה היא סדרת קושי.

כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m > n > N$:

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + ... + a_m| < \varepsilon$$

<u>מסקנה:</u>

1. הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.
2. **2.** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

שתי פעולות פשוטות אפשר לעשות על טורים:

1. כפל בסקלר: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו $r \in R$ ותהי (s_n) סדרת הסכומים החלקיים של (a_n) אזי סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה $(ra_n)_{n=1}^{\infty}$ היא הסדרה $(rs_n)_{n=1}^{\infty}$ ולכן אם הטור $\sum a_n$ מתכנס לA, אזי הטור $\sum ra_n$ מתכנס לrA.

בקצרה:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ra_n)=r\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)$$

2. **חיבור טורים:**

תהינה (a_n) ו (b_n) סדרות ויהיו (s_n) ו (t_n) סדרות הסכומים החלקיים של (a_n) ו (b_n) בהתאמה.

תהי $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת ע"י $c_n=a_n+b_n$.

אזי סדרת הסכומים החלקיים של c_n היא הסדרה $(t_n+s_n)_{n=1}^{\infty}$.

מסקנה: אם $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ מתכנסים לA וB בהתאמה, אזי גם הטור $\sum(a_n+b_n)$ מתכנס ל $A+B$

כלומר: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

תשומת לב בבקשה: הטור $\sum c_n=\sum(a_n+b_n)$ שונה מהטור המתקבל מהסדרה

$$d_n:=(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,...)$$

סדרת הגבולות החלקיים – עבור (c_n):

$$(a_1+b_1,a_1+b_1+a_2+b_2,...)$$

עבור (d_n):

$$(a_1,a_1+b_1,a_1+b_1+a_2,...)$$

דוגמא: עבור $a_n=(-1)^n$ ו $b_n=(-1)^{n+1}$:

$$a_n=(-1,1,-1,...)$$
$$b_n=(1,-1,...)$$
$$c_n=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,...)$$
$$d_n=(-1,1,1,-1,1,1,-1,....)$$

הסכומים החלקיים

עבור (c_n):

$$(0,0,0,0,0,0,)\Rightarrow\sum c_n=0$$

עבור (d_n):

$$(-1,0,1,0,-1,0,....)$$

הטור $\sum d_n$ ***לא מתכנס***.

<u>מבחנים לטורים חיוביים:</u>

<u>הגדרה:</u> $\sum a_n$ חיובי אם $a_n \geq 0$.

<u>הערה:</u> סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה – ועל כן מתכנסת לגבול סופי או שואפת לאינסוף.

- **<u>קריטריון ההשוואה:</u>** יהיו $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ כך ש $a_n \leq b_n$ החל ממקום מסוים:
  - אם $\sum b_n$ מתכנס, אזי $\sum a_n$ מתכנס.
  - אם $\sum a_n$ מתבדר, אזי $\sum b_n$ מתבדר.

<u>מסקנות שימושיות:</u>

1. יהיו $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ טורים חיוביים, כך ש $b_n \neq 0$ החל ממקום מסוים, ויהיו $0 < \alpha \leq \beta$ כך ש

$$\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$$

החל ממקום מסוים אזי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.

2. יהיו $\sum a_n$ ו $\sum b_n$ טורים חיוביים כך שקיים הגבול $\lim \frac{a_n}{b_n}$ והוא חיובי ממש (שונה מאפס), אזי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

<u>דוגמאות:</u>

$$\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

עבור $a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ **ו** $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n}n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

ומאחר והטור ההרמוני מתבדר, אזי גם הטור הזה מתבדר.

עוד שני קריטריונים:

<u>מבחן השורש:</u>

יהי $\sum a_n$ טור חיובי אם קיים $q < 1$ כך ש $\sqrt[n]{a_n} < q$ החל ממקום מסוים אזי הטור מתכנס.

אם $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ כמעט תמיד, אזי הטור מתבדר.

מבחן המנה:

יהי $\sum a_n$ טור חיובי

א. אם קיים $q<1$ כך ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$ החל ממקום מסוים אזי הטור מתכנס.

ב. אם קיים $q\geq 1$ כך ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq q$ החל ממקום מסוים אזי הטור מתבדר.

תרגול 9 – 27.12.2005

חשוב לתרגיל:

כמה הערות לגבי לוג:

$$\log_2\left(a^b\right)=b\log_2\left(a\right)$$
$$\log_2\left(2^x\right)=x$$

הגדרה: טור $\sum a_n$ הוא טור חיובי אם $a_n \ge 0$ לכל n.

אם הטור מתכנס נסמן את הגבול ע"י $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. עבור

$$0<q<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}=\frac{1}{1-q}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס אבל לא קיים $0<q<1$ כך ש $q^n \le \frac{1}{n^2}$ החל ממקום מסוים.

קריטריון ההשוואה: (ראה שבוע קודם)

נשים לב:

אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים חיוביים, אז $\sum\sqrt{a_n b_n}$ מתכנס.

למה?

$\sum a_n$ מתכנס, $\sum b_b$ מתכנס, ולכן גם $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum a_n+\sum b_n\right)$ מתכנס.

מתקיים :

$$\sqrt{a_n b_n}\le\frac{a_n+b_n}{2}$$

ולכן לפי קריטריון ההשוואה הטור $\sum\sqrt{a_n b_n}$ מתכנס..

עוד דרך לתאר את קריטריון ההשוואה:

יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ חיוביים. אם קיימים $0<\alpha\le\beta$ כך ש $\alpha<\frac{a_n}{b_n}\le\beta$ החל ממקום מסויים אזי

$\sum a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum b_n$ מתכנס.

2. אם $\lim\frac{a_n}{b_n}$ קיים וחיובי (ממש! גדול מאפס) אזי $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum b_n$ מתכנס.

דוגמא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n-1}\right)^n$$

מתקיים כי:

$$\lim\frac{2n+1}{4n-1}=\frac{1}{2}$$

ולכן:

$$\left(\frac{2n+1}{4n-1}\right)^n\le\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

החל ממקום מסויים, ומכיוון שהטור $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ מתכנס, אזי גם $\left(\frac{2n+1}{4n-1}\right)^n$ מתכנס (לפי קריטריון ההשוואה).

עוד דוגמא:

$$\sum\binom{2n}{n}^{-1}$$

לפי שאלה 1, הגבול של

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}^{-1}}=\frac{1}{4}$$

ולכן החל ממקום מסויים:

$$\left(\sqrt[n]{\binom{2n}{n}^{-1}}\right)^n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ולפי קריטריון ההשוואה הטור המדובר (אין לי כוח להעתיק) מתכנס.

<u>מבחן השורש:</u>

יהי $\sum a_n$ טור חיובי.

א. אם $\sqrt[n]{a_n}<q$, $0<q<1$ החל ממקום מסוים, אזי הטור מתכנס.

ב. אם $\sqrt[n]{a_n}\ge1$ עבור **אינסוף** n-ים (שכיח!) אזי הטור מתבדר.

מסקנה:

אם $\limsup\sqrt[n]{a_n}<1$ אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס. ואם $\limsup\sqrt[n]{a_n}>1$ הטור מתבדר.

<u>דוגמא:</u>

$$\sum\left(\frac{2n+1}{4n-1}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{2n+1}{4n-1}\to\frac{1}{2}<1$$

ולכן הטור מתכנס .

מבחן המנה:

א. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ עבור $0 < q < 1$ החל ממקום מסוים אזי הטור מתכנס.

ב. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ החל ממקום מסוים **(כמעט תמיד!)** אזי הטור מתבדר.

הערה: למה צריך כאן לדרוש החל ממקום מסוים ולא מספיק עבור אינסוף nים?
לדוגמא,

$$a_n = \begin{Bmatrix} \frac{1}{n^3}, n\_odd \\ \frac{1}{n^2}, n\_even \end{Bmatrix}$$

ואז $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ לכל n ומאחר ו $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס גם $\sum a_n$ מתכנס.

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^3, n\_odd \\ \frac{n^2}{(n+1)^3}, n\_even \end{Bmatrix}$$

לכל n זוגי $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^3}{(n+1)^2} \to \infty$ ובפרט קיימים אינסוף n ים כך ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 2$

<u>מסקנה:</u>

אם $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ הטור מתכנס, ואם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ הטור מתבדר.

<u>דוגמאות:</u>

נסמן $\sum \frac{a^n}{n!}$.

$$a_n = \frac{a^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \to 0$$

ולכן הטור מתכנס.

דוגמא נוספת:

$$\sum \frac{n!a^n}{n^n}, a \neq e$$

$$a_n := \frac{n!a^n}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!a^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$$

ולכן עבור $a < e$ הטור מתכנס, $a > e$ הטור מתבדר. (לתלמיד הרציני : $a = e$ הטור מתבדר, אבל זה מסובך.)

מה היחס בין מבחן המנה למבחן השורש: מבחן השורש יותר **חזק!**

כל טור שמתקיים לגביו מבחן המנה מתקיים לגביו מבחן השורש בוודאות, שכן אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ אזי

$$a_{n+1} \leq q^n a_1$$

ולכן:

$$\sqrt[n]{a_{n+1}} \leq \left(\sqrt[n+1]{q^n}\right)^{n+1} \sqrt{a} \to q$$

ולכן אם מתקיים מבחן המנה מתקיים גם מבחן השורש, אבל **לא עובד בכיוון ההפוך!**

ניקח לדוגמא:

$$0 < q < 1, a_n = \begin{Bmatrix} q^{n+1}, n\_even(zogi) \\ q^{n-1}, n\_odd(lo\_zogi) \end{Bmatrix}$$

מבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{q} > 1, n\_ZOGI \\ q^3 < 1, n\_IZOGI \end{Bmatrix}$$

$$a_{n+1} = q^{(n+1)-1} = q^n$$

$$a_n = q^{n+1}$$

לא יעזור לנו, לעומת מבחן השורש ,שיעזור לנו.

n זוגי: $\sqrt[n]{a_n} = \left\{\sqrt[n]{q} \cdot q\right\} \to q$

n אי זוגי: $\sqrt[n]{\frac{1}{q}} \cdot q$

משפט: תהי (a_n) סדרה חיובית <u>**מונוטונית יורדת**</u> אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

לדוגמא:

$\sum \frac{1}{n \log^n}$ מתבדר. $\frac{1}{n \log n}$ סדרה מונוטונית יורדת ולכן מספיק לבדוק:

$$\sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^n \cdot \frac{1}{2^n \log_2 2^n} = 2^n \frac{1}{2^n n} = \frac{1}{n}$$

שגם מתבדר.

הערה לתרגיל (הקודם ☹) :

$a_n > 0$ צ"ל שאם $\sum a_n$ מתבדר אזי הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

נחלק לשני מקרים:

$\lim a_n = 0$. ואז,

$$b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{\frac{a_n}{1+a_n}} = \frac{1}{1+a_n}$$

לפי קריטריון ההשואה, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

מקרה 2:

מתקיים $\limsup a_n > 0$. תהי $\left(a_{n_k}\right)$ תת סדרה כך ש $l := \lim a_{n_k} > 0$. אזי

$b_{n_k} = \frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} \to \frac{l}{1+l} \neq 0$ ובפרט b_n לא שואפת ל0 ולכן הטור $\sum b_n$ מתבדר.

<u>תרגול 10, 3.1.2006</u>

הגדרה: טור $\sum a_n$ מוגדר חסום אם סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

<u>משפט דיריכלה: (גרסה מחוזקת של משפט לייבניץ):</u>

אם $\left(a_n\right)$ סדרה מונוטונית שואפת ל0 ו $\sum b_n$ טור חסום אז הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס.

(רמז – שימושי בתרגיל החדש)

<u>הארה:</u> הטור $\sum\left(-1\right)^{n+1}$ חסום לכן התכנסות טורי לייבניץ נובעת ממשפט דיריכלה.

<u>פעולות בסיסיות המותרות על טור:</u>

- הכפלה בסקלר (משפיעה על הסכום, לא משפיעה על התכנסות או לא)
- הוספת והורדת סוגריים
- הוספת אפסים
- שינוי סדר הסכימה

<u>טענה:</u> יהי $\sum a_n$ **מתכנס**. יהי $\sum b_n$ טור המתקבל מ $\sum a_n$ ע"י הוספת סוגריים או אפסים, אזי $\sum b_n$ מתכנס לאותו סכום.

<u>הערה:</u> הפוך זה לא עובד .הטור $\left(1-1\right)+\left(1-1\right)+...+$ אבל הטור המקורי $\sum\left(-1\right)^{n+1}$ לא מתכנס.

<u>משפט: (הוצאת סוגריים):</u> יהי $\sum b_n$ טור מתכנס שהתקבל מ $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים כך שבכל זוג סוגריים יש איברים עם אותו סימן, אזי הטור המקורי $\sum a_n$ מתכנס.

<u>משפט: (הוצאת סוגריים) (2) :</u> יהי $\sum b_n$ טור מתכנס שהתקבל מ $\sum a_n$ ע"י הכנסת סוגריים כך שבכל זוג סוגריים יש **<u>מספר חסום של איברים</u>** וכן שמתקיים $a_n\to 0$ אזי אזי $\sum a_n$ מתכנס.

<u>משפט:</u> אם $\sum a_n$ **מתכנס בהחלט** אזי כל טור המתקבל ממנו ע"י שינוי סדר הסכימה **מתכנס בהחלט** לאותו סכום. (פו' פרמוטציה – חח"ע ועל)

הטור $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\left(-1\right)^{n+1}$ הוא טור לייבניץ שמתכנס בתנאי.

מהתרגיל הקודם:

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

אם בשלילה הטור לעיל היה מתכנס אזי גם הטור המתקבל ע"י הכנסת סוגריים סביב כל 3 איברים היה מתכנס.
האיבר הכללי של הטור עם הסוגריים הוא:

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$$

הטור $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ טור מתבדר ולכן לפי קריטריון ההשוואה (לטורים חיוביים!) גם הטור הזה מתבדר ולכן גם הטור בלי הסוגריים מתבדר (בסתירה להנחת השלילה).

<u>משפט ריימן:</u> אם $\sum a_n$ טור מתכנס **בתנאי** אזי לכל S (סופי ואינסופי כאחד) אפשר ע"י שינוי סדר הסכימה לקבל טור המתכנס לS ואפשר ע"י שינוי סדר הסכימה לקבל טור שלא מתכנס.

אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אז סכום האיברים החיוביים שואף ל ∞. סכום השליליים ל $-\infty$.

<u>הערה:</u> $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\ldots\to\infty$. ראינו כי $S_{3N}\to\infty$. יהי $n=3n+r,r=0,1,2$.
לכל s_m מתקיים $s_m\ge s_{3n}-\left|s_{3n+1}\right|-\left|s_{3n+2}\right|\ge S_{3n}-2$.

הטור $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ טור לייבניץ המתכנס לגבול S.
לפי משפט לייבניץ $s\le a_1=1$, ומתקיים

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|<a_2=\frac{1}{2}$$

ולכן $s=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$

נסתכל על הסידור:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\ldots.$$
$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.=$$
$$(2-1)-\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}$$

האיבר הכללי שואף ל0, ומספר המחוברים בכל סוגריים חסום, ולכן גם הטור בלי סוגריים מתכנס לs.

$$s = 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n}\right)$$

תרגול 11, 10.1.2006

פונקציות

הגדרה: תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0, הגבול של f ב x_0 (אם הוא קיים) מוגדר להיות $l := \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x)$. אם $l = f(x_0)$ נאמר ש f **רציפה** ב x_0.

הביטוי $l := \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ פירושו:

לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_o| < \delta$ מתקיים $|f(x) - l| < \varepsilon$.

דוגמאות לחישובי ε, δ:

1. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x^3$ רציפה ב $\frac{1}{2}$.

הוכחה:

נגדיר $x_0 := \frac{1}{2}$. נראה ש $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x^3 = \frac{1}{8}$. יהי $\varepsilon > 0$. נבחר (משאירים מקום כדי למלא)

$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3.25}, 1\right\}$, ואז לכל x המקיים $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$ מתקיים

$$\left|x^3 - \frac{1}{8}\right| = \left|\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|\left|x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right| < \delta \cdot 3.25 \le \varepsilon$$

למה ה $\le$? מותר בגלל שיש קטן ממש משמאלו.

לכן x^3 רציפה ב $\frac{1}{2}$.

חישוב צדדי:

נניח ש $\delta < 1$ (מותר!) אזי

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < 1$$
$$-0.5 < x < 1.5 \Rightarrow$$
$$\left|x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right| \le \left|x^2\right| + \left|\frac{1}{2}x\right| + \frac{1}{4} < 2.25 + 0.75 + 0.25 = 3.25$$

הבטחה של מוריה:

$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot \_$.

הערה:

$$A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$$

עוד דוגמא:

הוכיחו ש $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ רציפה ב 5.

הוכחה:

נראה ש $\lim_{x\to 5}\frac{x+3}{x-2}=\frac{8}{3}\left(=f\left(5\right)\right)$.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\min\left\{1,\frac{6}{3}\varepsilon\right\}$ ואז לכל x המקיים

$$0<\left|x-5\right|<\delta$$

קיים

$$\left|\frac{x+3}{x-2}-\frac{8}{3}\right|=\left|\frac{3x+9-8x+16}{3\left(x-2\right)}\right|=\left|\frac{-5x+25}{3\left(x-2\right)}\right|=\left|\frac{-5\left(x-5\right)}{3\left(x-2\right)}\right|=$$

$$\left|x-5\right|\frac{5}{3}\left|\frac{1}{x-2}\right|<\delta\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\le\varepsilon$$

חישוב צדדי:

נניח ש $\delta\le 1$. כלומר $\left|x-5\right|\le 1\Rightarrow 4<x<6$.

$$2<x-2<4\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{x-2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{1}{x-2}\right|<\frac{1}{2}$$

עוד דוגמא של ε,δ:

הוכיחו ש $f\left(x\right)=\frac{x-1}{x^2+2x+1}$ רציפה ב0.

הוכחה:

נראה ש $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2+2x+1}=-1=f\left(0\right)$.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{14}\right\}$.

ואז לכל x המקיים $\left|x-0\right|<\delta$ קיים

$$\left|\frac{x-1}{x^2+2x-1}-\left(-1\right)\right|=\left|\frac{x-1+x^2+2x+1}{x^2+2x+1}\right|=\left|\frac{x^2+3x}{\left(x+1\right)^2}\right|=$$

$$\left|x\right|\left|\frac{x+3}{\left(x+1\right)^2}\right|<\delta\cdot 3.5\cdot 4=14\delta\le\varepsilon$$

חישוב צדדי:

נניח $\delta\le\frac{1}{2}$, אזי

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\left|\frac{x+3}{(x+1)^2}\right|=|x+3|\left|\frac{1}{(x+1)^2}\right|$$

$$0.5<x+1<1.5$$

$$\frac{1}{4}<(x+1)^2<\frac{9}{4}$$

$$\frac{4}{9}<\frac{1}{(x+1)^2}<4$$

$$\left|\frac{1}{(x+1)^2}\right|<4$$

__הוכיחו/הפריכו:__

1. אם f רציפה ב x_0, אז גם $f^2x=\left[f(x)\right]^2$ רציפה ב x_0? נכון. למה? מכפלה של שתי פונקציות רציפות גם רציפה.
2. אם f^2 (כנ"ל) רציפה ב x_0, האם גם f רציפה ב x_0? לא (אומרת לנו דינה, ללא אופציה להרהר)! לדוגמא:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\ge 0\\ -1, x<0\end{cases}$$

לא רציפה, אבל f^2 רציפה. (דוגמת דינה)

דוגמא (2):

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ -1, x\notin Q\end{cases}$$

f לא רציפה בשום נקודה, אבל f^2 רציפה תמיד.

__מאמר מוסגר:__ איך מראים שפו' לא רציפה? נראה ש $D(x)$ לא רציפה ב0.

הגדרת הרציפות:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)|x-0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\varepsilon$$

שלילה:

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x)\left(|x-0|<\delta\wedge|f(x)-f(0)|\ge\varepsilon\right)$$

נבחר $\varepsilon=\frac{1}{062899505}$. ואז, $\forall\delta>0$, יש $0<x<\delta$ אי רציונלי (נובע מהצפיפות של המספרים האי-רציונליים), ואז:

$|x-0|<\delta$ אבל $|f(x)-f(0)|=|0-1|=1\ge\varepsilon$ ולכן D לא רציפה בQ.

3. אם $f(x)$ רציפה ב x_0 וגם $g(x)$ רציפה ב x_0 אז $f\cdot g$ רציפה ב x_0. נכון – מכפלה של פונק' רציפות.

4. אם $f\left(x\right)$ ו $f\cdot g\left(x\right)$ רציפות ב x_0 אז גם $g\left(x\right)$ רציפה ב x_0. **<u>לא נכון</u>** - $g\left(x\right)=D\left(x\right)$. $f\left(x\right)=0$. אז $f\cdot g$ היא הפונקציה הקבועה 0, אבל g לא רציפה.
5. אם $f\left(x\right)$, $fg\left(x\right)$ רציפות ב x_0 ובנוסף לכך יש סביבה של x_0 שבה f לא מתאפסת אז g רציפה ב x_0. **<u>נכון.</u>** הערה: מספיק להניח ש $f\left(x_0\right)\neq 0$, ואז מרציפות f נובע שיש סביבה של x_0 שבה f לא מתאפסת .

<u>תרגיל חדש, שאלה 3 - הסבר</u>

הפונקציה מוגדרת ב$\left[0,1\right]$. ב0 היא 0, ובאמצע מתנדנדת בין $-1,1$, עם תנודות שהולכות ונהיות צפופות.

תרגול 12, 17.1.2006

סדרה (a_n) היא פונקציה

$$a : N \to R$$
$$a(n) = a_n$$

L הוא גבול של a ב ∞ כאשר n "קרוב" ל ∞ $a(n)$ "קרוב" ל L.

עבור $f : R \to R$ L הוא גבול של f באינסוף כאשר x "'קרוב" ל ∞ מתקיים $f(x)$ "קרוב" ל L.

L הוא גבול של f ב x_0 אם כאשר x קרוב ל x_0 (אך שונה ממנו) $f(x)$ קרוב לL.

__הגדרה:__ f רציפה ב x_0 אמ"מ $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

__מיון נקודות אי רציפות:__

- **__סליקה:__** קיים גבול, ושונה מהערך. סליקה – 'קל לסלק'. איך ? אם x_0 סליקה, נגדיר את :

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x), x = x_0 \end{cases}$$

- אי רציפות מסוג **__ראשון__**: קיימים גבולות חד צדדיים מימין ומשמאל, והם שונים (לדוגמא):

$$f(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$$

- אי רציפות מסוג **__שני:__** לפחות אחד מהגבולות החד צדדיים לא קיימים **__במובן הצר__**. דוגמאות:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

דוגמא נוספת: הפונקציה :

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in Q \\ -x, x \notin Q \end{cases}$$

__הגדרה:__ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ אמ"מ : לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל x כך ש $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

__וגם ע"פ HIENE:__

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ אמ"מ **__לכל__** סדרה (x_n) **__בתחום__** (ע"פ דוד: dom_f)כך ש $x_n \to x_0$ ו $x_n \neq x_0$ מתקיים $f(x_n) \to L$.

תרגול 13, 24.1.2006

1. פונקציית ריימן:

$$f\left(x\right)=\begin{Bmatrix}\frac{1}{q},x\in Q,x=\frac{p}{q}\\ 0,otherwise\end{Bmatrix}$$

הפונקציה רציפה אך ורק בנקודות אי רציונליות $\lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=0$.

משפט ערך הביניים:

תהי $f:\left[a,b\right]\to R$ רציפה, אזי לכל y בין $f\left(a\right)$ ל$f\left(b\right)$ קיים $x\in\left[a,b\right]$ כך ש$f\left(x\right)=y$.

נקודת השבת:

תהי $f:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ רציפה, אזי קיימת ל f נקודת שבת, כלומר קיימת $x_0\in\left[0,1\right]$ כך ש $f\left(x_0\right)=x_0$.

דוגמאות לזה שאי אפשר להחליש:

זה לא עובד ב$\left(0,1\right)$ - לדוגמא ב $f\left(x\right)=\frac{x}{2}$. עבור $f:\left[0,\infty\right)\to\left(0,\infty\right)$ המוגדרת ע"י $f\left(x\right)=x+1$ אין נק' שבת.

הוכחה: אם $f\left(0\right)=0$ או $f\left(1\right)=1$ אזי הטענה נכונה. אחרת, $f\left(0\right)>0$ ו$f\left(1\right)<1$ ונגדיר $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$. g סכום של פונקציות רציפות ולכן רציפה ומתקיים $g\left(0\right)=f\left(0\right)>0$ ו $g\left(1\right)=f\left(1\right)-1<0$.

לפי משפט ערך הביניים לכל ערך $g\left(1\right)<y<g\left(0\right)$ קיים $x_0\in\left[0,1\right]$ כך ש y ש $f\left(x_0\right)=y$.

בפרט קיים $x_0\in\left[0,1\right]$ כך ש $g\left(x_0\right)=0$ $f\left(x_0\right)=x_0$.

נתבונן בפו' $g\left(x\right)=x-f\left(x\right)$ באותו קטע $\left[0,1\right]$. g רציפה כי היא הפרש של פו' רציפות. $g\left(0\right)=0-f\left(0\right)\le 0$ וגם $g\left(1\right)=1-f\left(1\right)\ge 0$. מתכונת ערך הביניים חייב להיות x בו $g\left(x\right)=0$, ועל כן $f\left(x\right)$ באותה נקודה יהיה זהה לx. מ.ש.ל.

גבולות אינסופיים של פונקציות (גבולות במובן הרחב)

$a_n\to\infty$, אם לכל M קיים N כך שלכל $n>N \Leftarrow a_n>M$.

מאוד דומה גם בפונקציות.

הגדרה: תהי $f:R\to R$ ו$x_0\in R$ אזי $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\infty$ אם לכל M קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ מתקיים $f\left(x\right)>M$. אותו דבר גם במינוס אינסוף.

הגדרה: תהי $f:R\to R$ אזי $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=l$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים k כך שלכל $x>k$ x מתקיים $\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon$.

נגיד $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\infty$ אם לכל M קיים k כך שלכל $x>k$ מתקיים $f\left(x\right)>M$.

רציפות במידה שווה (במ"ש)

f רציפה ב x_0 אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

(נזכור – כאן ה δ תלוי רק ב ε, ולא ב x_0).

דוגמאות:

1. יהי $\varepsilon>0$ עבור $f(x)=1$ אזי כל $\delta>0$ מתאים (לא תלוי ב x_0).
2. עבור $f(x)=x$, כל $\delta\le\varepsilon$ תתאים.
3. עבור $f(x)=x^2$ ועבור $x_0>0$ אזי לכל $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{2x_0+1}\right)$ מתקיים

$|x-x_0|<\delta$ ועל כן $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$ ועל כן אין רציפות במידה שווה שכן ה δ תלויה ב x_0.

טענה: לא קיים $\delta>0$ שלא תלוי ב x_0. **הוכחה:** נניח בשלילה כי קיים δ כזו. אזי עבור $\varepsilon=1$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0\in R$ ו x כך ש $|x_0-x|<\delta$ היה מתקיים $|f(x_0)-f(x)|<1$. בפרט עבור $x_0=\dfrac{2}{\delta}$ ו $x=\dfrac{2}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}$ מתקיים $|x-x_0|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$

אבל $|f(x)-f(x_0)|=|(x-x_0)(x+x_0)|=\dfrac{\delta}{2}\left(\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}\right)=1+\dfrac{\delta^2}{4}>1$.

הגדרה: $f:D\to R$ רציפה במ"ש אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0\in D$ ולכל $x\in D$ כך ש $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

הערה: $f(x)=1$ ו $f(x)=x$ רציפות במידה שווה על R.

$f(x)=x^2$ לא רציפה במידה שווה על R.

אבל, בואו נסתכל על $f:[0,1]\to R$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^2$ אזי f רציפה במ"ש ב$[0,1]$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ אזי עבור $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$. מתקיים לכל $x_0,x\in[0,1]$ כך ש $|x-x_0|<\delta$

אזי $|f(x)-f(x_0)|=|x^2-x_0^2|\Rightarrow|x-x_0||x+x_0|<2\delta=\varepsilon$.

משפט: פונקציה רציפה **בקטע סגור** רציפה במ"ש שם.

דוגמא: לכל $1>a>0$ הפונקציה $f(x)=\dfrac{1}{x}$ רציפה במ"ש בקטע $[a,1]$.

טענה: $\dfrac{1}{x}$ לא רציפה במ"ש בקטע $(0,1]$. **הוכחה:** נניח בשלילה ש f במ"ש, ויהי $\varepsilon=1$ אזי קיים $\delta>0$ כך ש $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<1$. נבחר $x_0=\min\left\{\dfrac{1}{2},\delta\right\}$,

ו $x=\dfrac{x_0}{2}$ אזי $|x-x_0|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$ אבל $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{2}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ge 2$. סתירה.

<u>תרגול 14, 31.1.2006</u>

<u>טענה:</u> תהי $f:[a,b]\to R$ רציפה וחח"ע אזי f מונוטונית.

<u>הוכחה:</u> נניח בה"כ כי $f(a)<f(b)$. נראה ראשית כי לכל $a<x\le b$ מתקיים $f(a)<f(x)$, אחרת קיים $a<x$ כך ש $f(x)<f(a)<f(b)$ אבל f רציפה בקטע $[x,b]$ ולכן ממשפט ערך הביניים מקבלת כל ערך בין $f(x)$ ל $f(b)$ ובפרט נקבל את הערך $f(x)$ בסתירה לחח"ע של f.

נראה שלכל $a\le x<y\le b$ מתקיים $f(x)<f(y)$ אחרת יהיו $x<y$ כך שמתקיים $f(a)<f(y)<f(x)$ אבל שוב קיים $a<c<x$ כך ש $f(c)=f(y)$ בסתירה לחח"ע של f.

<u>הערה:</u> הטענה נכונה גם עבור $f:(a,b)$.

<u>הוכחה:</u> ניקח $a<\alpha<\beta<b$ ונניח $f(\alpha)<f(\beta)$. נראה שלכל $x<y$ מתקיים $f(x)<f(y)$.

נניח על דרך השלילה שלא, ויהיו $x<y$ כך ש $f(x)>f(y)$ (אי שיוויון חזק בגלל החח"ע) אזי f פונקציה רציפה חח"ע בקטע $\left[\min\{\alpha,x\},\max\{\beta,y\}\right]$ ו x,y,α,β שייכים לקטע ולכן y לא מונוטונית בסתירה לטענה הקודמת.

<u>מסקנה:</u> פונקציה $f:[a,b]\to R$ או $f:(a,b)\to R$ או כל שילוב אפשרי של פתוח וסגור רציפה והפיכה היא מונוטונית.

<u>הערה:</u> כמובן שהמסקנה **<u>לא נכונה</u>** אם תחום ההגדרה אינו קטע.

<u>טענה:</u> אם $f:R\to R$ רציפה ומקיימת $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty\wedge\lim\limits_{x\to a^*}f(x)=-\infty$ אזי f מקבלת כל ערך. (בעצם הרחבונת של משפט ערך הביניים)

<u>הוכחה:</u> יהי $y\in R$ אזי מתקיים $\lim\limits_{x\to a^+}=-\infty$ ולכן קיים $a<\alpha$ כך שלכל $x\le\alpha$ מתקיים $f(x)<y$.

מתקיים גם ש $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$ לכן קיים $\beta<b$ כך ש $f(\beta)>y$.

f רציפה בקטע $[\alpha,\beta]$ ולכן מקבלת כל ערך בין $f(\alpha)<y$ ל $f(\beta)>y$ ובפרט מקבלת את הערך y.

<u>טענה:</u> תהי f פונקציה רציפה ואי שלילית שמתקיים $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ אזי f מקבלת מקסימום.

אם $f(x)=0$ לכל x הטענה ברורה. אחרת קיים x_0 כך ש $f(x_0)>0$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ ולכן קיים M כך שלכל $x>M$, $f(x)=|f(x)|<f(x_0)$

ולכל $x<-M$ מתקיים $f(x)<f(x_0)$.

כמובן **שלא** מתקיים $f(x_0)<f(x_0)$ ולכן $-M\le x_0\le M$. לא רציפה בקטע הסגור $[-M,M]$ ולכן קיים $y\in(-M,M)$ בו ל f יש מקסימום ומאחר ש $x_0\in[-M,M]$ אזי $f(y)\ge f(x_0)$. אזי לכל $x\in[-M,M]$ מתקיים $f(y)\ge f(x)$ לכל

ולכן $f(x)<f(x_0)\le f(y)$ מתקיים $x<-M$ ולכל $f(x)<f(x_0)\le f(y), x>m$ y מקסימום של f על כל הישר.

מסקנה: תהי $f:R\to R$ ומקיימת $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ אזי f מקבלת מקסימום או מינימום (או שניהם).

הוכחת המסקנה: $|f|$ פונקציה רציפה אי שלילית ומקיימת $\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=0$ ולכן קיים ל $|f(x)|$ מקסימום x_0, כלומר לכל x מתקיים

$$|f(x)|\le f(x_0)\Rightarrow$$
$$-|f(x_0)|\le f(x)\le |f(x_0)|.$$

אם $f(x_0)=|f(x_0)|$ אזי x_0 נקודת מקסימום של f, אחרת $f(x_0)=-|f(x_0)|$ אזי x_0 נקודת מינימום של f.

התלמיד הרציני ישים לב ש $|f(x_0)|=-|f(x_0)|$ אך ורק אם מדובר בפונקציה הקבועה 0.

הגדרה: $f:D\to R$ רציפה במידה שווה בD אם לכל ε קיים δ כך שלכל $x,y\in D$ כך ש $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. נשים לב שכאן ה δ הוא פונקצייה של ε ולא של x,y!!!.

משפט: פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה במידה שווה שם.

דוגמת דינה: (שאלה של דינה) - באתר של דינה .

טענה: תהי $f:(a,b)\to R$, ויהי $\varepsilon>0$. (a,b במובן הרחב – גם אינסופים) אם קיים $a<c<b$ וקיימים δ_1,δ_2 כך שלכל $x,y\in(a,c]$ כך ש $|x-y|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ ולכל $x,y\in[c,b)$ כך ש $|x-y|<\delta_2$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ אז קיים $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ כך שלכל $x,y\in(a,b)$ כך ש $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<2\varepsilon$.

הוכחה: עבור $x<c<y$ כך ש $|x-y|<\delta$ מתקיים

$$|x-c|<|x-y|<\delta\le\delta_1\Rightarrow$$
$$|f(x)-f(c)|<\varepsilon$$
$$|c-y|<\delta_2\Rightarrow|f(c)-f(y)|<\varepsilon\Rightarrow$$
$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(c)|+|f(c)-f(y)|<2\varepsilon$$

מסקנה 1: תהי $f(a,b)\to R$ ויהי $a<c<b$ כך ש f רציפה במ"ש ב $(a,c]$ וב $[c,b)$ אז f רציפה במ"ש בכל הקטע.

מסקנה 2: א. $f:[a,\infty)$ רציפה וקיים הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ (במובן הצר) אז f רציפה במ"ש .

ב. אם $f:R\to R$ רציפה וקיימים הגבולות $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ו $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (במובן הצר) אזי f רציפה במ"ש.

הגדרה: יהי $\alpha>0$. פונקציה $f:D\to R$ מקיימת את תנאי הולדר מסדר α ב $-D$ אם קיים קבוע M כך שלכל $x,y\in D$ מתקיים

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le M\left|x-y\right|^{\alpha}$$

הגדרה: כל פונקציה המקיימת את תנאי הולדר מסדר 1 נאמר שהיא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

דוגמא: $f(x)=x^2$ מקיימת את תנאי ליפשיץ בקטע $[0,1]$. הוכחה:

$$\left|f(x)-f(y)\right|=\left|x-y\right|\left|x+y\right|\le 2\left|x-y\right|$$

דוגמא 2:

$f(x)=x$ מקיימת את תנאי ליפשיץ על כל הישר.

טענה: אם f מקיימת את תנאי הולדר מסדר α עם קבוע M אזי f רציפה במ"ש בו.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ונסמן $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ אזי לכל x,y כך ש $\left|x-y\right|<\delta$ מתקיים

$\left|f(x)-f(y)\right|\le M\cdot\left|x-y\right|^{\alpha}<m\delta^{\alpha}=\varepsilon$.

הערה: לא כל פונקציה רציפה במידה שווה היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

הוכחה: $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה ב$[0,1]$ ולכן רציפה במ"ש שם, אבל לא מקיימת שם את תנאי ליפשיץ.

יהי $M>1$ ויהיו

$$0<x\ne y<\frac{1}{(2M)^2}$$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right|=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}>\frac{1}{\frac{1}{2M}+\frac{1}{2M}}=M$$

לכן δ לא מקיימת את תנאי ליפשיץ עם הקבוע M אבל זה נכון לכל $M>1$ שנבחר ולכן f לא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

בואו ונגזור אל תוך הלילה:

נגזרות

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה של x_0. הנגזרת של f ב x_0 היא הגבול:

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ואם הגבול קיים נסמנו $f'(x_0)$.

דוגמא:

$f(x)=|x|$. $x_0=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases}+1, x>0\\ -1, x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$

ולכן הגבול לא קיים ו f לא גזירה ב0.

פתרון ל6 א – בואו ונראה אם נכון:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2\lim_{h\to\infty}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}=2f'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=f'(x_0)$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right)=2f'(x_0)+f'(x_0)=3f'(x_0)$$

נקודה חשובה!!!!!!: אי אפשר לעשות כמו שעשיתי, להניח שאפשר לפתוח את $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right)=$, אלא חייבים להראות שכל אחד מהמחוברים הוא נגזרת כשלעצמו (גבול), ורק אז להגיד שהשלם הוא גם גבול. חשוב!

כללי גזירה:

יהיו f,g גזירות ב x_0 אז:

- $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
- $c\in R,(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
- אם $g(x_0)\neq 0$ אז $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

- כלל השרשרת: אם h גזירה ב $f\left(x_0\right)$ אזי $h\circ f$ גזירה ב x_0 ומתקיים $\left(h\circ f\right)'\left(x_0\right)=h'\left(f\left(x_0\right)\right)f'\left(x_0\right)$.

<u>משפט רול:</u> תהי $f:\left[a,b\right]\to R$ רציפה וגזירה ב $\left(a,b\right)$ וגם $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ אזי קיים $a<c<b$ כך ש $f'\left(c\right)=0$

<u>משפט לגרנג': (משפט ערך הממוצע)</u>: תהי $f:\left[a,b\right]\to R$ רציפה וגזירה ב $\left(a,b\right)$ אזי קיים בין $a<c<b$ כך ש $f'\left(c\right)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$

<u>טענה:</u> ל x^5+x^3+10x יש בדיוק שורש אחד.

<u>הוכחה:</u> צ"ל כי יש לפחות שורש אחד – ע"פ השאפה למינוס ופלוס אינסוף ומשפט ערך הביניים.

נניח בשלילה כי ל $p\left(x\right)$ יש שני שורשים שונים, $x<y$ אזי לפי משפט רול קיים $x<c<y$ **<u>כך ש</u>**

$$p'\left(c\right)=0$$
$$p'\left(x\right)=5x^4+3x^2+10$$
$$p'\left(c\right)=5c^4+3c^2+10>0$$

בסתירה.

<u>טענה:</u> לכל x,y $\left|arctgx-\arg tgy\right|\le\left|x-y\right|$

<u>הוכחה:</u>

$$arctg'x=\frac{1}{1+x^2}$$

לפי משפט לגרנג', קיים c בין x ל y כך ש $\left|\dfrac{artgx-\operatorname{ar}tgy}{x-y}\right|=f'\left(c\right)=\dfrac{1}{1+c^2}\le1$

ולכן $\left|arctgx-\arg tgy\right|\le\left|x-y\right|$