<u>אלגברה ליניארית 1 – תרגולים - סמסטר א' , 2005 – 2006</u>

הי,
בעקבות בקשות רבות, החלטתי לשתף את הסיכומים שלי לטובת הכלל (לא התחלתי לכתוב מראש במחשב במחשבה שזה יעזור לעוד אנשים – פשוט אחרי היום הראשון בסמסטר, נזכרתי שאני לא מבין את כתב היד שלי, והתחלתי לכתוב במחשב).
אני מקווה שהמחברת תעזור לעוד רבים – אבל אני חייב להעיר: יתכן, ואפילו סביר, שיש בה טעויות.
אני לא לוקח אחריות לאף ציון שתקבלו בגלל המחברת הזו. אם מצאתם טעות, אני אשמח אם תעדכנו אותי באימייל.

להערות/הארות/תיקונים : shuaavi@gmail.com

אבי שוע

6.11.2005

<u>תרגול 2 – אלגברה ליניארית</u>

שעת קבלה – יום רביעי ב12:00-13:00, ספריה של בנין מתמטיקה . בדלפק הספרנית לפנות שמאלה , בכורסאות האדומות.

hnoa@math.huji.ac.il – Email

תזכורת – שרשרת אוספי המשפרים

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

N – טבעיים
Z – שלמים
Q – רציונליים
R – ממשיים
C – מרוכבים

Q,R הם שדות. N, Z לא. Q הוא השדה האינסופי הקטן ביותר.

<u>ובואו נלמד - המספרים המרוכבים</u>

למה צריך אותם? (חוץ מכדי לסבך לנו את החיים)

- בR אין פתרון למשוואה $x^2+1=0$.

בC הוספנו שורש ל (-1). בC יש פתרון לכל הפולינומים (פרומו להמשך).

איבר כללי בC הוא מהצורה $a+bi, a,b \in R$. נהוג לרשום גם כ (a,b):

חיבור:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+i(b+d)$$

כפל:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci-bd=$$
$$(ac-bd)+(ad+bc)i$$

בהצגה שונה:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

ציר X – הציר הממשי. ציר Y – הציר המדומה (i)

<u>קונבנציה והגדרות</u>

כשרושמים $z=a+bi \in C$ אזי הכוונה היא כי $a,b \in R$.

החלק הממשי של z הוא a.
החלק המדומה של z הוא b.
z ממשי טהור אם b=0 $z=a \in R$
z מדומה טהור אם a=0, z=bi

הצגה קרטזית – a+ib

$rcis\vartheta =$

פולרית - $r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$a = r\cos a, b = r\sin a$

אפשר להגדיר את המרחק של (x,y) מראשית הצירים על ידי אורך (r) וזוית – טטא - ϑ.

הערך המוחלט של z –

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

הארגומנט של z –

$$\vartheta = \arg z = \arctan\frac{y}{x}, x \neq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} or \frac{3\pi}{2}$$

$$x + iy = rcis\vartheta$$

בואו נציג את i- בצורה פולרית:

$$r = |-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\vartheta = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = cis\frac{3\pi}{2}$$

1+i

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vartheta = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$$

-1-i

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vartheta = \arctan 1 = \frac{5\pi}{4}$$

<u>למה:</u>

$$(r_1 cis\vartheta_1)(r_2 cis\vartheta_2) = r_1 r_2 cis(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

<u>הוכחה:</u>

$$r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$
$$= r_1 r_2((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cos_2))$$
$$= r_1 r_2(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))$$
$$= r_1 r_2 cis(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

משפט:

$z = rcis\vartheta$

הוכחה באינדוקציה

N=1 ברור (להציב)

$$(rcis\vartheta)^{n+1} = (rcis\vartheta)^n rcis\vartheta = (r^n cis(n\vartheta)) \cdot r\,cis\vartheta$$
$$= (r^n r)cis(n\vartheta + \vartheta)$$
$$= r^{n+1}cis((n+1)\vartheta)$$

דוגמא:

$$(1+i)^3 =$$
$$(1+i)(1+i) = 1 + i + i - 1 = 2i$$
$$(1+i)^3 = (1+i)2i = -2 + 2i$$
$$(1+i)^3 = (\sqrt{2}cis\frac{\pi}{3})^3 = \sqrt{2}^3 cis\frac{3\pi}{4}$$

משפט:

$$z^{-1} = \frac{1}{r}cis(-\theta)$$
$$0 + z = rcis\theta$$

הוכחה: נניח $z^{-1} = wcis\vartheta$

$$z \cdot z^{-1} = 1 = 1cis0$$
$$z = z^{-1} = (rcis\theta)(wcis\vartheta) = rwcis(\theta + \vartheta)$$

$$w = \frac{1}{r} \Leftarrow rw = 1$$
$$\vartheta = -\theta + w\pi k, k \in Z \Leftarrow \theta + \vartheta = 0 + 2\pi k$$

יהי $z \neq 0$ $z = rcis\theta$

יהי n טבעי אזי לZ יש n שורשים שונים מסדר n, ז"א קיימים $z_1,..,z_n$ שונים כך ש $z_i^n = z$.

<u>מציאת השורשים:</u>

נניח
$$w^n = z, w = \rho cis\vartheta$$
$$1cis\theta = w^n = \rho^n cis(n\vartheta)$$

נובע מכך ש $\rho^n = r$, אזי $\rho = \sqrt[n]{r}$

$$\vartheta = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \Leftarrow \theta = n\vartheta + 2\pi k$$

$k = 1...n$.

<u>דוגמא:</u>

n=3

$$z = 8cis\pi$$

$$w_k = \sqrt[3]{8}cis\frac{\pi + 2\pi k}{3} = 2cis\frac{\pi + 2\pi k}{3}$$

$$w_0 = 2cis\frac{\pi}{3}$$

$$w_1 = 2cis\frac{\pi + 2\pi}{3} = 2cis\pi$$

$$w_2 = 2cis\frac{\pi + 4\pi}{3} = 2cis\frac{5\pi}{3}$$

$$w_3 = 2cis\frac{\pi + 6\pi}{3} = 2cis\frac{7\pi}{3} = cis(2\pi + \frac{\pi}{3}) = 2cis\frac{\pi}{3}$$

אם $z = rcis\theta$

אזי יש לz n שורשים שונים מסדר n שהם

$$w_k = \sqrt[n]{r}cis\frac{\theta + 2\pi k}{n}$$

$$k = 0,...,n-1$$

תרגול 3 – 13.11.2005
שעת קבלה: יום ד' 12:00-13:00 בניין איינשטיין חדר 207

חוג הפולינומים מעל שדה F

נתון שדה F. נגדיר $F[X]=\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, n\in N, a_i \in F\}$
$Q[x]$ - דוגמאות לפולינומים:

$$p(x)=1+2x+\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{2}x^4$$
$$q(x)=2x^3-7$$
$$r(x)=x^{101}$$

למה:
יהי $p(x)\in R[x]$ ונניח כי $z\in C$ שורש של p כלומר - $P(z)=0$ - אזי גם $\bar{z}$ שורש של P
(בעצם, אם שורש פותר משוואה, גם הצמוד שלה פותר אותה).

הוכחה: נניח $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. צ"ל:
$$P(z)=0 \Rightarrow P(\bar{z})=0$$
$$P(\bar{z})=\sum a_i \bar{z}^i=\overline{\sum a_i z^i}=\overline{P(z)}$$

דוגמא:
$$p(x)=x^2+1$$
$x=i$ - בפולינום הזה, i פותר את המשוואה וגם הצמוד שלו.
$$\bar{i}=-i$$

הלמה הנ"ל **אינה** נכונה עבור $p(x)\in C[x]$ - לדוגמא $p(x)=x-(1+i)\in C[x]$.
לp יש שורש (1+i)
$$p(1-i)=1-i-(1+i)=1-i-1-i=-2i\neq 0.$$
ראינו, $1+i$ הוא שורש של p אבל 1-I אינו שורש של p.

שדה בן 3 איברים
0 איבר נייטרלי לחיבור.
1 איבר נטרלי לכפל.
a – ללא תפקיד מיוחד.

לוח החיבור:

+	0	1	A
0	0	1	A
1	1	A	0
a	a	0	1

1+1 לא יכול להיות 1, כי הוא לא נייטרלי לחיבור.
1+1=a .

a+a לא יכולים להיות 0, כי אחרת a(1+1)=0, ואז a=0 .

לוח הכפל:

a	1	0	$\cdot$
0	0	0	0
a	1	0	1
1	a	0	a

$a\cdot a\neq 0$
$a\cdot a\neq a$
(בכל שורה בלוח הכפל, חוץ מ0, צריכים להיות כל איברי השדה).

בואו נסתכל – אם נחליף את a ב2, נראה חיבור/ כפל מודולו 3.

קיים שדה יחיד בן 3 איברים (כי "אולצנו" לייצר את טבלאות הכפל והחיבור ובשדה זה החיבור והכפל הם חיבור וכפל מודולו 3).

<u>פעולות מודולו n</u> $n\in N$

יהיו $a,b\in Z$ נאמר a,b **<u>שקולים מודולו n</u>** ונסמן $a\equiv_n b$ אם $n\mid a-b$, כלומר, .
$a-b=tn, t\in Z$.

דוגמא:

$$7\equiv_3 4\equiv_3 10\equiv_3 -2$$

שקילות מודולו n מקיימת את התכונות הבאות – ולכן נקראת **<u>'יחס שקילות':</u>**

א. ***<u>רפלקסיביות:</u>*** $a\equiv_n a$ כי $a-a=0$, ו0 מתחלק בn.

ב. **<u>סימטריה:</u>** $a\equiv_n b\Leftrightarrow b\equiv_n a$ כי

$$a\equiv_n b\Leftrightarrow a-b=tn$$
$$b-a=-tn$$
$$b\equiv_n a$$

ג. **<u>טרנזיטיביות:</u>** $a\equiv_n b, b\equiv_n c\Rightarrow a\equiv_n c$

<u>מערכת המספרים מודולו n :</u>

$$\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots\overline{n-1}$$
$$\bar{k}=\{z\in Z: z\equiv_n k\}$$
$$\bar{0}=\{0,\pm n,\pm 2n,\pm 3n,\ldots\}$$
$$\bar{1}=\{1,\pm n+1,\pm 2n+1,\pm 3n+1,\ldots\}$$

<u>מערכת המספרים מודולו 3:</u>

$$\bar{0}=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$$
$$\bar{1}=\{\ldots,-2,1,4,7,\ldots\}$$
$$\bar{2}=\{\ldots,-1,2,5,8,11,\ldots\}$$

על מערכת זו נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:
$+_n$ - השארית של החיבור מודולו n (זהה לחיבור, ואז מודולו n)
$\cdot_n$ - השארית של הכפל מודולו n. (זהה לכפל, ואז מודולו n).

מערכת המספרים מודולו n עם $+_n,\cdot_n$ מסומנת ב Z_n.

בואו ונסתכל על $Z_4=\{0,1,2,3\}$

חיבור מודולו 4

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

כפל מודולו 4

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

נצטט משפט שיוכח בכיתה:
Z_n שדה אם ורק אם n ראשוני.

ראינו ש Z_2,Z_3 הם שדות.

האם Z_4 שדה? לא! לדוגמא, 2 אינו הפיך ($2\cdot 2=0$). (הדבר לא אומר שאין שדה בן 4 איברים, אבל זה לא Z_4).

בואו נפתור כמה משוואות מעל Z_5:

$$x+3y=4/\cdot 2$$
$$2x-y=0$$

$$2x+y=3$$
$$2x-y=0$$
$$-------$$
$$4x=3$$

x	0	1	2	3

4x	0	4	3	2

x=2

$$2x-y=0\Rightarrow$$
$$4-y=0$$
$$y=4$$
$$x=2$$

$$x^4=1, x=1,2,3,4$$

x	0	1	2	3	4
x^4	0	1	1	1	1

$$x^3=1, x=1$$

x	0	1	2	3	4
x^3	0	1	3	2	4

בואו נראה מדוע כאשר Z_n עם n לא ראשוני, אז Z_n אינו שדה:

n אינו ראשוני => קיימים $1<k,l<n$, כך ש $k\cdot l=n$.

$$k,l\neq_n 0$$

מכיוון ש $k\cdot l=n$ אזי $k\cdot l=_n 0$. מכיוון שיש שני איברים שמכפלתם 0 , ואינם שקולים nית, ולכן זה איננו שדה.

<u>תתי שדות</u>

$$Q\subset R\subset C$$

מה הכוונה פורמלית בהכלה של שדה בשדה:
(כל ההכלות כאן הם חלשות).
יהי F שדה, ותהי $K\subset F$. נאמר ש K הינו תת שדה של F, אם K שדה, והפעולות בK מושרות מהפעולות בF.
מה הכוונה פעולות מושרות? הפעולות זהות בשתי השדות (האב והבן).

האם Z_3 הוא תת שדה של Q ? כמובן שלא, **<u>מכיוון שהפעולות לא מושרות (זהות).</u>**

$$Z_3\to 1+2=0$$
$$Q\to 1+2=3$$

איך בודקים אם תת קבוצה היא שדה?
<u>טענה:</u> יהי F שדה ותהי $k\subset F$ תת קבוצה עם פעולות המושרות מF. אזי, כדי להראות שk תת שדה, מספיק לבדוק את הדברים הבאים:
1. $0,1\in K$
2. סגירות לחיבור וכפל.
3. סגירות לנגדי והפכי.

שאר התכונות נובעות מכך שהפעולות מושרות.

רמז לשאלה 5 – להשתמש בטענה לעיל.

דוגמא לתת שדה:

$$Q[i]=\{a+bi : a,b\in Q\}$$

לדוגמא:

$$1+\frac{1}{2}i,\frac{3}{2}-\frac{8}{5}i,3\in Q[i]$$

$$\sqrt{2}\notin Q[i]$$

הפעולות ב $Q[i]$ מושרות מC. נטען כי זהו תת שדה של C.

טענה: Q[i] הוא תת שדה של C :

נבדוק את התכונות:

1. $0=0+0i\in Q[i]$
   $1=1+0i\in Q[i]$
2. סגירות לחיבור:

$$a+bi,c+di\in Q[i]$$

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+i(b+d)$$

$$a+c\in Q,b+d\in Q\Rightarrow (a+c)+i(b+d)\in Q[i]$$

סגירות לכפל:

אותו דבר.

3. סגירות לנגדי והפכי:

$a+bi\in Q[i]$

$-a-bi\in Q$ - כי Q שדה וסגור לנגדי.

סגירות להפכי – תרגיל.

חשוב לשים לב שQ[i] מוכל בC, אבל R לא מוכל בו.

<u>טענה:</u> אין לQ תתי שדה ממש (חוץ ממנו עצמו), ולכן Q הוא השדה האינסופי הקטן ביותר.

אם F תת שדה של Q –

$$1\in F$$

ולכן

$n=1+...+1\in F$ (סגירות לחיבור).

לכן כל הטבעיים נמצאים בF. גם הנגדיים נמצאים ולכן כל Z נמצאים בF.

כל ההפכיים נמצאים בF, ולכן $\frac{a}{b}\in F$ לכל $a,b\in Z$, ולכן $Q\subseteq F$. , ולכן $F=Q$.

תרגול 4 - 20.11.2005

בואו ונשתעשע בדיאגרמות של שדות...
אחרי פתרון התרגול שעבר

$$Q \subset Q[\sqrt{2}] \subset Q[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}] \subset R \subset C$$

אפשר להגיד שכל
$\{x+\sqrt{p}y : x, y \in Q\}$ הינו שדה, כאשר p הינו ראשוני.

בואו ונגדיר...
<u>הומומורפיזמים של שדות</u>

יהיו F, K שדות. פונקציה $f : F \to K$ תיקרא הומומורפיזם אם:

1) $f(1_F) = 1_K$
2) $f(x +_F y) = f(x) +_K f(y)$
3) $f(x \cdot_F y) = f(x) \cdot_K f(y)$

בואו וניתן דוגמאות:

א. העתקת הזהות: לכל שדה F נגדיר $I_F : F \to F$

$$I_F(x) = x$$

תרגיל: בידקו שזה הומו'

ב. העתקה שאינה הומ': $f : F \to K$, $\forall x - f(x) = 0$

בפרט, $f(1_F) = 0_K$, ולכן זה אינו הומ'. תרגיל : בדקו את יתר התכונות. רמז: הן כן מתקיימות.

ג. עוד העתקה שאינה הומומורפיזם: $f_1 : f \to k$, $f(x) = 1$

$$1 = f(x+y) = f(x) + f(y) = 1 + 1 \neq 1$$

ד. דוגמא מעניינת יותר:

$$f : Z_2 \to F_4$$
$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

ניתן לראות, אם נכתוב את טבלאות הכפל והחיבור, כי עבור 0 ו1 הן זהות, ולכן $Z_2 \subseteq F_4$,
מדובר ב***הומומורפיזם השיכון***.

ה. אם $F \subseteq K$ תת שדה נגדיר את <u>הומ' השיכון</u>:

$$f : F \to k$$
$$f(x_F) = x_K$$

<u>הגדרה:</u> יהיו F, K שדות. $f : F \to K$ תקרא איזומורפיזם אם f הומורפיזם ובנוסף f חח"ע ועל.

<u>חח"ע:</u> $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

<u>על:</u> לכל $y \in K$ יש $x \in F$ כך ש $f(x) = y$.

<u>כל **איזומורפיזם** הוא גם הומומורפיזם.</u>

דוגמא לאיזומורפיזם:

$$f:C\to C$$
$$F(z)=\overline{z}$$

נבדוק:

$$f(1)=\overline{1}=1$$
$$f(z_1+z_2)=\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=f(z_1)+f(z_2)$$
$$f(z_1z_2)=\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=f(z_1)\cdot f(z_2)$$

ולכן F הומומורפיזם.

<u>**חח"ע**</u> – אם $f(z_1)=f(z_2)$ אזי בהכרח $z_1=z_2$.

יהיו $a+bi,c+di\in C$ ונניח

$$f(a+bi)=f(c+di)$$
$$\overline{a+bi}=\overline{c+di}$$
$$a-bi=c-di\Rightarrow$$
$$a=c,b=d$$
$$a+bi=c+di$$

ולכן f חח"ע.

<u>**על:**</u>

יהי $z=a+bi\in C$ נראה שקיים איזשהו $w\in C$ כך ש $f(w)=z$

ניקח

$$w=\overline{z}=a-bi$$
$$f(w)=f(\overline{z})=\overline{\overline{z}}=z$$

הגענו לכך ש f איזו' שאינו הזהות.

<u>**הגדרה:**</u> $f:K\to K$ איזו' ייקרא <u>**אוטומורפיזם**</u>.

<u>**למה:**</u>

אם $f:F\to K$ הומומורפיזם

$$F(0_F)=0_K$$

יהי $y\in F$ ונסתכל על $f(0\cdot y)$

$$f(0\cdot y)=f(0)$$
$$f(0\cdot y)=f(0)\cdot f(y)$$

קיבלנו שלכל $y\in F$ מתקיים $f(0)\cdot f(y)=f(0)$.

האפשרויות:

1. $f(y)=1$ לכל y – אז לא מדובר בהומומורפיזם. – שללנו.
2. $f(0)=0$

<u>טענה:</u>

אם $p \neq q$ ראשוניים שונים אזי <u>אין</u> הומומורפיזם

$$Z_P \to Z_Q$$

הוכחה- נניח בשלילה שקיים הומומורפיזם
נסתכל על

$$f(1+_p \ldots +1_p)$$

(p פעמים):
ב Z_P חיבור 1 עם עצמו p שווה ל0 .
ולכן

$$f(px1) = f(0) = 0$$

מצד שני,

$$f(1+\ldots+1) = pxf(1) = p(1_Q) \equiv p \bmod q \neq 0$$

כי p,q ראשונים שונים, ולכן לא ייתכן ש $p \equiv 0$ סתירה – ל אקיים הומ' $Z_P \to Z_Q$.

<u>המציין של שדה:</u>
<u>הגדרה:</u>
יהי F שדה. <u>המציין</u> של F, $charF$, הינו ה-n המינימלי כך ש $nx1 = 0$. אם לא קיים n כזה, נאמר שהמציין של F הוא 0.
דוגמאות:

$$charQ = 0$$
$$charR = 0$$
$$charC = 0$$

$$charF_4 = 2$$
$$charZ_2 = 2$$
$$charZ_3 = 3$$
$$charZ_5 = 5$$
$$charZ_p = p$$

<u>כמה דברים על המציין:</u>
- המציין של F הוא 0 או מס' ראשוני.
- אם F שדה סופי בגודל p^k אזי $charF = p$.
- אם F אינסופי, אזי המציין הוא סופי או 0.
- אם המציין הוא 0, אז בהכרח F אינסופי, ואפילו Q משוכן בתוך F.
- אם F ממציין p, אז לכל $a \in F$, אז $pxa = 0$, כי

$$px(a) = a(px1) = a \cdot 0 = 0$$

- אם F שדה ממציין p אזי Z_P משוכן בF.

<u>יש המשך בפתרון תרגיל 3,</u> גרסה מתוקנת .

<u>תשובה מהשיעור:</u>
<u>פתרון תרגול 3, 4 ג'</u>
אם F ממציין P,

$$F_1=\{0,1,1+1,...,(p-1)x1\}$$

אם המציין של F הוא 0:

$$F_1=\{1,2,3,4,...\}=Z$$

ולהפך, אם F_1 אינסופי, ז"א שבחיבור של 1 עם עצמו n פעמים אף פעם לא מקבלים 0 ולכן $.charF=0$

<u>טענה:</u> אם $|F_1|=\infty$, כלומר $charF=0$, אזי Q משוכן בתוך F.
נגדיר:

$$S=\{(nx1)\cdot(mx1)^{-1}:n,m\in Z\}$$

ונטען:
א. S תת שדה של F.
ב. S איזומורפי לQ.

נוכיח:
א. תרגיל –

$$nmx1=(nx1)(mx1)$$
$$(n+m)x1=(nx1)+(mx1)$$

'קל להראות' סגירות לפעולות וכיו"ב.
ב. נגדיר הומומורפיזם:

$$f:Q\to S$$
$$f(\frac{n}{m})=(nx1)(mx1)^{-1}$$

מוגדר היטב – יש להראות ש $\frac{a}{b}=\frac{n}{m}$ אזי $f(\frac{n}{m})=f(\frac{a}{b})$

$$\frac{a}{b}=\frac{n}{m}\Rightarrow nb=am$$

צ"ל

$$(nx1)(mx1)^{-1}=(ax1)(bx1)^{-1}$$
$$(nx1)(bx1)=(ax1)(mx1)$$
$$=$$
$$nbx1=amx1$$

$$f(\frac{1}{1}) = (1x1)(1x1)^{-1} = 1$$

$$f(\frac{m}{n}\cdot\frac{a}{b}) = f(\frac{ma}{nb}) = (\max 1)(nbx1)^{-1}$$

$$= (mx1)(ax1)(nx1)^{-1}(bx1)^{-1}$$

$$= f(\frac{m}{n})f(\frac{a}{b})$$

תכונת החיבור: תרגיל.

חח"ע :

$$\frac{m}{n} \to (mx1)(nx1)^{-1} = \frac{mx1}{nx1}$$

למה 'הגענו' – Q משוכן **בכל** שדה ממציין 0.

תרגול 5 – 27.11.2005

סיכום ביניים – המציין (charF) , השדה(F) , ואתה

- אם המציין הינו 0, F בהכרח אינסופי, וגם Q משוכן בתוך F).
- אם השדה F סופי, אזי המציין הוא ראשוני חיובי.
- $charF = p > 0$ - השדה יכול להיות גם סופי וגם אינסופי. בכל מקרה - Z_p משוכן בשדה).

מרחבים וקטוריים

יהי F שדה. קבוצה V תקרא מרחב וקטורי מעל F אם:

1. קיימת בV פעולת חיבור המקיימת:
   a. קשירות – לכל $u,v \in V$ קיים איבר יחיד $u+v \in V$.
   b. קוממוטטיביות החיבור $u+v = v+u, \forall u,v \in V$.
   c. אסוציאטיביות: $(u+v)+w = u+(v+w), \forall u,v,w \in V$
   d. קיום ה0: $\forall u \in V u + 0_V = 0$.
   e. קיום נגדי: לכל $u \in V$ קיים איבר המסומן $-u \in V$ כך ש $u+(-u)=0$.
2. כפל בסקלר: $(u,v \in V t,s \in F)$
   a. לכל $u \in V, t \in F$ קיים $tu \in V$
   b. $t(su) = (ts)u$
   c. $(t+s)u = tu + su$
   d. $t(u+v) = tu + tv$
   e. $1_F u = u$

לשים לב: במרחב וקטורי – אין הפכי, ואין כפל . זה ההבדל בין מרחב וקטורי ושדה, ולכן אין 1 של המרחב הוקטורי.

הגדרות: א. איברי המרחב הוקטורי – וקטורים.
ב. איברי השדה – סקלרים.

דוגמא למרחב וקטורי:
אם F שדה, נגדיר

V=$V = F^n = \{(a_1,...,a_n) : a_i \in F\}$

כאשר חיבור וכפל בסקלר מF מוגדרים קוארדינטה קוארדינטה.

$$(a_1,...,a_n) + (b_1,...,b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n)$$

$$t \in F \to t(a_1,...,a_n) = (ta_1,...,ta_n) \in F^n$$

דוגמאות:

$$V = Z_2^{\,3}$$

מרחב וקטורי מעל Z_2

$$V=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$$
$$(0,1,0)+(1,1,0)=(0+1,1+1,0+0)=(1,0,0)$$
$$0(1,0,1)=(0,0,0)$$
$$1(1,0,1)=(1,0,1)$$

מודל גאומטרי של F^n:
מישור:

$$V=R^2=\{(a,b):a,b\in R\}$$

חיבור:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$R^3=\{(a,b,c):a,b,c\in R\}\Leftrightarrow 3D\_euclidean\_space$$

עוד מרחבים וקטוריים (YEY!)
F שדה, $F[x]$ חוג הפולינומים מעל F במשתנה x.
נטען - $F[x]$ מרחב וקטורי מעל F.

$$h(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n\in F[x]$$
$$g(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m\in F[x]$$

נניח בה"כ n>m

$$h(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_m+b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+...+a_nx^n\in F[x]$$

$$t\in F,t\cdot g(x)=(tb_0)+(tb_1)x+(tb_2)x^2+....+(tb_m)x^m\in F[x]$$

עוד דוגמא:
יהי n טבעי (קבוע), F שדה. נסתכל על $F_n[x]$ = חוג הפולינומים ממעלה $\geq n$ מעל F במשתנה x.

$$h,g\in F_n[x],n\geq\deg(g),\deg(h)$$

לוודא כתרגיל.
נסתכל על אוסף הפולינומים ממעלה קבועה n=4.
האם מדובר במרחב וקטורי ? לא.

$$x+2x^4$$
$$1-2x^4$$

$$x+1$$

זה לא מרחב וקטורי כי הוא אינו סגור לחיבור. לכן, אוסף פולינומים ממעלה קבועה אינו מרחב וקטורי.

דוגמא: לא ממש שימושית, אבל דוגמא:
טענה: יהיו $K\subseteq F$ שדות אזי F מרחב וקטורי מעל K (גם הפעולות זהות)
הוכחה:
נגדיר חיבור וכפל בסקלר:

- החיבור בין שני וקטורים מF יהיה כמו חיבורם בשדה F.

- $t\in K,v\in F$ $t\in K\subset F$ ו $v\in F$ ולכן נכפול את t בv ע"פ הכפל בF.

כל התכונות מתקיימות כי הכפל והחיבור נעשים בתוך שדה.

R מעל Q
$Q\sqrt{2}$ מעל Q
Q מעל Z_2 לא אפשרי – הוא לא תת שדה.
למה?

$$0=0\cdot 7=(1+1)\cdot 7=1\cdot 7+1\cdot 7=14$$

כן אפשר להסתכל על
F_4 מעל Z_2

<u>הכנה לתרגיל – כמה מושגים מתורת הקבוצות</u>
X קבוצה.
<u>קבוצת החזקה</u> של X מסומנת P(X) היא אוסף כל תתי הקבוצות של X.

$$P(X):\{A:A\subseteq X\}$$

נשים לב לכמה דברים:

$$A,B\in P(X)\Rightarrow A\cup B\in P(X),A\cap B\in P(X)$$

$$\varnothing\in P(X),X\in P(X)$$

$$\overline{A}=A^C=X-A\in P(X)$$

פעולה נוספת: ההפרש הסימטרי

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

(מה שיש באחת הקבוצות, אבל לא בשתיהן) . נצטרך לראות שההפרש הסימטרי נותן חיבור שמתאים למרחב וקטורי (WTF?)

<u>תרגול 6, 4.12.2005</u>

<u>הגדרה:</u> יהי v מרחב וקטורי מעל שדה F. קב' $u \subseteq v$ תקרא <u>תת מרחב</u> אם u עצמה מהווה מרחב וקטורי מעל F.

<u>למעשה</u> $v \supseteq u \neq \varnothing$ תת מרחב אמ"מ u סגור לחיבור וכפל בסקלר.

<u>הוכחה: (כיוון 1)</u> אם $u \subset v$ ברור שהוא סגור לחיבור וכפל בסקלר, כי u מרחב וקטורי מעל F.

<u>כיוון 2:</u>
נניח u סגור לחיבור וכפל בסקלר. נראה כי u סגור ל0 ל, נגדי (שאר התכונות של מרחב וקטורי, כמו קומוטטיביות, אסוציאטיביות,... נובעות מכך שהפעולות נעשות בתוך המרחב הוקטורי v) .
ראשית, נטען, שלכל $u \in U$, $0_F \cdot u = 0_V$.

$$0_F \cdot u = (0_F + 0_F)u = 0_F u + 0_F u$$

(נובע כי $0_F u$ נייטרלי לחיבור בV, ומיחידות האיבר הנייטרלי לחיבור בv נובע כי $0_F u = 0_u$.

1) u סגור ל0. הנחנו שu לא ריק, ויהי $u \in U$, ומסגירות לכפל בסקלר

$$0_u = 0_F u \in U$$

2) יהי $u \in U$ נראה כי $-u \in U$

$$-u = (-1)u \in U$$

דוגמא: נסתכל על

$$R^3 = \{(a,b,c) : a,b,c \in R\}$$
$$u = \{(a,b,0) : a,b,c \in R\}$$

$$(a,b,0) + (c,d,0) = (a+b, c+d, 0) \in U$$
$$t(a,b,0) = (ta, tb, 0) \in U$$

הערה: u במקרה זה הוא מרחב דו מימדי. הוא סגור לחיבור וכפל בסקלר, ולכן זהו תת מרחב .

מהתרגיל הקודם:

$$L = \{(a,b,c) : a,b,c \in r, 3a + b - 2c = 0\}$$

$L \subset R^3$ נראה כי הוא תת מרחב.
סגירות לחיבור: ברורה.
סגירות לכפל בסקלר: ברורה.
נובע כי L תת מרחב של R^3 ובפרט זהו מרחב וקטורי.

שאלה 5:

$$A = \{f : R \to R\}$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(tf)(x) = t \cdot f(x)$$

זהו מרחב וקטורי. צריך לבדוק את כל התכונות.

$$B = \{f : R \to R; f(8) = 1\}$$

נניח

$f(8)=1, g(8)=1, f,g \in B$

$f(8)+g(8)=f(8)+g(8)=2 \Rightarrow f+g \notin B$

ולכן זהו לא מרחב וקטורי.

$C=\{f: R \to R, f(8)=0\}$

סגירות לחיבור – קיימת
סגירות לכפל בסקלר – גם קיימת.
ועל כן מדובר בתת מרחב, ובפרט מרחב וקטורי.

דוגמאות נוספות למ"ו מעל R:

1) אוסף הסדרות הממשיות מהצורה (a_i) (I מ1 עד אינסוף) עם חיבור וכפל בסקלר קוארדינטה קוארדינטה:

$(a_i)_{i=1}^{\infty}, (b_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרות ממשיות, ו $t \in R$

$(a_i+b_i)_{i=1}^{\infty}=(a_i)_{i=1}^{\infty}+(b_i)_{i=1}^{\infty}$

$(tb_i)_{i=1}^{\infty}=t(b_i)_{i=1}^{\infty}$

בעצם, כמו R^n, עם n אינסופי.

2) אוסף הסדרות הממשיות החסומות הוא גם מרחב וקטורי. ומדוע זה? כי הוא תת מרחב של (1)
נניח (a_i) חסומע ע"י L, (b_i) חסומה ע"י M

$(a_i+b_i) \to L+M$

$\forall t \in R \Rightarrow ta_i \le tl$

כפל בסקלר – כנ"ל

3) אוסף הסדרות הממשיות המתכנסות הוא תת מרחב.
4) אוסף הסדרות הממשיות המתכנסות ל0.

<u>אוסף הגדרות, ומשפטים, שיהיה לתרגיל:</u>

בסה"כ, נגדיר, כדי לא להיות קטנוניים: V מרחב וקטורי מעל שדה F

<u>צירוף ליניארי</u>

יהיו $v_1,\dots,v_m,u \in V$. u יקרא צירוף ליניארי של $v_1 \dots v_m$ אם קיימים סקלרים $a_1,\dots,a_m \in F$ כך ש $u=a_1v_1+\dots+a_mv_m$

דוגמא: $(2,3)$ צירוף ליניארי של $(1,1),(1,0)$ כי

$(2,3)=3\cdot(1,1)-1(1,0)$

אבל

$(2,3)$ אינו צירוף ליניארי של $(1,2),(2,4)$ מכיוון שלא ניתן להציג:

$(2,3)=a_1(1,2)+a_2(2,4)$

<u>תלות ליניארית</u>

$v_1,\dots,v_m \in V$ **<u>תלויים ליניארית</u>** (ת"ל) אם קיימים סקלרים $a_1,\dots,a_m \in F$ **שלא כולם אפס** כך ש

$a_1v_1+a_2v_2+..+a_mv_m=0_V$

דוגמא:

$(2,3),(1,1),(1,0)$

תלויים ליניארית כי

$$1\cdot(2,3)-3(1,1)+1\cdot(1,0)=(0,0)$$

<u>בלתי תלויים ליניארית</u>

$v_1,\dots,v_m$ ***בלתי תלויים ליניארית*** (בת"ל) אם

$$a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_mv_m=0\Rightarrow$$
$$a_1=a_2=\dots=a_m=0$$

לדוגמא:

$(1,0),(0,2)$ הם בלתי תלויים ליניארית, כי

$$a(1,0)+b(0,2)=(0,0)\Rightarrow a=b=0$$

<u>טענה:</u>

יהיו $v_1,\dots,v_m\in V$ אזי $v_1,\dots,v_m$ תלוי ליניארית אם ורק אם אחד מהם הוא צירוף ליניארי של האחרים.

<u>הוכחה (I):</u>

נניח כי אחד הוקטורים הוא צירוף ליניארי של האחרים, ובלי הגבלת הכלליות, $i=m$, כלומר, קיימים סלקרים $a_1,\dots,a_{m-1}\in F$ כך ש $v_m=a_1v_1+\dots+a_{m-1}v_{m-1}$

אזי

$$a_1v_1+\dots+a_{m-1}v_{-1}-v_m=0$$

(לשים לב – המקדם של v_m איננו 0, ולכן לא כל המקדמים הם 0). מכאן נובע –

$(v_1,\dots,v_m)$ תלויים ליניארית.

<u>הוכחה (II) (הכיוון השני)</u>

נניח כי $v_1,\dots,v_m$ תלויים ליניארית, ז"א קיימים $b_1,\dots,b_m\in F$ שלא כולם אפס, כך ש

$$b_1v_1+\dots+b_mv_m=0$$

נניח בה"כ כי $b_1\neq 0$

$$b_1v_1=-b_2v_2-\dots-b_mv_m$$

מאחר ו $b_1\neq 0$ ניתן לחלק בו:

$$v_1=-\frac{b_2}{b_1}v_2-\dots.-\frac{b_m}{b_1}v_m$$

ולכן, v_1 צירוף ליניארי של $v_2,\dots,v_m$.

<u>למה:</u>

כל קבוצת וקטורים בV המכילה את וקטור ה0, היא תלוייה ליניארית.

<u>הוכחה:</u>

נסתכל על הקבוצה $v_1,\dots,v_m,0$. קיים צירוף ליניארי במקדמים שלא כולם 0:

$$0v_1+0v_2+\dots+0v_m+1\cdot 0=0$$

יהיו $v_1,...,v_m \in F^n$ (נתונים). נרצה לבדוק תלות ליניארית, ז"א: האם קיימים $a_1,...,a_m \in F$ כך ש

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = a_1(v_1^{\,n}...v_1^{\,n}) + a_2(v_2^{\,1}...v_2^{\,n})...+a_m(v_m^{\,n}...v_m^{\,n}) = (0..0)$$

לפנינו n משוואות בm נעלמים: $a_1, a_2, ..., a_n$

אם יש פתרון למערכת אזי $v_1,...,v_m$ תלויים ליניארית. אחרת – אין פתרון.

דוגמא 1:

$$(2,4,3),(0,1,4),(2,0,1)$$

נפתור מערכת של 3 משוואות ב3 נעלמים:

$$x(2,4,3)+y(0,1,4)+z(2,0,1)=(0,0,0)$$
$$2x+0y+2z=0 \Rightarrow z=-x \Rightarrow z=0$$
$$4x+y+0z=0 \Rightarrow y=-4x \Rightarrow y=0$$
$$3x+4y+z=0 \Rightarrow$$

$$3x+4(-4x)+(-x)=0$$
$$3x-16x-x=0$$
$$-14x=0$$
$$x=0$$

קיבלנו שבהכרח $x=y=z=0$, ולכן הוקטורים בלתי תלויים ליניארית (ואף אחד הוא לא צירוף ליניארי של האחרים)

יהיו $v_1,...,v_m, u \in F^n$ (נתונים). נרצה לבדוק האם u צירוף ליניארי של $v_1,...,v_m$, ז"א: האם קיימים $a_1,...,a_m \in F$ כך ש

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = u$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = a_1(v_1^{\,n}...v_1^{\,n}) + a_2(v_2^{\,1}...v_2^{\,n})...+a_m(v_m^{\,n}...v_m^{\,n}) = (u_1...u_m)$$

לפנינו n משוואות בm נעלמים: $a_1, a_2, ..., a_n$

אם יש פתרון למערכת אזי $v_1,...,v_m$ אזי u צ"ל של $v_1...v_m$, אחרת אין

__ניתן לומר:__ $v_1...v_m$ תלויים ליניארית אמ"מ וקטור האפס הוא צ"ל לא טריוויאלי של $v_1...v_m$.

עוד דוגמא מספרית:

האם $(4,5,2)$ הוא צ"ל של $(2,4,3),(0,1,4),(2,0,1)$

$$x(2,4,3)+y(0,1,4)+z(2,0,1)=(4,5,2)$$

$$2x+0y+2z=4 \Rightarrow z=\frac{4-2x}{2}=2-x \Rightarrow z=2-\frac{10}{7}$$

$$4x+y+0z=5 \Rightarrow y=5-4x \Rightarrow y=5-\frac{40}{7}$$

$$3x+4y+z=2$$

$$3x+4(5-4x)+2-x=2$$

$$3x+20-16x+2-x=2$$

$$-14x=-20$$

$$x=\frac{20}{14}$$

מצאנו מקדמים! HiHa!

הערות לתרגיל:

שאלה 3 – מגדירים חיבור חדש במרחב וקטורי :

$$x \oplus y = x \cdot_R y$$

$$\lambda \cdot_v x = x^{\lambda}$$

<u>מה זה המשפט היסודי של האריתמטיקה, לכל הרוחות והשדים ?!</u>

לכל $n>1$ (טבעי) קיימת הצגה כמכפלת מספרים ראשוניים, $n=p_1^{e1}p_2^{e2}...p_k^{ek}$ (e_i שלם) הצגה זו יחידה עד כדי שינוי סדר הגורמים.

מרחב ליניארי = מרחב וקטורי.

תרגול 7, 12.11.2005

הודעות:

התחלף הבודק. נקווה שהציונים ישתפרו...

יש בוחן בשבוע הבא!

יהי V מרחב וקטורי מעל F , יהיו $U,W \subset V$ תתי מרחבים . מגדירים:

$$U+W=\{u+w:u\in U,w\in W\}$$

טענה: $U+W$ תת מרחב של V.

הוכחה: כקבוצה, $U+W\subset V$. לכן, על מנת להראות שזהו תת מרחב, מספיק לבדוק סגירות לחיבור וכפל בסקלר.

- **חיבור:** יהיו $u_1,u_2\in U$, $w_1,w_2\in W$, אזי

$$u_1+w_1,u_2+w_2\in U+W$$
$$(u_1+w_1)+(u_2+w_2)=$$
$$(u_1+u_2)+(w_1+w_2)$$
$$u_1+u_2\in U$$
$$w_1+w_2\in W$$
$$\Rightarrow (u_1+w_1)+(u_2+w_2)\in U+W$$

- **כפל בסקלר:** יהי $t\in F$, $u\in U,w\in W$:

$$t(u+w)=tu+tw\in U+W$$

גם $U\cap W$ תת מרחב של V.

סגירות לחיבור ולכפל – כמו בקודם בדיוק...

לשים לב $U\cup W$ **לא בהכרח** תת מרחב (לדוגמא: $U=sp\{(1,0)\}$ - $W=sp\{(0,1)\}$

($(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin U\cup W$)

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי מעל F. הוקטורים $v_1,...,v_n\in V$ יקראו **בסיס לV** אם לכל $v\in V$ קיימת **הצגה יחידה** כצירוף ליניארי של $v_1...v_n$.

לדוגמא: לR^2 הבסיס (הסטנדרטי) הוא $(1,0),(0,1)$. כל $(a,b)\in R^2$ ניתן להצגה כ: $a(1,0)+b(0,1)$.

הגדרה: V מרחב וקטורי מעל F. הקבוצה $v_1,...,v_n$ תיקרא פורשת את V אם לכל $v\in V$ יש הצגה (לאו דווקא יחידה) כצירוף ליניארי של $v_1,...,v_n$. $V=span\{v_1,...,v_n\}$.

למה: יהיו $v_1,...,v_n$ בסיס לV. אזי, $v_1,...,v_n$ בלתי תלויים ליניארית.

הוכחה: נניח בשלילה כי $v_1,...,v_n$ תלויים ליניארית, כלומר, יש $a_1,...,a_n\in F$ (לא כולם 0) כך ש $a_1v_1+...+a_nv_n=0$.

נקבל שלוקטור ה0 יש שתי הצגות שונות כצירוף ליניארי של $v_1,...,v_n$:

$$0v_1+0v_2+...+0v_n=0$$
$$a_1v_1+...+a_nv_n=0$$

ההצגות שונות, מכיוון שלא כל ה-aים אפס, סתירה לכך שהוא בסיס.

למה: יהיו $v_1,...,v_n$, $w_1,...,w_m$ שני בסיסים לV, אזי $m=n$. מספר זה נקרא המימד של V מעל F, ומסומן כ $\dim_F V=n$

בסיס, מיהו (בנוסף להגדרה הראשונית)?

בסיס הוא קבוצה ***פורשת ובלתי תלויה.***
בסיס הוא ***קבוצה פורשת מינימלית.***
בסיס הוא ***קבוצה בלתי תלויה מקסימלית***
בסיס הוא ***קבוצה פורשת בגודל המימד***
בסיס הוא ***קבוצה בלתי תלויה בגודל המימד.***

הוצאת בסיס מתוך קבוצה פורשת

נתונים $v_1,..,v_k$. נבדוק, האם v_k תלוי ליניארית ב $v_1,...,v_{k-1}$.
במידה ותלוי – נוציא אותו. במידה ולא – נשאירו.
נבדוק האם v_{k-1} תלוי ב $v_1,...,v_{k-2}$. ...

לדוגמא: $(1,2),(2,3),(-1,1),(1,0)$:
נפתור משוואה:

$$(1,0)=a(1,2),b(2,3)+c(-1,1)$$
$$1=a+2b-c$$
$$0=2a+3b+c$$

יש פתרונות.נעבור לבא:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$
$$-1=a+2b$$
$$1=2a+3b$$

...

בסיס: $(1,2),(2,3)$ - זו קב' בלתי תלויה במרחב R^2 שמימדו 2 ולכן בסיס.

הרחבת קבוצה בלתי תלויה לבסיס

לדוגמא: $v_1,...,v_k\in F^n$. בד"כ – מנסים להוסיף את איברי הבסיס הסטנדרטי כך שנשמרת אי תלות.
הקבוצה המדוברת בלתי תלויה – אפשר לנסות כתרגיל

$$v_1=(1,1,1,0),v_2=(1,0,-1,0)$$

נוסיף את $e_4=(0,0,0,1)$. תרגיל – איזה וקטור נוסף ניתן להוסיף כדי להגיע לבסיס?

בואו ונוכיח משפט נחמד –

(לשים לב – יעזור בשאלה שמתעסקת בפולינומים)

<u>תזכורת למשפט:</u> יהיו $v_1,...,v_k \in V$, אזי $span\{v_1...v_k\}$ הוא תת מרחב.

<u>משפט:</u>

יהיו $\alpha_1,...,\alpha_n \in R$, נקודות שונות בR, אזי, קיים פולינום מדרגה $n \geq$ המתאפס בנק' אלה (הפולינום הזה גם יחיד, עד כדי כפל בסקלר)

<u>למה:</u> יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, $W \subseteq V$ תת מרחב, $v \in V, v \notin W$ ונניח כי :

$$W + span\{v\} = V$$

אזי $\dim W = \dim V - 1$.

<u>הוכחה:</u>

נסמן את $k := \dim W$, ויהיו $w_1,...,w_k$ בסיס לW. נטען כי $w_1,...,w_k, V$ בסיס לV.

יהי $v' \in V$. מכך ש $V = W + span\{v\}$. נובע שקיים $w \in W$ $t \in R$ כך ש:

$$v' = w + tv$$

נכתוב את w כצירוף ליניארי בבסיס $w_1,...,w_k$ ו $w = a_1w_1 + ... + a_kw_k$

$$v' = w + tv = a_1w_1 + ... + a_kw_k + tv$$

מכאן נובע כי $w_1,...,w_k, v$ פורשת את V.

$w_1,...,w_k$ בלתי תלוי ליניארית כי זהו בסיס לw ובפרט בלתי תלוי ליניארית.

אם לשלילה v צירוף ליניארי של $w_1,...,w_k$ אזי $v \in W$ <= $w_1,...,w_k, v$ בלתי תלויים.

מכך שהם פורשים ובלתי תלויים, זהו בסיס.

<u>בחזרה להוכחה המקורית:</u>

$$V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq ... \subseteq V_1 \subseteq R_n[X]$$

V_i = אוסף הפולינומים מדרגה $n \geq$ המתאפסים בנקודות $\alpha_1,...,\alpha_i$.

<u>טענה:</u> $V_{i-1} = V_i + span\{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_i)\}$

הערה לתרגיל : כשרוצים פולינומים שמתאפס בנקודות α, β צריך שיכיל גם $(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$.

<u>המשך – מתישהו</u>.

<u>הערות לתרגיל הבא:</u>

סדרת פיבונאצי – אפשר להתחיל מכל שני מספרים, האיבר הבא הוא סכום של שניהם:

$$3,4,7,11,18,...$$

אוסף סדרות פיבונאצי – מרחב וקטורי.

לדוגמא:

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

$$b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

מכאן:

$$a_{n+2} + b_{n+2} = (a_n + b_n) + (a_{n+1} + b_{n+1})$$

<u>הצעה לתרגיל:</u> לעבוד הפוך – קודם למצוא בסיס שהוא סדרה הנדסית

$(a, aq, aq^2, aq^3, ...)$ **(תזכורת לסדרה הנדסית)**

למצוא סדרה הנדסית שהיא גם סדרת פיבונאצי. ייתכן ונמצא שתיים כאלה, והן בסיס...
ואז להראות ששתי הסדרות שנמצאו הן בסיס.

<u>תרגול 8, 18.12.2005</u>

איך מוכיחים ש $1,x,x^2$ לא תלויים ליניארית?
תרגיל 6, 2ב'.

נניח בשלילה כי הם ת"ל מעל R. ז"א קיימים a,b,c לא כולם 0 כך ש $a+bx+cx^2=0$, לכל $x \in R$.
אם a,b,c לא כולם 0 , אזי הפולינום $a+bx+cx^2$ הוא פולינום מדרגה קטנה ≤ 2 במשתנה x,
ויש לו ***לכל היותר*** 2 שורשים, בסתירה לכך ש $a+bx+cx^2=0$ לכל $x \in R$.

<u>קצת משוואות ותלות ליניארית</u>

השאלה האם $v_1,...,v_n$ תלויים ליניארית או לאו שקולה לשאלה האם קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת המשוואות

$$a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n=0$$

נניח שיש לנו מערכת m משוואות בn נעלמים. אוסף הפתרונות של המערכת **<u>לא משתנה</u>** אם מבצעים **<u>פעולה אלמנטרית</u>** על המשוואות. והפעולות הן:

1. החלפת סדר המשוואות
2. כפל בסקלר של המשוואה
3. הוספת משוואה אחת למשוואה אחרת.

יש מערכות של משוואות בהן אפשר להגיד באופן **מיידי** אם יש פתרון טריוויאלי או לאו:

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0$$
$$0+b_2x_2+...+b_nx_n=0$$
$$0+0+c_3x_3+...+c_nx_n=0$$
$$0+0+0+0...+w_nx_n=0$$

(מטריצת U, כאשר המקדמים שעל האלכסון, אינן 0).
במקרה זה, הפתרון היחיד, הוא הטריוויאלי – כל האים הם 0 : $x_1=x_2=....=x_n=0$

<u>'הוכחה' (לא פורמלית)</u>

המשוואה האחרונה היא

$$w_nx_n=0, w_n\neq 0 \Rightarrow x_n=0$$

המשוואה הלפני אחרונה אומרת כי:

$$t_{n-1}x_{n-1}+t_nx_n=0, x_n=0 \Rightarrow t_{n-1}x_{n-1}=0, t_{n-1}\neq 0 \Rightarrow x_{n-1}=0$$

וככה , באופן רקורסיבי, עד ההתחלה.

נתבונן במערכת הבאה:
עוד מערכת:

$$a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n=0$$
$$0+b_2x_2+...+b_nx_n=0$$
$$0+...+t_{n-1}x_{n-1}+t_nx_n=0$$
$$0x_1+0x_2+...+0x_n=0$$

הכוונה היא שיש מבנה מדורג, כשהשורה האחרונה כולה 0. נבחר $x_n=1$. צ"ל

$t_{n-1}x_{n-1}+t_nx_n=0\Rightarrow$ - ניקח את $x_{n-1}=-\frac{t_n}{t_{n-1}}$, ובאופן רקורסיבי – עד למעלה.

<u>אלגוריתם לפתרון מערכת הומוגנית (ניתן לממש בJAVA, למשועממים)</u>

מערכת הומוגנית – מושווית ל0.

1. ע"י פעולות אלמנטריות על המשוואות הגיעו לצורה מדורגת.
2. אם יש שורה $0x_1+...+0x_n=0$ אזי יש פתרון לא טריוויאלי, אחרת – אין.

דוגמא טיפשית:

$$2x+4y=0$$
$$x+2y=0$$

$$2x+4y=0$$
$$0x+0y=0$$

אזי יש פתרון לא טריוויאלי.

$$2x+4y=0$$
$$x+y=0$$

$$2x+4y=0$$
$$0+2y=0$$

אין פתרון לא טריוויאלי.

<u>השיטה נקראת 'דרוג גאוס'</u>

נגיד וקיבלנו קבוצת וקטורים $v_1,...,v_n$, וצריך לבדוק אם היא פורשת את R^4.

איך עושים את זה –

(1) לקחת וקטור כללי (a,b,c,d) ולהראות כי ניתן להציג אותו באמצעות $v_1,...,v_n$

(2) אפשר להגיד כי אנו יודעים ש R^4 נפרש על ידי הבסיס הסטנדרטי $e_1,...,e_4$. נראה ש $e_1,...,e_4\in sp\{v_1,...,v_n\}$. **<u>למה זה טוב?</u>** ע"פ המשפט: אם $u_1,...,u_k\in R^m$ אזי אוסף הצירופים הליניאריים של $u_1,...,u_k$ הם תת מרחב של R^m, וזהו בדיוק $span\{u_1,...,u_k\}$. **<u>למה זה עוזר?</u>** אם $e_1,...,e_4\in Span\{v_i\}$ אזי $V:=span\{v_i\}$ הוא תת מרחב של R^4 ולכן מכך שהוא מכיל את $e_1,...,e_4$ נובע שהוא מכיל גם כל צ"ל

שלהם. אבל, אוסף הצ"ל של $e_1,...,e_4$ הוא בדיוק R^4 ולכן $V \subseteq R^4$, ולכן $v_1,...,v_n$ פורשים את R^4. רמז: זה עובד לא רק ב R^4.

<u>דוגמא:</u>

האם $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ פורשים את R^2 ?

נראה כי הבסיס הסטנדרטי נפרש על ידם, ואכן:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$R^2=sp\{e_1,e_2\}\subseteq sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

אפשר לשאול גם בצורה יותר כללית:

$$u_1,...,u_n\in R^k$$
$$v_1,...,v_m\in R^k$$

$$u=span(u_1,...,u_n)$$
$$v=span(v_1,...,v_m)$$

איך נענה האם $u=v$? נבדוק ש $v_1,...,v_m\in span\{u_i\}$

זה יראה כי $V\subseteq U$

ולהפך, נראה כי $u_1,...,u_n\in Span\{v_i\}$ וזה יראה כי $U\subseteq V$.

<u>שתי הערות – חשובות:</u>

<u>V מ"ו ממימד סופי -</u>

(1) $U\subseteq V$ תת מרחב, ו $\dim U=\dim V$, אזי $U=V$.

(2) $U\subseteq V$ תת מרחב, ו $U\neq V$, אזי $\dim U<\dim V$.

תרגול 9, 25.12.2005

שבוע הבא – רוב הקבוצות לא מתבטלות מן הסתם... – התרגיל של שבוע הבא יהיה ברשת. כדאי לבוא גם למתרגל אחר (בשני או חמישי). להגיש את התרגיל הזה עוד שבועיים.

הערות לתרגיל 7:

אם $\{v_1,...,v_n\}$ אזי $sp\{v_1,...,v_n\}$ הוא ת"מ של V, ולכן אם הוא מכיל איזשהיא קב' של וקטורים אזי הוא מכיל גם את הspan שלהם.

<u>הגדרה:</u>

יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. העתקה ליניארית $T:V\to W$ תקרא טרנספורמציה ליניארית (או העתקה ליניארית) (טרל"ן) אם :

1. לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$
2. לכל $v\in V$ ולכל $\lambda\in F$ מתקיים $T(\lambda v)=\lambda T(v)$.

<u>דוגמאות:</u>

1. העתקת האפס: $T:V\to W,T(v)=0_W$
2. העתקת הזהות: $I:V\to V,I(v)=v$
3. $T:R^2\to R^3$ כך ש $T(x,y)=(x+y,2x,3y)$

למה ליניארית למה?

$$T\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right)=T\left((x_1+x_2),(y_1+y_2)\right)=$$
$$\left(x_1+x_2+y_1+y_2,2(x_1+x_2),3(y_1+y_2)\right)=(x_1+y_1,2x_1,3y_1)+$$
$$(x_2+y_2,2x_2,3y_2)=T(x_1,y_1)+T(x_2+y_2)$$

דוגמא **<u>להעתקה לא ליניארית</u>**: $T:R^2\to R^2,T(x,y)=(x+y,x+1)$

<u>למה?</u>

$$T(2,1)=(3,3)$$
$$T(1,4)=(5,2)$$
$$T\left((2,1)+(1,4)\right)=T(3,5)=(8,4)\neq T(2,1)+T(1,4)$$

עוד דוגמא:

$$T:R^2\to R,T(x,y)=xy$$
$$T(2,1)=2$$
$$T(2,4)=4$$
$$T\left((2,1)+(1,4)\right)=T(3,5)=15\neq T(2,1)+T(2,4)$$

<u>רמז :</u> בטרנספורמציה ליניארית אי אפשר להכפיל בין קוארדינטות, ולהוסיף קבוע.

<u>הערה לתרגיל:</u>

אם V,W מרחבים וקטוריים מעל F אזי $V\times W=\left\{(v,w)v\in V,w\in W\right\}$ עם חיבור וכפל בסקלר קוארדינטה קוארדינטה הוא מרחב וקטורי מעל F. שימושי **לשאלה 3**

טרנספורמציית הטלה:

$$T: V \times W \to V, T(v,w) = v$$

<u>פתרון 1.3 בתרגיל:</u>

$.V = A \times R \ , A = \{f : R \to R\}$

$T: V \to R, T(f,a) = f(a)$

האם זו העתקה ליניארית ?

אם זו העתקה ליניארית אז לכל $f, g \in A$ ולכל $a, b \in R$ מתקיים ש

$$T(f+g, a+b) = T(f,a) + T(g,b)$$

$$T(f+g, a+b) = (f+g)(a+b) =^{?} f(a) + g(b)$$

$$(f+g)(a+b) \coloneqq f(a+b) + g(a+b)$$

זה לא מתקיים בד"כ. ננסה ונראה... (לשים לב להגדרת חיבור פונקציות).

תרגול 10 , 2.1.2006

בוחן של הקבוצה שהגעתי לבקר בה:

1. מרחב וקטור V מעל F. $w_1,\ldots,w_n$ תת מרחבים וקטורים של V. צ"ל או להפריך :
   a. $\cap W$ (של כולם) תת מרחב
   b. $\cup W$ (של כולם) תת מרחב

תשובה:

א. נכון. הוכחה: צ"ל $\cap W_i$ הוא תת מרחב וקטורי, לכן מספיק להראות לא ריק, סגירות לחיבור ולכפל בסקלר.

למה לא ריק? כי לכל תת מרחב יש את איבר ה0 בתוכו.

נוכיח סגירות לחיבור (ולכפל):

יהי $a \in F$, $v,u \in \cap W$, אז לכל i מתקיים $v,u \in W_i$ וכיוון ש W_i תת מרחב וקטורי, $v+u, av \in W_i$. נכון לכל I ולכן $v+u, av \in \cap W_i$. מ.ש.ל.

ב .לא נכון. כי עבור $n=2$ הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית:

$f=R, v=R^2, w_1=sp\{(1,1)\}, w_2=sp\{(1,-1)\}$.

$$(1,1),(1,-1) \in W_1 \cup W_2$$

$$(1,1)+(1,-1)=(2,0) \notin W_1 \cup W_2$$

מ.ש.ל.

שאלה 2 מאותו בוחן:

א. V מ"ו מעל F. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ וקטורים בV. הגדירו תנאי לכך ש $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ בסיס לV.

ב. נתון V^3 אוסף הפולינומים ממעלה $3 >$. מעל שדה F, ו $charF \neq 2$. הוכיחו / הפריחו

$$sp\{x,x^2\}=sp\{x+x^2,2x+x^2\}$$

פתרון:

א. $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ הם בסיס אם הם קבוצה בלתי תלויה ליניארית בV ופורשת את V.

ב. **הטענה נכונה:** הוכחה:

$$sp\{x,x^2\} \supseteq sp\{x+x^2,2x+x^2\}$$

ברור – למה $x+x^2$ הוא צירוף ליניארי של x,x^2 וגם $2x+x^2$ הוא צירוף ליניארי של x,x^2 ולכן

$$x+x^2 \in sp\{x,x^2\}$$

$$2x+x^2 \in sp\{x,x^2\} \Rightarrow$$

$$sp\{x+x^2,2x+x^2\} \in sp\{x,x^2\}$$

בכיוון ההפוך:

צ"ל x,x^2 צירוף ליניארי של $x+x^2,2x+x^2$:

$$x=(2x+x^2)-(x+x^2)$$

$$x^2=2(x+x^2)-(2x+x^2)$$

ומכאן גם ההכלה בכיוון ההפוך, ועל כן הם שווים.

טרנספורמציות ליניאריות

ראינו שאם $T = V \to W$ טרנספורמציה ליניארית ו $v_1,\ldots,v_m$ וקטורים ב V בלתי תלויים ליניארית אז $T(v_1),\ldots.,T(v_m)$ לא בהכרח בלתי תלויים ליניארית.

(תלות ליניארית כן נשמרת, אבל אי תלות לא תמיד)

טענה:

V,W מ"ו. $T:V\to W$. v_i כנ"ל. $U\subseteq V$ תת מרחב וקטורי ש $v_1,\ldots,v_m\in U$. אז, אם $U\cap KerT=\{0\}$ אז $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ גם בלתי תלויים ליניארית.

עוד הערה: אם $U\cap KerT=\{0\}$ אז ודאי $sp\{v_1,\ldots,v_m\}\cap KerT=\{0\}$. למה? $sp\{v_1,\ldots,v_m\}\subseteq U$.

בפרט: אם $KerT=\{0\}$ אז התנאים מתקיימים ונקבל שהאי תלות נשמרת.

הערה: אם $v_1,\ldots,v_n$ פורשים, אז U חייב להיות V, ולכן התנאי $U\cap KerT=V\cap KerT=KerT=\{0\}$ למעשה דורש שT חח"ע.

(הערה: $KerT=\{0\}$ אומר שהטרנספורמציה חח"ע).

(מסקנה שתנבע – אם טרנספורמציה היא חח"ע, היא מעבירה קבוצה בלתי תלויה לקבוצה בלתי תלויה).

__הוכחה:__ אם בשלילה $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ תלויים ליניארית אז קיימים $a_1,\ldots,a_m$ (לא כולם 0) כך ש $\sum_{i=1}^m a_iT(v_i)=0$, כלומר $T\left(\sum_{i=1}^m a_iv_i\right)=\sum_{i=1}^m a_iT(v_i)=0$ אך כיוון ש $\sum_{i=1}^m a_iv_i\in KerT$ ש $a_1,\ldots,a_m$ לא כולם 0 ו $v_1,\ldots,v_m$ בלתי תלויים ליניארית, אז $\sum_{i=1}^m a_iv_i\neq 0$ אך $\sum_{i=1}^m a_iv_i\in U$ כי U תת מרחב וקטורי ו $v_1,\ldots,v_m\in U$. כלומר $0\neq\sum_{i=1}^m a_iv_i\in U\cap KerT$. זו סתירה כי הנחנו ש $U\cap KerT=\{0\}$. מכאן הנחת השלילה אינה נכונה ולכן $T(v_1),\ldots,T(v_m)$ בלתי תלויים ליניארית. מש"ל.

__נסתכל עוד קצת על טרנספורמציות ליניאריות:__

__דוגמא:__

(טרנספורמציות ליניאריות הנקראות 'הטלה'). תהי

$$T:R^3\to R^3$$
$$(x,y,z)\to(x,y,0)$$

הערה: זה איזומופרי ל R^2. איזומורופיזם זה סה"כ שינוי שמות...

היא טרנספורמציה ליניארית. למה? (אין איברים חופשיים, אין כפל בין קוארדינטות). אפשר להתעקש להוכיח, כדאי לוותר.

לתרגול:

$$KerT=\{(0,0,z)\mid z\in R\}$$
$$\operatorname{Im}T=\{(x,y,0)\mid x,y\in R\}$$

(נשים לב שזה מתאים גם למשפט המימדים).

$\dim KerT = 1$

$\dim \operatorname{Im} T = 2$

$\dim R^3 = 3$

הוכח/הפרך:

1) $S, T : V \to V$. נתון $KerT = KerS$, $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} S$. האם $T = S$?

לא! למה?

$V = R^2, T(x,y) = (x,y)$

$S(x,y) = (y,x)$

אז ברור ששתי הטרנספורמציות הן **על**.

$T : (1,0) \to (1,0), (0,1) \to (0,1)$

$S : (1,0) \to (0,1), (0,1) \to (1,0)$

(תזכורת: מספיק להגדיר טרנספורמציה על איברי בסיס, בשל הליניאריות שלה)

-=

שתי פונקציות f, n שוות אמ"מ לכל x $f(x) = n(x)$.

-=

ועל כן $T \neq S$. למה התמונות שוות?

$\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} S = R^2$ (למה? $S(y,x) = T(x,y) = (x,y)$). אפשר להגיד שממשפט המימדים הגרעין הוא גם שווה, כי בשניהם הוא ממימד 0, אפשר גם להראות . בואו נגיד:

כמו כן ממשפט המימדים $\dim KerT = \dim KerS = 0$, כלומר

$\dim KerT = \dim KerS = \{0\}$.

בואו נעשה קצת יצוגים לפי קוארדינטות/ בסיסים:

<u>**ייצוג לפי קוארדינטות:**</u>

נתון V מ"ו מעל F. $v_1, \ldots, v_n \in V$ **בסיס.** מה זה אומר? לכל $v \in V$ קיימים $a_1, \ldots, a_n \in F$ סקלרים **יחידים** כך ש $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$. (נשים לב – היחידות היא מהבסיס, הקיום הוא מהפרישה).

אם נסמן $A = (v_1, \ldots, v_n)$, אז $[v]_A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$. זה מגדיר העתקה מ $V \to F^n$. ($v \to [v]_A$).

לדוגמא:

$V = \{(x,y,0) : x, y \in R\} = sp\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

$(3,2,0) = 3(1,0,0) + 2(0,1,0)$

$[(3,2,0)]_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(אפשר גם לפי בסיסים אחרים – לדוגמא, לפי $(1,-1,0),(1,1,0)$ (נגדיר כB) היצוג של

$$\left[(3,2,0)\right]_B = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\left[(1,1,0)\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>אלגברה ליניארית, תרגול 11, 8.1.2006</u>

<u>יצוג טרנספורמציה ליניארית על פי בסיסים</u>

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית, וניקח $A=\{a_1,...,a_n\}$ בסיס לV, ו $B=\{b_1,...,b_m\}$ בסיס לW.

המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיסים A וB מסומנת ע"י $[T]_B^A$ ומוגדרת באופן הבא:

$$T(a_j)=\sum_{i=1}^{m}c_{ij}b_i$$

$$[T]_B^A=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & & \\ c_{m1} & & c_{mn} \end{pmatrix}$$

כלומר, העמודה הj במטריצה $[T]_B^A$ מורכבת **מהמקדמים** של Ta_j בפיתוח לפי הבסיס B.

לדוגמא:

$$T:R^3\to R^2;T(x,y,z)=(x+y-2z,2x-y+z)$$

ראשית, נייצג את T לפי הבסיסים הסטנדרטיים של R^3 (E_3) ושל R^2 (E_2).

$$T(1,0,0)=(1,2)=1\cdot(1,0)+2(0,1)$$
$$T(0,1,0)=(1,-1)=1\cdot(1,0)-1(0,1)$$
$$T(0,0,1)=(-2,1)=-2(1,0)+1(0,1)$$
$$[T]_{E_2}^{E_3}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

נייצג את T לפי הבסיסים הבאים:

$$C_3=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$$
$$C_2=\{(1,1),(0,1)\}$$
$$T(1,1,1)=(0,2)=0(1,1)+2(0,1)$$
$$T(0,1,1)=(-1,0)=-1(1,1)+1(0,1)$$
$$T(0,0,1)=(-2,1)=-2(1,1)+3(0,1)$$
$$[Id]_{C_2}^{C_3}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>משפט:</u>

$$T:V\to U$$
$$S:U\to W$$

A בסיס של V, B בסיס של U, C בסיס של W.

$$[ST]_C^A=[S]_C^B[T]_B^A$$

מטריצת מעבר בסיס

יהי V מרחב וקטורי עם הבסיסים A, A'. מטריצת המעבר מA לA' מוגדרת ע"י $\left[Id\right]_{A'}^{A}$.

כלומר, העמודה הj במטריצה $\left[Id\right]_{A'}^{A}$ מורכבת מהמקדמים של a_j בפיתוחו על פי הבסיס A'.

$$C_3 = \left\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\right\}$$
$$E_3 = \left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right\}$$
$$(1,1,1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$$
$$(0,1,1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3$$
$$(0,0,1) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3$$
$$\left[Id\right]_{E_3}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \left\{(1,1),(0,1)\right\}$$
$$(1,0) = 1(1,1) - 1(0,1)$$
$$(0,1) = 0(1,1) + 1(0,1)$$
$$\left[Id\right]_{C_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

בואו ונסתכל על הדיאגרמה הבאה:

$$\begin{matrix} R_3 & T & R_2 \\ (E_3) & \to & (E_2) \\ R_3 & T & R_2 \\ (C_3) & \to & (C_2) \end{matrix}$$

ננסה לחשב את $\left[T\right]_{C_2}^{C_3}$. ע"פ הדיאגרמה:

$$[Id]_{C_2}^{E_2}[T]_{E_2}^{E_3}[Id]_{E_2}^{C_3}=[T]_{C_2}^{C_3}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

<u>מה עוד יש להגיד על מטריצות מעבר בסיס:</u>

<u>טענה:</u>

$$[Id]_{A'}^{A}\cdot[Id]_{A}^{A'}=I_{\dim V\times\dim V}$$

למה?

$$[Id]_{A'}^{A}\cdot[Id]_{A}^{A'}=[Id]_{A'}^{A'}=I_{\dim V\times DimV}$$

דוגמא לזה שזה מתקיים:

$$(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$$

$$(0,1)=0(1,0)+1(0,1)$$

$$[Id]_{E_2}^{C_2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$[Id]_{C_2}^{E_2}[Id]_{E_2}^{C_2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>עוד קצת מטריצות</u>

<u>טענה:</u>

יהיו $D,E\in M_{n\times n}(F)$ אלכסוניות. אזי DE אלכסונית

מטריצה M היא אלכסונית אמ"מ לכל $i\neq j\Rightarrow M_{ij}=0$.

נרצה להראות שלכל $i\neq j$ מתקיים $(DE)_{ij}=0$.

$$(DE)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}D_{ik}E_{kj}$$

מכך ש D אלכסונית, לכל $k\neq i$ מתקיים $D_{ik}=0$ ועל כן, מבין $D_{i1},...,D_{in}$ האיבר היחיד שאינו 0 הוא D_{ii}. על כן:

$$(DE)_{ij}=D_{ii}E_{ij}$$

מכך ש $i\neq j$ ומכך שE אלכסונית, $E_{ij}=0$, ועל כן $(DE)_{ij}=0$.

הגדרה: מטריצה $A\in M_{n\times n}\left(F\right)$ תקרא משולשית עליונה אם היא מהצורה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} \end{pmatrix}$$

או, פורמלית:

$$i>j,a_{ij}=0$$

טענה:
אם $A,B\in M_{n\times n}\left(F\right)$ משולשיות עליונות, אז כך גם מכפלתן.
הוכחה:
צ"ל לכל $i>j$, $\left(AB\right)_{ij}=0$. נשתמש בנוסחת כפל המטריצות:

$$\left(AB\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

לכל $i>k$ מתקיים $a_{ik}=0$, לכן , מבין האיברים $a_{i1},...,a_{in}$, האיברים היחידים שאינם בהכרח 0 הם עבור $i\le k$. ועל כן:

$$\left(AB\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

עבור $k=i,...,n$ מתקיים $k\ge 1$ וגם $i>j$ לכן $k>j$ ולכן $b_{kj}=0$ (מכך שB משולשית עליונה), ולכן הסכום הנ"ל הוא 0, כלומר ל $i>j$ מתקיים $\left(AB\right)_{ij}=0$.

למה:
$T:V\to W$ טרנספורמציה ליניארית.

$$v_1,...,v_n\in V$$

1. האם יתכן ש $v_1,...,v_n$ בת"ל ו $T\left(v_1\right),...,T\left(v_n\right)$ ת"ל? כן. לדוגמא, $v_1,..,v_n$ בת"ל, וT העתקת האפס.
2. האם יתכן ש $v_1,...,v_n$ ת"ל ו $T\left(v_1\right),...,T\left(v_n\right)$ בת"ל? לא. ע"פ ליניאריות. נוכיח: $v_1,...,v_n$ ת"ל, כלומר קיימים $a_1,...,a_n$ לא כולם 0 כך ש $a_1v_1+...+a_nv_n=0$.
נסתכל על :

$$a_1\left(T\left(v_1\right)\right)+....+a_n\left(T\left(v_n\right)\right)=T\left(a_1v_1+...+a_nv_n\right)=T\left(0\right)=0$$

מצאנו ת"ל לא טריוויאלית של $T\left(v_1\right),...,T\left(v_n\right)$.

מסקנה: העתקה ליניאריות יכולה להוריד מימד, לא להעלות.

תרגול 12, 15.1.2006

<u>חדשות:</u>

תרגיל 12 – לא להגשה – בכלל.

בוחן שבוע הבא.

שאלה 3 , תרגיל 11:

א. V מ"ו, $T:V\to V$.

$$B=\{v_1,...,v_n\}$$

צריך להראות כי $TV=cV$ אזי $[T]_B^B=cI$. הפתרון שלי – נכון.

ב. צ"ל A סקלרית אמ"מ A מרכזית.

א . נניח $A=cI$ (סקלרית). ותהי $B\in M_{n\times n}$. צריך להראות $AB=BA$.

$$(cI)B=B(cI)\Leftrightarrow(cI)B=c(BI)\Rightarrow$$

$$c(IB)=c(BI)=cB$$

החלק היותר מסובך – להראות שאם היא מרכזית, אז בהכרח גם סקלרית:

נניח A מרכזית, כלומר, לכל B מתקיים $AB=BA$.

נסתכל על המטריצות $E_{ij},1\le i,j\le n$ (מטריצה שבא האיבר ב $E_{ij}=1$, וכל השאר 0).

1. צריך להראות $AE_{i1}=E_{i1}A$ (כי A מרכזית)

$$AE_{i1}=\begin{pmatrix} a_{1i} & 0 & 0 & 0\\ a_{2i} & 0 & 0 & 0\\ ... & 0 & 0 & 0\\ a_{ni} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_{i1}A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

כאשר $i\ne 1$ אנו רואים כדי שבהכרח משיוויון העמודות הראשונות, נוכל להסיק כי $a_{1i}=0$.

מחישוב $AE_{1i}=E_{1i}A$ נקבל $a_{i1}=0$. נחזור על השיקול הנ"ל עבור כל $AE_{ji}=E_{ji}A$.

לסיכום, מכך שA מרכזית נובע בפרט שA מתחלפת עם כל המטריצות האלמנטריות, ומחישוב המכפלה $AE_{ij}=E_{ij}A$ הסקנו שעבור $i\ne j$ מתקיים $a_{ij}=0$ ולכל $a_{ii}=a_{11}$.

<u>הערות כלליות:</u>

נסתכל על $M_{n\times m}(F)$. ניקח כבסיס את המטריצות הסטנדרטיות $E_{ij},(1\le i\le n,1\le j\le m)$

ברור שזה בסיס, ולכן מימד $M_{n\times m}(F)$ הוא בדיוק $n\cdot m$.

$Hom(V,W)$

יהו V,W מ"ו מעל שדה F. אוסף הטרל"נ $T:V\to W$ מסומן ב $Hom(V,W)$. אם V ממימד m וW ממימד n, אזי $Hom(V,W)\approx M_{n\times m}(F)$ (איזומורפיזם) (מרחב ההעתקות הוא איזומורפי למרחב המטריצות). למה זה נכון בגדול?

נסתכל על בסיס $A=\{v_1,...,v_m\}$ לV, $B=\{w_1,...,w_n\}$ לW. אם $T:V\to W$ טרל"נ נייצג את T ע"פ הבסיסים A,B ואז $[T]_B^A\in M_{n\times m}(F)$.

להפך, אם $M\in M_{n\times m}$ נגדיר $T:V\to W$ ע"י $T(v_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j$.

$$Hom(V,V)\approx M_{n\times n}(F)$$

1. משמעות האיזומורפיזם – כפל מטריצות מתאים להרכבת העתקות.
2. העתקת הזהות: $Id:V\to V$ מתאימה למטריצת היחידה $I_{n\times n}$.

<u>מה אפשר להסיק מההתאמה:</u>

נסיק :

$$\dim_F\left(Hom(V,W)\right)=\dim_F M_{n\times m}(F)=nm.$$

מהן ההעתקות T_{ij} המתאימות למטריצות הסטנדרטיות?

$$T_{ij}(v_j)=w_i$$

לכל $l\neq i$ מתקיים:

$$T_{ij}(v_l)=0$$

<u>טענה:</u> V מ"ו ממימד n מעל F. $T:V\to V$ טרל"נ אזי קיים פולינום $P(x)\neq 0$ כך ש $P(T)\equiv 0$.

(מה זה $P(T)$? אם $P(x)=x^2+2x-1$ אז $P(T)=T^2+2T-I$).

<u>ולהוכחה:</u>

מהאיזומורפיזם $Hom(V,V)\approx M_{n\times n}(F)$ הסקנו ש $\dim Hom(V,V)=n^2$, ולכן כל n^2+1 איברים ב $Hom(V,V)$ תלויים ליניארית, בפרט $I,T,T^2,...,T^{n^2}$ ת"ל כאיברים של $Hom(V,V)$ ולכן T^{n^2} הוא צירוף ליניארי של $I,T,...,T^{n^2-1}$, כלומר קיימים $a_0,...,a_{n^2-1}\in F$ כך ש

$$T^{n^2}=a_0I+a_1T+...+a_{n^2-1}T^{n^2-1}$$

נגדיר פולינום $P(x)=a_0+a_1x+...+a_{n^2-1}x^{n^2-1}-xn^2$, ומהתלות שמצאנו $P(T)\equiv 0$.

ודוגמא אמיתית:

$$T:R^2\to R^2$$
$$T(x,y)=(x+y,2x-y)$$
$$\dim Hom(R^2,R^2)=4$$

I,T,T^2,T^3,T^4 ת"ל.

$$[I]_E^E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$T^2(x,y)=T(x+y,x-2y)=(2x-y,x+4y)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}$$

...

הגדרה: יהו $A,B\in M_{n\times n}(F)$. A,B נקראת **מטריצות 'דומות'** אם הן מייצגות את אותה טרנספורמציה ליניארית ביחס לבסיסים שונים, כלומר קיימים בסיסים $\tilde{A},\tilde{B}$ כך ש

$$A=[T]_{\tilde{A}}^{\tilde{A}},B=[T]_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}$$

במילים אחרות, A,B מטריצות דומות אם קיימת מטריצה $P\in M_{n\times n}(F)$ הפיכה כך ש:

$$B=P^{-1}AP$$

מטרה: בהינתן שתי מטריצות ריבועיות A,B נרצה לדעת האם הן דומות.

הגדרה: תהי $A\in M_{n\times n}(F)$ העיקבה של של A $(trace)$ מסומנת כ $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ (סכום האיברים האלכסוניים של A).

למה: עבור $A,B\in M_{n\times n}(F)$ מתקיים $tr(AB)=tr(BA)$.

הוכחה: (חלק מתרגיל 12):

$$tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$$

$$tr(BA)=\sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}$$

מ.ש.ל.

מסקנה: אם A,B דומות אזי $tr(A)=tr(B)$.

הוכחת המסקנה: A,B דומות, אזי $B=P^{-1}AP$ לאיזשהי P הפיכה.

$$tr(B)=tr(P^{-1}AP)=tr(APP^{-1})=tr(AI)=tr(A)$$

האם $B=\begin{pmatrix}2&5&7\\1&0&4\\9&8&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ דומות? לא. אילו אם היו דומות אז $tr(A)=tr(B)$ אבל $tr(A)=15,tr(B)=3$.

חשוב: גם אם $tr(A)=tr(B)$ אי אפשר להסיק ש A,B דומות!.

לדוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

לכל מטריצה הפיכה P מתקיים $P^{-1}AP=P^{-1}IP=I$. ועל כן A דומה רק לעצמה, ובפרט – A לא דומה לB.

(בתרגיל 12, בשאלה 3)

הגדרה: עבור V מ"ו מעל F

$$End_F V=Hom_F\left(V,V\right)$$

<u>הגדרה:</u> העקבה הינה **<u>אינווריאנטה</u>** של ההעתקה T , ז"א היא אינה תלויה בבסיס שביחס אליו מייצגים את T.

<u>פעולות אלמנטריות על מטריצה:</u>

$$\begin{pmatrix}a_{11}&&a_{n1}\\ \\ \\a_{m1}&&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \\ \\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\...\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_{11}x_1+...+a_{n1}x_n=0\\...\\...\\a_{m1}x_1+....+a_{nm}x_n=0\end{pmatrix}$$

מהי פעולה אלמנטרית: פעולה שלא משנה את אוסף הפתרונות של המערכת המתאימה.

- החלפת 2 שורות במטריצה
- הוספת שורה i לשורה j
- כפל שורה I בסקלר $\neq 0$.

(הערה: מותר גם בטורים)

<u>שימוש ראשון:</u>

מציאת המטריצה ההפכית למטריצה נתונה. הכיצד? לכתוב את המטריצה $A\ \ I$ (לכתוב את המטריצה, ובצמוד לה את מטריצת היחידה).

נבצע פעולות אלמנטריות ההופכות את A למטריצת היחידה, ונבצע אותן במקביל גם על I.

בסוף, נקבל בצד שמאל את מטריצת היחידה, בצד ימין את A^{-1} $\left(I\ \ A^{-1}\right)$.

דוגמא:

נחשב את ההפכי של $\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\underset{\rightarrow}{L_1-\frac{1}{2}L^2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}\underset{\rightarrow}{L_2/4}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

ועל כן $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ (ניתן לראות כי $AA^{-1}=I$)

אם המטריצה היתה בלתי הפיכה, איך היינו מגלים את זה? ננסה לחשב עבור $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2-2L_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

<u>**ברגע שהגענו לשורת אפסים, לא נגיע למטריצת היחידה.**</u>

<u>**כלומר, הגענו לשימוש שני של הפעולות האלמנטריות על מטריצה:**</u>
מציאת הדרגה של מטריצה A (מספר השורות = עמודות בלתי תלויות ליניארית). נבצע פעולות אלמנטריות במטרה לדרג את המטריצה. מספר המדרגות שנקבל הוא דרגת המטריצה .

תרגול 13, 22.1.2006

דרגה של מטריצה

הגדרה: דרגה של מטריצה היא מס' מקסימלי של שורות (או עמודות) בלתי תלויות ליניארית.

דרגה של העתקה ליניארית:

הגדרה: דרגה של העתקה ליניארית $T:V\to W$ מוגדרת כמימד של תת המרחב $\operatorname{Im}T$. מן הסתם קטן או שווה למימד של W.

מה הקשר בין הדרגות ? אם A מטריצה המייצגת טרל"נ T ע"פ בסיס כלשהו, אזי $rank(A)=rank(T)$.

'הוכחה' : ניקח $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ בסיס לV, $\{\beta_1,...,\beta_n\}$ בסיס לW. $r(T)$ שווה למס' המקסימלי ש ל$\{T\alpha_1\}$ הבלתי תלויים ליניארית.

מצד שני: נייצג את $T\alpha_i$ לפי הבסיס B, ונכתוב את המקדמים בפיתוח בעמודה ה-i של המטריצה.

מהאיזומורפיזם, בין המרחב W לייצוגו באמצעות כמקדמי הבסיס B, מס' האיברים $T\alpha_i$ הבלתי תלויים ליניארית שווה למספר הוקטורים הבלתי תלויים ליניארית מבין וקטורי הקוארדינטות של $T\alpha_i$ בייצוגם על פי הבסיס B.

עוד משפטים חשובים:

$T:V\to W$ טרל"נ, אזי: (משפט המימדים)

$$\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T=\dim V$$

משפט סילבסטר למטריצות: יהיו A,B שתי מטריצות שמכפלתן מוגדרת (מספרת העמודות בA זהה למספר השורות בB, ונסמנו בm) , אזי מתקיים:

$$r(A)+r(B)-m\le r(AB)\le\min\left(r(A),R(B)\right)$$

למה משפט סילבסטר טוב ליהודים?

תהי:

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&7\end{pmatrix}$$

$$r(B)=1$$

$$r(B)=2$$

$$1=r(A)+r(B)-2\le r(AB)\le\min\left(r(A),r(B)\right)=1$$

$$\Rightarrow$$

$$r(AB)=1$$

העתקות ליניאריות בעלות משמעות גאומטריות:

ראינו בתרגיל את מטריצת הסיבוב במישור .

מטריצות הטלה:

הטלה על ציר x –

$$(x,y)\to(x,0)$$

מטריצה:

$$T(1,0)=(1,0)$$

$$T(0,1)=(0,0)$$

$$A=[T]_E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A^2=A$$

בואו ונחשב הטלה קצת יותר מסובכת. ננסה לחשב הטלה על הישר $l: y=x$. השיפוע של l הוא 1.
נחפש נקודה על $l \in (a,a)$ שהשיפוע בינה לבין (x,y) הוא -1.

$$\frac{y-a}{x-a}=-1$$

$$y-a=a-x$$

$$y+x=2a$$

$$a=\frac{x+y}{2}$$

כלומר, כשנרצה להטיל נקודה (x,y) על הישר $x=y$ אז הנקודה תהיה $\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}$.

מה המטריצה של ההעתקה הזו? נסמנה כ $P:(x,y)\to\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$

$$B=[P]_E=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$B^2=B$$

נשים לב: מטריצת הטלה בריבוע (או בחזקה יותר גבוהה) זהה למטריצה המקורית.

עוד הערה: נניח שיש לנו שני ישרים:
תהי P מטריצת ההטלה על $y=x$, וP' מטריצת ההטלה עבור $y=-x$.

$$P+P'=I$$

תרגול 14, 29.1.2006

שעת קבלה של הבודק (ערן איסלנד): יום ב' 18-19 בקנדה
Iceland@math.huji.ac.il

שעת קבלה של נועה:
יום רביעי **הבא 8.2.06** 12:00 – 13:00– בניין מתמטיקה חדר 308

להסתכל בOWL בשביל שעת חזרה של הקורס.

הערות מהמבחן:
יצוג העתקה על פי בסיס:
לא לשכוח לחזור לבסיס כשמייצגים, ולא לרשום את הוקטור.
מטריצת מעבר בסיס מ F ל E היא:

$$[Id]_E^F$$

$$Id(1,2)=(1,2)=1(1,0)+2(0,1)$$

$$\dots$$

לשים לב שבשאלה כמו שהיתה בבוחן, ניתן לבדוק אם:

$$[T]_E=[Id]_E^F[T]_F[Id]_F^E$$

הערה למבחן: שאלות עם פרמטר – אהובות במבחן.

מערכות משוואות
מערכת הומוגנית:
$Ax=0$ כאשר $A\in M_{m\times n}(F)$, $x\in F^n$ וקטור הנעלמים, $0\in F^m$.
מה אפשר להגיד על המערכת:

- קבוצת הפתרונות של המערכת מהווה תת מרחב של F^n.
- מימד מרחב הפתרונות שווה למספר הנעלמים (n) פחות מימד מרחב המשוואות.
- נניח כי המשוואות בלתי תלויות ליניארית. אזי
  - $m=n$ - יש פתרון יחיד (הטריויאלי (הכל שווה לאפס))
  - $m<n$ - קיים גם פתרון $\neq 0$ (כמות הפתרונות – בהתאם לשדה).
  - $m>n$) - לא יתכן, כי הנחנו שהמשוואות בלתי תלויות ליניארית).

דוגמא:
$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ - המשוואות לא תלויות, ולכן הפתרון הוא רק הפתרון הטריוויאלי של 0.

דוגמא 2:

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$x+2y=0$ - המשוואות תלויות ליניארית, ולכן יש גם פתרון גדול מ0.

$$2x+4y=0$$

מערכת לא הומוגנית

$Ax=b$ ($A \in M_{m\times n}(F), 0 \neq b \in F^m$).

1. $b \neq 0 \Leftarrow$ קב' הפתרונות <u>אינה</u> תת מרחב
2. אם השורות של A בלתי תלויות ליניארית $\Leftarrow$ קיים פתרון (יחיד)
3. למערכת קיים פתרון אם דרגת המטריצה **<u>המורחבת</u>** (A^*) שווה לדרגת המטריצה המצומצמת(A).

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x+2y=3$$

$$2x+4y=6$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, RankA^*=1, RankA=1$$

<u>יש פתרון.</u>

לעומת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x+2y=3$$

$$2x+4y=7$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, rankA^*=2, rankA=1$$

<u>אין פתרון.</u>

<u>מה אפשר להגיד על הפתרונות של מערכת לא הומוגנית?</u>

יהי x_0 פתרון פרטי של המערכת $Ax=b$ אזי אוסף הפתרונות של המערכת הינו הקבוצה :

$$\{\vartheta = x_0 + x : x\, is\, a\, solution\, of\, the\, system\;\; Ax=0\}$$

חשוב! בעצם יש ישריה שיש בה וקטור אחד שמצאנו 'סתם' ועוד את כל התת מרחב וקטורי של פתרון מערכת **<u>הומוגנית</u>**.

למה זה נכון?

$$A(x+x_0)=Ax+Ax_0=0+b=b$$

<u>קצת שאלות חזרה למבחן:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד n, $A=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס לV , $T=End(V)$, אזי

$[T]_A=\begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$ מטריצה אלכסונית אמ"מ $Tv_i=c_iv_i$.

נרצה לחשב את המטריצה:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{100}$. מה נעשה? נמצא בסיס שלפיו המטריצה הזו הינו יצוג של העתקה ביחס לבסיס.

נסמן את המטריצה הבסיסית $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. נתייחס ל $A = [T]_E$ ונמצא בסיס חליפי ל R^3 על פיו המטריצה תהיה אלכסונית.

נשים לב:

$$\dim \operatorname{Im} T = rankA = 1$$

ע"פ משפט המימדים , $\dim KerT = 2$. **<u>נחפש וקטורים בגרעין:</u>**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+2y+3z \\ x+2y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y+3z=0$$

$$y=1, z=0 \Rightarrow x=-2$$

$$y=0, z=1 \Rightarrow x=-3$$

לכן $\ker T = sp\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$

נגדיר:

$$v_1 = (-2,1,0), v_2 = (-3,0,1)$$

$$Tv_1 = 0v_1, Tv_2 = 0v_2$$

<u>למה:</u> אם לכל השורות של מטריצה $B \in M_m(F)$ יש סכום שווה c, אזי

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>הוכחה:</u>

$$\left(B\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}\right)_k = \sum_l b_{kl} \cdot 1 = \sum_l b_{kl} = c$$

$$\left(B\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ ... \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>חזרה לתרגיל המקורי:</u>

ניקח $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ואז $Av_3 = 6v_3$.

בידינו 3 וקטורים, $v_1=(-2,1,0), v_2=(-3,0,1), v_3=(1,1,1)$ המקיימים $Av_i=c_iv_i$ כאשר $c_1=c_2=0, c_3=6$.

ולכן:

$$[A]_v=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

(צריך להראות ש $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס)

נכתוב:

$$P=[Id]_E^V=\begin{pmatrix}-2&-3&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

(כדאי לשים לב – מעבר מV לE זה פשוט לרשום את הוקטור).

ע"י הפיכת P נוכיח שזהו בסיס: (למה? כי אז עמודות P, שהן אברי V, בת"ל, וזה אומר ש v_1,v_2,v_3 3 וקטורים בלתי תלוים ליניארית ב R^3 ולכן בסיס).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&-3&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{L_2=2L_2+L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&-3&1&1&0&0\\0&-3&3&1&2&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}L_1=L_1-L_2\\L_3=3L_3+L_2\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&-2&0&-2&0\\0&-3&3&1&2&0\\0&0&6&1&2&3\end{array}\right)\begin{matrix}L_1=3L_1+L_3\\L_2=2L_2-L_3\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-6&0&0&1&-4&3\\0&-6&0&1&2&-3\\0&0&6&1&2&3\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}6&0&0&-1&4&-3\\0&6&0&-1&-2&3\\0&0&6&1&2&3\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}-1&4&-3\\-1&-2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\right)$$

ועל כן:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}^{100}=\left[Id\right]_E^V\left[T\right]_V\left[Id\right]_V^E=\begin{pmatrix}-2&-3&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{100}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&4&-3\\-1&-2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

<u>**נשים לב:**</u>אם $A\in M_{n\times n}$ אז A טרל"נ המוגדרת ע"י $v\to Av$ והייצוג של טרל"נ זו ע"פ הבסיס הסטנדרטי הוא פשוט A.

<u>**טענה:**</u> יהי F שדה סופי ממציין P (ראשוני), אזי קיים n טבעי כך ש $|F|=P^n$.

<u>**הוכחה:**</u> ראשית נראה ש $F_p\subset F$ (=השדה בן p איברים). יהי $1\in F$ ונסתכל על $\left(0,1,1+1,....(p-1)\times(1)\right)$ (כמובן בF). מכיוון שהפעולות בF נעשות מודולו P, אזי איברים אלו מהווים תת שדה, שהוא איזומורפי ל F_p.

<u>**תזכורת:**</u> אם $K_1\subset K_2$ תת שדה, אזי K_2 בפרט מרחב וקטורי מעל K_1.

לענייננו, F מ"ו מעל F_p, מכך ש F סופי, בהכרח מימדו כמרחב וקטורי מעל F_p סופי, ונניח שמימדו n, ועל כן

$$F\approx\left(F_p\right)^n$$

(כמרחב וקטורי)

ועל כן:

$$|F|=|F_p|^n=p^n$$

<u>**עוד ניסוח, בכתיבה פורמלית יותר:**</u>

F ממימד סופי מעל F_p, שנסמנו n. קיים בסיס ל F מעל F_p בגודל n, $v_1,...,v_n$, ז"א לכל איבר $x\in F$ <u>**קיימת**</u> הצגה יחידה כצירוף ליניארי מהצורה:

$$a_i\in F_p, a_1v_1+...+a_nv_n$$

קיימת התאמה בין איברי F לבין האפשרויות השונות לבחירת המקדמים $a_1,...,a_n$. מכיוון שכל a_i נבחר מבין p אפשרויות, יש בסה"כ p^n אפשרויות לבחירת המקדמים, וכאמור, זה בדיוק גודל F.

שאלה נוספת: <u>**חשוב לעבור**</u>

$T:\left(Z_2\right)^n\to Z_2$ טרל"נ שונה מ0. הראו כי חצי מהאיברים עוברים ע"י T ל0 וחצי ל1.

מתקיים $\left|\left(Z_2\right)^n\right|=2^n$. צ"ל ש 2^{n-1} איברים עוברים לאפס, כלומר:

$$|\ker T|=2^{n-1}$$

שזה שקול להגיד ש$\dim Ker=n-1$, שזה שקול להגיד ש$\dim \operatorname{Im}T=1$. נתון כי ההעתקה שונה היא לZ_2, ולכן $\operatorname{Im}T\subseteq Z_2$ ולכן מימדו של $\operatorname{Im}T$ מעל Z_2 היא 0 או 1. מכך ש T אינה העתקת ה0, נובע כי $\operatorname{Im}T=Z_2$, לכן מימדו של $\operatorname{Im}T$ מעל Z_2 הוא 1, ולכן כאמור, $|\ker T|=2^{n-1}$.

<u>**הערות למבחן:**</u>

חלק תאורטי – להוכיח משפטים מהכיתה – 2 מתוך 3 . לא מופיעים בדרך כלל תרגילים.

שאר המבחן – יותר תרגול של החומר.

<u>נקודות חשובות:</u>

שבוע אחרון – כן למבחן! – כנראה שיותר מהשאר.

לשנן חומר תאורטי – לחזור על תרגילים. ולפתור מבחנים!