<u>אלגברה ליניארית 1 – הרצאות - פרופ' ריבס, סמסטר א' , 2005 – 2006</u>

הי,

בעקבות בקשות רבות, החלטתי לשתף את הסיכומים שלי לטובת הכלל (לא התחלתי לכתוב מראש במחשב במחשבה שזה יעזור לעוד אנשים – פשוט אחרי היום הראשון בסמסטר, נזכרתי שאני לא מבין את כתב היד שלי, והתחלתי לכתוב במחשב).

אני מקווה שהמחברת תעזור לעוד רבים – אבל אני חייב להעיר: יתכן, ואפילו סביר, שיש בה טעויות. **אני לא לוקח אחריות** לאף ציון שתקבלו בגלל המחברת הזו. אם מצאתם טעות, אני אשמח אם תעדכנו אותי באימייל.

להערות/הארות/תיקונים : shuaavi@gmail.com

אבי שוע

<u>שיעור 1</u>

הגדרות:

<u>קבוצות מספרים:</u>

טבעיים $N - \{1,2,3,\ldots\}$

קיים פיתרון מתוך הקבוצה לחיבור ולכפל , אין בהכרח פתרון לחיסור. למשל: $x+2 = 1$ – אין פתרון.

שלמים $Z - \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

קיים פתרון מתוך הקבוצה לחיסור, אין בהכרח פתרון לחילוק:

$\mathbf{2x = 3}$

המספרים הרציונליים:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

הגדרות:

<u>שיוויון:</u>

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ כאשר $ad = bc$.

<u>פעולות:</u>

<u>נניח</u>

$$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$
$$b, d \neq 0$$

<u>פעולת חיבור:</u>

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

<u>פעולת כפל:</u>

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

בדיקה – האם הכפל מוגדר היטב?

נניח כי $ad=bc$, נכפיל במספר נוסף, ונראה האם תוצאת ההכפלה אינה תלויה בהצגה.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ae}{bf}, \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ce}{df}$$

על פי הגדרת המספרים הרציונליים:

$$\frac{ae}{bf} = \frac{ce}{df} \Leftrightarrow ae \cdot df = ce \cdot bf$$

מתכונות המספרים השלמים, ניתן לשנות סדר:

$$adef = bcef$$
$$ad = bc, ef = ef$$ מ.ש.ל

אקסיומות המספרים הרציונליים:

<u>חיבור</u>

1. **קשירות**: לכל $m,n\in Q$ קיים $k\in Q$ יחיד כך שm+n = k.
2. **קוממוטטיביות (חילופיות):** לכל $m,n\in Q$ אזי m+n = n+m
3. **אסוציאטיביות (קיבוץ):** לכל $m,n,k\in Q$ אזי (m+n)+k = m+(n+k)
4. **קיום 0:** לכל $m\in Q$ אזי m+0 = m
5. **קיום נגדי:** לכל $m\in Q$ קיים איבר יחיד המסומן m– כך ש m+(-m) = 0.

<u>כפל</u>

1. **קשירות:** לכל $m,n\in Q$ קיים $k\in Q$ יחיד כך ש $m\cdot n=k$
2. **קוממוטטיביות (חילופיות):** לכל $m,n\in Q$ אזי $m\cdot n=n\cdot m$
3. **אסוציאטיביות (קיבוץ):** לכל $m,n,k\in Q$ אזי $\underline{(m\cdot n)\cdot k=m\cdot(n\cdot k)}$
4. **קיום 1:** קיים איבר יחיד המסומן 1 כך שלכל $m\in q$ מתקיים $m\cdot 1=m$
5. **קיום הפכי:** לכל $m\in Q, m\neq 0$ קיים איבר יחיד המסומן m^{-1} כך ש $m\cdot m^{-1}=1$

<u>חוק הדיסטרביוטיביות</u>

לכל $m,n,k\in Q$ מתקיים $m\cdot(n+k)=mn+mk$

<u>הוכחות</u>

- נראה כי קוממוטטיביות החיבור בQ נובעת מקוממובטטיביות בZ(שלמים).

נניח: $\begin{matrix} a,b,c,d\in Z \\ b,d\neq 0\end{matrix}$

צ"ל $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

1. $\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ על פי הגדרת החיבור בQ
2. $\frac{da+cb}{db}$ נובע מכך ש $a,b,c,d\in Z$, ובZ הכפל חילופי
3. $\frac{cb+da}{db}$נובע מכך ש $a,d\in Z$ ולכן $da\in Z$ (סגירות לכפל), $c,b\in Z$ ולכן $cb\in Z$ (סגירות לכפל כנ"ל), ובZ החיבור חלופי (da+cb=cb+da).
4. $\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ על פי הגדרת הכפל מ.ש.ל

<u>תכונות:</u>

- **קיים פתרון <u>יחיד</u> למשוואה m+x=n**

הוכחת קיום:

1. קיים איבר יחיד המסומן ב-m- המקיים m+(-m) = 0 (קיום נגדי)
2. ניקח x=n+(-m) ונראה כי x זה פותר את המשוואה:

- m+x=m+(n+(-m))
- =m+((-m)+n) על פי קוממוטטיביות החיבור
- =m+(-m)+n על פי אסוציאטיביות החיבור
- =0+n על פי קיום הנגדי
- =n על פי קיום ה0

הוכחת יחידות:

(הוכחה בשלילה) נניח שקיים $y \in Q$ המקיים m+y=n

1. m+y+(-m) = n+(-m) יחידות החיבור
2. m+(-m)+y = n+(-m) ע"פ קוממוטיביות
3. y=n+(-m) על פי קיום הנגדי.

מצאנו כי y זהה לn+(-m), כלומר לפתרון היחידי. מ.ש.ל.

קיים פתרון יחיד למשוואה $m \cdot x = n$

הוכחת קיום:

1. קיים איבר יחיד המסומן m^{-1} המקיים $(m \cdot m^{-1}) = 1$ (ע"פ קיום הופכי). ניקח $x = n \cdot m^{-1}$.
2. $m \cdot x = m \cdot (n \cdot m^{-1})$ (הצבה)
3. $m \cdot (m^{-1} \cdot n)$ על פי קוממוטטיביות
4. $(m \cdot m^{-1}) \cdot n$ על פי אסוציאטיביות
5. $1 \cdot n$ על פי קיום הנגדי
6. n על פי קיום ההפכי

הוכחת יחידות:

נניח שקיים $y \in Q$ המקיים $m \cdot y = n$

1. $m \cdot y \cdot m^{-1} = n \cdot m^{-1}$ יחידות הכפל
2. $m \cdot m^{-1} \cdot y = n \cdot m^{-1}$ על פי קוממוטטיביות
3. $1 \cdot y = n \cdot m^{-1}$ על פי קיום ההפכי
4. $y = n \cdot m^{-1}$ על פי קיום ה1. מ.ש.ל.

עוד הוכחה:

- $m, n \in Q$, $(m \cdot n)^{-1} = n^{-1} \cdot m^{-1}$

1. מיחידות האיבר ההופכי מספיק להראות ש$(m \cdot n) \cdot (n^{-1} m^{-1}) = 1$
2. $= m \cdot (n \cdot (n^{-1} \cdot m^{-1}))$ אסוציאטיביות
3. $= m \cdot ((n \cdot n^{-1}) \cdot m^{-1})$ אסוציאטיביות
4. $= m \cdot (1 \cdot m^{-1})$ קיום ההפכי
5. $= m(m^{-1})$ קיום ה1
6. $= 1$ קיום ההפכי. מ.ש.ל.

משוואות ליניאריות:
פתירת משוואה: מציאת ישרים העונים על המשוואה.

$2x+3y = 5$ אין סוף פתרונות

$2x+3y=5$
$x-y = 0$ פתרון יחיד

$x+y=2$
$2x+2y = 3$ אין פתרון

משוואה מכילה:

1. מקדמים
2. איברים חופשיים
3. ערכים של הנעלמים.

<u>שדות</u>

1. קבוצה F.
2. ב-F מוגדרות פעולות של חיבור וכפל
3. פעולות החיבור והכפל מקיימות את האקסיומות של שדה, שהן:

אקסיומות השדה:

<u>חיבור</u>

1. **קשירות** (סגירות) : לכל $m,n \in F$ קיים $k \in F$ יחיד כך ש $m+n = k$.
2. **קוממוטטיביות (חילופיות):** לכל $m,n \in F$ אזי $m+n = n+m$
3. **אסוציאטיביות (קיבוץ):** לכל $m,n,k \in F$ אזי $(m+n)+k = m+(n+k)$
4. **קיום** 0_F**:** לכל $m \in F$ אזי $m + 0_f = m$
5. **קיום נגדי:** לכל $m \in F$ קיים איבר המסומן $-m$ כך ש $m + (-m) = 0_F$.

<u>כפל</u>

1. **קשירות(סגירות):** לכל $m,n \in F$ קיים $k \in F$ **יחיד** כך ש $m \cdot n = k$
2. **קוממוטטיביות (חילופיות):** לכל $m,n \in F$ אזי $m \cdot n = n \cdot m$
3. **אסוציאטיביות (קיבוץ):** לכל $m,n,k \in F$ אזי $\underline{(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)}$
4. **קיום** 1_F: קיים איבר יחיד המסומן 1_F כך שלכל $m \in F$ מתקיים $m \cdot 1_F = m$
5. **קיום הפכי:** לכל $m \in F, m \neq 0_F$ קיים איבר יחיד המסומן m^{-1} כך ש $m \cdot m^{-1} = 1$

<u>חוק הדיסטרביוטיביות</u>

לכל $m,n,k \in F$ מתקיים $m \cdot (n + k) = mn + mk$

בנוסף נדרוש כי $0_F \neq 1_F$

במידה ומתקיימות הדרישות, F נקרא שדה (FIELD)

דוגמאות של שדות:

1. Q – שדה המספרים הרציונליים. $\frac{a}{b}$
2. R – שדה המספרים הממשיים.

מה זה מספר ממשי?
אנו מתייחסים למספרים ממשיים כאל פיתוחים עשרוניים (בין שהוא סופי, ובין שהוא נמשך לאין קץ).
$\Pi = 3.1415926$ ממשי, לא רציונלי
$0.33333 = \frac{1}{3}$, רציונלי, ממשי
כל מספר מחזורי הוא רציונלי, ולהפך.

המספרים הרציונליים משתלבים בתוך המספרים הממשיים בתור פיתוחים עשרוניים **מחזוריים**.
1.000000000000000000… = 0.999999999999…
<u>למספר ממשי יכולים להיות שני פיתוחים עשרוניים **שונים**.</u>

3. $F_2 = \{0,1\}$ - נקרא גם שדה שארות מודולו 2
נגדיר פעולת חיבור נוסף, בגלל שפעולת החיבור לא מקיימת את הסגירות.
חיבור מודולו 2:

$$0 +_2 = 0$$
$$0 +_2 = 1$$
$$1 +_2 0 = 1$$
$$1 +_2 1 = 0$$

עונה לדרישות:

א. סגירות – ניתן לראות, כל תוצאה אפשרית של חיבור מחזירה איבר מתוך F.
ב. קוממוטטיביות – ניתן לראות כי הפיכת סדר החיבור לא משפיעה על התוצאות.
ג. אסוציאטיביות –
(a+b)+c = a+(b+c)
$$(0 +_2 0) +_2 0 = 0 +_2 (0 +_2 0)$$
$$(0 +_2 0) +_2 1 = 0 +_2 (0 +_2 1)$$
$$(0 +_2 1) +_2 0 = 0 +_2 (1 +_2 0)$$
$$(0 +_2 1) +_2 1 = 0 +_2 (1 +_2 1)$$
$$(1 +_2 0) +_2 0$$
$$(1 +_2 0) +_2 1$$
$$(1 +_2 1) +_2 0$$
$$(1 +_2 1) +_2 1$$
(ניתן היה להוכיח גם באינדוקציה)
ד. 0 הוא נייטרלי.
ה. קיום נגדי:
$$-_2 0 = 0$$
$$-_2 1 = 1$$

אין צורך לשנות את פעולת הכפל, מכיוון שהיא מקיימת סגירות.

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

תרגול – לבדוק את חוק הפילוג.

שיעור 2:
(תזכורת)
שדות: F
(1) קבוצה (איברים, לאו דווקא מספרים)
(2) מוגדרות בה הפעולות של חיבור וכפל (לאו דווקא החיבור וכפל שאנחנו מכירים)
(3) מתקיימות האקסיומות של שדות (ראה לעיל).

הוכחת חוג הפילוג לקבוצה F_2 -

a(b+c)=ab+ac
a=0
0(b+c)=0
0b+0c=0

a=1
1(b+c)=1b+1c
b+c=b+c

קבוצה חדשה: - הגדרת הפעולות: - (לשים לב – פשוט התחלפו תפקידי ה0 ו1 מול הקבוצה F_2) –
ברור שהיא מקיימת את אקסיומות השדה, מכיוון שלא עשינו כלום חוץ מלהחליף שמות מול הקבוצה הקודמת.

$$1_G = 0$$
$$0_G = 1$$

$$G = \{0,1\}$$
$$0+0=1$$
$$0+1=0$$
$$1+0=0$$
$$1+1=1$$

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 1$$
$$1 \cdot 0 = 1$$
$$1 \cdot 1 = 1$$

עוד קבוצה -

$H = \{z, u\}$

$z + z = z$

$z + u = u$

$u + z = u$

$u + u = z$

$z \cdot z = z$

$z \cdot u = z$

$u \cdot z = z$

$u \cdot u = u$

$0_H = z_{(ero)}$

$1_H = u_{(nit)}$

קצת טרמינולוגיה: F_2, H, G הם שדות **איזומורפיים.**

(4) <u>המספרים המרוכבים –</u>

$$C = \{a + bi \mid a, b \in R\}$$

כאן אנו גם יוצאים מההנחה שR הוא שדה.
i נכון לעכשיו היא אות אלף בית לטיני, וזהו זה.
a החלק הממשי – b – החלק המדומה.

$$Adding: (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
$$Multiplying: (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

בואו נבדוק את קיום האקסיומות:
<u>חיבור</u>

1. סגירות: מוגדר חד ערכית, ומוכל בתוך C.
2. קומוטטיביות:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i =$$
$$(a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i)$$

ע"פ הגדרה של חיבור מרוכבים, ועל פ קומוטטיביות של חבור בR.

3. אסוציאטיביות

$$((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) + (a_3 + b_3 i) = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) + (a_3 + b_3)i =$$
$$((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)i = (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))i =$$
$$(a_1 + b_1 i) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i = (a_1 + b_1 i) + ((a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i))$$

ארוך, אבל סה"כ על פי הגדרה של חיבור ב(C), ואסוציאטיביות של חיבור בR.

4. קיום 0:

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

על פי הגדרת החיבור בC, ונייטרליות של ה0 בR.

$$0_c=(0_R+0_Ri)$$

5. האיבר הנגדי:

$$-(a+bi)=((-a)+(-b)i)$$

$$(a+bi)+((-a)+(-b)i)=(a+(-a))+(b+(-b))i=0+0i=0_C$$

בשעה טובה ומוצלחת, סיימנו עם אקסיומות החיבור. לפנינו הכפל:

1. סגירות: ראה חיבור – מדובר בסגירות של R.
2. קומוטטיביות:

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i=$$

$$(a_2a_1-b_2b_1)+(a_2b_1+b_2a_1)i=(a_2+b_2i)(a_1+b_1i)$$

מעבר ראשון – על פי הגדרה של כפל

מעבר שני – על פי קומוטטיביות של כפל ושל חיבור בR

מעבר שלישי – על פי הגדרה של כפל

3. אסוציאטיביות: צריך להגיע ש:

$$((a_1+b_1i)(a_2+b_2i))(a_3+b_3i)=((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i)(a_3+b_3i)=$$

$$(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3)+((a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3)i=$$

$$(a_1a_2)a_3-(b_1b_2)a_3-(a_1b_2)b_3-(b_1a_2)b_3+((a_1a_2)b_3-(b_1b_2)b_3+(a_1b_2)a_3+(b_1a_2)a_3)i$$

שווה ל:

$$(a_1+b_1i)((a_2+b_2i)(a_3+b_3i))=(a_1+b_1i)(a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+b_2a_3)i=$$

$$(a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+b_2a_3))+(a_1a_2b_3+b_2a_3+b_1(a_2a_3-b_2b_3))i=$$

$$(a_1(a_2a_3)-a_1(b_2b_3)-b_1(a_2b_3))+(a_1a_2b_3)+(a_1b_2a_3)+b_1(a_2a_3)-b_1(b_2b_3))i$$

4.

<u>חוג הפילוג</u>

$$(a_1+b_1i)((a_2+b_2i)+(a_3+b_3i))=$$

$$(a_1+b_1i)((a_2+a3)+(b_2+b_3)i)=$$

$$(a_1(a_2+a_3)-(b_1(b_2+b_3))+(a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3)i$$

$$=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+(a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3)i$$

$$=((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i)+(b_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+b_1a_3)i=$$

$$=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+a_3i)$$

עבור a+bi המספר a-bi נקרא <u>הצמוד</u> שלו.

הצמוד של 2-5i הוא 2+5i.

$$(a+bi)(a-bi)=(aa-b((-b))+(a(-b)+ba)i=(a^2+b^2)+oi$$

כאשר כופלים מספר מרוכב בצמוד שלו, מאפסים את הi.

$$(a+bi)(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i)=(a\frac{a}{a^2+b^2}-b\frac{-b}{a^2+b^2})+(a\frac{-b}{a^2+b^2}+b\frac{a}{a^2+b^2})i$$
$$=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{a(-b)+ba}{a^2+b^2}i=1+0i$$

כלומר, ההפכי המרוכב הוא $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$

שים לב שהדבר **נכון רק עבור** $a+bi\neq 0_c$, כמאמר האקסיומה.

שיעור – 14.11.2005
שאריות מודולו P

חזרה:

יחס שקילות מודולו N $k,l\in Z$ - $k\equiv l(\mathrm{mod})n$ כאשר $k-l=u\cdot n, u\in Z$.

מקיים:
1. רפלקסיביות $k\equiv k(\mathrm{mod}\, n)$
2. סימטריות. אם $k\equiv l(\mathrm{mod}\, n)\Leftrightarrow l\equiv k(\mathrm{mod}\, n)$
3. טרנזיטיביות.. אם $k\equiv l(\mathrm{mod}\, n)\wedge l\equiv m(\mathrm{mod}\, n)\Rightarrow k\equiv m(\mathrm{mod}\, n)$

ולכן נקרא במקומותנו '*יחס שקילות*'.

חילוק מודולו n – לכל $m\in Z$ אפשר למצא $q,r\in Z, 0\le r\le n-1$, כך ש $m=qn+r$

הגדרה: $[m]_n=r$ (שארית של m מודולו n)

טענה: $k\equiv l(\mathrm{mod}\, n)$ אם ורק אם $[m]_n=[l]_n$

$$m\equiv[m]_n(\mathrm{mod}\, n)$$
טענת עזר 1: $m:=qn+r=qn+[m]_n$
$$m-[m]_n=qn$$

טענת עזר 2: אם $k_1\equiv k_2(\mathrm{mod}\, n)$ ו $l_1\equiv l_2(\mathrm{mod}\, n)$ אז $k_1+l_1\equiv(k_2+l_2)(\mathrm{mod}\, n)$
טענת עזר 3: אם $k_1\equiv k_2(\mathrm{mod}\, n)$ ו $l_1\equiv l_2(\mathrm{mod}\, n)$ אז $k_1.l_1=k_2l_2(\mathrm{mod}\, n)$

____________________סיום חזרה____________________ (או שלא?)
נגדיר:
$$Z_n=\{0,1,...,n-1\}$$
נגדיר בקבוצה פעולות חיבור וכפל מודולו n.
$$\forall a,b\in Z_n\to a+_n b=[a+b]_n$$
$$a\cdot_n b=[a\cdot b]_n$$

משפט: אם $n>1$ אז Z_n עם הפעולות של חבור מודולו n וכפל מודולו n מקיימת את **כל** האקסיומות של שדה, **מלבד** (אולי?) קיום הפכי.
(*פרומו להמשך*: אם n ראשוני, גם האקסיומה המדוברת מתקיימת. רמז – אם הוא לא, אז היא לא מתקיימת.)
הערה: למה n>1 ? כי אם n=1, אז יש לנו שדה עם איבר אחד, וזה סותר את האקסיומה ש0 שונה מ1.

הוכחה:

סגירות של חיבור וכפל מודולו n נובעת מההגדרה (ולמה? הרי מדובר בהגדרת שארית. על פי הגדרת שארית, היא נותנת תוצאה בין 0 לn-1, כלומר תוצאה מתוך השדה).
קומוטטיביות של החיבור והכפל: נובעת ישירות מהקומוטטיביות של חיבור וכפל בZ.
אסיוציאטיביות של החיבור והכפל: נובעת מהאסוציאטיביות, אבל יש להשתמש בטענות העזר . נוכיח שוב, אחרי שלא הבנו בפעם הקודמת:

$$a,b,c \in Z_n$$

$$
\begin{aligned}
&(a +_n b) +_n c = \\
&(1)[(a +_n b) + c]_n \\
&(2)[[a+b]_n + c]_n \\
&(3)[(a+b)+c]_n \\
&(4)[a+(b+c)]_n \\
&(5)[a+[b+c]_n]_n \\
&(6)[a+(b +_n c)]_n \\
&(7)a +_n (b +_n c)
\end{aligned}
$$

(1) על פי הגדרת החיבור (2) על פי הגדרת החיבור (4) על פי אסוציאטיביות בZ (5) כמו 3. (6) על פי הגדרת החיבור (7) על פי הגדרת החיבור.

נימוק למעבר (3)

$a+b \equiv [a+b]_n (\bmod n)$ - טענת עזר 1.

$c \equiv c (\bmod n)$ רפלקסיביות

$(a+b)+c \equiv ([a+b]_n + c)(\bmod n)$ - שימוש בטענת עזר 2.

$[(a+b)+c]_n = [[a+b]_n + c]_n$

עבור הכפל – אותו דבר בדיוק.

$$a,b,c \in Z_n$$

$$
\begin{aligned}
&(a \cdot_n b) \cdot_n c = \\
&(1)[(a \cdot_n b) \cdot c]_n \\
&(2)[[a \cdot b]_n \cdot c]_n \\
&(3)[(a \cdot b) \cdot c]_n \\
&(4)[a \cdot (b \cdot c)]_n \\
&(5)[a \cdot [b \cdot c]_n]_n \\
&(6)[a \cdot (b \cdot_n c)]_n \\
&(7)a \cdot_n (b \cdot_n c)
\end{aligned}
$$

(2) על פי הגדרת הכפל (2) על פי הגדרת הכפל (4) על פי אסוציאטיביות בZ (5) כמו 3. (6) על פי הגדרת הכפל (7) על פי הגדרת הכפל.

נימוק למעבר (3)

$a\cdot b\equiv[a\cdot b]_n(\bmod n)$ - טענת עזר 1.

$c\equiv c(\bmod n)$ רפלקסיביות

$(a\cdot b)\cdot c\equiv([a\cdot b]_n\cdot c)(\bmod n)$ - שימוש בטענת עזר 3.

$[(a\cdot b)\cdot c]_n=[[a\cdot b]_n\cdot c]_n$

<u>חוק הפילוג</u>

$$a\cdot_n(b+_n c)=^1[a\cdot(b+_n c)]_n=^2[a[b+c]_n]_n=^3[a(b+c)]_n=^4$$
$$[ab+ac]_n=^5[[ab]_n+[ac]_n]_n=^6[(a\cdot_n b)+(a\cdot_n c)]_n=^7(a\cdot_n b)+_n(a\cdot_n c)$$

<u>איברים נייטרליים:</u>

לחיבור –0, לכפל - 1

$$a+_n 0=[a+0]_n=[a]_n=a$$
$$a\cdot_n 1=[a\cdot 1]_n=[a]_n=a, n\geq 2$$

איבר נגדי:

$$-_n 0=0$$
$$a\in Z_n, a\neq 0\rightarrow -_n a=n-a$$
$$a+_n(n-a)=[a+n-a]_n=[n]_n=0$$

(אפשר להגיד גם שהאיבר הנגדי גם ל0 הוא **(n-a)modn**).

סיימנו להוכיח את המשפט – חוץ מקיום הפכי.

<u>משפט:</u> אם **n>1** אינו ראשוני, אז Z_n איננו שדה.

<u>הוכחה:</u>

לפי ההנחה, $1<k,l\leq n-1, n=k\cdot l$ (ניתן לפרק אותו למכפלת שני גורמים, שכל אחד מהם הוא בין 1 ל**n-1**, כלומר נמצאים ב Z_n, ושונים מ0.

$$k\cdot_n l=[k\cdot l]_n=[n]_n=0$$

כלומר, מצאנו מכפלה של שני גורמים ששניהם שונים מ0, **ומכפלתם שווה ל0**. בשדה, מלבד ה0 עצמו, אין מחלקים ל0.

<u>משפט:</u> בשדה **F** אין מחלקי ה0 (מלבד ה0 עצמו)

נניח ש $a,b\in F$ ו $a\cdot b=0_f$.,אם $b\neq 0_f$ אז

$$0_f=0_f\cdot b^{-1}=(ab)b^{-1}=a(b\cdot b^{-1})=a\cdot 1_f=a$$

כלומר, לא יתכן ש $a\neq 0, b\neq 0, a\cdot b=0$ כנדרש.

משפט: אם P **ראשוני אז** Z_p **שדה.** **P** מלשון **Prime**.

הוכחה 1:

נקח $0 \neq a \in Z_p$ ונוכיח כי ל**a** יש הפכי בZ_p. לשם כך נתבונן בקבוצת איברים $\{a \cdot_p 0, a \cdot_p 1, a \cdot_p 2, ..., a \cdot_p (p-1)\}$.

נראה כי עבור $k,l \in Z_p, k \neq l$ מתקיים $a \cdot_p k \neq a \cdot_p l$. נניח בדרך השלילה כי

$$a \cdot_p k = a \cdot_p l \Rightarrow$$
$$[a \cdot k]_p = [a \cdot l]_p$$

ולכן:

$$ak \equiv al (\bmod p)$$
$$ak - al = u \cdot p$$
$$a(k-l) = u \cdot p$$

p ראשוני, **p** מחלק את $a(k-l)$, ולכן או ש**p** מחלק את **a**, או ש**p** מחלק את **k-l**

$$1 \leq k,l \leq p-1$$
$$-(p-1) \leq k-l \leq p-1$$
$$1 \leq a \leq p-1$$

a לא מתחלק ב**p**, וגם **k-l** לא מתחלק ב**p** מכיוון שהוא שונה מ0.

קיבלנו סתירה - לכן $a \cdot_n k \neq a \cdot_n l$. ז"א בקבוצה הנ"ל יש **p** איברים, והיא מוכלת בZ_p, ולכן **הם שווים** (והקבוצה הנ"ל מכילה את 1)

ז"א קיים $b \in Z_p$ כך ש $a \cdot_p b = 1$, כנדרש.

<u>שיעור – 16.11.2005</u>
<u>שדה שאריות מודולו P</u>

p מספר ראשוני. Z_p הוא שדה

$$Z_p = \{0,1,2,...,p-1\}$$
$$a +_p l = [a+b]_p$$
$$a \cdot_p l = [a \cdot b]_p$$
$$a,b \in Z_p$$

<u>משפט:</u> אם **p** ראשוני, אז Z_p קיים הפכי לכל $0 \neq a \in Z_p$

<u>טענה:</u> אם מספר **p** ראשוני מחלק את המחלק $k \cdot l$ אז **p** מחלק את **k** או **p** מחלק את **l**.

<u>הוכחה 2 של המשפט (ראשונה – מהפרק שעבר):</u>
נשתמש ב<u>טענה</u>**:** אם m הוא המחלק המשותף המקסימלי של **k>0** ו**l>0** אז קיימים $s,t \in Z$ כך ש $s \cdot k + t \cdot l = m$
נקח $a \in Z_p$, $a \neq 0$ ז"א $1 \leq a \leq p-1$, המחלק המשותף המקסימלי של **p** ו**a** הוא 1. על סמך הטענה, קיימים $s,t \in Z$ כך ש $a \cdot s + t \cdot p = 1$.
ז"א,

$$a \cdot_p s = [as]_p = [1-pt]_p = [1]_p = 1$$
$$s = a^{-1}$$

כעת נוכיח את הטענה, באינדוקציה על k+l :

עבור k=1,l=1

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

אם k=l **אז** m=k=l

$$1 \cdot k + 0 \cdot l = m$$

נניח ש $k < l$ - נשים לב שהמחלק המשותף המקסימלי של k ו-l-k הוא m.
קודם כל, **m** מחלק את **k**, מחלק את **l** ולכן מחלק את **l-k**, ולכן הוא מחלק משותף של **k** ו**l-k**.
אם **'m** הוא מחלק כלשהו של **k** ו**l-k** אז **'m** מחלק גם את **l**, ולכן הוא מחלק משותף של **k** ו**l** וממילא $m' \leq m$.
לכן **m** הוא מחלק משותף מקסימלי של **k** ו**l**. הסכום $k + (l-k) = l < l + k$ ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה. ז"א קיימים $s',t' \in Z$ כך ש

$$s' \cdot k + t'(l-k) = m$$
$$= (s'-t')k + t' \cdot l$$

נוכל לקחת $s = s'-t'$, $t = t'$ ונקבל **sk+tl=m.**
אם $l < k$ מסתכלים ב**l** ו**k-l** ופועלים באופן דומה. מ.ש.ל. **(WTF?)**

כמה הגיגים על העולם

איזה שדות בכלל ישנם?

לכל **p** ראשוני, ולכל $m > 0$ יש שדה עם p^m איברים.

לא נוכיח משפט זה.

משפט: אם $1 < n \in Z$ איננה חזקת ראשוני, אין שדה עם **n** אברים. למשל, אין שדה עם 6 איברים.

אם F ו-'F שדות עם p^m איברין, אז קיימת העתקה $f : F \to F'$ חח"ע ועל כך שלכל $a,b \in F$

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

(איזמורפיזם – בעצם, סה"כ מחליפים את השמות, אבל עם אותה משמעות).

$$1_F \in F$$

$$1_F, 1_F + 1_F = 2x1_F, 1_F + 1_F + 1_F = 3x1_F$$
$$(-n)x1_F = -(nx1_F)$$

משפט: לכל שדה **F** קיימת אחת משתי אפשרויות:

(א) לכל $m \neq n, m,n \in Z$ מתקיים $mx1_F \neq nx1_F$ (בהכרח שדה אינסופי)

(ב) קיים ראשוני **p** כך ש $px1_F = 0_F$ (מתקיים עבור סופיים אבל יתכן ויתקיים גם עבור אינסופיים)

הוכחת המשפט:

נוכיח שאם (א) לא מתקיים אז נכון (ב)

קיימים $m,n \in Z, m \neq n$, כך ש $mx1_F = nx1_F$. ידוע כי

$$(kx1_F) + (lx1_F) = (k+l)x1_F$$

תרגיל : להשלים את הטעון עבור כל $k,l \in Z$.

ב.ה.כ – **m<n**

$$(mx1_F)((n-m)x1_F) = nx1_F = mx1_F$$

ולכן:

$$(n-m)1_F = 0_F$$

נסמן ב**p** את המספר החיובי הקטן ביותר כך ש $px1_F = 0_F$.

נוכיח ש**p** ראשוני – אם לא, אז p=kl, $1 < k, k < p$, ואז

$$(kx1_F)(lx1_F) = $$
$$(kl)x(1_F) = px(1_F) = 0_F$$

אם $kx1_F \neq 0_F$, $lx1_F \neq 0_F$ בגלל המינימליות של **p**.

$(kx1_F)(lx1_F) = 0_F$ - סתירה כי בשדה **F** אין מחלקי אפס, לכן**p** ראשוני.

הגדרה: במקרה (א) כותבים $charF = 0$ (שדה עם מציין 0)

במקרה (ב) כותבים $charF = p$ (שדה עם מציין **p**)

שיעור – 21.11.2005

תזכורת-

שדות איזומורפים – העתקה חד חד ערכית בין שתי שדות (פשוט שמות שונים למשנים). הפונקציה שומרת על כפל וחיבור, ונקראת 'איזומורפיזם של שדות'.

$$f : Z_2 \to F$$
$$f(0) \to z$$
$$f(1) \to u$$

$$\forall a, b \in Z_2$$
$$f(a +_2 b) = f(a) + f(b)$$
$$f(a \cdot_2 b) = f(a) \cdot f(b)$$

f איזומורפיזם של שדות. F הוא שדה זהה ל Z_2 עם שמות משתנים שונים.

תת שדה:

$$Q \subseteq R \subseteq C$$

Q תת שדה של R, R תת שדה של C.

הגדרה: שדה K הוא תת שדה של F כאשר $K \subseteq F$ (K תת קבוצה של F) והחבור והכפל של K זהה לחבור וכפל של F.

משפט: אם $charF = p$ אז קיים תת שדה K של F איזומורפי ל Z_p. (p ראשוני, גדול מ1, גדול מ0).

הוכחה:

נגדיר: $K = \{0x1_F, 1x1_F, \ldots (p-1)x1_F\} \subseteq F$

נגדיר העתקה:

$$f : Z_p \to K$$
$$f(a) = ax1_F, p-1 \geq a \geq 0$$

ברור שf היא העתקה **על**.

נוכיח כי f חח"ע. נניח בדרך השלילה כי קיימים $0 \leq k, l \leq p-1$, $k < l$ כך ש $kx1_F = lx1_F$. אם כך

$$(kx1_F) + ((l-k)x1_F) = lx1_F = kx1_F \Rightarrow$$
$$(l-k)x1_F = 0_F$$

נסמן בm את המספר החיובי השלם הקטן ביותר כך ש $mx1_F = 0_F$, אז $0 < m \leq l-k < p$.

נחלק את p בm עם שארית ונקבל

$$p = q \cdot m + r$$
$$0 \leq r < m$$

$r \neq 0$ כי p ראשוני

$$0 = px1_F = (q \cdot m + r)x1_F = (qm)x1_F + (rx1_F) =$$
$$qx(mx1_F) + rx1_F = 0_F + (rx1_F) = rx1_F$$

קיבלנו כי r פעמים 1 נותן לנו 0, בסתירה למינימליות של m.

$$f \cdot Z_p = \{0,1,...p-1\} \to K \subseteq F$$
$$f(m) = mx1_F$$

הוכחנו חח"ע ועל.

ניקח

$$ax1_F, bx1_F \in K$$
$$0 \le a,b \le p-1$$
$$a+b = q \cdot p + r, 0 \le r < p, r = [a+b]_p$$
$$(ax1_F) + (bx1_F) = (a+b)x1_F = (qp+r)x1_F = qx(px1_F) + rx1_F$$
$$= 0_F + (rx1_F) = rx1_F = [a+b]_p x1_F = (a +_p b)x1_F$$

הוכחנו שלכל $a,b \in Z_p$, $(ax1_F) + (bx1_F) = (a +_p b)x1_F$

כמו כן,

$$(ax1_F)(bx1_F) = ax(1_F x(bx1_F)) = ax(bx(1_F x1_F)) = (ab)x1_F =$$
$$(q_1 p + [ab]_p)x1_F = qx(px1_F) + [ab]_p x1_F = 0_F + [ab]_p x1_F = [ab]_p x1_F$$

$$*ab = q_1 p + r_1 = q_1 p + [ab]_p$$

כלומר, $(ax1_F)(bx1_F) = (a \cdot_p b)x1_F$, לכן, העתקה $f : Z_p \to K$ שומרת על חיבור ועל כפל.

$$f(a \cdot_p b) = (a \cdot_p b)x1_F = (ax1_F)(bx1_F) = f(a) \cdot f(b)$$
$$f(a +_p b) = (a +_p b)x1_F = (ax1_F) + (bx1_F) = f(a) + f(b)$$

לכן K מקיימת את האקסיומות של שדה, ולכן K תת שדה של F וכמו כן K איזומורפית ל Z_p.

<u>משפט:</u> אם F שדה ו $charF = 0$ אז קיים תת שדה K של F איזומורפי לQ.

<u>הוכחה:</u> לא היום.

שיעור – 23.11.2005

<u>משפט:</u> אם F שדה ו $charF = 0$ אז קיים תת שדה K של F כך שK איזומורפי לQ.

<u>הוכחה:</u> נגדיר העתקה

$$g : Q \to F$$

$$g(\frac{m}{n}) = (m \times 1_F) \times (n \times 1_F)^{-1}, n \neq 0$$

לפי $n \neq 0$ ולפי התנאי $charF = 0$, קיים $n \times 1_F \neq 0_F$

$(k \neq l, k, l \in Z \Rightarrow k \times 1_F \neq l \times 1_F)$

נגדיר $K = g(Q) \subseteq F$, ז"א $a \in K$ אם ורק אם קיים $\frac{m}{n} \in Q$ כך ש $g(\frac{m}{n}) = a$.

כדי להוכיח ש $g : Q \to F$ אכן **<u>מוגדרת היטב</u>**, צריך לבדוק כי

$(m \times 1_F)(n \times 1_F)^{-1} = ((ml) \times 1_F)((nl) \times 1_F)^{-1}$

$$\frac{m}{n} = \frac{ml}{nl}, n, l \neq 0$$

$$g(\frac{ml}{nl}) = ((ml) \times 1_F)((nl) \times 1_F)^{-1}$$

נשתמש בתכונה: לכל $k, l \in Z$ מתקיים $(kl) \times 1_F = k \times (l \times 1_F)$.

לכן,

$$(ml) \times 1_F = (lm) \times 1_F = l \times (m \times 1_F) = (l \times 1_F)(m \times 1_F)$$

$$(nl) \times 1_F = (\ln) \times 1_F = l \times (n \times 1_F) = (l \times 1_F)(n \times 1_F)$$

$$((ml) \times 1_F)((nl) \times 1_F) = (l \times 1_F)(m \times 1_F)((l \times 1_F)(n \times 1_F))^{-1}$$

$$= (l \times 1_F)(m \times 1_F)(l \times 1_F)^{-1}(n \times 1_F)^{-1} = (m \times 1_F)(n \times 1_F)^{-1}$$

נבדוק שההעתקה שומרת על כפל:

נקח

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{t}, n, t \neq 0$$

$$g(\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{t}) = g(\frac{ms}{nt}) = ((ms) \times 1_F)((nt) \times 1_F)^{-1} =$$

$$((m \times 1_F)(s \times 1_F))((n \times 1_F)(t \times 1_F))^{-1} =$$

$$(m \times 1_F)(s \times 1_F)(n \times 1_F)^{-1}(t \times 1_F)^{-1} = ((m \times 1_F)(n \times 1_F)^{-1})((s \times 1_F)(t \times 1_F)^{-1}) =$$

$$g(\frac{m}{n}) \cdot g(\frac{s}{t})$$

לכן $g : Q \to F$ שומרת על כפל.

נבדוק שההעתקה שומרת על חיבור:

$$g(\frac{m}{n}+\frac{s}{t})=g(\frac{mt+ns}{nt})=((mt+ns)\times 1_F)\cdot((nt)\times 1_F)^{-1}=$$
$$((mt)\times 1_F+(ns\times 1_F))((nt)\times 1_F)^{-1}=$$
$$((mt)\times 1_F)((nt)\times 1_F)^{-1}+((ns)\times 1_F)((nt)\times 1_F)^{-1}=$$
$$g(\frac{mt}{nt})+g(\frac{ns}{nt})=g(\frac{m}{n})+g(\frac{s}{t})$$

לכן g שומרת על חיבור.

כאמור, $K=g(Q)$. ***g שומרת חיבור וכפל.***

נוכיח כי g חח"ע נקח $(n\neq 0, t\neq 0)$, $\frac{m}{n},\frac{s}{t}$ ונניח ש $g(\frac{m}{n})=g(\frac{s}{t})$ צ"ל $\frac{m}{n}=\frac{s}{t}\in Q$ ובכן,

$$g(\frac{m}{n})=g(\frac{mt}{nt})=((mt)\times 1_F)((nt)\times 1_F)^{-1}$$
$$g(\frac{s}{t})=g(\frac{ns}{nt})=((ns)\times 1_F)((nt)\times 1_F)^{-1}$$

ולכן

$$(mt)\times 1_F=((nt)\times 1_F)g\frac{m}{n}=((nt)\times 1_F)g(\frac{s}{t})=(ns)\times 1_F$$

מכיוון ש $charF=0$, הרי $mt=ns$, ולכן $\frac{m}{n}=\frac{s}{t}$ כנדרש. מסקנה – G חח"ע.

נכון לעכשיו: g שומרת חיבור וכפל וגם חח"ע, לכן K שדה איזומורפי לQ והוא תת שדה של F כנדרש.

<u>**תם ונשלם פרק "שדות" בקורס של אלגברה ליניארית.**</u>

בואו ונדבר על משוואות ליניאריות

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \qquad a_{ij} \in F$$
$$.... \qquad b_1 \in F$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

מערכת של m משוואות לינאריות בת n נעלמים $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ עם מקדמים a_{ij} ואברים חופשיים b_i.

יכולים להיות 3 מקרים:

א. אין פתרונות בכלל. $0_F \cdot x = 1_F$
ב. יש פתרון יחיד.
ג. יש הרבה פתרונות.

חלוץ משתנים

נשתמש באחת המשוואות כדי לבטא אחד הנעלמים דרך שאר הנעלמים, ונציב אותו בכל שאר המשוואות.
מקבלים מערכת פחות נעלמים וממשיכים בחלוץ המשתנים.

$F = \{u, z\}$

+	Z	U
Z	Z	U
U	U	Z

$\cdot$+	Z	U
Z	Z	Z
U	Z	U

$$u \cdot x + z \cdot y + u \cdot t = u$$
$$ux = u - zy - uy = u + ut$$
$$x = u^{-1}(u + ut) = u(u + ut) = u \cdot u + (u \cdot u)t = u + ut$$

עכשיו, ננסה להציב את כל האופציות (4) של y וZ.

y=z,	t=z	x=u
y=z	t=u	x=z
y=u	t=z	x=u
y=u	t=u	x=z

וכולם פתרונות.
נבדוק:

$$u \cdot x + z \cdot y = u \cdot t = u$$
$$u \cdot u + z \cdot z + u \cdot z = u$$
$$u + z + z = u$$
$$u = u$$

מרחבים וקטוריים

נניח שנתון שדה F, שאיננו שדה חיטה. מרחב וקטורי V מעל שדה F זו
(א) קבוצה (שנקרא לאברי V וקטורים)
(ב) שמוגדרות בה פעולות של חיבור וקטורים (כלומר אברי V) ופעולה של כפל של וקטור בסקלר.
(ג) כך שמתקיימות האקסיומות של מרחב וקטורי. נקום ונלמד – מהן האקסיומות של מרחב וקטורי?

חבור וקטורים

א. סגירות - $u,v\in V \Rightarrow u+v\in V$
ב. קומוטטיביות - $u+v=v+u$
ג. אסוציאטיביות- $(u+v)+w=u+(v+w)$
ד. קיום אבר ניוטרלי – האפס $u+0_v=u$
ה. קיום אבר נגדי - $u+(-u)=0_v$

כפל בסקלר

א. סגירות – לכל $v\in V$, $a\in F$, $a\cdot v\in V$ - לשים לב $v\cdot a=ERROR$.
ב. כל וקטור כפול סקלר היחידה שווה לעצמו $1_F\cdot v=v$
ג. $(ab)v=a(bv)$
ד. $(a+b)v=av+bv$
ה. $a(u+v)=au+av$

שיעור 9, 28.11.2005

F שדה. מרחב וקטורי V מעל שדה F זו:

(א) קבוצה (שאיבריה יקראו "וקטורים")

(ב) מוגדרת פעולה של חיבור וקטורים ושל כפל וקטור באבר של שדה F (שאיבריו יקראו "סקלרים")

(ג) כך שמתקיימות האקסיומות של מרחב וקטורי.

חיבור: סגירות, אסוציאטיביות, קומוטטיביות, קיום האפס, קיום נגדי.

כפל בסקלר: ראה את הפעמיים הקודמות שהעתקתי את האקסיומות מהלוח.

<u>דוגמה:</u> נקדם שדה F ונקבע $n \geq 0$ מספר שלם. נגדיר קבוצה

$$F^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1, a_2, .., a_n \in F\}$$

כלומר, F^n זו קבוצה של סדרות באורך n של אברי שדה F.

נגדיר חבור וקטורים וכפל של וקטור בסקלר

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

$$c \in F, c(a_1, a_2, ..., a_n) = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$$

בואו ונבדוק את האקסיומות (YEY!)

<u>חבור</u>

(א) סגירות

(ב) קומוטטיביות – ברור, חבל להעתיק. נובעת מהקומוטטיביות בF.

(ג) אסוציאטיביות - ברור, חבל להעתיק. נובעת מהקומוטטיביות בF.

(ד) קיום האפס - $(0_F, 0_F, ..., 0_F)$ - נבדוק ונראה כי הוא ניוטרלי.

(ה) קיום נגדי $-(a_1, ..., a_n) = (-a_1, ..., -a_n)$

<u>כפל בסקלר</u>

(א) סגירות

(ב) סגירות בכפל בסקלר.

(ג) $(ab)v = a(bv)$

(ד) $(a+b)v = av + bv$

(ה) $a(u+v) = au + av$

רמז: זה עובד גם כשn שווה ל2. אפילו כשהוא 1. מה ההבדל בין 2 ל1? כשזה 1, אין פסיק. זה עובד גם כשn=0.

נסתכל במקרה פרטי F=R, $V = R^2$ (יש לו אפילו מודל גאומטרי – נחש מה – מישור).

החיבור ב R^2 משתקף במודל גאומטרי באמצעות כלל המקבילית

בואו נסתכל על R^3 - מערכת צירים במרחב.

קטע היחידה ב R^1 $I_1 = \{(a_1) \mid 0 \leq a_1 \leq 1\}$

ריבוע היחידה ב R^2 $I_2 = \{(a_1, a_2) \mid 0 \leq a_1, a_2 \leq 1\}$

קוביית היחידה ב R^3 $I_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid 0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1\}$

ציטוט השיעור: בשנת שמיטה, אפשר להגדיר שדה?

שיעור 10 – 30.11.2005

בואו ונצייר שדה עם 5 מימדים.

מה ראינו:

ב R^0 יש $1 = 2^0$ קודקודים, ו $3^0 = 1$ מאפיינים (קודקוד ואפס קטעים)

ב R^1 יש $2 = 2^1$ קודקודים, ו $3^1 = 3$ מאפיינים (2 קודקודים וקטע)

ב R^2 יש $4 = 2^2$ קודקודים, ו $3^2 = 9$ מאפיינים (4 קודקודים, 4 קטעים, ומישור)

ב R^3 יש $8 = 2^3$ קודקודים, ו $3^3 = 27$ מאפיינים (8 קודקודים, 12 קטעים, 6 מישורים ו1 קוביה)

ב R^5 יש 32 קודקודים (2^5), 80 צלעות, 80 מישורים, 40 קוביות (תלת מימדיות), 10 ארבע מימדיות, ועוד קוביה 5 מימדית, בסה"כ 243= 3^5.

					1					
				2		1				
			4		4		1			
		8		12		6		1		
	16		32		24		8		1	
32		80		80		40		10		1

דומה ל משולש פסקל:

a b

a+b

אבל אצלנו זה :

a b

a+2b

תזכורת:

$$0_V = 0_F 0_V = (c+(-c))0_V = c \cdot 0_v + (-c)0_V = c(0_V + 0_V) + (-c)0_V =$$
$$(c0_V + c0_V) + (-c)0_V$$

<u>תלות ליניארית של וקטורים</u>

F שדה, V מרחב וקטורי מעל F, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$.

<u>הגדרה:</u> הוקטורים $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ נקראים **<u>תלויים ליניארית</u>** אם קיימים סקלרים $c_1, c_2, ..., c_n \in F$ כאשר <u>לא כולם</u> 0_F כך ש $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0_v$, אחרת, $v_1, v_2, ..., v_n$ נקראים **<u>בלתי תלויים ליניארית.</u>**

עבור $n = 1$ $n_1 \in V$

אם $v_1 = 0_v$ אז $1_F \cdot v_1 = 0_V$, ז"א יש תלות ליניארית.

אם $v_1 \neq 0_v$ אז לכל $c_1 \in F, c_1 \neq 0_F$ מתקיים $c_1 v_1 \neq 0_V$, כי אחרת $c_1 v_1 = 0_v$ ומכאן
$c_1^{-1} \cdot 0_v = 0_v = c_1^{-1}(c_1 v_1) = (c_{-1}^{-1} c_1) v_1 = 1_F v_1 = v_1$
ולכן אין תלות ליניארית.

עבור $n = 2$, $v_1, v_2 \in V$ תלויים ליניארית כאשר קיימים $c_1, c_2 \in F$ לא כולם 0, כך ש:
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0_V$$

(א) אם $c_1 \neq 0_F$ אז
$$c_1 v_1 = -c_2 v_2$$
$$v_1 = 1_F v_1 = (c_1^{-1} c_1) v_1 = c_1^{-1}(c_1 v_1) = c_1^{-1}(-c_2 v_2) = (-c_1^{-1} c_2) v_2$$
(ב) אם $c_2 \neq 0_F$ אז
$$c_2 v_2 = -c_1 v_1$$
$$v_2 = 1_F v_2 = (c_2^{-1} c_2) v_2 = c_2^{-1}(c_2 v_2) = c_2^{-1}(-c_1 v_1) = (-c_2^{-1} c_1) v_1$$

לכן, v_1, v_2 תלויים ליניארית כאשר v_1 היא כפולה סקלרית של v_2 או v_2 הוא כפולה סקלרית של v_1, אחרת, v_1, v_2 בלתי תלויים ליניארית.

אם v_1, v_2 נמצאים על אותו ישר העובר דרך הראשית, אז הם תלויים ליניארית, אחרת, v_1, v_2 בלתי תלויים ליניארית.

עבור $n = 3$ $v_1, v_2, v_2 \in V$ כאשר קיימים $c_1, c_2, c_3 \in F$ שלא כולם 0_F כך ש
$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0_v$$
אם $c_1 \neq 0_F$
$$v_1 = (-c_1^{-1} c_2) v_2 + (-c_2^{-1} c_3) v_3$$
אם $c_2 \neq 0_f$
$$v_2 = (-c_2^{-1} c_1) v_1 + (-c_2^{-1} c_3) v_3$$
אם $c_3 \neq 0_F$
$$v_3 = (-c_3^{-1} c_1) v_1 + (-c_3^{-1} c_2) v_2$$

אחד מהוקטורים הוא **צרוף ליניארי** של שניים אחרים, אחרת v_1, v_2, v_3 לא תלויים ליניארית.

הגדרה: $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k$ הוא **צרוף ליניארי** של $u_1, u_2, \ldots, u_k$ עם מקדמים $a_1, a_2, \ldots, a_k$

('זה חשוב, לכתוב את זה') **כל הצירופים הליניאריים של** v_1 ו v_2 **נמצאים על המישור הנפרש ע"י** $v_1, v_2, 0_v$

לכן, אם v_1, v_2, v_3 ב R^3 אינם נמצאים על אותו מישור העובר דרך הראשית, הם אינם תלויים ליניארית.

אלגברה ליניארית – שיעור 11, 12.5.2005

תלות ואי תלות של וקטורים

F שדה V מרחב וקטורי מעל F $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ נקראים *תלויים ליניארית* אם ורק אם קיימים סקלרים $c_1, c_2, ..., c_n \in F$ **לא כולם** 0_F כך ש $c_1 v_1 + c_2 v_2 + ... + c_n v_n = 0_v$.

משפט: אם $v_1, v_2, ..., v_n \in F^m$, $n > m \geq 0$ אז $v_1, v_2, ..., v_n$ תלויים ליניארית.

$$F^m = \{(a_1, a_2, ..., a_m) \mid a_1, a_2, ..., a_m \in F\}$$

$$(a_1, .., a_m) + (b_1, ..., b_m) = (a_1 + b_1, ..., a_m + b_m)$$

$$c(a_1, ..., a_m) = (ca_1, ..., ca_m)$$

הוכחה:

באינדוקציה על m. בסיס האינדוקציה $m = 0$:

$F^0 = \{()\}$ ואז $n > 0$,
$$v_1 ..., v_n \in F^0 = \{()\} \Rightarrow$$
$$v_1 = (), ... v_n = ()$$.

לכן:

$$1_F \cdot v_1 = 1_F v_2 + ... + 1_F v_n = v_1 + ... + v_n = () + ... + () = () = 0_{F^0}$$

לכן: $v_1, v_2, ..., v_n$ תלויים ליניארית.

F^0 - "תחשוב על חנות שנפתחת ב12, ונסגרת ב12. חייבים לפתוח, חנות, לא?"

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור m ונוכיח עבור m+1. ובכן – נתונים וקטורים $w_1, w_2, ..., w_l \in F^{m+1}; l > m+1$. צ"ל כי $w_1, ..., w_l$ תלויים ליניארית.

$$w_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,m}, a_{1,m+1})$$

$$w_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,m}, a_{2,m+1})$$

....

$$w_{l-1} = (a_{l-1,1}, a_{l-1,2}, ..., a_{l-1,m}, a_{l-1,m+1})$$

$$w_l = (a_{l,1}, a_{l,2}, ..., a_{l,m}, a_{l,m+1})$$

מקרה פרטי:

$$a_{1,m+1} = 0_f .. a_{l,m+1} = 0$$

(בקיצור, כל הסקלרים החדשים הם 0)

נגדיר:

$$w'_1 = (a_{1,1}, ..., a_{1,m}) \in F^m$$

$$w'_2 = (a_{2,1}, ..., a_{2,m}) \in F^m$$

$$w'_l = (a_{l,1}, ..., a_{l,m}) \in F^m$$

$l > m+1 > m$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה $w', ..., w'l \in F^m$ תלויים ליניארית, ז"א קיימים סקלרים $c_1, c_2, ..., c_l \in F$ לא כולם 0_F

$$c_1 w'_1 + c_2 w'_2 + ... + c_l w'_l = 0_{F,m} = (m \times 0_F)$$

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_l w_l = 0_{F,m-1} = ((m+1)\times 0_F)$$

$$c_1 w_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,m}, 0_F)$$
$$c_2 w_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,m}, 0_F)$$
$$\ldots.$$
$$c_l w_l = (a_{l,1}, a_{l,2}, \ldots, a_{l,m}, 0_F)$$

$$((m+1)\times 0_F)$$
$$c_1 w_1 + c_2 w_2 +, \ldots, + c_l w_l = 0_{F^{m+1}}$$

<u>הוכחה:</u> נשאר לנו לטפל במקרה כאשר לפחות אחד המקדמים $a_{1,m+1}, a_{2,m+1}, \ldots, a_{l,m+1}$ שונה 0_F.
ב.ה.כ לצורך נוחיות הכתיבה נניח ש $a_{l,m+1} \neq 0_F$. נגדיר

$$u_1 = w_1 - a_{1,m+1}a^{-1}{}_{l,m+1}w_l = (b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,m}, 0_F = a_{1,m+1} - a_{1,m+1}a^{-1}{}_{l,m+1}a_{l,m+1})$$
$$u_2 = w_2 - a_{2,m+1}a^{-1}{}_{l,m+1}w_l = (b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots., b_{2,m}, 0_F = a_{2,m+1} - a_{2,m+1}a^{-1}{}_{l,m+1}a_{l,m+1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$u_{l-1} = w_{l-1} - a_{l-1,m+1}a^{-1}{}_{l,m+1}w_l = b_{l-1,1}, b_{l-2,2}, \ldots, b_{l-1,m}, 0_F)$$

$$u'_1 = (b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,m})$$
$$u'_2 = (b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,m})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u'_{l-1} = (b_{l-1,1}, b_{l-1,2}, \ldots, b_{l-1,m})$$

$$u'_1 \ldots u'_{l-1} \in F^m$$

מכיוון ש$l > m+1$ אזי $l-1 > m$. לפי הנחת האינדוקציה קיימים סקלרים $b_1, \ldots, b_{l-1} \in F$ לא כולם 0, כך ש $d_1 u'_1 + d_2 u'_2 + \ldots + d_{l-1}u'_{l-1} = 0_{F^m}$

$$d_1 u_1 + d_2 u_2 + \ldots + d_{l-1}u_{l-1} = 0_{F^{M+1}} =$$
$$d_1(w_1 - \_w_l) + d_2(w_2 - \_w_l) + \ldots. + d_{l-1}(w_{l-1} - \_w_l) =$$

לכן גם
$$d_1 w_1 + d_2 w_2 + \ldots + d_{l-1}w_{l-1} + d_l w_l$$
$$d_l = d_1 \cdot \_{}_1 + d_2 \cdot \_{}_2 + \ldots + d_{l-1} \cdot \_{}_{l-1} = -d_1 a_{1,m+1} + a^{-1} l_{m+1} - d_2 a_{2,m+1} a^{-1}{}_{l,m+1} -$$
$$d_{l,1} \ldots..$$

ולכן $w_1,\dots,w_l$ תלויים ליניארית, כנדרש.

F שדה, V מרחב וקטורי מעל F.

<u>הגדרה:</u>

הוקטורים $v_1,v_2,\dots,v_m\in V$ פורשים (או יוצרים) את V כאשר כל וקטור בV הוא צרוף ליניארי של $v_1,v_2,\dots,v_m$

<u>משפט:</u> נניח ש $v_1,v_2,\dots,v_m\in V$ פורשים את V ונניח ש $w_1,w_2,\dots,w_l\in V, l>m$, אז $w_1,w_2,\dots,w_l$ תלויים ליניארית.

<u>הוכחה:</u> נוכל לרשום

$$w_1=a_{1,1}v_1,a_{1,2}v_2+\dots+a_{1,m}v_m$$
$$w_2=a_{2,1}v_1,a_{2,2}v_2+\dots.+a_{2,m}v_m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$w_l=a_{l,1}v_1+a_{l,2}v_2+\dots.+a_{l,m}v_m$$

נגדיר וקטורים

$$u_1=(a_{1,1},a_{1,2},\dots,a_{1,m})\in F^m$$
$$u_2=(a_{2,1},a_{2,2},\dots,a_{2,m})\in F^m$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_l=(a_{l,1},a_{l,2},\dots..,a_{l,m})\in F^m$$

מכיוון שl>m, $u_1,u_2,\dots u_l\in F^m, l>m$ תלויים ליניארית, לכן קיימים סקלרים $c_1,\dots,c_l\in F$ לא כולם 0_F, כך ש

$$c_1u_1+c_2u_2+\dots.+c_lu_l=0_{F^m}=m\times 0_F$$
$$c_1a_{1,1}+c_2a_{2,1}+\dots+c_l,a_{l,1}=0_F$$
$$c_1a_{1,2}+c_2a_{2,2}+\dots.+c_l,a_{l,2}=0_F$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$c_la_{1,m}+c_2a_{2,m}+\dots+c_la_{l,m}=0_F$$

לכן:

$$c_1w_1+c_2w_2+\dots+c_lw_l=$$
$$c_1(a_{1,1}w_1+\dots+a_{1,m}v_m)+c_2(a_{2,1}v_1+\dots+a_{2,m}v_m)+\dots+c_l(a_{l,1}v_1+\dots+a_{l,m}v_m)=$$
$$(c_1a_{1,1}+c_2a_{2,1}+\dots+c_la_{l,m})v_1+(c_1a_{1,2}+c_2a_{2,2}+\dots+c_la_{l,2})v_2+\dots+$$
$$(c_1a_{1,m}+c_2a_{2,m}+\dots c_la_{l,m})v_m=0_Fv_1+0_Fv_2+\dots+0_Fv_m=0_v$$

ולכן $w_1,\dots,w_l$ תלויים ליניארית.

<u>שיעור 12, 7.12.2005</u>

<u>בסיסים של מרחב וקטורי</u>

F שדה, V מרחב וקטורי מעל F.

<u>הגדרה:</u> קבוצת וקטורים $v_1,v_2,...,v_n\in V$ נקראת בסיס (לא הבסיס) של V כאשר:

(א) $v_1,...,v_n$ פורשים את V **וגם**

(ב) $v_1,v_2,...,v_n$ בלתי תלויים ליניארית.

דוגמא: אצל דינה באתר.

<u>משפט:</u> אם $v_1,...,v_n\in V$ בסיס של V ו $w_1,...,w_l\in V$ בסיס של V אז $l=n$.

<u>הוכחה:</u> נניח ש $l>n$, לפי המשפט שהוכחנו בפעם הקודמת, אם V נפרש ע"י n וקטורים $v_1,...,v_n$ ועבור n>l הוקטורים $w_1,...,w_l\in V$ תלויים ליניארית בניגוד להגדרה של בסיס. כמו כן, אם $n>l$ אז היות וV נפרש על ידי l וקטורים $w_1,...,w_l$ וn>l, אזי הוקטורים $v_1,...,v_n$ תלויים ליניארית, בניגוד להגדרה של בסיס.

לכן n=l כנדרש. (משתמש במשפט השני מהשיעור הקודם)

<u>הגדרה:</u> מספר האברים בבסיס של V נקרא <u>המימד</u> של V ומסומן $\dim_F V$ (פינת האנגלית: *DIMension*).

<u>דוגמא:</u> $\dim_F F^n=n$.

<u>הוכחה:</u> נסתכל בוקטורים

$$e_1=(1_F,0_F,...)$$
$$e_2=(0_F,1_F,...,0_F)$$
$$e_n=(0_F,...,1_F)$$

נוכיח כי $e_1,e_2,...,e_n\in F^n$ הם בסיס של F^n.

נתחיל מהוכחת הפרישה:

ניקח וקטור כלשהו

$$(a_1,a_2,...,a_n)\in F^n$$
$$(a_1,a_2,...,a_n)=a_1(1_F,0_F,...,0_F)+...+a_n(0_F,...,1_F)=a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n$$

לכן $e_1,...,e_n$ פורשים את F^n.

נראה כי $e_1,...,e_n$ **<u>בלתי תלויים ליניארית</u>**. נניח שעבור סקלרים $a_1,a_2,...,a_n\in F$ מתקיים

$$a_1e_1+...+a_ne_n=0_{F^N}$$

צ"ל

$$a_1=a_2=...=a_n=0_F$$

(ואפילו שירלי מסכימה).

$$a_1(1_F,...,0_F)+...+a_n(0_F,...,1_F)=a_1e_1+...a_ne_n=0_{F^n}=(0_F,0_F,...,0_F)$$
$$=(a_1,...,a_n)$$

לכן $a_1=0_F,a_2=0_F,...,a_n=0_F$, כלומר, $e_1,...,e_n\in F^n$ בלתי תלויים ליניארית ולכן הם בסיס של F^n, לכן $\dim_F F^n=n$, הבסיס הספציפי הזה $e_1,...,e_n$ של F^n **<u>נקרא הבסיס הסטנדרטי של</u>** F^n.

משפט: נניח ש $v_1,\dots,v_n \in V$ אזי התנאים הבאים הם **שקולים**:

(א) $v_1,..,v_n$ בסיס של V

(ב) לכל וקטור $v \in V$ נקבעים בצורה חד ערכית סקלרים $a_1,\dots,a_n \in F$ כך ש $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$

הוכחה:

(א) <= (ב)

נניח $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V. היות ו $v_1,\dots,v_n$ פורשים את V, לכל $v \in V$ קיימים סקלרים $a_1,\dots,a_n \in F$ כ ש $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$. **נוכיח יחידות** – לצורך כך נניח שיש עוד הצגה $v = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$ כאשר גם כיין $b_1,\dots,b_n \in F$. לכיין,

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = v = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$$

נעביר אגף ונקבל:

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0_V$$

היות ו $v_1,\dots,v_n$ בלתי תלויים ליניארית, מכך שהם בסיס, אזי:

$$a_1 - b_1 = 0_F, \dots a_n - b_n = 0_F$$

הוכחנו יחידות.

בכיוון ההפוך **(ב) => (א)**

מ(ב) נובע כי $v_1,\dots,v_n$ פורשים את V. נשאר להוכיח כי $v_1,\dots,v_n \in V$ בלתי תלויים ליניארית.נניח שעבור מתקיים $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0_V$. צ"ל כי

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0_F$$

מצאנו לוקטור האפס (0_V) שתי הצגות:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0_V = 0_F v_1 + \dots + 0_F v_n$$

מיחידות ההצגה נובע כי $a_n = 0_F, \dots, a_1 = 0_F$, לכן אי תלות, ולכן $v_1,\dots,v_n$ הם בסיס של V , כנדרש.

תת מרחב

הגדרה: תת – קבוצה $U \subseteq V$ נקראת <u>תת-מרחב</u> כאשר U מקיימת את האקסיומות של מרחב וקטורי ביחס לחיבור וקטורים וכפל בסקלר שמוגדרים בV.

משפט: $U \subseteq V$ הוא תת מרחב אם ורק אם:

א. U לא ריקה.
ב. U סגורה לגבי חיבור של וקטורים.
ג. U סגורה לגבי כפל בסקלר.

הוכחה: אם U תת מרחב של V אז ברור ש(א), (ב) ו(ג) מתקיימים.

נניח שמתקיימים (א) , (ב), (ג), נוכיח שU מקיים כל האקסיומות של מרחב וקטורי. נראה:

(א) סגירות לגבי חיבור נובעת מתנאי (ב).
(ב) קומוטטיביות – נובע מקומוטטיביות בV.
(ג) אסוציאטיביות – נובע מקומוטטיביות בV.

(ד) קיום האפס - $u \neq \varnothing$ ולכן קיים $u \in U$. תנאי (ג) $(-1_F)u \in u$. לפי (ב)

$.u+(-1_F)u = 1_F u + (-1_F)u = (1_F + (-1_F))u = 0_F u = 0_V \in u$

(ה) קיום נגדי. אם $w \in U$, אז $(-1_F)w \in u$ וכפי שראינו קודם,

$$w+(-1_F)w = (1_F + (-1_F))w = 0_F w = 0_V$$

כלומר $-w = (-1_F)w \in U$

<u>נעבור לכפל בסקלר:</u>

(א) סגירות של כפל בסקלר הוא תנאי (ג)

(ב) $1_F \cdot u = u$

(ג) $(ab)u = a(bu)$

(ד) $(a+b)u = au + bu$

(ה) $a(u+u') = au + au'$. נכון לכל $a,b \in F$ $u,u' \in V$ ובפרט בU.

דוגמא:

$R^2 \supset \{(0,0)\}$ הוא תת מרחב. כל קו ישר (אינסופי!), שעובר דרך הראשית, הוא תת מרחב.

$.R^2 \subseteq R^2$

$u_1, u_2, ..., u_k \in V$. נגדיר, עבור $k \geq 1$

$$Sp(u_1,...,u_k) = \{c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_ku_k \mid c_1, c_2, ..., c_k \in F\}$$

Sp=spam

<u>משפט:</u> $Sp(u_1...u_k)$ הוא תת-מרחב של V.

(עבור $k = 0 \Rightarrow Sp() = \{0_v\}$)

<u>הוכחה:</u>

נניח ש $k > 0$.

(א) $Sp(u_1...u_k)$ לא ריקה

(ב) נניח ש $c_1u_1 + ... + c_ku_k \in Sp(u_1,...,u_k)$ וכי $d_1u_1 + ... + d_ku_k \in Sp(u_1,...,u_k)$

אזי:

$$(c_1u_1 + ... + c_ku_k) + (d_1u_1 + ... + d_ku_k) = ((c_1+d_1)u_1 + ... + (c_k+d_k)u_k) \in Sp(u_1,..,u_k)$$

(ג) נקח $c_1u_1 + ... + c_ku_k$ ו $b \in F$ אזי:

$$b(c_1u_1 + ... + c_ku_k) = (bc_1)u_1 + ... + (bc_k)u_k \in Sp(u_1 + ... + u_k)$$

ולכן יש סגירות לגבי כפל בסקלר. על סמך המשפט הקודם $Sp(u_1,...,u_k)$ הוא תת מרחב של V, כנדרש.

<u>הארה:</u> עבור $u_1,...,u_k \in V$ אזי $Sp(u_1,...,u_k) = V$, אמ"מ $u_1,...,u_k$ פורשים את V.

<u>עוד דוגמא של מרחב וקטורי:</u>

F שדה, x משתנה, נגדיר את המרחב $F[x]$ של פולינומים במשתנה X עם המקדמים בשדה F.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0, a_0, ..., a_n \in F$$

$$F[X] = \{a_nx^n + ... + a_1x + a_0 \mid a_0,...,a_n \in F, n \geq 0\}$$

איך נחבר אותם? כמו שמחברים פולינומים!

$$(3+x)+(2-x^2+x^3)=5+x-x^2+x^3$$

איך נכפיל אותם? כמו שכופלים פולינומים!

$$10(3+x)=30+10x$$

הוכחת האקסיומות של מרחב וקטורי מוגשת כתרגיל.

אנו מזהים פולינום $3+x$ עם הפולינום $3+x+0x^2+0x^3+...0+x^n$.

<u>**משפט:**</u> ב$F[X]$ אין כסיס (סופי)~~דגגככגגגגככ~~

<u>**הוכחה:**</u> נניח בדרך השלילה כי $v_1,...,v_n \in F[x]$ הוא בסיס של $F[X]$.

נניח ש v_1 פולינום ממעלה m_1, v_2 פולינום ממעלה m_2, v_n פולינום ממעלה m_n נקח:

$$m=\max\{m_1...m_n\}$$

אזי כל צירוף ליניארי של v_n הוא פולינום עד מעלה m.

בפרט, $x^{m+1} \notin Sp(v_1,...,v_n)$ ולכן $v_1...v_n$ אינם פורשים את $F[X]$ ולכן הם אינם בסיס של $F[X]$. סתירה. מש"ל – אין ל$F[X]$ בסיס סופי, כנדרש.

<u>**משפט:**</u>

אם למ"ו V יש בסיס, וU תת מרחב של V, אזי גם לU יש בסיס.

שיעור 13, 12.12.2005

בסיסים ומימד

F שדה, V מ"ו מעל F. $v_1,...,v_n \in V$ נקראים **בסיס** של V כאשר :

(א) $v_1,...,v_n$ פורשים את V

(ב) $v_1,..,v_n$ בלתי תלויים ליניארית.

משפט: לכל שני בסיסים של מ"ו V יש אותו מספר אברים (הוכחנו בעבר)

מספר זה נקרא המימד של V ומסומן $\dim_F V$.

לא לכל מרחב וקטורי יש בסיס – מצאנו דוגמא $F[X]$ (פולינומים) של מרחב וקטורי שאין לו בסיס (סופי)

משפט: נניח שV מ"ו עם בסיס $v_1...,v_n$ ו $U \subseteq V$ תת מרחב, אזי לU יש בסיס.

טענת עזר: התנאים הבאים שקולים:

(א) $w_1,...,w_l \in V$ בלתי תלויים ליניארית.

(ב) $w_l \notin Sp(w_1,...,w_{l-1}),...,w_3 \notin Sp(w_1,w_2), w_2 \notin Sp(w_1), w_1 \neq 0_V$

הוכחת טענת עזר (א) => (ב)

נניח ש $w_1,...,w_l$ בלתי תלויים ליניארית.

אם $w_1 = 0_V$ אזי יש תלות - $0_F = 0_F w_l + ... + 0_F w_2 + ... + 1_F w_1 = 0_V$ לכן $w_1 \neq 0_V$.

אם $w_2 \in Sp(w_1)$ אזי $w_2 = c_1 w_1$ ואז $0_F w_l + ... + 0_F w_3 + 1_F w_2 + (-c_1) w_1 = 0_V$ ז"א $w_2 \notin Sp(w_1)$.

באופן כללי, אם $w_k \in Sp(w_1,...,w_{k-1})$ אז $w_k = c_1 w_1 + ... + c_{k-1} w_{k-1}$ ולכן $0_F w_l + ... + 0_F w_{k+1} + 1_F w_k + (-c_{k-1}) w_{k-1} + ... + (-c_l) w_l = 0_V$ בניגוד להנחה, ולכן $\forall 1 \le k \le l; w_k \notin Sp(w_1,...,w_{k-1})$

הוכחת טענת עזר (ב) => (א)

נתון ש $w_l \notin Sp(w_1,...,w_{l-1}),...,w_3 \notin Sp(w_1,w_2), w_2 \notin Sp(w_1), w_1 \neq 0_V$. צ"ל $w_1,...,w_l \in V$ בלתי תלויים ליניארית.

נניח בדרך השלילה שיש תלות :

$$c_1 w_1 + ... + c_l w_l = 0_V$$

לא כל c_i הם 0_F.

נקח k ***הכי גדול***, כך ש $c_k \neq 0_F$. אולי k=1. אולי $k < l$, ואזי $c_{k+1},...,c_l = 0_F$ (לפי איך שבחרנו – שכל אלה שאחריו הם 0).

לדוגמא:

$$l = 5, c_1 = 2, c_2 = 7, c_3 = 0, c_4 = 6, c_5 = 0_1$$

$$k = 4$$

$$0_V = c_1w_1 + ... + c_kw_k + c_{k+1}w_{k+1} + ... + c_lw_l = c_1w_1 + ... + c_kw_k$$
$$c_kw_k = -c_1w_1 - c_2w_2 - ... - c_{k-1}w_{k-1}$$
$$c_k \neq 0_F$$

נכפיל בהפכי של c_k $({c^{-1}}_k)$

$$w_k = -{c^{-1}}_kc_1w_1 - {c^{-1}}_kc_2w_2 - ... - {c^{-1}}_kc_{k-1}w_{k-1} \in Sp(w_1, w_2, ..., w_{k-1})$$

קיבלנו סתירה להנחה ולכן $w_1, w_2, ..., w_l$ בלתי תלויים ליניארית, כנדרש.

<u>הוכחת המשפט:</u>

אם $U \subseteq V$ $U = \{0_V\}$ אז קבוצה ריקה של וקטורים היא הבסיס של U.

אם $U \neq \{0_V\}$ אז קיים וקטור $w_1 \in U, w_1 \neq 0_V$. לפי טענת עזר, w_1 בלתי תלוי ליניארית (לא צריך אותה באמת – פשוט מדובר בוקטור אחד שהוא שונה מ0...)

אם $U = Sp(w_1)$, אז w_1 בסיס של U.

אם $U \neq Sp(w_1)$ אז קיים $w_2 \in U, w_2 \notin Sp(w_1)$, לפי ט"ע w_1, w_2 בלתי תלויים ליניארית.

אם $U = Sp(w_1, w_2)$ אז w_1, w_2 זה הבסיס של U.

אם $U \neq Sp(w_1, w_2)$ אז $w_3 \notin Sp(w_1, w_2)$, $w_3 \in U$. לפי ט"ע w_1, w_2, w_3 בלתי תלויים ליניארית.

אם $U = Sp(w_1, w_2, w_3)$ אז w_1, w_2, w_3 הם בסיס של U.

אם $U \neq Sp(w_1, w_2, w_3)$ $w_4 \notin Sp(w_1, w_2, w_3)$, $w_4 \in U$. לפי ט"ע w_1, w_2, w_3, w_4 בלתי תלויים ליניארית.

הוכחנו שבמרחב וקטור שנפרש ע"י n לא קיימים n+1 וקטורים בלתי תלויים ליניארית, לכן התהליך חייב להעצר לפני שלב n+1.

ז"א קיים $l \leq n$ כך ש $U = Sp(w_1, ..., w_l)$ כאשר $w_1, ..., w_l$ בלתי תלויים ליניארית, כלומר, קיבלנו בסיס של U , כנדרש, וגם, הוכחנו, ש $\dim_F U \leq \dim_F V$.

<u>משפט:</u> $U \subseteq V$ תת מרחב, ו $\dim_F U = \dim_F V$ אז U=V.

<u>הוכחה:</u>

נניח בדרך השלילה כי $U \neq V$, $w_1, ..., w_n$ בסיס של U, $v_1, ..., v_n$ של V.

ניקח $w_{n+1} \notin U$, $w_{n+1} \in V$. לפי טענת עזר, $w_1, ..., w_n, w_{n+1}$ בלתי תלויים ליניארית, בסתירה לכך ש V נפרש ע"י $v_1, ..., v_n$ - n וקטורים, ותו לו.

לכן: $U = V$ כנדרש.

<u>משפט:</u> נניח ש $V = Sp(u_1, ..., u_m)$ אז קיימת תת-קבוצה של הקבוצה $\{u_1, ..., u_m\}$ שהיא בסיס של V, יתר על כן, הקבוצה $\{u_i \mid 1 \leq i \leq m, u_i \notin Sp(u_1, ..., u_{i-1})\}$ היא בסיס.

(דוגמא – ליתר דיוק – חצי)

$$Sp(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)=V$$
$$u_1 \neq 0_V$$
$$u_2 \in Sp(u_1)$$
$$u_3 \notin Sp(u_1,u_2)$$
$$u_4 \notin Sp(u_1,u_2,u_3)$$
$$u_5 \in Sp(u_1,u_2,u_3,u_4)$$

לפי טענת המשפט, u_1,u_3,u_4 בסיס של V.

<u>**הערה:**</u> Sp הוא תת מרחב, ולכן הוא סגור לגבי חבור וכפל בסקלר.

<u>עכשיו להוכחה: (נקווה שהיא תהיה מלאה...)</u>

גם במקרה הכללי נצבע את u_i בצהוב כאשר $u_i \notin Sp(u_1,\dots,u_{i-1})$ ונצבע את u_i בכחול כאשר $u_i \in Sp(u_1,\dots,u_{i-1})$. נוכיח את אי תלות של הוקטורים הצהובים:

$$u_i \notin Sp(..............) \supseteq Sp(....) = ... = Sp(........)$$

לכן הוקטורים הצהובים (כתמתמים...) שלא שייכים לSp של קודמים ולכן הם בלתי תלויים ליניארית.

$$V = Sp(\underset{..............}{u_1,....,u_n}) = Sp(..............)$$

כאשר השמטנו את הוקטור הכחול עם אינדקס הכי גדול שיש.
התהליך איטרטיבי.

ז"א כל הוקטורים הצהובים פורשים את V ולכן הם בסיס, כנדרש.

<u>שיעור 14, 14.12.2005</u>

<u>בסיסים ומימד</u>

בפעם הקודמת, הוכחנו :

<u>משפט:</u> אם $V = Sp(u_1,...,u_m)$ אז קבוצת הוקטורים $\{u_i \mid 1 \le i \le m, u \notin Sp(u_1,...,u_{i-1})\}$ היא בסיס של V.

<u>משפט:</u> אם $V = Sp(u_1,...,u_m)$ ו $v_1,...,v_k \in V$ בלתי תלויים ליניארית, אז ניתן להשלים את $v_1,...,v_k$ עד לבסיס של V, כאשר משתמשים לצורך ההשלמה רק בוקטורים מהקבוצה $\{u_1...,u_m\}$.

<u>הוכחה:</u> על סמך הנתון, $V = Sp(u_1,...,u_m) = Sp(v_1,...,v_k,u_1,u_2,u_m)$ (אחרי שהוספנו וקטורים, עדיין נשמרת התכונה של פרישת המרחב).

על סמך המשפט הקודם, נקבל בסיס של V מהצורה $v_1,...,v_k,u_{j1},u_{j2},...u_{jl}$. כי $v_1,..,v_k$ בלתי תלויים ליניארית, ולכן הם עומדים בתנאי הסינון.

<u>טענה:</u> התנאים הבאים הם שקולים:

1. $v_1,...,v_n \in V$ הם בסיס של V
2. $v_1,...,v_n \in V$ קבוצה פורשת מינימלית (הערה: *מינימלית –קח לה וקטור – כבר לא פורשת, אה?)*
3. $v_1,...,v_n \in V$ קבוצת וקטורים בלתי תלויים מקסימלית (הערה: *מקסימלית – תן לה וקטור – כבר לא בת"ל, אה?)*

<u>הוכחה:</u>

$$(1) \Leftarrow (2)$$

נניח ש $v_1,...,v_n \in V$ בסיס. צריך להוכיח שזו קבוצה פורשת מינימלית. קודם כל, היא פורשת, כי היא בסיס. למה היא מינימלית? נניח שלא, ואז גם $v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n$ קבוצה פורשת. קבוצה זו בלתי תלויה ליניארית (כי היא תת קבוצה של קבוצת וקטורים בלתי תלויה ליניארית). הנחנו שהיא פורשת – קיבלנו בסיס של V עם (n-1) וקטורים. סתירה. לכן, הוכחנו מינימליות.

$$(2) \Leftarrow (1)$$

נניח ש $v_1,...,v_n \in V$ קבוצה פורשת מילינלית. נוכיח שהיא בסיס. נתון שהיא פורשת, ונשאר להוכיח אי-תלות. נניח שיש תלות ליניארית, לפי טענת עזר, קיים i, $1 \le i \le n$, כך ש $v_i \in Sp(v_1,...,v_{i-1})$, ואז $V = Sp(v_1,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n) = Sp(v_1,...,v_{i-1},v_i,v_{i+1},...,v_n)$, בסתירה למינימליות של $v_1,...,v_n$. לכן, $v_1,v_2,...,v_n$ בלתי תלויים ליניארית, ולכן, הם בסיס של V.

$$(1) \Leftarrow (3)$$

נתון ש $v_1,...,v_n \in V$ בסיס של V. צריך להוכיח שהיא קבוצה בלתי תלויה **מקסימלית**. אכן, לכן $v_{n+1} \in V$ מתקיים $v_{n+1} \in V = Sp(v_1,...,v_n)$ ולכן $v_1,...,v_n,v_{n+1}$ תלויים ליניארית.

$$(3) \Leftarrow (1)$$

נתון כי $v_1,...,v_n \in V$ קבוצת וקטורים בלתי תלויה ליניארית **מאכסימלית.** צריך (אפילו רצוי) להוכיח כי $Sp(v_1,...,v_n) = V$. נניח ש $Sp(v_1,...,v_n) \neq V$, אז קיים $v_{n+1} \in V$,

$v_{n+1} \notin Sp(v_1,...,v_n)$, ואז מקבלים

$v_1 \neq 0_V, v_2 \notin Sp(v_1),...,v_n \notin Sp(v_1,...,v_{n-1}), v_{n+1} \notin Sp(v_1,...,v_n)$ ולכן $v_1,...,v_{n+1}$ בלתי תלויים ליניארית בניגוד למקסימאליות, ולכן $v_1,...,v_n \in V$ בסיס כנדרש.

<u>טענה:</u> אם V מ"ו מעל F , $U \subseteq V$, $W \subseteq V$ תת מרחבים אז החיתוך $U \cap W$ גם כן תת מרחב של V.

<u>הוכחה:</u> (א) $0_V \in U$, $0_V \in W$, לכן $0_V \in U \cap W$, ולכן $U \cap W \neq \varnothing$.

(ב) נניח ש $v_1, v_2 \in U \cap W$, צ"ל $v_1 + v_2 \in U \cap W$. אכן, $v_1, v_2 \in U \cap W$, אכן $v_1 \in U, v_2 \in U$ לכן $v_1 + v_2 \in U$, לכן $v_1 + v_2 \in W$ ומכאן $v_1 + v_2 \in W$ כי U, W סגורים לגבי חיבור. ז"א $v_1 + v_2 \in U \cap W$.

(ג) נניח ש $v \in V \cap W$, $c \in F$, צ"ל $cv \in U \cap W$. אכן, $v \in U$ ולכן $cv \in U$, כמו כן $v \in W$ ולכן $cv \in W$, כי U, W סגורים לגבי כפל בסקלר. לכן $cv \in U \cap W$, כנדרש.

<u>הגדרה:</u> אם $U, W \subseteq V$ תת מרחבים, נסמן $U + W = \{u + w \mid u \in U, W \in W\}$.

<u>טענה:</u> אם $U, W \subseteq V$ תת מרחבים, אז גם $U + W$ תת מרחב של V.

<u>הוכחה:</u>

(א) $0_V \in U, 0_V \in W$, לכן $0_V = 0_V + 0_V \in U + W \Rightarrow U + W \neq \varnothing$.

(ב) $v_1, v_2 \in U + W$. צ"ל $v_1 + v_2 \in U + W$. אכן,

$v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2, u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in W$, לכן

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

(ג) נניח ש $v \in U + W, c \in F$, $v = u + w, u \in U, w \in W$, ולכן,

$cv = c(u + w) = cu + cw \in U + W$, כנדרש.

<u>משפט:</u> נניח שV מ"ו נפרש סופית. $U, W \subseteq V$ תת מרחבים. אז

$$\dim_F(U + W) = \dim_F U + \dim_F W - \dim_F(U \cap W)$$

<u>הוכחה:</u>

ל $U \cap W$ אפשר לבחור בסיס $v_1, \ldots, v_m$. $U \cap W$ הוא תת מרחב של U ולכן ניתן להשלים את $v_1, \ldots, v_m$ עד לבסיס של U: $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k$.

כמו כן, $U \cap W$ הוא תת מרחב של W, ולכן ניתן להשלים עד לבסיס של W:

$v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_l$

<u>טענה:</u> הוקטורים $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k, \ldots, w_1, \ldots w_l$ הם בסיס של U+W.

הערה: אם זה נכון, הוכחנו את המשפט, כי אז,

$$\dim_F(U + W) = m + k + l = (m + k) + (m + l) - m = \dim_F U + \dim_F W - \dim_F(U \cap W)$$

<u>הוכחת הטענה:</u> (א) נוכיח שהיא קבוצה פורשת. ניקח וקטור $v \in U + W$, אז קיימים וקטורים $u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$, אז

$$u = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m + b_1 u_1 + \ldots + b_k u_k$$

$$w = c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m + d_1 w_1 + \ldots + d_l w_l$$

לכן:

$$v = u + w = (a_1 + c_1) v_1 + \ldots + (a_m + c_m) v_m + b_1 u_1 + \ldots + b_k u_k + d_1 w_1 + \ldots + d_l w_l$$

$$\in Sp(v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l)$$

כיון ש $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_l \in U + W$ הם פורשים את U+W.

ב) אי תלות – נניח ש $a_1v_1+...+a_mv_m+b_1u_1+...+b_ku_k+d_1w_1+...+d_lw_l=0_v$

צ"ל כי $a_1=...=a_l=b_1=...=b_k=d_1=...=d_l=0_V$. נסמן

$$z=a_1v_1+...+a_mv_m+b_1u_1+....+b_ku_k=-d_1w_1-...-d_lw_l$$

לכן $z\in U$, וגם $z\in W$, לכן $z\in U\cap W$. לכן, ניתן לכתבו

$$z=c_1v_1+c_2v_2+....+c_mv_m=c_1v_1+....+c_mv_m+0_Fu_1+...+0_Fu_k$$

לכן יש שתי הצגות לפי הבסיס של U. בגלל יחידות ההצגה, $b_1=0_F,...,b_k=0_F$. לכן,

$.a_1v_1+...+a_mv_m+d_1w_1+...+d_lw_l=0_V$

$v_1,...,v_m,w_1,...,w_l$ הם בסיס של W, לכן בלתי תלויים ליניארית. לכן,

$a_1=0....a_m=0,d_1=0...,d_l=0$, קיבלנו אי תלות של $v_1,...,v_m,u_1,...,u_k,w_1,...,w_l$, לכן

הם בסיס של $U+W$ כנדרש.

<u>שיעור 15 - 19.12.2005</u>

<u>העתקות ליניאריות של מרחבים וקטוריים</u>

שם נרדף:

טרנספורמציות ליניאריות [הומומורפיזם של מרחבים וקטוריים]

[מורפיזם של מרחבים וקטוריים]

[אופרטורים ליניאריים]

F שדה, W , V מרחבים וקטוריים מעל F.

תזכורת:

A,B קבוצות, $f:A\to B$ העתקה של קבוצות. מה הכוונה? לכל איבר $a\in A$ העתקה f מתאימה איבר $f(a)\in B$.

$f:V\to W$ העתקה מV לW, כלומר $\forall v\in V, f(v)\in W$.

<u>הגדרה:</u> העתקה $f:V\to W$ נקראית <u>העתקה ליניארית</u> כאשר:

1. לכל $v_1,v_2\in V$ $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$ (f שומרת חיבור)
2. לכל $c\in F, v\in V$ מתקיים $f\left(cv\right)=cf\left(v\right)$ (f שומרת כפל בסקלר).

<u>הארה</u>: המושג העתקה ליניארית לא מוגדר כאשר המרחבים הוקטוריים מעל שדות שונים.

לתנאי $\left(2\right)$ יש משמעות דווקא כאשר V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F.

לשים לב:

$$\left(gf\right)a=g\left(f\left(a\right)\right)$$

<u>טענה:</u> אם $f:V\to W$ ו $g:W\to U$ העתקות ליניאריות, אז גם $gf:V\to U$ ליניארית.

<u>הוכחה:</u> (1) לכל $v_1,v_2\in V$:

$$\left(gf\right)\left(v_1+v_2\right)=g\left(f\left(v_1+v_2\right)\right)=g\left(f\left(v_1\right)+f\left(v_2\right)\right)=$$
$$g\left(f\left(v_1\right)\right)+g\left(f\left(v_2\right)\right)=\left(gf\right)\left(v_1\right)+\left(gf\right)\left(v_2\right)$$

(2) לכל $v\in V$, $c\in F$

$$\left(gf\right)\left(cv\right)=g\left(f\left(cv\right)\right)=g\left(cf\left(v\right)\right)=cg\left(f\left(v\right)\right)=c\left(gf\left(v\right)\right)$$

ולכן gf ליניארית , כנדרש.

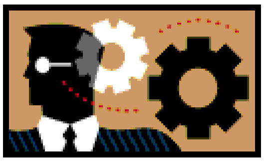
בואו נוסיף עוד העתקה ליניארית , h :

לכל $a\in A$

$$\left(h\left(gf\right)\right)\left(a\right)=h\left(\left(gf\right)\left(a\right)\right)=h\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right)$$
$$\left(\left(hg\right)f\right)\left(a\right)=\left(hg\right)\left(f\left(a\right)\right)=h\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right)$$

ולכן $h\left(gf\right)=\left(hg\right)f$. היות והרכבה של העקות ליניאריות מוגדרת כהרכבת העתקת, גם בשביל העתקות ליניאריות נכונה ***<u>האסוציאטיביות</u>***.

<u>**העתקת הזהות:**</u>



לכל קבוצה A יש העתקת הזהות

$$Id_A : A \to A$$
$$Id_A(a) = a$$

העתקת הזהות של מרחב וקטורי היא ליניארית:

$$Id_V : V \to V$$
$$Id_V(v) = v\left(v \in V\right)$$

מדוע ולמה?

(1) לכל $v_1, v_2 \in V$

$$Id_V(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = Id_V\left(v_1\right) + Id_V(v_2)$$

(2) לכל $c \in F, v \in V$

$$Id_V(cv) = cv = cId_V(v)$$

ולכן Id_V היא העתקה ליניארית.

<u>**העתקה הפכית:**</u>

אם $f : A \to B$ היא העתקה חח"ע ועל אז קיימת העתקת הפכית $f^{-1} : B \to A$

f חח"ע כאשר $a_1 \neq a_2, a_1, a_2 \in A$ נובע $f(a_1) \neq f(a_2)$
f על כאשר לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$.

לכל $a \in A$, $b \in B$, $f(a) = b$ אם ורק אם $f^{-1}(b) = a$ ואז $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$, $f^{-1}f = Id_A$
לעומת $ff^{-1} = Id_B$

<u>טענה:</u> אם $f : V \to W$ העתקה ליניארית חח"ע ועל אז $f^{-1} : W \to V$ גם היא ליניארית.

<u>**הוכחה:**</u> (1) נקח $w_1, w_2 \in W$. צ"ל $f^{-1}\left(w_1 + w_2\right) = f^{-1}\left(w_1\right) + f^{-1}\left(w_2\right)$.
<u>**נסמן**</u> $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = f^{-1}\left(w_1\right), v_2 = f^{-1}\left(w_2\right)$. לכן $f\left(v_1\right) = w_1$, $f\left(v_2\right) = w_2$ ונקבל
ע"ס ליניאריות של f ש $f\left(v_1 + v_2\right) = f(v_1) + f\left(v_2\right) = w_1 + w_2$ מכאן
$f^{-1}\left(w_1 + w_2\right) = v_1 + v_2 = f^{-1}\left(w_1\right) + f^{-1}\left(w_2\right)$.
מכאן - f^{-1} **שומרת חיבור (ושבת).**
(2) נקח $w \in W$, $c \in F$, צ"ל כי $f^{-1}\left(cw\right) = cf^{-1}\left(w\right)$. נסמן $v = f^{-1}\left(w\right)$ אז
$f : f\left(v\right) = w$. f שומרת כפל בסקלר, לכן $f\left(cv\right) = cf\left(v\right) = cw$. ז"א
$f^{-1}\left(cw\right) = cv = cf^{-1}\left(w\right)$, ולכן f^{-1} שומרת כפל בסקלר, ולכן f^{-1} ליניארית, כנדרש.

נניח $f:V\to W$ העתקה ליניארית
ונגדיר את הגרעין של f , $Kurlf$ ואת התמונה $\operatorname{Im} f$.

$$Kerf=\{v\mid v\in V, f(v)=0_W\}$$
$$\operatorname{Im} f=\{w\mid w\in W, \exists v\in V, f(v)=w\}$$

$$Kerf\subseteq V$$
$$\operatorname{Im} f\subseteq W$$

<u>טענה:</u>
$Kerf$ הוא תת מרחב של V
<u>הוכחה:</u>
(א)
$$f(0_V)=f(0_F\cdot 0_V)=0_F\cdot f(0_V)=0_W$$
ולכן $0_V\in Kerf$ ז"א $Kerf\neq\varnothing$.

(ב) ניקח $v_1,v_2\in Kerf$. צ"ל $v_1+v_2\in Kerf$ ובכן
$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)=0_w+0_W=0_W\Rightarrow f(v_1+v_2)\in Kerf$.

(ג) $v\in Kerf$, $c\in F$, אזי $f(cv)=cf(v)=c\cdot 0_W=0_W\in Kerf$.

<u>נצא ונדרוש :</u> $Kerf$ הוא תת מרחב של V, כנדרש. **למען ילמדו בני ישראל, ויראו הגויים.**

<u>טענה:</u> $\operatorname{Im} f$ הוא תת מרחב של W
<u>הוכחה:</u>
(א) $0_W=f(0_V)\in\operatorname{Im} f\Rightarrow\operatorname{Im} f\neq\varnothing$.
(ב) נניח ש $w_1,w_2\in\operatorname{Im} f$. צ"ל $w_1+w_2\in\operatorname{Im} f$. קיים $v_1\in V$ כך $f(v_1)=w_1$. קיים $v_2\in V$ כך ש $f(v_2)=w_2$. שים : אין טענה ליחידות המקור.
ואזי,
$$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)=w_1+w_2$$
ולכן ל w_1+w_2 יש מקור $v_1+v_2\in V$ ז"א $w_1+w_2\in\operatorname{Im} f$.
(ג) ניקח $w\in\operatorname{Im} f$, $c\in F$. קיים $v\in V$ כך ש $f(v)=w$ אז $f(cv)=cf(v)=cw$.
ז"א, cv הוא מקור של cw ולכן $cw\in\operatorname{Im} f$.

ראינו: $\operatorname{Im} f$ ***תת מרחב של W כנדרש.***

<u>הערה:</u> $f:V\to W$ **היא <u>על</u> אם ורק אם** $\operatorname{Im} f=W$.
<u>טענה:</u> $f:V\to W$ היא חח"ע אם ורק אם $Kerf=\{0_V\}$.

הוכחה: <= נניח ש f חח"ע. כבר הוכחנו $0_V \in Kerf$, כי $f\left(0_V\right)=0_W$. היות ו f חח"ע, לכל $v \in V$, $v \neq 0_V$ $f\left(v\right) \neq f\left(0_V\right)=0_W$ ז"א $v \notin Kerf$ ולכן $Kerf=\left\{0_V\right\}$.
כיוון שני => - נניח ש $Kerf=\left\{0_V\right\}$. צ"ל f חח"ע. ניקח $v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$. צ"ל $f\left(v_1\right) \neq f\left(v_2\right)$.

נניח בדרך השלילה כי $f\left(v_1\right)=f\left(v_2\right)$, אז $f\left(v_1-v_2\right)=f\left(v_1\right)-f\left(v_2\right)=0_W$.
ז"א $0_V \neq v_1-v_2 \in Kerf$, סתירה לכך ש $Kerf=\left\{0_V\right\}$, לכן f חח"ע, כנדרש.

טענה: יהי $f:V \rightarrow W, G:W \rightarrow U$, אזי $Kerf \subseteq Ker(gf)$.
הוכחה: ניקח $v \in Kerf$. צ"ל $v \in Ker\left(gf\right)$. לכן,
$\left(gf\right)\left(v\right)=g\left(f\left(v\right)\right)=g\left(0_W\right)=0_U$, ז"א $v \in Ker\left(gf\right)$

<u>שיעור 16 – 21.12.2005</u>

<u>העתקות ליניאריות</u>

<u>תזכורת:</u>

<u>הגדרה:</u> העתקה $f:V\to W$ נקראית <u>העתקה ליניארית</u> כאשר:

1. לכל $v_1,v_2\in V$ $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$ (f שומרת חיבור)
2. לכל $c\in F, v\in V$ מתקיים $f(cv)=cf(v)$ (f שומרת כפל בסקלר).

לשים לב: אין לרשום $f(vc)$ (במיוחד לא בצהוב).

ומה הוכחנו: הוכחנו כי $Kerf$ הוא תת מרחב של V, $\operatorname{Im} f$ תת מרחב של W.

<u>משפט:</u> נניח שלV יש בסיס (זה שקול לכך שV נפרש סופית), אז מתקיים

$$\dim_F Kerf+\dim_F \operatorname{Im} f=\dim_F V$$

<u>טענה: (הכרחית למשפט)!:</u> אם $V=Sp(z_1,\dots,z_m)$ אזי

$$\operatorname{Im} f=Sp\left(f(z_1),f(z_2),\dots,f(z_m)\right)$$

<u>הוכחת הטענה: (אסטרטגיה – הכלה בשני כיוונים)</u>

נוכיח את ההכלה של $Sp\left(f(z_1),\dots,f(z_m)\right)\subseteq \operatorname{Im} f$. הוקטור $f(z_1)$ שייך ל $\operatorname{Im} f$ כי יש לו מקור $Z_1\in V$, וכמו כן $f(z_2)\in \operatorname{Im} f$, ונמשיך - $f(z_m)\in \operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Im} f\subseteq W$ הוא תת מרחב, ולכן $\operatorname{Im} f$ סגור לגבי חיבור וכפל בסקלר. מכאן ש $Sp\left(f(z_1),\dots,f(z_m)\right)\subseteq \operatorname{Im} f$.

בכיוון השני: נוכיח כי $\operatorname{Im} f\subseteq Sp\left(f(z_1),\dots,f(z_m)\right)$. נקח $w\in \operatorname{Im} f$. צ"ל כי $w\in Sp\left(f(z_1),\dots,f(z_m)\right)$. קיים מקור $v\in V$ כך ש $w=f(v)$. לפי הנתון $V=Sp(z_1,\dots,z_m)$ קיימים סקלרים $c_1,\dots,c_m\in F$ כך ש $v=c_1z_1+c_2z_2+\dots+c_mz_m$.

אז,

$$w=f(v)=f(c_1z_1+\dots+c_mz_m)=f(c_1z_1)+\dots+f(c_mz_m)=$$
$$c_1f(z_1)+\dots+c_mf(z_m)\in Sp\left(f(z_1),\dots,f(z_m)\right)$$

לכן, מכיוון שראינו הכלה בשני כיוונים, ועל כן $\operatorname{Im} f=Sp\left(f(z_1),\dots,f(z_m)\right)$ כנדרש.

<u>ובחזרה למשפט:</u>

נבחר בסיס $u_1,u_2,\dots,u_k$ של $Kerf$. נבחר בסיס $w_1,\dots,w_l$ של $\operatorname{Im} f$. קיימים $v_1,v_2,\dots,v_l\in V$ כך ש $f(v_1)=w_1, f(v_l)=w_l$.

<u>טענה:</u>

$u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_l$ הם בסיס של V. ומכאן ינבע המשפט כי אז

$$\dim_F V=k+l=\dim_F Kerf+\dim_F \operatorname{Im} f$$

נוכיח את הטענה:

(א) פרישה: $u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_k \in V$ ולכן $Sp(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_l)\subseteq V$.

נקח $v\in V$. צ"ל $v\in Sp(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_l)$. נסתכל ב $f(v)\in \operatorname{Im} f$.

נפתח את $f(v)$ לפי הבסיס $w_1,\ldots,w_l$ של $\operatorname{Im} f$, כלומר, $f(v)=a_1w_1+\ldots+a_lw_l$.

נשים לב ש $f(a_1v_1+\ldots+a_lv_l)=a_1f(v_1)+\ldots.+a_lf(v_l)=a_1w_l+\ldots+a_lw_l$

לכן $f(a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_lv_l)=f(v)$.

ומכאן $v-a_1v_1-\ldots-a_lv_l\in Kerf$

כי $f(v-a_1v_1-\ldots-a_lv_l)=f(v)-f(a_1v_1+\ldots+a_lv_l)=0_W$

מכאן,

$$v-a_1v_1-\ldots-a_lv_l=b_1u_1+\ldots+b_ku_k\in Kerf$$

$$\Rightarrow$$

$$v=b_1u_1+\ldots+b_ku_k+\ldots+a_1v_1+\ldots+a_lv_l\in Sp(u_1,..,u_k,v_1,\ldots,v_l)$$

ולכן $V=Sp(u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_l)$.

(ב) אי תלות - נניח ש $b_1u_1+\ldots+b_ku_k+a_1v_1+\ldots+a_lv_l=0_V$

צ"ל $b_1=0_F\ldots b_k=0_F, a_1=0_F\ldots.a_l=0_F$

ידוע כי

$$0_W=f(0_V)=f(b_1u_1+\ldots+b_ku_k+a_1v_1+\ldots+a_lv_l)=$$

$$f(b_1u_1)+\ldots+f(b_ku_k)+f(a_1v_1)+\ldots+f(a_lv_l)=0_W+a_1w_1+..+a_lw_l=0_W$$

$w_1,\ldots,w_l$ בלתי תלויים ליניארית כי הם בסיס של $\operatorname{Im} f$ לכן $a_1=0_F,\ldots,a_l=0_F$.

לכן $b_1u_1+\ldots+b_ku_k=0_V$.

$u_1,\ldots,u_k$ בלתי תלויים ליניארית כי הם בסיס של $Kerf$, ולכן $b_1=0,\ldots,b_k=0$. קיבלנו אי תלות, לכן, $u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_l$ בסיס של V, כנדרש.

$f:V\to W$, ל V ול W יש בסיסים.

f חח"ע ועל אמ"ם $\ker f=\{0_V\}$ (הוכחנו בשיעור הקודם), ואז $\operatorname{Im} f=W$ ואז

$$\dim_F V=\dim_F\ker f+\dim_F\operatorname{Im} f=0+\dim_F W=\dim_F W$$

Hom, sweet Hom

נניח ש V, W מ"ו מעל שדה F.

$$Hom_F(V,W)=\{f\,|\,linear\_copyf:V\to W\}$$

במילים אחרות – $Hom_F(V,W)$ היא קבוצת כל ההעתקות הליניאריות מ V ל W.

נכניס בקבוצה זו מבנה של מרחב וקטורי מעל F.

(1) נגדיר חיבור: נניח $f:V\to W$ ו $g:V\to W$ העתקות ליניאריות. לכל $v\in V$ v נגדיר

$$(f+g)(v)=f(v)+g(v)$$

כלומר, $f+g:V\to W$.

<u>טענה :</u>

$f+g:V\to W$ היא העתקה **ליניארית**.

<u>הוכחה:</u>

<u>(א)</u> שומרת חיבור – ניקח $v_1,v_2\in V$ ונקבל

$$(f+g)(v_1+v_2)=f(v_1+v_2)+g(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)+g(v_1)+g(v_2)=$$
$$f(v_1)+g(v_1)+f(v_2)+g(v_2)=(f+g)(v_1)+(f+g)(v_2)$$

<u>(ב)</u> שומרת כפל בסקלר: ניקח $v\in V$, $c\in F$ ונקבל:

$$(f+g)(cv)=f(cv)+g(cv)=cf(v)+cg(v)=c(f(v)+g(v))=$$
$$c((f+g)(v))$$

ראינו כי $f+g$ היא העתקה ליניארית, כלומר $f+g\in Hom_F(V,W)$

עכשיו כפל בסקלר, ידידיי:

עבור $f:V\to W$ העתקה ליניארית ו $a\in F$ נגדיר $(af):V\to W$: לכל $v\in V$

$$(af)(v)=a(f(v))$$

טענה: $af:V\to W$ היא העתקה ליניארית.

הוכחה:

א. שומרת חיבור: נקח $v_1,v_2\in V$, אז

$$(af)(v_1+v_2)=a(f(v_1+v_2))=a(f(v_1)+f(v_2))+af(v_1)+af(v_2)=$$
$$(af)(v_1)+(af)(v_2)$$

ב. שומרת כפל בסקלר: נקח $v\in V$, $c\in F$

$$(af)(cv)=a(f(cv))=a(cf(v))=(ac)f(v)=(ca)f(v)=$$
$$c(af(v))=c((af)(v))$$

הוכחנו ש $af:V\to W$ היא העתקה ליניארית, $af\in Hom_F(V,W)$.

נשאר רק לבדוק כי מתקיימות כל האקסיומות של מרחב מרחב וקטורי.

שיעור 17, 26.12.2005

העתקות ליניאריות של מרחבים וקטוריים

(בפרקים הקודמים – הגדרנו Hom_F , וראינו שהוא סגור לחיבור וכפל בסקלר. ריבס מתעקש להוכיח את כל האקסיומות של מרחב וקטורי. ...It is going to be a long way)

ב. קומוטטיביות: $f,g \in Hom_F\left(V,W\right)$. לכל $v \in V$ מתקיים:

$$\left(f+g\right)=f\left(v\right)+g\left(v\right)=g\left(v\right)+f\left(v\right)=\left(g+f\right)\left(v\right)\Rightarrow f+g=g+f$$

ג. אסוציאטיביות: נקיח $f,g,h \in Hom_F\left(V,W\right)$. לכל $v \in V$ מתקיים:

$$\left(\left(f+g\right)+h\right)\left(v\right)=\left(f+g\right)\left(v\right)+h\left(v\right)=\left(f\left(v\right)+g\left(v\right)\right)+h\left(v\right)=$$
$$f\left(v\right)+\left(g\left(v\right)+h\left(v\right)\right)=f\left(v\right)+\left(g+h\right)\left(v\right)=\left(f+\left(g+g\right)\left(v\right)\right)\Rightarrow$$
$$\left(f+g\right)+h=f+\left(g+h\right)$$

ד. קיום ה0:

נגדיר העתקה ליניארית כך ש $0_{V,W}:V\to W$ ע"י $0_{V,W}\left(v\right)=0_W$ לכל $v \in V$. נבדוק כי $0_{V,W}$ היא העתקה ליניארית (שומרת חיבור, וכפל בסקלר).רמז – היא כן.

נבדוק נויטרליות של $0_{V,W}$. היא נייטרלית.

ה. איבר נגדי – יש איבר נגדי – סה"כ מחזיר את הw- שהיתה מחזירה הפו' המקורית, נבדוק שגם זו העתקה ליניארית, ונראה שגם היא העתקה ליניארית.

כפל בסקלר:

א. סגירות – עשינו בפרק הקודם.

ב. נייטרליות לכפל ב 1_F - ברורה (לא באמת צריך להעתיק).

ג. לכל $a,b \in F$
מתקיים

$$\left(\left(ab\right)f\right)\left(v\right)=\left(ab\right)\left(f\left(v\right)\right)=\left(a\left(bf\left(v\right)\right)\right)=a\left(\left(bf\right)\left(v\right)\right)=\left(a\left(bf\right)\right)\left(v\right)\Rightarrow$$
$$\left(ab\right)f=a\left(bf\right)$$

ד.

$$\left(\left(a+b\right)f\right)\left(v\right)=\left(a+b\right)\left(f\left(v\right)\right)=af\left(v\right)+bf\left(v\right)=\left(af\right)\left(v\right)+\left(bf\right)\left(v\right)\Rightarrow$$
$$\left(a+b\right)f=af+bf$$

ה. $f,g \in Hom_F\left(V,W\right)$, $a \in F, v \in V$ ואז:

$$\left(a\left(f+g\right)\right)\left(v\right)=a\left(\left(f+g\right)\left(v\right)\right)=a\left(f\left(v\right)+g\left(v\right)\right)=af\left(v\right)+ag\left(v\right)=$$
$$\left(af\right)\left(v\right)+\left(ag\right)\left(v\right)=\left(af+ag\right)\left(v\right)\Rightarrow a\left(f+g\right)=af+ag$$

עכשיו קיבלנו מבנה של מרחב וקטורי של ההעתקות מ $V\to W$. (וזה בכלל לא לקח לנו שני שיעורים).

משפט:

אם לV ולW יש בסיסים, אזי גם ל $dim_F Hom_F\left(V,W\right)=\dim_F V\cdot\dim_F W$

הוכחה: לא כרגע.

משפט: נניח ש $v_1,\dots,v_n\in V$ בסיס של V. אז לכל בחירה שרירותית של איברים $u_1,u_2,\dots,u_n\in W$ קיימת העתקה ליניארית **יחידה** $f:V\to W$ כך ש $f(v_1)=u_1,\dots,f(v_n)=u_n$.

(נציין **במפורש שאין** הוקטורים $u_1,\dots,u_n$ חייבים להיות בסיס של W).

הוכחה : לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=c_1v_1+\dots+c_nv_n$. נגדיר את $f:V\to W$ ע"י $f(v)=c_1u_1+\dots+c_nu_n$.

צריך לבדוק (א) $f:V\to W$ העתקה ליניארית.

(ב) $f(v_1)=u_1,\dots,f(v_n)=u_n$

(ג) f עם התכונות הנ"ל היא יחידה.

(א) $f:V\to W$ העתקה ליניארית. נבדוק שומרת חיבור: ניקח גם $v'\in V$ ונקבל

$$v'=c'_1v_1+\dots+c'_nv_n$$

$$f(v')=c'_1u_1+\dots+c'_nu_n$$

אבל

$$v+v'=(c_1v_1+\dots+c_nv_n)+(c'_1v_1+\dots+c'_nv_n)=(c_1+c'_1)v_1+\dots+(c_n+c'_n)v_n$$

ומכאן:

$$f(v+v')=(c_1+c'_1)u_1+\dots+(c_n+c'_n)u_n=$$

$$(c_1u_1+\dots+c_nu_n)+(c'_1u_1+\dots+c'_nu_n)=f(v)+f(v')$$

נבדוק את הסגירות לכפל:

ניקח $a\in F$

$$av=a(c_1v_1+\dots+c_nv_n)=(ac_1)v_1+\dots+(ac_n)v_n$$

לכן, ע"פ הגדרה,

$$f(av)=(ac_1)u_1+\dots(ac_n)u_n=a(c_1u_1+\dots+c_nu_n)=af(v)$$

וכנדרש, f שומרת כפל, ולכן היא ליניארית.

שלב 2 :

$$v_1=1_F\cdot v_1+0_Fv_2+\dots+0_Fv_n$$

(הצגה של וקטור מהבסיס באמצעות אותו בסיס).

ועל כן:

$$f(v_1)=1_Fu_1+0_Fu_2+..+0_Fu_n=u_1$$

וכן השאר. (כמו למשל:

$$v_n=0_Fv_1+\dots+1_Fv_n=v_n$$

ולכן:

$$f(v_n)=0_Fu_1+\dots+1_Fu_n=u_n)$$

ראינו כי f עומדת בתנאי הדרישה השניה.

<u>שלב ג: יחידות</u>

נסתכל בהעתקה ליניארית מתחרה, בשם $g:V\rightarrow W$ שגם היא מקיימת $g\left(v_1\right)=u_1,...,g\left(v_n\right)=u_n$.

עבור $v\in V$, $v=c_1v_1+...+c_nv_n$ מתקיים

$$g\left(v\right)=g\left(c_1v_1+...+c_nv_n\right)=c_1g\left(v_1\right)+...+c_ng\left(v_n\right)=c_1u_1+...+c_nu_n=f\left(v\right)$$

ז"א, $f=g$ **<u>כנדרש</u>**.

משפט?

נניח כי $v_1,...,v_n\in V$ בסיס של V. $w_1,...,w_m\in W$ בסיס של W . אזי, לכל העתקה ליניארית $f:V\rightarrow W$ נוכל להתאים מטריצה מסדר $m\times n$ באופן הבא:

$$f\left(v_1\right)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+...+a_{m1}w_m$$
$$f\left(v_2\right)=a_{12}w_1+a_{22}w_2+...+a_{m2}w_m$$
$$..........................$$
$$f\left(v_n\right)=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+...+a_{mn}w_m$$

והרי לנו מטריצה: (נשים לב – דומה למה שנעשה קודם, עם סיבוב ב90 מעלות ימינה):

$$A_f=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ .... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$$

לפי ההגדרה שלנו, מספר השורות של המטריצה A_f שווה ל $\dim_F W=m$. המימד של הטווח ומספר העמודות של A_f שווה ל $\dim_F V=n$ המימד של התחום.

דוגמא:

$V=R^3,W=R^2,F=R$. תהי העתקה

$$f:R^3\rightarrow R^2,f:\left(a_1,a_2,a_3\right)=\left(3a_1-2a_2+5a_3,-a_1+2a_2-10a_3\right)$$

f ליניארית (לא נוכיח).

ניקח בסיסים סטנדרטיים של R^3,R^2

$$e_1=\left(1,0,0\right),e_2=\left(0,1,0\right),e_3=\left(0,0,1\right)$$
$$d_1=\left(1,0\right),d_2=\left(0,1\right)$$

נראה:

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (3,-1) = 3(1,0) + (-1)(0,1) = 3d_1 + (-1)d_2$$
$$f(e_2) = f(0,1,0) = (-2,2) = (-2)(1,0) + 2(0,1) = (-2)d_1 + 2d_2$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (5,-10) = 5(1,0) + (-10)(0,1) = 5d_1 + (-10)d_2$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

ויש לנו מטריצה!

נשים לב:

$$m = 2, n = 3$$

<u>משפט:</u>

אם ל־V בסיס $v_1,...,v_n$ ול־W בסיס $w_1,...,w_m$ בסיס כנ"ל אז לכל מטריצה A מסדר $m \times n$ עם מקדמים בשדה F קיימת העתקה ליניארית יחידה $f: V \to W$ כך ש־$A_f = A$.

<u>הוכחה</u> : נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

נגדיר:

$$f(v_1) = u_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \in W$$
$$f(v_2) = u_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \in W$$
$$....$$
$$f(v_n) = u_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \in W$$

לפי המשפט הקודם, קיימת העתקה ליניארית יחידה $f: V \to W$ כך ש־$f(v_1) = u_1, ..., f(v_n) = u_n$. לפי ההגדרה $A_f = A$. (למה?!)

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(הם כל כך זהות, שאפשר לעשות Copy paste)

שיעור 18, 28.12.2005

העתקות ליניאריות ומטריצות

F שדה, V,W מרחבים וקטוריים מעל F , $v_1,\dots,v_n\in V$ בסיס של V, $w_1,\dots,w_m\in W$ בסיס של W.

לכל העתקה ליניארית $f:V\to W$ הגדרנו מטריצה A_f מסדר $m\times n$ (כלומר, עם m שורות ו-n עמודות) באופן הבא:

$$
\begin{aligned}
f(v_1)&=a_{11}w_1+a_{21}w_1+\dots+a_{m1}w_m\\
f(v_2)&=a_{12}w_1+a_{22}w_1+\dots+a_{m2}w_m\\
&\vdots\\
f(v_n)&=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\dots+a_{mn}w_m
\end{aligned}
\qquad
A_f=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}
$$

בואו נסתכל על $g:V\to W$

$$
\begin{aligned}
g(v_1)&=b_{11}w_1+b_{21}w_2+\dots+b_{m1}w_m\\
g(v_2)&=b_{12}w_1+b_{22}w_2+\dots+b_{m2}w_m\\
&\vdots\\
g(v_n)&=b_{1n}w_1+b_{2n}w_2+\dots+b_{mn}w_m
\end{aligned}
\qquad
A_g=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}
$$

(רמז – זה בדיוק אותו דבר, רק עם g במקום f, ו-b במקום a)

הגדרנו את ההעתקה הליניארית $f+g:V\to W$ ע"י

$\forall v\in V,(f+g)(v)=f(v)+g(v)$. מה המטריצה המתאימה ל-$f+g$?

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(v_1)=f(v_1)+g(v_1)=(a_{11}w_1+\dots+a_{m1}w_m)+(b_{11}w_1+\dots+b_{m1}w_m)\\
&=(a_{11}+b_{11})(w_1)=(a_{11}+b_{11})w_1+(a_{21}+b_{21})w_2+\dots+(a_{m1}+b_{m1})w_m\\
&(f+g)(v_n)=(a_{1n}+b_{1n})w_1+(a_{mn}+b_{mn})w_m
\end{aligned}
$$

ולכן:

$$
\underset{m\times n}{A_{f+g}}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}=\underset{m\times n}{A_f}+\underset{m\times n}{A_g}
$$

איזה מגניב! אפשר לחבר מטריצות!

```
class Matrix{
        public Matrix add(Matrix );
        public Matrix add2copy(Matrix);
};
```

בואו נוסיף כפל בסקלר:

לכל סקלר $c\in F$ הגדרנו העתקה ליניארית $(cf):V\to W$ ע"י $(cf)(v)=cf(v)$ לכל $v\in V$. נשאלת, איפוא, השאלה: מהי המטריצה המתאימה ל-(cf)?

```
public Matrix mul(double d)
```

```
{
	for (int i=0;i<ROWS;++i)
		for (int j=0;i<COLS;++j)
			_data[i][j]*=d;
}
```

$$(cf)(v_1)=c(f(v_1))=c(a_{11}w_1+a_{21}w_2+\ldots+a_{m1}w_m)=$$
$$ca_{11}w_1+ca_{21}w_2+\ldots+ca_{m1}w_m$$
$$(cf)(v_2)=ca_{12}w_1+ca_{22}w_2+\ldots+ca_{m2}w_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(cf)(v_n)=ca_{1n}w_1+ca_{2n}w_2+\ldots+ca_{mn}w_m$$

ועל כן המטריצה תיראה כך:

$$A_{cf}=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \ldots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \ldots & ca_{2n} \\ \ldots & & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \ldots & ca_{mn} \end{pmatrix}=cA_f$$

נסמן ב $M_{m,n}(F)$ קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם מקדמים בשדה F. הגדרנו $M_{m,n}(F)$ חבור (של מטריצות) וכפל (של מטריצה), בסקלר.

נשאלת, איפוא, השאלה: **האם קיבלנו ב $M_{m,n}(F)$ מבנה של מרחב וקטורי?** התשובה **כן**, בדיקת האקסיומות היא **תרגיל** (לגמרי שגרתי, אם להזכר איך הוכחנו ש F^n הוא מרחב וקטור מעל F) וככה"נ עולה בעט פיילוט או טונר)).

עתה, כשנתיחס גם ל $Hom_F(V,W)$, וגם ל $M_{m,n}$ כמרחבים וקטוריים מעל F, נמצא שהעתקה מ $Hom(V,W)\to M_{m,n}(F)$ ($f\to A_f$). **היא ליניארית** גם כן, כי $A_{f+g}=A_f+A_g$ (שומרת חיבור) ושומרת כפל בסקלר (ראינו לפני מספר פסקאות). **<u>היא גם חח"ע ועל</u>** (על – נובע מהוכחות קודמות). חח"ע – נוכיח .

ובכן, ניקח $f:V\to W$, $g:V\to W$ העתקות ליניאריות ונניח ש $A_f=A_g$. צ"ל ש $f=g$.

ואכן,

$$\begin{aligned} f(v_1)&=a_{11}w_1+a_{21}w_1+\ldots+a_{m1}w_m & g(v_1)&=b_{11}w_1+b_{21}w_2+\ldots+b_{m1}w_m \\ f(v_2)&=a_{12}w_1+a_{22}w_1+\ldots+a_{m2}w_m \;=\; & g(v_2)&=b_{12}w_1+b_{22}w_2+\ldots+b_{m2}w_m \\ &\vdots & &\vdots \\ f(v_n)&=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\ldots+a_{mn}w_m & g(v_n)&=b_{1n}w_1+b_{2n}w_2+\ldots+b_{mn}w_m \end{aligned}$$

למה זה שווה? כי $A_f=A_g$ (כל המקדמים שווים).

<u>גברת שמול</u>: 'אני לא יודעת מה איתך, אבל אני רואה **<u>משפט</u>**': $\begin{matrix} Hom_F(V,W)\to M_{m,n}(F) \\ f\to A_f \end{matrix}$ הוא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים מעל F.

<u>משפט:</u>

$$\dim_F M_{m,n}(F)=m\cdot n$$

<u>הוכחה:</u> נסתכל בבסיס הסטנדרטי של $M_{m,n}(F)$. ניקח מטריצה:

$$E_{ij}=\begin{pmatrix} 0_F & 0_F & \\ & & \\ & 1_F & \\ & & \end{pmatrix}$$

(מוגדרת שכולה 0_F , חוץ משורה I ועמודה j, שם יש 1_F).

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} E_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

טענה - $E_{ij},1\le i\le m,1\le j\le n$ הם בסיס של $M_{m,n}(F)$.

מזה נובע שהמימד של $\dim_F M_{m,n}(F)=m\cdot n$.

הוכחת הטענה:

(א) קבוצה פורשת – ניקח מטריצה: (לדוגמא) -

$$A=\begin{pmatrix}3&5&-1\\10&2&7\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$+10\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ואכן, אם $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}$ אזי $A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$

(ב) קבוצה בלתי תלויה ליניארית – נניח ש $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}=\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\ldots&&&\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$. צ"ל שכל $a_{ij}=0_F$, אבל $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}$. מכך נובע ש $a_{ij}=0_F$ לכל i,j כנדרש.

<u>משפט:</u> אם ל U יש בסיס ו $f:U\to U'$ איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים, כלומר, f **העתקה ליניארית חח"ע ועל**, אז $\dim_F U=\dim_F U'$.

<u>הוכחה:</u> f חח"ע, ועל כן $\ker f=\{0_u\}$. f על ועל כן $\operatorname{Im} f=u'$. הוכחנו ש

$$0+\dim_F U'=\dim_F Kerf+\dim_F \operatorname{Im} f=\dim_F U$$

$$\Rightarrow$$

$$\dim_F U'=\dim_F U$$

כנדרש.

<u>משפט:</u> $\dim_F Hom_F(V,W) = \dim_F V\cdot\dim_F W$ כאשר ל V,W יש בסיסים.

<u>הוכחה:</u>

נניח ש $\dim_F V=n,\dim_F W=m$ אז ראינו ש $Hom_F(V,W)$ איזומורפי ל $M_{m,n}(f)$, ולכן המימדים שלהם שווים, כלומר, המימד של $\dim_F Hom_F(V,W)=m\cdot n=dim_F V\cdot\dim_F W$ כנדרש.

עוד משהו: (תזכורת לזה שהמימד תלוי בשדה)

$$\dim_R C=2,\dim_C C=1$$

<u>משפט:</u> נניח ש V,W,U מרחבים וקטוריים מעל F, $v_1,\dots,v_n\in V$ בסיס של V. $w_1,\dots,w_m\in W$ בסיס של W, $u_1,\dots,u_l\in U$ בסיס של U.

$$f:V\to W$$

$$g:W\to U$$

$$gf:V\to U$$

ל f מתאימה מטריצה A_f מסדר $m\times n$, ל g מתאימה מטריצה A_g מסדר $l\times m$, ל gf מתאימה מטריצה מסדר A_{gf} $l\times n$.

נשאלת , איפוא, השאלה : מהו הקשר בין A_f , A_g , A_{gf}?

שיעור 19, 2.1.2006

העתקות ליניאריות ומטריצות

V,W,U מעל שדה F. $v_1,\ldots,v_n \in V$ בסיס של V. $w_1,\ldots,w_m \in W$ בסיס של W.

$u_1,\ldots,u_l \in U$ בסיס של U.

$$f:V\to W, g:W\to U$$

$$gf:V\to U$$

$$\underset{m\times n}{A_f}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix} \underset{l\times m}{A_g}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m}\\ \ldots & & & \\ b_{l1} & b_{l2} & \ldots & b_{lm}\end{pmatrix}$$

$$\underset{l\times n}{A_{gf}}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \ldots & & & \\ c_{l1} & c_{l2} & \ldots & c_{ln}\end{pmatrix} \begin{matrix} i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots.,l\end{matrix}$$

$$f(v_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$$

$$g(w_i)=\sum_{k=1}^{l} b_{ki}u_k$$

$$(gf)(vj)=\sum_{k=1}^{l} c_{kj}u_k$$

בואו ונראה איך נוצר A_{gf}:

$$\sum_{k=1}^{l} c_k \overset{1}{=} (gf)(v_j) =^2 g\left(f(v_j)\right) =^3 g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i\right) =^4 \sum_{i=1}^{m} a_{ij}g(w_i) =^5$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=i}^{l} b_{ki}u_k\right) =^6 \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} a_{ij}b_{kj}u_k =^7 \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} b_{ki}a_{ij}u_k =^8 \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}u_k =^9$$

$$\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)u_k \Rightarrow^{\sin gularity} c_{kj}=\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}$$

(1) – מה שרשמו לעיל. (2) על פי הגדרת ההעתקה. (4) ע"פ ליניאריות (8) על פי החלפת סדר סיכום (9) ע"פ אקסיומות המרחב הוקטורי

הגדרה:

אם $B=\begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1m} \\ & & \\ b_{l1} & & b_{lm} \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר $l\times m$ ו $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ מטריצה מסדר $m\times n$ (נשים לב : מספר השורות בA שווה למספר העמודות בB) אזי מוגדרת המכפלה BA כמטריצה מסדר $l\times n$. $BA=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ & \dots & \\ c_{l1} & \dots & c_{\ln} \end{pmatrix}$ ע"י הנוסחה $c_{kj}=\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}, k=1...l, j=1...n$.

משפט: $A_{gf}=A_gA_f$. נכון בעצם ההגדרה של כפל מטריצות.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 32 & 38 & 44 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>משפט:</u> כפל מטריצות הוא אסוציאטיבי כאשר הוא מוגדר.

<u>סימון:</u> עבור מטריצה A נסמן $[A]_{ij}$ את האיבר של A שעומד בשורה מספר I עמודה j.

<u>חשוב לשים לב: לא zero based!!!!</u>

$$[A]_{ij} := A[i][j]$$

<u>הוכחה:</u> נניח ש A,B,C מטריצות, A מסדר $p\times q$,

B מסדר $q\times r$

C מסדר $r\times s$

נוכיח כי $(AB)C=A(BC)$. (נשים לב, בכל מקרה יהיה מסדר $p\times s$)

$$\left[(AB)C\right]_{hk}=\sum_{j=1}^{r}[AB]_{hj}[C]_{jk}=\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{1}[A]_{hi}[B]_{ij}\right)[C]_{jk}=$$

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{q}[A]_{hi}[B]_{ij}[C]_{jk}$$

$$\left[A(BC)\right]_{hk}=\sum_{i=1}^{q}[A]_{hi}[BC]_{ik}=\sum_{i=1}^{q}[A]_{hi}\left(\sum_{j=1}^{r}[B]_{ij}\left[C_{jk}\right]\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{r}[A]_{hi}[B]_{ij}[C]_{jk}$$

נשים לב שהם שווים, רק עם שינוי סדר הסיכום, שאין בעייה עם זה בסיכום סופי.

V,W,U מעל שדה F. $v_1,...,v_n \in V$ בסיס של V. $v'_1,...,v'_n \in V$ עוד בסיס של V.
$w_1,...,w_m \in W$ בסיס של W. $w'_1,...,w'_m \in W$ עוד בסיס של W. $f:V \to W$ העתקה ליניארית.

$$\underset{m\times n}{A_f} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underset{m\times n}{A'_f} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & & & \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

נחפש (וגם נמצא!) את הקשר בין A_f ו A'_f.
נתבונן בהרכבת ההעתקות:

$$V \xrightarrow{Id_v} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{Id_w} W$$

$$v \to v \to f(v) \to f(v)$$

כלומר, ההרכבה היא $Id_w f Id_v$, שזהה ל f מן הסתם.
ההעתקה Id_v תהיה מ $v'_1,..,v'_n \to v_1,...,v_n$, ובהתאם גם העתקת Id_w.

$$A'_f = PA_fQ$$

כאשר P היא המטריצה של העתקת הזהות $Id_w : W \to W$ ביחס לבסיס $w_1,...,w_m$ בתחום ובסיס $w'_1,...,w'_m$ בטווח. וכמו כן, Q היא המטריצה של העתקת הזהות $Id_v : V \to V$ כאשר $v'_1,...,v'_n$ בסיס בתחום ו $v_1,...,v_n$ בסיס בטווח.

'בדרך כלל, נוסחת חישוב בסיס כרוכה בכל מיני חישובים. אנחנו קיבלנו אותה במחיר מוזל, אולי מוזל מדי'

P היא מטריצה מסדר $m \times m$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1m} \\ \dots & & \\ p_{m1} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

$$Id_w(w_1) = w_1 = p_{11}w'_1 + p_{21}w'_2 + \dots + p_{m1}w'_m$$

$$Id_w(w_2) = w_2 = p_{12}w'_1 + p_{22}w'_2 + \dots + p_{m2}w'_m$$

......

$$Id_w(w_m) = w_m = p_{1m}w'_1 + p_{2m}w'_2 + \dots + p_{mm}w'_m$$

לכן P נקראת ***מטריצת מעבר בסיסים***. מבסיס $w_1,...,w_m$ לבסיס $w'_1,...,w'_m$.

Q היא מטריצה מסדר $n \times n$

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & & & \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Id_v\left(v'_1\right)=v'_1=q_{11}v_1+\ldots+q_{n1}v_n$$

$$Id_v\left(v'_2\right)=v'_2=q_{12}v_1+\ldots+q_{n2}v_n$$

....

$$Id_v\left(v'_n\right)=v'_n=q_{1n}v_1+\ldots+q_{nn}v_n$$

Q היא מטריצת מעבר בסיסים מבסיס $v'_1,\ldots,v'_n$ לבסיס $v_1,\ldots,v_n$.

V מעל שדה F. $v_1,\ldots,v_n\in V$ בסיס של V. $v'_1,\ldots,v'_n\in V$ עוד בסיס של V. $f:V\to V$ העתקה ליניארית.

$$\underset{m\times n}{A_f}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underset{m\times n}{A'_f}=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & & & \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A'_f=PA_fQ$$

Q כנ"ל, P מטריצת מעבר בסיסים מ $v_1,\ldots,v_n$ ל $v'_1,\ldots,v'_n$. (סה"כ מקרה פרטי של הנוסחה הקודמת).

<u>משפט</u>: אם P היא מטריצת מעבר בסיסים מ $v_1,\ldots,v_n$ ל $v'_1,\ldots,v'_n$ וQ מטריצת מעבר בסיסים מ $v'_1,\ldots,v'_n$ ל $v_1,\ldots,v_n$ אזי $PQ=I$ ו $QP=I$. מה זה I?

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>הוכחה:</u>

נתבונן בהעתקות לינאריות $V\to V\to V$ (Id_v) שתיהן.

$$v_1,\ldots,v_n\to v'_1,\ldots,v'_n\to v_1,\ldots,v_n$$

$$Id_v\left(v_1\right)=v_1=1_F v_1+0_F v_2+\ldots+0_F v_n$$

$$Id_v\left(v_2\right)=v_2=0_F v_1+1_F v_2+\ldots+0_F v_n$$

...

$$Id_v\left(v_n\right)=v_n=0_F v_1+0_F v_2+\ldots+1_F v_n$$

ולכן המטריצה היא:

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

<u>הגדרה:</u> אם $PQ = QP = I$ אז מגדירים $P^{-1} = Q, Q^{-1} = P$ (כי הם הופכיים) ואז:

$$A'_f = PA_fP^{-1}$$

$$A'_f = Q^{-1}A_fQ$$

שיעור 20, 4.1.2006

העתקות ליניאריות ומטריצות

תזכורת:

V,W מרחב וקטורי מעל F. $v_1,...,v_n \in V$ בסיס של V, $w_1,...,w_m \in W$ בסיס של W.

$f:V\to W$ העתקה ליניארית.

$$\underset{m\times n}{A_f}=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ & & & \\ & & & \\ a_{m1} & ... & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$f\left(v_j\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i$$

ניקח $v\in V$

$$v=c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n$$

$$f\left(v\right)=f\left(\sum_{j=1}^{n}c_jv_j\right)=\sum_{j=1}^{n}c_jf\left(v_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}w_i\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_ja_{ij}w_i=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_jw_i=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j\right)w_i$$

נתבונן ב $f\left(v\right)$:

$$f\left(v\right)=d_1w_1+d_2w_2+...+d_mw_m$$

$$d_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j$$

$$\underset{m\times n}{A_f}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}c_1+a_{12}c_2+...+a_mc_n \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+...+a_mc_n \\ .... \\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+...+a_{mn}c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n\end{pmatrix}$$

נסמן:

$$c_v=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n\end{pmatrix} c_{f(v)}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_m\end{pmatrix}$$

משפט:

$$c_{f(v)}=A_fc_v$$

<u>מערכת משוואות ליניאריות</u>

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

מה יש לנו כאן?

<u>מימין:</u> מערכת של m משוואות ליניאריות בנעלמים $x_1,\dots,x_n$ x עם מקדמים $a_{ij} \in F$ ואיברים חופשיים $b_i \in F$.

<u>משמאל:</u> A מטריצת המקדמים, x עמודת הנעלמים, b עמודת האברים החופשיים.

כלומר:

$$Ax = b$$

<u>מקרה פרטי:</u>

נניח ש $m = n$ (מטריצה ריבועית), ונניח שלA יש מטריצה הפכית A^{-1}.

תזכורת – יש מטריצה הפכית כאשר:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

נקח $Ax = b$ ונכפיל את שני האגפים משמאל במטריצה A^{-1}. נקבל

$$x = Ix = \left(A^{-1}A\right)x = A^{-1}\left(Ax\right) = A^{-1}b \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$$

<u>מסקנה:</u> במקרה פרטי זה **הפתרון קיים ויחיד**.

<u>משפט:</u> נניח שעבור מטריצה A מסדר $m \times n$ קיימת מטריצה B מסדר $n \times m$ (לשים לב, הפוך) כך ש:

$$BA = \mathrm{I}n, AB = \mathrm{Im}$$

$$\underset{m\times m}{\mathrm{Im}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{n\times n}{\mathrm{I}n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אזי בהכרח m=n.

מטריצה $n \times 1$ - $M_{n,1}\left(F\right) \ni \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$.

$M_{m,n}\left(F\right)$ **קבוצת** כל המטריצת מסדר $m \times n$ עם מקדמים בשדה F.

$$\underset{m\times n}{A} \quad \underset{n\times m}{B}$$

$$f_A : F^n \to F^m$$
$$c \to Ac$$

<u>טענה:</u>

$$(P_1+P_2)Q = P_1Q + P_2Q$$
$$P(Q_1+Q_2) = PQ_1 + PQ_2$$

כאשר החיבור והכפל של מטריצות מוגדר, כגון P, P_1, P_2 מסדר $p \times q$ ו Q_1, Q_2, Q מסדר $q \times r$.

$$\left[(P_1+P_2)Q\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{q}\left[P_1+P_2\right]_{ik}\left[Q\right]_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\left(\left[P_1\right]_{ik}+\left[P_2\right]_{ik}\right)\left[Q\right]_{kj} =$$
$$\sum_{k=1}^{q}\left(\left[P_1\right]_{ik}\left[Q\right]_{kj}+\left[P_2\right]_{ik}\left[Q\right]_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{q}\left[P_1\right]_{ik}\left[Q\right]_{kj} + \sum_{k=1}^{q}\left[P_2\right]_{ik}\left[Q\right]_{kj} =$$
$$\left[P_1Q\right]_{ij} + \left[P_2Q\right]_{ij} = \left[P_1Q+P_2Q\right]_{ij} \Rightarrow (P_1+P_2)Q = P_1Q + P_2Q$$

ובכיוון השני:

$$\left[P(Q_1+Q_2)\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{q}\left[P\right]_{ik}\left[Q_1+Q_2\right]_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\left[P\right]_{ik}\left(\left[Q_1\right]_{kj}+\left[Q_2\right]_{kj}\right) =$$
$$\sum_{k=1}^{q}\left(\left[P\right]_{ik}\left[Q_1\right]_{kj}+\left[P\right]_{ik}\left[Q_2\right]_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{q}\left[P\right]_{ik}\left[Q_1\right]_{kj} + \sum_{k=1}^{1}\left[P\right]_{ik}\left[Q_2\right]_{kj} =$$
$$\left[PQ_1\right]_{ij} + \left[PQ_2\right]_{ij} = \left[PQ_1+PQ_2\right]_{ij} \Rightarrow P(Q_1+Q_2) = PQ_1 + PQ_2$$

$$f_A : F^n \to F^m$$
$$c \to Ac$$
$$m \times 1 \to m \times 1$$

על סמך חוק הפלוג, f_A שומרת חיבור. אכן, ניקח $c, c' \in F^n$, אז

$$f_A(c+c') = A(c+c') = Ac + Ac' = f_A(c) + f_A(c')$$

לכל $a \in F$ ולכל מטריצות $\underset{p\times q}{P}, \underset{q\times r}{Q}$ מתקיים $(aP)Q = P(aQ) = a(PQ)$. **<u>תרגיל</u>** **<u>(קל).</u>**

לכן fA שומרת כפל בסקלר : $f_A(ac) = A(ac) = a(Ac) = af_A(c)$.

<u>הוכחנו ש</u> $f_A : F^n \to F^m$ היא העתקה ליניארית.

מה עשינו אז?

הגדרנו $f_A : F^n \to F^m$ $\underset{m\times n}{A}$. הוכחנו שהיא ליניארית.

יש למרחבים האלה בסיסים סטנדרטיים . נסמנם:

$e_1,...,e_n \in F^n$

$d_1,...,d_n \in F^m$

מהי המטריצה של העתקה f_A ?

עלינו להפעיל את ההעתקה על הבסיסים:

$$f_A(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + a_{m1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_A(e_2) = Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + a_{m2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

...

$$f_A(e_n) = Ae_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = a_{1n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + a_{mn} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

טענה: $A_{f_A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = A$

שיעור 21, 9.1.2006

מערכות של משוואות ליניאריות, מטריצות, והעתקות ליניאריות

F שדה, F^n, F^m מ"ו של עמודות בגובה n וm בהתאמה.

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f_A : F^? \to F^?$$

הוכחנו כי f_A היא העתקה ליניארית.

אם ניקח את הבסיסים הסטנדרטיים ב F^n וב F^m, אז המטריצה של העתקה ליניארית f_A ביחס לבסיסים אלה היא $A_{f_A} = A$.

משפט: נניח שA וB שתי מטריצות, A מסדר $m\times n$, B מסדר $n\times m$ כך ש $AB = I_m, BA = I_n$ אז $m = n$.

הוכחה: נסתכל בהעתקות ליניאריות $f_A : F^n \to F^m$ ו $f_B : F^m \to F^n$.

$$F^m \xrightarrow{f_b} F^n \xrightarrow{F_A} F^m$$

$$d \to Bd \to A(Bd) = (AB)d = I_n d = d$$

$$Id_{F^n} : F^n \xrightarrow{f_A} F^m \xrightarrow{f_B} F^n$$

$$c \to Ac \to B(Ac) = (BA)c = I_n c = c$$

$$Id_{F^m} : F^m \xrightarrow{f_B} F^n \xrightarrow{F_A} F^m$$

$$d \to Bd \to A(Bd) = (AB)d = I_m d = d$$

לכן f_A ו f_B הפכיות זו לזו, ז"א הן חח"ע ועל ולכן הן איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.נמצא ש F^m איזומורפי ל F^n. הוכחנו קודם שלמרחבים וקטוריים איזומורפיים יש אותו מימד. לכן $n = \dim_F F^n = \dim_f F^m = m$ כנדרש.

מסקנה: רק למטריצה ריבועית A יכולה להיות מטריצה A^{-1}.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \underset{m\times n}{A}x = b$$

$$f_A : F^n \to F^m$$

$$c \to Ac$$

ז"א למצוא פתרון של מערכת הנ"ל הוא למצוא מקור של b תחת העתקה ליניארית f_A.

<u>הגדרה:</u> העתקה $f:A\to B$ נקראת חד חד ערכית (חח"ע) כאשר מ $a_1\neq a_2$ נובע $f(a_1)\neq f(a_2)$ $a_1,a_2\in A$.

<u>הערה:</u> למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in \operatorname{Im}(f_A)$.

<u>הערה:</u> למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד אם ורק אם $Ker(f_A)=\{0_{F^n}\}$ ו $b\in \operatorname{Im}(f_A)$.

(ההכלה בתמונה – מראה לפחות מקור אחד. הגדרת הגרעין – לא יותר ממקור אחד).

<u>משפט:</u> אם $f_A(c)=b$ אז $f_A^{-1}(b)=c+Ker(f_A)$.

<u>משפט:</u> אם $f:V\to W$ העתקה ליניארית, $c\in V$, $f(c)=b\in W$ (כלומר, c הוא מקור של b) אז $f^{-1}(b)=c+Kerf$

$$c+KerF=\{c+v\mid v\in Kerf\}$$

<u>הוכחה:</u> א. נוכיח כי $f^{-1}(b)\subseteq c+Kerf$. ואכן, לכל $v\in Kerf$, $f(c+v)=f(c)+f(v)=b+0_W=b$, ז"א $c+v\in f^{-1}(b)$.

ב. נוכיח כי $f^{-1}(b)\subseteq c+Kerf$. ניקח $c'\in f^{-1}(b)$, ז"א $f(c')=b$. לכן $f(c-c')=f(c)-f(c')=b-b=0_W$. כלומר, $c-c'\in Kerf$.

נסמן $v=c'-c\in Kerf$

$$c'=c+(c'-c)=c+v\in c+Kerf$$

ז"א

$$f^{-1}(b)\subseteq c+Kerf$$

ולכן $f^{-1}(b)=c+Kerf$, כנדרש.

<u>הגדרה:</u> $U\subseteq V$ תת מרחב, $v\in V$ אז הקבוצה $v+U=\{v+u\mid u\in U\}$ נקראת ישריה. (מגיע מהמילה ישר ויריעה).

U נקרא תת-מרחב המכוון של הישריה $v+U$.

<u>טענה:</u> אם $U_1,U_2\subseteq V$ תת-מרחבים $v_1,v_2\in V$ ואם $v_1+U_1=v_2+U_2$ אז $U_1=U_2$.

<u>הוכחה:</u> היות ו $0_v\in U_1$ לכן $v_1=v_1+0_v\in v_1+U_1=v_2+U_2$. ז"א קיים $u_2\in U_2$ כך ש $v_1=v_2+u_2$. ז"א ש $v_1-v_2=u_2\in U_2$, $v_2-v_1=-u_2\in U_2$. היות ו $0_v\in U_2$, אזי $v_2=v_2+0_V\in v_2+U_2=v_1+U_1$.

לכן קיים $u_1\in U_1$ כך ש $v_2=v_1+u_1$, ז"א $v_2-v_1=u_1\in U_1$. $v_1-v_2=-u_1\in U_1$.

מהשיוויון $v_1+U_1=v_2+U_2$ נובע

$$U_1=(-v_1)+(v_1+U_1)=(-v_1)+(v_2+U_2)=(v_2-v_1)+U_2=U_2$$

כנדרש.

<u>הגדרה:</u>

$$\dim_F(v+U)=\dim_F U$$

<u>מסקנה:</u> אוסף כל הפתרונות של מערכת ליניארית היא **ישריה**.

שיעור 22, 11.1.2006

מערכות של משוואות ליניאריות, מטריצות, והעתקות ליניאריות

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Ax = B$$

$$f_A : F^n \to F^m$$

$$c \to Ac$$

ראינו כי f_A העתקה ליניארית.

אוסף הפתרונות של המערכת $Ax = b$ הוא $\{c \in F^n \mid f_A(c) = b\} = f_A^{-1}(b)$

אם $f_A(c) = b$ אז $f_A^{-1}(b) = c + Ker(f_A)$.

הערה מוסגרת:

מה ההבדל בין x לבין c (כל כך חשוב שריבס מתחיל להתפרייע):

$$2x = 4$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

חזרה לחזרה:

הוכחנו גם כי $f : V \to W$, $w \in W$, אז אם קיים מקור $v \in V$ של w, ז"א $f(v) = w$ אז $f^{-1}(w) = v + Kerf$.

הגדרנו גם : אם $U \subseteq V$, $v \in V$, אז $v + U$ נקראת ישריה.

(ציור של ישריה ב R^2)

טענה: $v + U$ הוא תת מרחב של V אמ"מ $v \in U$, ואז $v + U = U$.

הוכחה:

א. אם $v \notin U$ אז $0_V \notin v + U$. נניח בדרך השלילה כי $0_V \in v + U$ אז קיים $u \in U$ כך ש $0_V = v + U$ ואז $v = -u \in U$, סתירה. לכן $0_V \notin v + U$ ולכן $v + U$ איננו תת מרחב של V.

ב. אם $v \in U$, נוכיח כי $v + U = U$. ברור שלכל $u \in U$, $v + u \in U$ כי u סגור לגבי חיבור ולכן $v + U \subseteq U$. מצד שני, ניקח $u' \in U$, ונראה כי $u' \in v + U$. אכן, $u' = v + (u' - v)$, ומכיוון ש $u', v \in U$ גם $u' - v \in U$, ז"א $u' \in v + U$, קיבלנו $U \subseteq v + U$, ז"א $v + U = U$, כנדרש.

$$f: V \to W$$
$$\dim_F Kerf + \dim_F \operatorname{Im} f = \dim_F V$$
$$\dim_F Kerf = \dim_F V - \dim_f \operatorname{Im} f$$
$$\dim_F Ker\left(f_A\right) = \dim_F F^n - \dim_f \operatorname{Im}\left(f_A\right)$$
$$= n - \dim_F \operatorname{Im}\left(f_A\right)$$

למה מעניין אותי מימד הגרעין/התמונה?
לא יודע. כמה סימנים:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$a_{1*} = \left(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}\right)$$
$$a_{2*} = \left(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}\right)$$
....
$$a_{m*} = \left(a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}\right)$$

$$a_{*1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} a_{*2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} ... a_{*_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>**משפט:**</u> עבור $f_A: F^n \to F^m, f_A: c \to Ac$

$$\operatorname{Im}\left(f_A\right) = Sp\left(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*_n}\right) \subseteq F^m$$

<u>**הוכחה:**</u> הוכחנו כבר שאם $f: V \to W$ העתקה ליניארית, ו $V = Sp\left(v_1, ..., v_k\right)$, אז $\operatorname{Im} f = Sp\left(f\left(v_1\right), ..., f\left(v_k\right)\right)$.

ניקח בתור הוקטורים הפורשים את F^n את העמודות הסטנדרטיות, כלומר $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$. בואו ונראה להיכן ההעתקה לוקחת אותן .

$$f_A\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\...\\a_{m1}\end{pmatrix}=a_{*1}$$

$$f_A\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\...\\a_{m2}\end{pmatrix}=a_{*2}$$

....

$$f_A\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & ... & a_{1n}\\ \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\...\\a_{mn}\end{pmatrix}=a_{*n}$$

לכן

$$\operatorname{Im}(f_A)=Sp\left(f_A\begin{pmatrix}1\\0\\...\\0\end{pmatrix},f_A\begin{pmatrix}0\\1\\...\\0\end{pmatrix},...,f_A\begin{pmatrix}0\\0\\...\\1\end{pmatrix}\right)=Sp\left(a_{*1},a_{*2},...,a_{*n}\right)$$

כנדרש.

$$\dim_F Ker(f_A)=n-\dim_F \operatorname{Im}(f_A)$$

<u>הערה:</u>

$\dim_F Sp\left(a_{*1},...,a_{*n}\right)$ הוא מספר המקסימלי של עמודות בלתי תלויות של מטריצה A.

<u>למה? תזכורת למשפט:</u>

אם $V=Sp\left(v_1,...,v_k\right)$ אז $\left\{v_i \mid 1\le i\le k, v_i\notin Sp\left(v_1,...,v_{i-1}\right)\right\}$ אז היא בסיס של V.

<u>הגדרה:</u> דרגה של מטריצה A לפי העמודות היא $rank_c(A)=\dim_f Sp\left(a_{*1},...,a_{*n}\right)$. על שום מה ולמה הc: $c=column$, המקבילה הלועזית ל'עמודות'!

<u>הגדרה:</u> דרגה של מטריצה A לפי השורות היא $rank_r(A)=\dim_F Sp\left(a_{1*},...,a_{m*}\right)$. על שום מה ולמה הr: $r=rows$, המקבילה הלועזית ל'שורות'. והוא שוה למספר מקסימלי של שורות בלתי תלויות ליניארית של מטריצה A.

$$\dim_F Kerf_A=n-rank_C(A)$$

למה?

$$\operatorname{Im}(f_A)=Sp\left(a_{*1},...,a_{*n}\right)$$
$$\dim_F \operatorname{Im}(f_A)=\dim_F Sp\left(a_{*1},...,a_{*n}\right)=rank_c(A)$$

<u>משפט:</u> לכל מטריצה A

$$rank_r\left(A\right)=rank_c\left(A\right)$$

הוכחה: לא עכשיו.

שיעור 23, 16.1.2006

F שדה, $A \in M_{m\times n}(F)$ מטריצה מסדר $m\times n$ עם מקדמים בשדה F.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \dots \\ a_{m*} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{*1} & a_{*2} & \dots & a_{*n} \end{pmatrix}$$

יש לנו כאן 'טבלה מלבנית', 'עמודה של שורות' ו'שורה של עמודות'

משפט:

$$\dim_F Sp(a_{1*},a_{2*},\dots,a_{m*})=\dim_F Sp(a_{*1},a_{*2},\dots,a_{*n})$$

$$\underset{n\times p}{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

מוגדרת המכפלה $\underset{m\times n}{A}\underset{n\times p}{B}$ והיא מטריצה מסדר $m\times p$:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\dots+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+\dots+a_{2n}b_{np} \\ \dots & \dots & & \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\dots+a_{mn}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\dots+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{1*}+a_{12}b_{2*}+\dots+a_{1n}b_{n*} \\ a_{21}b_{1*}+a_{22}b_{2*}+\dots+a_{2n}b_{n*} \\ \dots \\ a_{m1}b_{1*}+a_{m2}b_{2*}+\dots+a_{mn}b_{n*} \end{pmatrix}$$

בAB מקבלים ששורותיה הן צרופים ליניאריים של שורות מטריצה B עם מקדמים ממטריצה A.

$$=\begin{pmatrix} b_{11}a_{*1}+b_{21}a_{*2}+\dots+b_{n1}a_{*n} & \dots & \dots & b_{1p}a_{*1}+b_{2p}a_{*2}+\dots+b_{np}a_{*n} \end{pmatrix}$$

בAB עמודותיה הם צרופים ליניאריים של עמודות מטריצה A, כאשר בתור מקדמים משמשים איברי מטריצה B.

נסמן:

$$AB=C=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \dots & & \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$sp(c_{*1},c_{*2},\dots,c_{*p})\subseteq sp(a_{*1},a_{*2},\dots,a_{*n})$$

$$sp(c_{1*},c_{2*},\dots,c_{m*})\subseteq sp(b_{1*},b_{2*},\dots,b_{n*})$$

תזכורת:

$$sp\left(v_1,...,v_n\right)=\left\{a_1v_1+...+a_mv_m \mid a_1,...,a_m\in F,v_1,...,v_m\in V\right\}$$

ו

$sp\left(v_1,...,v_m\right)\subseteq V$ תת מרחב של V.

אם $w_1,...,w_k\in Sp\left(v_1,...,v_m\right)$ אז $sp\left(w_1,...,w_k\right)\subseteq sp\left(v_1,...,v_m\right)$

(סיום תזכורת)

ניקח מטריצה C מסדר $m\times p$. צ"ל $\dim_F sp\left(c_{1*},...,c_{m*}\right)=\dim_F sp\left(c_{*1},...,c_{*p}\right)$. נניח ש $\dim_F sp\left(c_{1*},...,c_{m*}\right)=n$. נרצה לבנות פירוק של C למכפלה $C=AB$ כאשר A מסדר $m\times n$ וB מסדר $n\times p$.

ל$sp\left(c_{1*},...,c_{m*}\right)$ יש בסיס שיש בו n וקטורים, כלומר n שורות באורך p.

$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{1p} \\ ... & ... \\ c_{m1} & c_{mp}\end{pmatrix}$. נסמן את הבסיס של $sp\left(c_{1*},...,c_{m*}\right)$ באופן הבא:

$\begin{matrix} b_{1*} \\ b_{2*} \\ \\ b_{n*}\end{matrix}=\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np}\end{matrix}$. נגדיר מטריצה B מסדר $n\times p$ ע"י $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np}\end{pmatrix}$.

ועל כן מתקיים $sp\left(c_{1*},...,c_{m*}\right)=sp\left(b_{1*},...,b_{n*}\right)$

$$c_{1*}=a_{11}b_{1*}+a_{12}b_{2*}+...+a_{1n}b_{n*}$$
$$c_{2*}=a_{21}b_{2*}+a_{22}b_{2*}+..++a_{2n}b_{n*}$$
$$....$$
$$c_{m*}=a_{m1}b_{1*}+a_{m2}b_{2*}+...+a_{mn}b_{n*}$$

נגדיר מטריצה A ע"י $A=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & & a_{mn}\end{pmatrix}$.

ניזכר במה שעשינו קודם:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{1*}+a_{12}b_{2*}+...+a_{1n}b_{n*} \\ a_{21}b_{1*}+a_{22}b_{2*}+...+a_{2n}b_{n*} \\ ... \\ a_{m1}b_{1*}+a_{m2}b_{2*}+...+a_{mn}b_{n*}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{1*} \\ c_{2*} \\ ... \\ c_{m*}\end{pmatrix}=C=AB$$

לכן

$$rank_c C=\dim_F Sp\left(c_{*1},...,c_{*p}\right)\leq \dim_F sp\left(a_{*1},...,a_{*n}\right)\leq n=rank_R C$$

קיבלנו שהדרגה של מטריצה לפי עמודות קטנה או שווה מהדרגה של מטריצה לפי שורות.

נסמן $n=\dim_F Sp\left(c_{*1},...,c_{*p}\right)$. נסמן את הבסיס של $sp\left(c_{*1},...,c_{*p}\right)$ באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

. נגדיר מטריצה A מסדר $m\times n$ ע"י

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

נבטא את $c_{*1},...,c_{*p}$ ע"י הבסיס $a_{*1},...,a_{*n}$:

$$\begin{aligned} c_{*1}&=b_{11}a_{*1}+b_{21}a_{*2}+....+b_{n1}a_{*n} \\ c_{*2}&=b_{12}a_{*1}+b_{22}a_{*2}+...+b_{n2}a_{*n} \\ ... & \\ c_{*p}&=b_{1p}a_{*1}+b_{2p}a_{*2}+...+b_{np}a_{*n} \end{aligned}$$

. נגדיר את B ע"י

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np} \end{pmatrix}.$$

לכן,

$$AB=\left(b_{11}a_{*1}+b_{21}a_{*2}+...+b_{n1}a_{*n} \quad ... \quad ... \quad b_{1p}a_{*1}+b_{2p}a_{*2}+...+b_{np}a_{*n}\right)=$$
$$\left(c_{*1},...,c_{*p}\right)=C$$

לכן מתקיים $sp\left(c_{1*},c_{2*},...,c_{m*}\right)\subseteq sp\left(b_{1*},b_{2*},...,b_{n*}\right)$ ועל כן

$$rank_R C=\dim_F sp\left(c_{1*},...,c_{m*}\right)\le sp\left(b_{1*},...,b_{n*}\right)\le n=rank_C C$$

ועל כן מתקיים $rank_C C=rank_R C$. ונצא במחולות הביתה.

שיעור 24, 18.1.2006

מערכות של משוואות ליניאריות

On the previous chapters of Rifs, Prof. Rifs:

F שדה, $A\in M_{m\times n}(F)$ מטריצה מסדר $m\times n$, $b\in F^m$ עמודה של אברים חפשיים, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ עמודה של נעלמים.

הגדרנו העתקה $\begin{matrix} f_A: F^n \to F^m \\ c \to Ac \end{matrix}$, הוכחנו כי היא ליניארית.

אוסף כל הפתרונות של המשוואה $Ax=b$ זהה לאוסף של כל המקורות של b ביחס ל f_A, ז"א $f_A^{-1}(b)$ (נשים לב: לא **אמרנו** ש f_A הפיכה (חח"ע ועל) – זה סימון לאוסף כל האיברים ש f_A מעבירה לb).

ראינו כי:

$f_A^{-1}(b)=c+Ker(f_A)$, כאשר c מקור כלשהו של b, ז"א $f_A(c)=b$. ומה זה ? ישריית הפתרונות של המערכת.

מהו מימד הישריית הפתרונות:

$$\dim_F\left(f_A^{-1}(b)\right)=\dim_F Ker(f_A)=\dim_F F^n-\dim_F \operatorname{Im}(f_A)=$$
$$n-\dim_F sp(a_{*1},a_{*2},\dots,a_{*n})=n-rank_C A=n-rankA$$

הוכחנו את המשפט הבא:

משפט: אם למערכת המשוואות יש פתרון, אז המימד של ישריית הפתרונות שווה למספר הנעלמים פחות הדרגה של מטריצת המקדמים.

אם $b\in\operatorname{Im}(f_A)$, אזי למערכת יש פתרון. אם $b\notin\operatorname{Im}(f_A)$, אין פתרון (ע"פ הגדרת הIm).

אבל מיהו $\operatorname{Im}(f_A)$?

ראינו כי הוא:

$$\operatorname{Im}(f_A)=sp(a_{*1},a_{*2},\dots,a_{*n})$$

ועל כן, אם $b\in sp(a_{*1},\dots,a_{*n})$ יש פתרון. אם $b\notin sp(a_{*1},\dots,a_{*n})$, אין פתרון.

אם $sp(a_{*1},\dots,a_{*n},b)=sp(a_{*1},\dots,a_{*n})$ יש פתרון ☺

אם $sp(a_{*1},\dots,a_{*n},b)\neq sp(a_{*1},\dots,a_{*n})$ אין פתרון ☹

עוד דרך הסתכלות:

נגדיר מטריצת מקדמים המורחבת (קיצר, הוספנו עמודה בימין של b):

$$(m\times n+1)\,A^*=(a_{*1},a_{*2},\dots,a_{*n},b)=(Ab)$$

ואז, יש פתרון אם:

$$rankA^*=rankA$$

ואין פתרון אם:

$$rankA^*\neq rankA$$

נשים לב כי אנו יודעים בכל מקרה כי:

ועל כן אי השיוויון למעלה נותן אי שיוויון של המימד. $sp\left(a_{*1},...,a_{*n},b\right)\supseteq sp\left(a_{*1},...,a_{*n}\right)$

משפט: למערכת $Ax=b$ יש פתרונות אמ"מ $rankA^{*}=rankA$.

אבל... איך לפתור מערכת משוואות?

חלוץ המשתנים של גאוס:

הגדרה: שתי מערכות של משוואות $Ax=b$ ו $A'x=b'$ נקראת שקולות כאשר יש להן **בדיוק** אותם הפתרונות.

משפט: נניח ש B,C מטריצות הפכיות מסדר $m\times m$ ז"א $BC=I_m, CB=I_m$, כלומר $C=B^{-1}, B=C^{-1}$, אז המערכת $Ax=b$ שקולה למערכת $(CA)x=Cb$.

הוכחה: אם $Ac=b$ אז $(CA)c=C(Ac)=Cb$

ז"א אם $c=\begin{pmatrix}c_1\\ \ldots\\ c_n\end{pmatrix}$ פתרון של $Ax=b$ הוא גם פתרון של $(CA)x=Cb$. להפך, נניח ש $(CA)c=Cb$. נכפיל שני האגפים בB ונקבל:

$$Ac=I_m(Ac)=(I_mA)c=((BC)A)c=(B(CA))c=B((CA)c)=$$
$$B(Cb)=(BC)b=I_mb=b$$

ז"א אם c פתרון של $(CA)x=Cb$ הוא גם פתרון של $Ax=b$, כנדרש.

הגדרה: (א) נסמן $D_i(a)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\ddots&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, מגודל $m\times m$, $a\in F$. על שום מה ולמה הD ? כאמרות הגויים, $diagonal$.

(ב) עבור $i\neq j$ נסמן $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&a\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}E_{ij}(a)$. ועל שום מה הפעם הE? $(elementary)$.

(ג) עבור $i\neq j$ נסמן $0\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=P_{ij}$.

$A=\begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \dots \\ a_{m*} \end{pmatrix}$. טענה: $D_i(a)A=\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ aa_{i*} \\ a_{m*} \end{pmatrix}$ (מכפיל שורה בסקלר)

למה זה נכון? $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{i1} & & a_{in} \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ aa_{i1} & \dots & aa_{in} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

טענה 2: $E_{ij}(a)A=\begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{i-1*} \\ a_{i*}+aa_{j*} \\ \dots \\ a_{m*} \end{pmatrix}$ (מכפיל שורה בסקלר, מחבר לאחרת)

טענה 3: $P_{ij}A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \dots \\ a_{j*} \\ \dots \\ a_{i*} \\ \dots \\ a_{m*} \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ i \\ \dots \\ j \\ \dots \\ m \end{array}$ (מחליף שורות)

(−: :−)

טענה	הוכחה
אם $a\neq 0_F$ אז $\left(D_i(a)\right)^{-1}=D_i\left(a^{-1}\right)$	$D_i(a)D_i\left(a^{-1}\right)=D_i(1)=I_m$
אם $\left(E_{ij}(a)\right)^{-1}=E_{ij}(-a), i\neq j$	$E_{ij}(a)E_{ij}(-a)=E_{ij}(0)=I_m$
$P_{ij}^{-1}=P_{ij},(i\neq j)$	$P_{ij}P_{ij}=I_m$

שיעור 25, 23.1.2006

חלוץ המשתנים של גאוס

הגדרה: מטריצה D מסדר $m\times n$ נקראת מדורגת כאשר צורתה כפי שנסביר:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\cdots\right)$$

כלומר:

1. יש בה עמודות סטנדרטיות, **לפי הסדר שלהן**.
2. ניתן להעביר **קו המדרגות**, שכל עמודה סטנדרטית קובעת מדרגה.
3. מתחת לקו המדרגות יש רק **אפסים**.

נשים לב: מותר שיהיו גם **עמודות לא סטנדרטיות**, בהתאם לכך שהן תואמות לקו המדרגות שלנו (מתחת למדרגה, הכל אפס – בהתאם לתנאי 3).

נשים לב :

1. מטריצת האפס היא מטריצה מדורגת.
2. מטריצת היחידה היא מטריצה מדורגת.
3. הנ"ל לא נחשבת מדורגת:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

משפט: לכל מטריצה A (מסדר $m\times n$)קיימת מטריצה הפיכה B ($m\times m$) כך ש BA היא מדורגת.
B ריבועית וקיימת C רבועית כך ש $C=B^{-1}$, ז"א $BC=I_m$, $CB=I_m$.

הוכחה: באינדוקציה על m. נסתכל במקרה $m=1$ (בסיס האינדוקציה), אז A היא שורה $A=(a_{11},a_{12},...,a_{1n})$. אם A היא כולה אפסים, אז היא כבר בצורה מדורגת , וניקח $B=(1)$,
וממילא $AB=BA=(0,...,0)$, וסיימנו☺.

אם לאו, אז יש ב A איברים שאינם 0_F. נניח ש j_1 הוא האינדקס הקטן ביותר של איבר כך ש $a_{1j_1}\neq 0_F$. ניקח $B=\left(a_{1j_1}^{-1}\right)$, ואז $BA=(0,.....,1,*.....,*)$, מטריצה מדורגת, וסיימנו☺.

נניח ש $m>1$ ונניח שהטענה נכונה עבור $m-1$ (שלב האינדוקציה).
אם $A=0$ אז היא כבר מדורגת, ניקח $B=I$, $A=BA=0$ מדורגת ☺.
אחרת, יש ב A אברים שונים מ0. שוב ניקח j_1 האינקס הקטן ביותר כך שקיים $a_{ij1}\neq 0_F$ הקטן ביותר (נשים לב – מחפשים על העמודות!).
אם $i=1$, הרי טוב ☺, ואם לא, נכפיל משמאל במטריצה P_{1i} (מה זה עושה ? מחליף שורות 1 וi), וז"א

במטריצה $P_{1i}A$ קיים $\left(0\begin{pmatrix}j_1(\neq 0)\\ \\ \\ \end{pmatrix}\right)$ (בעברית – משמאל לעמודה של j_1 יש רק אפסים!).

בשלב הבא נכפיל ב $D_1\left(a_{ij1}^{-1}\right)$.(מטריצת היחידה, חוץ מבמקום 1,1 שבו יהיה a_{ij1}^{-1}). זה כופל את השורה הראשונה באבר a_{ij1}^{-1} ולכן

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} & * \end{pmatrix} = D_1\left(a_{ij1}^{-1}\right)P_{1i}A$$

עלינו לאפס את $c_2,\dots,c_m$. כיצד?

נסתכל במטריצה $E_{m1}\left(-c_m\right)\dots E_{31}\left(-c_3\right)E_{21}\left(-c_2\right)D_1\left(a_{ij1}^{-1}\right)P_{1i}A$. כפל ב $E_{21}\left(-c_2\right)$ כופל את השורה הראשונה ב $-c_2$ ומוסיף לשורה שניה. (למה זה עובד? בשורה הראשונה יש לנו כבר 1...)

לכן $E_{m1}\left(-c_m\right)\dots E_{31}\left(-c_3\right)E_{21}\left(-c_2\right)D_1\left(a_{ij1}^{-1}\right)P_{1i}A$ נראית:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} & * \end{pmatrix}$$

במטריצה j_i היא העמודה הסטנדרטית הראשונה, נסתכל במטריצה $m-1$, ונבצע את אותן פעולות, עבור המטריצה A_1 מסדר $\left(m-1\right)\times\left(n-j_1\right)$. לפי הנחת האינדוקציה, קיימת מטריצה B_1 הפיכה מסדר $\left(m-1\right)\times\left(m-1\right)$ כך ש B_1A_1 היא מטריצה מדורגת, $B_1^{-1}=C_1$. נגדיר $B_1^{'}$ כך שהאיבר במקום 1,1 הוא 1, בשאר השורה והעמודה הראשונה 0, ושאר המטריצה היא B_1. נגדיר B_1^{-1} באותה צורה, רק שכאן שאר המטריצה היא $C_1=B_1^{-1}$. נסתכל ב $B_1^{'}A' = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 00 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (שורה ראשונה בלי שינוי).

מה נותר לנו לעשות? לאפס את העמודות של היחידה מעל ל1. מה נעשה?

נשתמש ב $E_{12}\left(-h_2\right)E_{13}\left(-h_2\right)E_{12}\left(-h_2\right)B_1^{'}A'$. מה קיבלנו? איפסנו את ה* מעל ל1 בעמודות הסטנדרטיות. יש לנו מטריצה מדורגת, כנדרש!

המשך – להסתכל אצל דינה.

<u>למה זה טוב?</u>

נזכור:

$$Ax=b\Rightarrow$$
$$\left(BA\right)x=Bb$$

נתבונן ב:

$$A^*=\left(Ab\right)\left(m\times n+1\right)$$

(מטריצת המקדמים המורחבת)

ואז ניתן למצוא $B^*A^* = B^*ABb$ מדורגת.

מה נשאל? מה קורה במערכת משוואות לאחר שהבאנו אותה לצורה מדורגת. נחלק לשני מקרים:
במטריצה המדורגת B^*A^* - האם העמודה האחרונה היא סטנדרטית, כן או לאו. במידה וכן, אזי אין למערכת פתרונות. אף פתרון. אבל למה?
אם העמודה האחרונה היא סטנדרטית, אזי המשוואה היא מצורת:

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 1$$

וכמובן שאין לה פתרונות, ולכן אין פתרונות לכל המערכת...
אחרת, יש פתרונות. למה? המערכת היא מצורה (c היא עמודת הפתרונות)

$$x_{j1} + (...) = c_1$$

$$x_{j2} + (...) = c_2$$

$$...$$

$$x_{jr} + (.....) = c_r$$

המשתנים שעומדים בתוך הסוגריים שונים מ $x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jr}$ (נשים לב – כל עמודה סטנדרטית מייצגת משתנה).

שיעור 26, 25.1.2006

מערכות של משוואות ליניאריות ומטריצות מדורגות

$Ax = B$, A מסדר $m\times n$, x מסדר $n\times 1$, b מסדר $m\times 1$.

$A^* = (Ab)$ - נשים לב, זה לא הכפלה, זה הרחבה – מוסיפים את עמודת המקדמים מימין.

קיימת B^* מסדר $m\times m$ הפיכה כך ש B^*A^* היא מטריצה מדורגת.

משפט: לכל מטריצה A מסדר $m\times n$ קיימת מטריצה B הפיכה מסדר $m\times m$ כך ש $D = BA$ היא מטריצה מדורגת. יתר על כן, ניתן להציג את B כמכפלה לא יותר מ $m(m+1)$ גורמים, שכל אחד מהם מהצורה $P_{ij}, D_i(a), a\neq 0, E_{ij}(c), i\neq j$.

למה זה נכון? המשפט משיעור קודם.

איך מופעלת B^*A^*? בגלל שה* זה הרחבה, אז זה מופעל B^*AB^*b (הכפלה היא הרי עמודה עמודה...) ועל כן:

$B^*Ax = B^*b$

מכיוון ש B^* **הפיכה**, המערכת $B^*Ax = B^*b$ שקולה למערכת $Ax = b$.

אם $C^* := \left(B^*\right)^{-1}$ אז מ $B^*Ax = B^*b$ נעבור ל $C^*B^*Ax = C^*B^*b$ ז"א $Ax = b$ (המערכת המקורית).

לסיכום: כל מערכת משוואות ליניארית שקולה. למערכת שמטריצת המקדמים המורחבת שלה היא מטריצה מדורגת.

איך נבדוק אם יש פתרון? אם $j_r = n+1$? אם העמודה האחרונה היא סטנדרטית , אין פתרונות. אחרת, נוכל לתאר את הפתרונות, ועל כן – יש פתרונות.

אנו מחלקים את המשתנים $x_1,...,x_n$ לשתי קבוצות, קבוצה אחת $\{x_{j1}, x_{j2},..., x_{jr}\}$, קבוצה שניה – כל השאר $B = \{x_1,...,x_n\} - \{x_{j1},...,x_{jr}\}$.

$$x_{j1} + (b_1 + ... + b_i, b_i \in B) = c_1$$
$$x_{j2} + (b_1 + ... + b_i, b_i \in B) = c_2$$
$$....$$
$$x_{jr} + (b_1 + ... + b_i, b_i \in B) = c_r$$

$$x_{j1} = c - (b_1 + ...)$$
$$x_{j2} = c_2 - (...)$$
$$...$$
$$x_{jr} = c_r - (....)$$

מהם הפתרונות? **כל המשתנים מהקבוצה השניה הם חופשיים, וניתן לתת להם כל פתרון שנרצה, כל המשתנים מהקבוצה הראשונה נקבעים באופן חד ערכי על ידי מערכת המשוואות.**

לכן ניתן להתייחס לנעלמים מהקבוצה השניה כפרמטרים חופשיים וערך הנעלמים מהקבוצה הראשונה, נקבע באופן חד ערכי, כאשר נתונים הערכים של הנעלמים, כלומר, של הפרמטרים החופשיים.

אם F שדה סופי בעל p^k איברים (אפשר ליצור שדות עם חזקה של מספר ראשוני של איברים), אז כמות האופציות היא מספר האפשרויות היא $\left(p^k\right)^{(n-r)}$.

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j_1 = 2$$

$$j_2 = 5$$

$$n = 7$$

קבוצה ראשונה:

$$\{x_2, x_5\}$$

קבוצה שניה:

$$\{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$$

איך נראית המערכת:

$$\begin{aligned} x_2 &= 7 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_6 + 5x_7 \\ x_5 &= 9 - \left(6x_6 + 7x_7\right) \end{aligned} \Leftarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_6 + 5x_7 = 8 \\ x_5 + 6x_6 + 7x_7 = 9 \end{cases}$$

איך אפשר לרשום את הפתרון?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 8 - 2a_3 - 4a_4 - 4a_6 - 5a_7 \\ a_3 \\ a_4 \\ 9 - 6a_6 - 7a_7 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

עוד דרך לרשום את הפתרון:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(בטוח שיש עוד כמה...)

$$\begin{pmatrix}0\\8\\0\\0\\9\\0\\0\end{pmatrix}+sp\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\0\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\0\\0\\-7\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

כלומר, קיבלנו ישריה ☺ - את ישרית הפתרונות של המערכת. מהו מימדו? 5. זה מתאים גם ל $5 = 7 - 2 = n - r$.

שיעור 27 – 30.1.2006

עוד משפט אחד קטן:☺

הוכחנו שלכל מטריצה A מסדר $m \times n$ אפשר למצוא מטריצה B רבועית הפיכה מסדר $m \times m$ כך ש$D = BA$ היא מטריצה מדורגת.

משפט (יחידות הצורה המדורגת של מטריצה): אם $D_1 = B_1 A$, $D_2 = B_2 A$ כאשר B_1, B_2 מדורגות, D_1, D_2 מטריצות מדורגות, אז $D_1 = D_2$.

בטרם ניגש להוכחה, נחליף נושא.

הפסקה תאוטרלית:

V מ"ו מעל שדה F, $v_1, v_2, ..., v_n$, $Sp(v_1, v_2, ..., v_n) = U \subseteq V$ תת מרחב, $\dim_F U = r$.

הוכחנו שניתן למצוא בסיס של U שהוא תת קבוצה של $\{v_1, ..., v_n\}$. באופן מסוים, ניקח $\{v_j \mid 1 \le j \le n, v_j \notin sp(v_1, ..., v_{j-1})\}$. נקבל בסיס $\{v_{j1}, v_{j2}, ..., v_{jr}\}$ של $Sp(v_1, ..., v_n) = U$

$$1 \le j_1 < j_2 < ... < j_r \le n$$

1. אם $j_1 > 1$ אז $v_1 = 0_v, v_2 = 0, v_{j1-1} = 0_v$ (רק 0 הוא צירוף ליניארי של אפס איברים שלפניו (-;)
2. אם $j_2 > j_1 + 1$ אז, $v_{j1+1} = a_{1 j_1+1} v_{j1}, v_{j_1+2} = a_{1 j_1+2} v_{j1}, ..., v_{j2-1} = a_{1 j_2-1} v_{j1}$ (צ"ל של האחד לפניו)
3. אם $j_2 > j_2 + 1$, $v_{j2+1} = a_{1 j_2+1} v_{j_1} + a_{2 j_2+1} v_{j2}, ..., v_{j3-1} = a_{1 j_3-1} v_{j_1} + a_{2 j_3-1} v_{j2}$ (צ"ל של השניים לפניו)
4. .... (וכן הלאה וכן הלאה)
5. אם $j_r > j_{r-1} + 1$ אז

$$v_{j_{r-1}+1} = a_{1 j_{r-1}+1} v_{j1} + ... + a_{r-1 j_{r-1}+1} v_{jr-1} = a_{1 j_r-1} v_{j1} + ... + a_{r-1 j_{r-1}} v_{j_{r-1}}$$

6. אם $j_r < n$ אז $v_{j2+1} = a_{1 j_{r-1}} v_{j_1} + a_{2 j_r+1} v_{j_2}, ..., v_n = a_{1n} v_{j1} + ...$

לקחת בערבון מוגבל - קשה להבין מתי יש 2, מתי r, ובאיזה גובה. יש אצל דינה (אני מקווה)...
(או להבין את הקונספט – זה לא מסובך מדי)

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & j_1 & & & j_2 & & & & j_3 & & j_{r-1} & & j_r \\
\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\\cdots\\ \\ \\ \\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{1 j_1+1}\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & ...., & \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & , & \begin{pmatrix}a_{1 j_1+1}\\a_{2 j_2+1}\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & ...., & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} & ...., & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} & ...., & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}
\end{array}\right)$$

מה יש לנו ? $v_{j_1}, v_{j_2}, .., v_{j_r}$. והרי מה זה, לדוגמא,

$$v_{j_2} = 0_F v_{j_1} + 1 v_{j_2} + 0 \cdot v_{j_3} + ... + 0 v_{j_3}$$
$$v_{j_r} = 0_F v_{j_1} + ... + 1_F v_{j_r}$$

<u>הערה (שלי):</u>

כל מה שהוא לא וקטור בסיס, הוא צירוף ליניארי של הקודמים. אפשר לוותר על כל האינדקסים... ☺.
מה שהוא כן וקטור בסיס, הוא עמודה סטנדרטית. מה הם המקדמים, שהם כמובן יחידים? איך לבטא את הוקטורים שהם תלות ליניארית של וקטורי הבסיס **<u>הקודמים להם</u>** באמצעות וקטורי הבסיס הנ"ל (כאן הנ"ל הוא גם במשמעות של מטריצה – נראים מעליהם או משמאלם).

<u>**אחרי ההפסקה התאטרלית, נחזור** למשפט:</u>

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, מסדר $m \times n$, $a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n} \in F^m$. נקרא

ל $Sp\left(a_{*1}, ..., a_{*n}\right) = U$. ועל כן, $\dim_F U = rankA = r$. נתבונן בקבוצה

$\left\{ a_{*j} \mid 1 \le j \le n, a_{*j} \notin Sp\left(a_{*1}, ..., a_{*j-1}\right) \right\}$ (מאוד דומה להפסקה התיאטרלית שלנו ממקודם). מה קיבלנו? קיבלנו בסיס $a_{*j_1}, a_{*j_2}, ..., a_{*j_r}$ של $U = Sp\left(a_{*1}, ..., a_{*n}\right)$. כשנבטא את כל a_{*j} על ידי הבסיס $a_{*j_1}, ..., a_{*j_r}$ נקבל מטריצה מדורגת מסדר $r \times n$, ונקרא לה D (איך נראית מטריצה מדורגת? כבר העתקתי מספיק פעמים).

נניח שB מטריצה הפיכה, נסתכל על

$$BA = B\left(a_{*1}, a_{*2}, ..., a_{*n}\right) = \left(Ba_{*1}, Ba_{*2}, ..., Ba_{*n}\right) = \left(f_B\left(a_{*1}\right), f_B\left(a_{*2}\right), ..., f_B\left(a_{*n}\right)\right)$$

(כלל של כפל מטריצות).

מה זה f_B? הרי מטריצה זה טרנספורמציה ליניארית, אז זו הפונקציה שהמטריצה מייצגת (מן הסתם $f_B : F^m \to F^m$). $C = B^{-1}, f_C : F^m \to F^m, f_C = f_B^{-1}$.

[דוגמת ביניים – משלון – טרל"נ שומרת כפל

$$v_3 = 2v_1 + 3v_2$$
$$f_B\left(v_3\right) = 2 f_B\left(v_1\right) + 3 f_B\left(v_2\right)$$

ועל כן, טרל"נ תמיד תעביר בסיס לבסיס.

[סיום משלון

$$C_1 B_1 = I$$

, בפרט, עבור $D_1 = B_1 A$ (מהתחלת המשפט), מכיוון ש $B_1 C_1 = I$ אז $A = C_1 D_1$ (אותם יחסים

$$C = B_1^{-1}$$

בדיוק שיש בין העמודות של מטריצה A יש בין העמודות של מטריצה D_1).

<u>**נחזור על החלק השני של ההוכחה:**</u>

<u>**טענה:**</u> אם B מטריצה הפיכה, אז עבור A ועבור BA מקבלים אותה מטריצה מדורגת מסדר $r \times n$,
$r = rankA$

$$BA = \left(Ba_{*1},\dots,Ba_{*n}\right) = \left(f_B\left(a_{*1}\right),\dots,f_B\left(a_{*n}\right)\right)$$

$f_B : F^m \to F^m$ העתקה ליניארית חח"ע ועל כי B הפיכה. $C = B^{-1}$, $f_B^{-1} = f_C$

הערה שלי:
מה כל הCATCH – העתקה ליניארית מעביר קבוצה בת"ל לקבוצה בת"ל, ועל כן היא לא יכולה לשנות חוץ ממקדמים, שיעלמו בעת הדירוג.

המשך ריבס:
התהליך של בניית מטריצה מדורגת (שתואר קודם) נותן תוצאה זהה עבור הוקטורים $a_{*1}, a_{*2}, \dots, a_{*n}$
ועבור הוקטורים $f_B\left(a_{*1}\right),\dots,f_B\left(a_{*n}\right)$ כי $f_B : F^m \to F^m$ היא העתקה ליניארית חח"ע ועל.
נשים לב: קיימת דרישה לחח"ע על מנת שתשמר אי תלות ליניארית.

<u>תכונות של מטריצות:</u>

$A+B, AB, A, B \in M_{n,n}\left(F\right)$

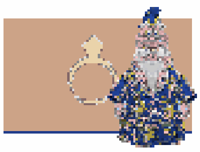
האם שדה?
חיבור:
1. סגירות
2. קומוטטיביות
3. אסוציאטיביות
4. קיום 0
5. קיום נגדי

כפל:
1. סגירות
2. ~~קומוטטיביות~~ – אין בהכרח
3. אסוציאטיביות
4. קיום 1
5. ~~קיום הפכי~~ – לא בהכרח

<u>חוק הדיסטרביוטיביות</u>

$$A\left(B+C\right) = AB + AC$$
$$\left(A+B\right)C = AC + BC$$

למה צריך שתי צורות? כי אין לי קומוטטיביות.


המטריצות מסדר $n \times n$ **הם חוג** $\left(ring\right)$

בגלל האיזומורפיזם בין מטריצה לטרל"נ, אז גם $Hom_F\left(V,V\right)$ הוא חוג.

<u>שאלה:</u> פתרון של מערכת משוואות ליניאריות כאשר צריך לדרג את המערכת.
1. בונים את מטריצת המקדמים המורחבת
2. מדרגים...
3. קיבלנו מטריצה מדורגת. אם העמודה האחרונה סטנדרטית, אין פתרונות, אחרת, יש פתרון אחד לפחות (או וקטור, או ישריה ממימד השורות המאופסות).

שיעור 28 – 1.2.2006

חזרה

איך פותרים 4 משוואות עם 4 נעלמים (אפילו כשהן לא מסודרות, רחמנא ליצלן!)?

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{cases} 4x+3y+z=-2 \\ 3x+2y+5z-m=0 \\ 3y-2z+3m=5 \\ x+2y+\frac{1}{2}z+5m=3 \end{cases}$$

בואו ונדרג עד אור הבוקר:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 5 & 3 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 5 & 3 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 17 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 5 & 3 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 17 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4\frac{1}{2} & 4 & 5 \end{pmatrix} L_2 * = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -17 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4\frac{1}{2} & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -17 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 49 & -9 & 23 \\ 0 & 0 & 21\frac{1}{2} & 0 & 11 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow 2L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -17 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 49 & -9 & 23 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 22 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -17 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 22 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 7L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -17 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 63 & 15 \end{pmatrix} swap(L_3, L_4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -17 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 63 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 13L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 17L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 6L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -822 & -191 \\ 0 & 1 & 0 & 1075 & 249 \\ 0 & 0 & 1 & 63 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -387 & -89 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow -\frac{1}{387}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -822 & -191 \\ 0 & 1 & 0 & 1075 & 249 \\ 0 & 0 & 1 & 63 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{89}{387} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-759}{387} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{688}{387} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{198}{387} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{89}{387} \end{pmatrix}$$

<u>ובאה ברכה לעולם!</u>

<u>דוגמא למטריצה עם אינסוף פתרונות:</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 6 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{5} - 2x_3 - 3x_5 - 5x_7 \\ x_4 = \frac{1}{6} - 4x_5 - 6x_7 \\ x_6 = \frac{1}{7} - 7x_7 \end{array} \right.$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_5 + 5x_7 = \frac{1}{5}$$

$$x_4 + 4x_5 + 6x_7 = \frac{1}{6}$$

$$x_6 + 7x_7 = \frac{1}{7}$$

$$Parameters: \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \frac{1}{5} - 2a_3 - 3a_5 - 5a_7 \\ a_2 \\ \frac{1}{6} - 4a_5 - 6a_7 \\ a_5 \\ \frac{1}{7} - 7a_7 \\ a_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>הפיכות מטריצה:</u>

לא כל מטריצה ריבועית היא הפיכה, אבל כל מטריצה שאינה ריבועית אינה הפיכה.
מטריצה הפיכה אמ"מ הדרגה שלה שווה לרוחב (ששווה לגובה) שלה.

תזכורת:
למה $rank_C C = rank_R C$? לא יודע, לא מצליח לשמוע.