

שיעור 1 7.3.2006

מבנה הציון: מבחן 80%, תרגילים 10%, בחנים 10% (מגן) חובת הגשה 9 תרגילים.
ספר: עמיצור, אלגברה א'.

מה אנחנו נלמד: דטרמיננטות, כל החלק השלישי של הספר.

שעת קבלה: יום ג' 12:00 – 13:00 – בתאום מראש. ehudf@math.huji.ac.il. לא לשלוח spam בבקשה.

דטרמיננטות

מוטיבציה: בהינתן מטריצה $n \times n$ מעל שדה F היינו רוצים למצוא פונקציה של איברי המטריצה שתיתן לנו אינדיקציה אם שורות המטריצה תלויות ליניארית או לאו. כבונוס, בו בזמן פונקציה זו תלמד אותנו על עמודות המטריצה. וכך נגלה קשר חשוב ומפתיע בין עמודות המטריצה לשורותיה).

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

מתי שורות A הן ת"ל? יש שני סקלרים, λ_1, λ_2 , כך ש $\lambda_1(a, b) + \lambda_2(c, d) = (0, 0)$, כלומר:

$$\lambda_1 a + \lambda_2 c = 0$$

$$\lambda_1 b + \lambda_2 d = 0$$

לדוגמא,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מה אנו נדרשים בעצם?

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

אך אוי ואבוי, זה לא תמיד מוגדר. אז נדרוש:

$$ad - bc = 0$$

מתקיים אמ"מ שורות A ת"ל.

נגדיר עבור מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) := |A| := ad - bc$. שורות A ת"ל אמ"מ

$$\det(A) = 0$$

בואו ונתעלל קצת במטריצה A ונראה מה קורה לדטרמיננטה.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A' = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \det A$$

כשכופלים שורה בסקלר גם הדטרמיננטה מוכפלת באותו סקלר (כך גם לגבי העמודות).

בואו נמשיך להתעלל במטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = cd - ad = -\det(A)$$

החלפת שורה (או עמודה) גורמת להחלפת סימן הדטרמיננטה.

עוד פעולה שאפשר לעשות למטריצה זה לשקף אותה דרך האלכסון הראשי:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} A^{t*} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \det A' = ad - bc = \det A$$

**transposed*

טוב, השתעממנו מלעבוד במטריצה 2×2 . בו נראה $n \times n$. נסתכל על הביטוי:

$$ad - bc = 0$$

ונשים לב ש $\det A$ הוא סכום של מכפלות (עם סימנים) בו כל כופל מכיל בדיוק נציג אחד מכל שורה, ונציג אחד מכל עמודה.

איך תראה דטרמיננטה של מטריצה 3×3 ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$|A| := aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

נטען שהביטוי הנ"ל שווה 0 אם"מ שורות A ת"ל.

מאיפה הגיעו הדברים האלה? פונקציות נפח. מה זה?

פונקציות נפח מעל לכל שדה F. אבל, ההבנה האינטואיטיבית שלהן באה מהדוגמאות האוקלידיות (שדה R), ונתבונן תחילה בפונקציות נפח ב R^2 וב R^3 . יהו $\alpha, \beta \in R^2$. נגדיר $S(\alpha, \beta)$ שמחזירה את שטח המקבילית הנפרשת ע"י α, β (על ידי שיקוף וקטורים). נשים לב שהכפלה של אחד הוקטורים ב3 יכפיל את כל השטח ב3. S התכונה: לכל סקלר t מתקיים

$$S(t\alpha, \beta) = tS(\alpha, \beta)$$

$$S(\alpha, t\beta) = tS(\alpha, \beta)$$

מה נוכל לומר על $S(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$?

$$S(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = S(\alpha_1, \beta) \pm S(\alpha_2, \beta)$$

נגדיר שטח אלגברי $\Delta(\alpha, \beta) =$ כשטח המקבילית הנפרשת ע"י α, β , כפול סימן + אם הזווית הקטנה בין α, β היא נגד כיוון השעון, - אם הזווית הקטנה בין α, β היא עם כיוון השעון.

תכונות Δ :

$$1. \Delta(\alpha, \alpha) = 0$$

$$2. \text{הומוגניות: } \Delta(t\alpha, \beta) = t\Delta(\alpha, \beta) \text{ (בשני הארגומנטים).}$$

$$3. \text{ליניאריות: } \Delta(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = \Delta(\alpha_1, \beta) + \Delta(\alpha_2, \beta)$$

$$4. \Delta(\alpha, \beta) = -\Delta(\beta, \alpha)$$

נשים לב שאם מחשבים ש $\alpha = (a, b)$ ו $\beta = (c, d)$ אזי נשים לב ש $\Delta(\alpha, \beta) = ad - bc$ (הזכור לנו לטוב מהדטרמיננטות).

באופן דומה נגדיר **נפח אלגברי** של $\alpha, \beta, \gamma \in R^3$, אזי :

$\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ מוגדר כנפח המקבילון הנוצר ע"י α, β, γ כפול סימן. (+ אם זו מערכת ימנית, - אם זה מערכת שמאלית. מה זה מערכת ימנית או שמאלית? נשאיר לפיזיקאים מחוננים את השאלה). ואז ל Δ יש התכונות א, ב, ג, ד. הערה: אם

$$\alpha = (a, b, c)$$

$$\text{אז } \beta = (d, e, f)$$

$$\gamma = (g, h, i)$$

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = aei + dhc + bfg - ceg - bdi - ahf$$

נשים לב ששני וקטורים ב R^2 תלויים ליניארים אם המקבילית שלהם מנוונת. ב R^3 אם יש וקטור שנמצא במישור שנפרש על ידי השניים האחרים (ואז נפחו שווה ל0).

אחרי ההקדמה האינטואיטיבית הקצרה, בואו ונעבור למקרה הכללי:
הגדרה: יהי V מ"ו מממד n מעל F . **פונקציית נפח** Δ היא פונקציה של n משתנים מ V לתוך F , בעלת התכונות הבאות:

$$1. \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \text{ אם קיימים } i \neq j \text{ כך ש } \alpha_i = \alpha_j.$$

$$2. \text{ הומוגניות - לכל } 1 \leq i \leq n \text{ ולכל סקלר } t \in F \text{ מתקיים}$$

$$\Delta(\alpha_1, \dots, t\alpha_i, \dots, \alpha_n) = t\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$3. \text{ מולטי ליניאריות: לכל } 1 \leq i \leq n \text{ מתקיים}$$

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha'_i, \dots, \alpha_n) = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha'_i, \dots, \alpha_n)$$

טענה: אם Δ פונקציית נפח, אז היא גם **אלטרנטיבית**, כלומר לכל $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$,

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = -\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

גם את הסימן).

$$\text{הוכחה: נוכיח לדוגמא } \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = -\Delta(\alpha_2, \alpha_1, \dots) \text{ (בה"כ). נתבונן}$$

$$\Delta(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = 0 \text{ (למה שווה 0? כי יש שני משתנים שווים). מצד שני, הביטוי הנ"ל שווה גם ל}$$

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha_2, \alpha_1, \dots) + \Delta(\alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_n) =$$

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha_2, \alpha_1, \dots) = 0$$

נשאל את השאלה הבאה: **האם קיימות פונקציית נפח, ומה טיבן?**

התשובה: כן, קיימות פונקציות נפח, ולמעשה, כשקובעים את השדה F ואת המימד של V , יש רק פונקציית נפח יחידה עד כדי כפל בסקלר.

תמורות: חזרה על התרגול

יהי n שלם חיובי. S_n אוסף כל התמורות של הקבוצה $\{1, \dots, n\}$ *permutations*.

מה זה תמורה? פונקציה חח"ע ועל על מ $\{1, \dots, n\}$ לעצמה. נזכור כי $|S_n| = n!$. נסמן תמורות ע"י

אותיות יווניות σ, τ, π .

נתבונן בתמורות הבאות:

$$\tau, \sigma \in S_6$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (153)(2)(46)$$

$$\tau = (12)$$

נגיד שאוסף התמורות הוא חבורה, למרות שלא נגדיר באופן מדויק מה היא חבורה.

תמורה חשובה מאוד היא תמורת הזהות:

$$\sigma(i) = i, 1 \leq i \leq n$$

נסמנה כ Id (פינת האנגלית: Identity).

מה אפשר לעשות עם תמורות : להכפיל אותן . מה עוד אפשר לעשות עם פרמוטציות ? להרכיב אותן.
עוד מעט נראה שכפל והרכבה זה אותו דבר.

שיעור 2, 8.3.2006

על מה דיברנו אתמול? תמורות. לא להסתכל בקורס 'יהדות בעידן של תמורות' (למי שלא הבין, זה הזמן לצחוק).

נשים לב שהסימון של כפל מחזורים זרים הוא באמת נקרא כפל, ולא רק דומה לסימון.

נזכר גם ש S_n היא חבורה (ונזכר גם שלא הגדרנו חבורה, אבל נדע שיש אופרטור דו מקומי, איבר יחידה – I, ועוד).

נגדיר שהרכבה של תמורות :

$$\tau\sigma(i) := \tau(\sigma(i))$$

אבחנה: למה הרכבה של תמורות היא תמורה? הוכחנו שהרכבה של פו' חח"ע ועל יוצרת פו' חח"ע ועל. עוד הערות בנוגע למכפלת תמורות:

1. אפשר לרשום את כפל המחזורים הזרים אחד ליש השני, ומה שקיבלנו זהה למכפלה.
2. לא קומוטטיבית לכל $n > 2$.
3. אסוציאטיבית. למה? (הרכבת פונקציות אסוציאטיבית תמיד – ולהוכחה:)

$$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g)(h)$$

$$f \cdot (g \cdot h)(x) = f[g \cdot h(x)] = f[g[h(x)]] = f \cdot g[h(x)] = (f \cdot g) \cdot h(x)$$

עוד הערות בנוגע לתמורות:

1. Id מתחלפת עם כל $\sigma \in S_n$.

2. **טענה:** לכל $\sigma \in S_n$ קיימת תמורה הופכת σ^{-1} המקיימים $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = Id$. לדוגמא:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \tau$$

הוכחת הטענה: נובע מכך שהתמורות הן חח"ע ועל: תהי $\sigma \in S_n$ ויהי $i \in \langle 1 \dots n \rangle$. קיים j יחיד כך

$$\sigma(j) = i \quad (\text{קיים כי } \sigma \text{ היא על, יחיד כי } \sigma \text{ חח"ע}), \text{ ולכן נגדיר } \sigma^{-1}(i) = j. \text{ נטען}$$

$$\sigma\sigma^{-1}(i) = \sigma(j) = i \quad \text{באופן דומה } \sigma^{-1}\sigma(j) = \sigma^{-1}(i) = j. \text{ מכיוון שניתן לבחור } i, j$$

כרצוננו, אזי הטענה תופסת לכל $i, j \in \langle 1 \dots n \rangle$.

עד כה חקרנו תכונות של חבורות באופן כללי. כעת נתבונן בחבורה S_n . נתבונן במספר **החילופים**

בתמורה, שקובעת את **הזוגיות** של תמורה.

ניקח את התמורה:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נחבר מספרים זהים בקווים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

מהדיאגרמה ניתן לראות שיש חמישה זוגות (i, j) כך ש $\frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)} < 0$ (כלומר, i, j החליפו סדר).

הזוגיות של תמורה כלשהיא σ היא הזוגיות של מספר הזוגות שהחליפו סדר:

$$(-1)^{|T|}$$

כאשר T היא קבוצת הזוגות המוחלפים. נשים לב שאם המספר זוגי אז המספר הוא 1, אחרת -1. זה גם שווה ל

$$\prod_{n \geq i > j \geq 1} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)}$$

המספר הנ"ל מסומן כ $\text{sgn}(\sigma)$.

למה המספר הנ"ל בכלל יהיה שווה ל 1 או -1? בואו ונחשב את הביטוי הנ"ל

$$\text{sgn}(\sigma) = \frac{(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)}{(2-1)(2-3)(2-4)(1-3)(1-4)(3-4)}$$

אנחנו שמים לב שאותם ביטויים נמצאים גם למעלה וגם למטה, עד הכפלה ב -1. זה נובע מכך שתמורה היא חח"ע ועל.

נשים לב שגם כל הזוגות למעלה הם חיוביים (דרשנו $i > j$). כמה שליליים יש במכנה? 5. לכן יצא לנו -1.

נטען כעת כי שתי ההגדרות שקולות. נשים לב שההעתקה שלוקחת את הזוג

$$(i, j) \rightarrow (\sigma(i), \sigma(j))$$

היא העתקה חח"ע ועל מקבוצת הזוגות השונים של איברי הקבוצה

$\langle 1 \dots n \rangle$ לעצמה. לכן, במונה ובמכנה של $\prod_{n \geq i > j \geq 1} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)}$ מופיעים אותם זוגות, אלא שסימנם

מתחלף בכל פעם ש $\sigma(i) < \sigma(j)$, ועל כן ההגדרה טובה.

בואו נשחק עם תמורות, ונראה מה קורה לסימנם.

$$\text{sgn}(Id) = 1 = (-1)^0$$

כל תמורה שמחליפה רק שני איברים סימנה (-1) (יש רק זוג אחד שמחליף את סימנו). ועל כן, עבור

כל תמורה שהיא, חילוף של שני איברים, סימנה אי-זוגי. נתבונן ב

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tau = (6 \ 3)$$

נתבונן ב

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

מה הקשר בין $\text{sgn}(\sigma)$ לבין $\text{sgn}(\sigma\tau)$? כפל הסימנים של שתי התמורות. נבדוק מיהם הזוגות

בשורה השניה שהחליפו סדר.

$$(6,2)(6,1)(2,1)(6,5)(2,5)$$

קיבלנו מספר אי זוגי של החלפות.

טענה: תהי $\sigma \in S_n$, $\tau = (i, j)$ אזי $\text{sgn}(\sigma\tau) = -\text{sgn}(\sigma)$ [כמו כן גם $\text{sgn}(\tau\sigma)$ (זהה)].

הוכחה: אם נכתוב את $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ואת

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

אזי נשים לב שהזוג $(\sigma(i), \sigma(j))$ החליף את הסדר שלו בשורה התחתונה וכמו כן לכל $i < r < j$ הזוגות

$(\sigma(r), \sigma(i))$ ו $(\sigma(r), \sigma(j))$ החליפו סדר. יש לנו זוג אחד שהחליף סדר, ועוד רשימה של זוגות של זוגות שהחליפו סדר, ועל כן זה מספר אי זוגי של זוגות.

הערה בנוגע להוכחה: בנוגע לסימן של $\tau\sigma$ דומה (מאוד).

בו נשתמש בידע שרכשנו כדי לחשב סימני תמורות.

אבחנה: ניתן לכתוב כל תמורה $\sigma \in S_n$ כמכפלת מחזורים בגודל 2. (מה ההבדל בין אבחנה למשפט?

אבחנה זה כמו משפט, רק לא עמוק כל כך ...)

חידוד: הצגה זו אינה יחידה (תלוי בילד בן 5 שבחרתם ברחוב כדי לבצע את המשימה).

מסקנה 1: אם $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$ כאשר σ_i הם מחזורים באורך 2, אזי $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$.

מסקנה 2: אם $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m = \sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_l$ אזי $(-1)^l = (-1)^m$.

עבור מי שלא מצא ילד בן 5 שפירק תמורה לתמורות בן 2 איברים, נעשה זאת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1534) = (1 \ 3)(3 \ 4)(1 \ 5)$$

(באופן מפליא, לוקח לנו הרבה יותר מדי זמן וטעויות בדרך בשביל משהו שאמור לעשות ילד בן 5 שמצאנו ברחוב)...

טענה: לכל $\tau, \sigma \in S_n$ מתקיים $\text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau\sigma)$.

הוכחה: היות וניתן לכתוב את τ ואת σ כמכפלת מחזורים באורך 2, נעשה זאת.

$$\tau = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_m$$

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_m$$

מתקיים כי $\tau\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_m \cdot \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_m$ ועל כן

$$\text{sgn } \tau = (-1)^m$$

$$\text{sgn } \sigma = (-1)^l$$

$$\text{sgn } \tau\sigma = (-1)^{m+l}$$

מ.ש.ל.

מסקנה: $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$. הוכחה:

$$\text{sgn}(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(Id) = 1$$

פונקציות נפח, דטרמיננטות

בואו ונזכר מהי פונקציית נפח:

הגדרה: יהי V מ"ו מממד n מעל F . פונקציית נפח Δ היא פונקציה של n משתנים מ V לתוך F , בעלת התכונות הבאות:

1. $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ אם קיימים $i \neq j$ כך ש $\alpha_i = \alpha_j$.
2. הומוגניות – לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל סקלר $t \in F$ מתקיים $\Delta(\alpha_1, \dots, t\alpha_i, \dots, \alpha_n) = t\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
3. מולטי ליניאריות: לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\Delta(a_1, \dots, \alpha_i + a'_i, \dots, \alpha_n) = \Delta(a_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + \Delta(a_1, \dots, \alpha'_i, \dots, \alpha_n)$.
4. (אלטרנטיביות – מוכחת מ-3 התכונות הקודמות) – (החלפנו שני משתנים – נחליף גם את הסימן).
מסקנה/הכללה (מאלטרנטיביות):

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{sgn}(\sigma) \Delta(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$$

הוכחה: ניתן לכתוב את σ כמכפלת מחזורים באורך 2, כלומר, ניתן לעבור מ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ל $\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)$ על ידי סדרה של החלפות של שני איברים. כל חילוף כזה גורם לשינוי בסימן של Δ ועל כן השינוי הטוטאלי שווה לזוגיות מספר החילופים, קרי, $\text{sgn}(\sigma)$. מ.ש.ל.

נזכר מאתמול:

$$\Delta(\alpha, \beta) = -\Delta(\beta, \alpha)$$

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \Delta(\gamma, \alpha, \beta) = \Delta(\beta, \gamma, \alpha) = -\Delta(\beta, \alpha, \gamma) = -\Delta(\gamma, \beta, \alpha) = -\Delta(\alpha, \gamma, \beta)$$

משפט:

יהי F שדה, V מ"ו n מימדי מעל F , Δ פונ' נפח על V . $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ בסיס ל V (נתייחס לסדר).

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V \text{ שייכים ל-} V, \text{ ו-} \alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j \text{ (הצגת } \alpha \text{ לפי הבסיס } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \text{)}$$

אזי $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = t \cdot \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, כאשר t אינו תלוי ב Δ אלא באיברי המטריצה

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ בלבד.}$$

(מה משמעות המשפט? אם אנחנו יודעים את ערך פונקציית הנפח על פי בסיס, אפשר לחשב את הערך לכל n וקטורים תוך שימוש במטריצה בלבד).

נשאר במתח עד עוד שבועיים.

פונקציות נפח ודטרמיננטות

F שדה, V מרחב וקטורי מעל F מממד n .
מהי פונקציית נפח?

מקבלת n משתנים מ- V , מחזירה ערך מ- F , בעלת 3 תכונות:

1. $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ אם קיימים $i \neq j$ כך ש- $\alpha_i = \alpha_j$.
2. הומוגניות – לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל סקלר $t \in F$ מתקיים:
 $\Delta(\alpha_1, \dots, t\alpha_i, \dots, \alpha_n) = t\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
3. מולטי ליניאריות: לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים:
 $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \alpha'_i, \dots, \alpha_n) = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha'_i, \dots, \alpha_n)$.
4. מתכונות אלה הוכחנו את האלטרנטיביות: - החלפנו שני משתנים – נחליף גם את הסימן.
מסקנה מאלטרנטיביות: $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{sgn}(\sigma) \Delta(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$.

משפט:

יהי F שדה, V מ"ו n מימדי מעל F , Δ פונ' נפח על V . $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ בסיס ל- V (נתייחס לסדר).

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V \text{ שייכים ל-} V, \alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j \text{ (הצגת } \alpha \text{ לפי הבסיס } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \text{)}$$

אזי $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = t \cdot \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, כאשר t אינו תלוי ב- Δ אלא באיברי המטריצה

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ בלבד.}$$

(מה משמעות המשפט? אם אנחנו יודעים את ערך פונקציית הנפח על פי בסיס, אפשר לחשב את הערך לכל n וקטורים תוך שימוש במטריצה בלבד).

כלומר – פונקציית נפח Δ נקבעת לחלוטין לפי ערכה על בסיס כלשהו.

הוכחה:

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \varepsilon_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} \varepsilon_j\right) = \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \Delta\left(\varepsilon_{j_1}, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} \varepsilon_j\right) =$$

$$\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \Delta(\varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_2}, \dots, \varepsilon_{j_n})$$

נשים לב שאם יש כאן $\varepsilon_{j_i} = \varepsilon_{j_k}, i \neq k$, אזי המחובר המתאים הינו 0.

כמה סדרות יש מהצורה $(\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_n})$ בהן כל ה- ε הם שונים. יש $n!$ כאלו. כלומר, מה שבאמת

מעניין אותה זה:

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \Delta(\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \text{sgn}(\sigma) \cdot \Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) =$$

$$\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

מ.ש.ל.

הגדרה:

תהי A מטריצה $n \times n$ מעל שדה F , הדטרמיננטה של A , שנסמנה

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

לדוגמא:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + cdh + gbh - gec - bdi - afh$$

אבל, הזמן שלוקח לחשב דטרמיננטה הוא $n!$. עבור מטריצה בגודל 50 מדובר ב-64 אפסים אחר כך של פעולות. איך אפשר לפשט את זה?

קצת מסקנות:

1. פונקציית נפח המתאפסת על בסיס היא זהותית 0.
2. אם Δ, Δ' הן פונקציות נפח, אזי הן נבדלות רק בקבוע כפלי. כלומר, או $\Delta \equiv 0$ או $\Delta' \equiv c \Delta$ ש $c \in F$ כלומר קיים $c \in F$ כך שלכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ מתקיים $\frac{\Delta'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = c$

$$\text{הסבר: } c := \frac{\Delta'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \frac{\Delta'(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)t}{\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)t}$$

והשבר הנ"ל מוגדר כאשר

$\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \neq 0$. הערה: t הוא אותו t (מהמשפט הנ"ל). (הים הוא אותו ים, והביבי הוא אותו ביבי).

שאלה: האם יש פונקציות נפח (מעניינת – לא פונקציית ה-0)? כן!
משפט: שדה F , V מ"ו n מימדי מעליו. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס, אזי לכל סקלר $t \in F$ קיימת פונקציית נפח

$$\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = t$$

כך ש Δ יחידה

הוכחה: אם יש Δ כזו היא יחידה, לפי מסקנה 2 לעיל. כמו כן, קל לראות כי אם Δ פונקציית נפח, אז גם $\Delta \cdot t$ היא פונ' נפח לכל $t \in F$. לכן די להוכיח את המשפט עבור $t = 1$.

$$\text{יהיו } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in V \text{ ו-} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ מטריצת המקדמים של ה-} \alpha \text{ ים לפי הבסיס } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n.$$

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ & \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ נגדיר}$$

כפי שרצינו.

הוכחה (שהפונקציה היא כנדרש). נצטרך להוכיח כי :

- $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$. מתקיים $\Delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = |I| = 1$ (למה $\det I = 1$? כי רק עבור פרמוטציית הזהות הסכימה לא תתאפס, וכל האיברים הם 1, וגם הסימן, לכן גם הדטרמיננטה היא 1)
- מולטי ליניאריות: נבדוק עבור המשתנה ה-1 (בה"כ). צריך להראות $\Delta(\alpha_1 + \alpha'_1, \dots, \alpha_n) = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha'_1, \dots, \alpha_n)$ נגדיר

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} \varepsilon_j$$

$$\alpha'_1 = \sum_{j=1}^n a'_{1j} \varepsilon_j$$

$$\alpha_1 + \alpha'_1 = \sum_{j=1}^n (a_{1j} + a'_{1j}) \varepsilon_j$$

$$\Delta(\alpha'_1 + \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) (a_{1\sigma(1)} + a'_{1\sigma(1)}) \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} =$$

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \Delta(\alpha'_1, \dots, \alpha_n)$$

• הומוגניות: (למשל של המשתנה הראשון):

$$\Delta(t\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) t a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} =$$

$$t \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} = t \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

(השתמשנו במעבר הראשון בכך ש $\alpha_1 = \sum a_{1j} \varepsilon_j \Rightarrow t\alpha_1 = \sum t a_{1j} \varepsilon_j$)

• צ"ל $\alpha_k = \alpha_l, k \neq l$, אזי $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. נחלק את המחוברים

ב $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$ לזוגות כך שכל אחד הוא הנגדי (החיבורי) לבן זוגו, ועל כן סכומם

0. תהי $\tau = (k, l)$. נתאים את σ ל $\sigma\tau$ (נתאים את $\sigma\tau$ ל σ). נשים לב

שבהכפלה ב τ אזי החלפנו את סימן הפרמוטציה. נתבונן במחובר המתאים ל σ ובמחובר המתאים ל $\sigma\tau$. עבור σ המחובר יהיה $\text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{l\sigma(l)} \cdot \dots \cdot a_{k\sigma(k)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$

עבור המחובר המתאים ל $\sigma\tau$ יהיה $\text{sgn}(\sigma\tau) a_{1\sigma\tau(1)} \cdot \dots \cdot a_{l\sigma\tau(l)} \cdot \dots \cdot a_{k\sigma\tau(k)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma\tau(n)}$

נשים לב שעבור $\langle k, l \rangle$ מתקיים $\sigma(i) = \sigma\tau(i)$ עבור k, l מתקיים

$$\begin{aligned} a_{l, \sigma\tau(l)} &= a_{l, \sigma(k)} = a_{k\sigma(k)} & \sigma\tau(l) &= \sigma(k) \\ a_{k, \sigma\tau(k)} &= a_{k, \sigma(l)} = a_{l\sigma(l)} & \sigma\tau(k) &= \sigma(l) \end{aligned}$$

ועל כן, $\tau(k) = l, \tau(l) = k$ ועל כן

נצדיק את המעבר הימני – היות ו $a_{ki} = a_{li} \Rightarrow \forall i, a_{ki} = a_{li}$, ובפרט $a_{k\sigma(k)} = a_{l\sigma(k)}$

לעבור על זה – כנראה שיש טעויות. לכן המחוברים המתאימים ל σ ול $\sigma\tau$ הם נגדיים מחוברים, דהיינו סכומם הינו 0.

אבחנה: מה שהוכחנו אומר למעשה שדטרמיננטה של מטריצה היא פונקציית נפח של שורותיה. ומכאן, תכונות רבות וחשובות של הדטרמיננטה כגון:

- שתי שורות שוות במטריצה, יאפסו את הדטרמיננטה
- החלפת שתי שורות, יחליפו את סימן הדטרמיננטה.
- ועוד רבות וטובות.

שיעור 4, 22.3.2006

מה נעשה היום? נקשר בין דטרמיננטות לפונקציה נפח.

נוכח? מהי פונקציית נפח? $\Delta(v_1, \dots, v_n) \rightarrow F$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad ? \text{ מהי הדטרמיננטה?}$$

משפט: דטרמיננטה של מטריצה היא פונקציית נפח על F^n כאשר מסתכלים עליה כפונקציה על שורות המטריצה.
כלומר

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta(v_1, \dots, v_n)$$

(נשים לב שאין כאן שיוויון שהדטרמיננטה תהיה שווה לכל פונקציית נפח, כי פונקציית נפח מוגדרת באופן יחיד עד כדי כפל בסקלר. מה שנאמר כאן, זה שדטרמיננטה היא פונקציית נפח. אבל הוכחנו את זה כבר שיעור שעבר)
הוכחה: ראה שיעור שעבר.

מסקנות:

1. החלפת שורות של מטריצה מכפילה דטרמיננטה ב -1 .
2. אם במטריצה A יש שורה אפסים אזי הדטרמיננטה היא 0 .
3. הוספת מכפלה של שורה לשורה אחרת לא מכפילה את הדטרמיננטה.

הוכחה:

1. ראינו את ההוכחה עבור פונקציית נפח, ומכיוון שדטרמיננטה היא פונקציית נפח, אזי מ.ש.ל.
2. ראה 1.

$$\Delta(v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) = \Delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + \lambda \Delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) =$$

$$\Delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + 0 = \Delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)$$

משפט: $\Delta \neq 0$ תהי פונקציית נפח על מרחב וקטורי V מממד n (למשל $\Delta = \det, V = F^n$) ויהו $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$, אזי הוקטורים תלויים ליניארית אם"מ הדטרמיננטה (פונקציית הנפח) היא 0 .

הוכחה: נניח ש $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ תלויים ליניארית. אזי, קיים אחד מהם, למשל α_n שהוא צ"ל של

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i \quad . \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$$

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta\left(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_i) = 0$$

בכיוון השני – נניח ש $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בלתי תלויים ליניארית. אזי הם מהווים בסיס. נניח בשלילה כי $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. היות ו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס, מקבלים כי $\Delta \equiv 0$ (לכל וקטורים שהם), בסתירה להנחה.

הגדרה: תהי $A = (a_{ij})$ מטריצה. נגדיר מטריצה חדשה $B = (b_{ij})$ על ידי שיקוף דרך האלכסון

הראשי (החלפה בין שורות לעמודות) $b_{ij} = a_{ji}$. מטריצה B נקראת מטריצה **משוחלפת** (או

(transposed), ומסומנת A' .

משפט: לכל מטריצה $A \in M_n(F)$ מתקיים $|A^t| = |A|$.

הוכחה:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$|A^t| = |B| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

נוכיח כי

$$\text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} = \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)n} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

ראשית כל, $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$ (הוכחנו בעבר). אבל אם $\sigma(i) = j$, אזי $\sigma^{-1}(j) = i$. ועל

$$a_{\sigma^{-1}(1)n} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n} = a_{\sigma^{-1}(1)\sigma(\sigma^{-1}(1))} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)\sigma(\sigma^{-1}(n))} = \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

אבל אם σ רץ על איברי S_n , אזי גם σ^{-1} . כלומר, לכן

$$|A^t| = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)n} \cdot \dots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} = |A|$$

מסקנה: כל תכונות הדטרמיננטה נוגע לשורות, נכונות גם בנוגע לעמודות.

הוכחה 2:

טענה 1: נטען $|A|$ היא פונקציית נפח על F^n כשמתכלים על עמודות. (הוכחה: בדיוק כמו שהוכחנו את זה על שורות)

טענה 2: משפט נובע מהמסקנה. למה? ראינו כי קיימת פונקציית נפח **יחידה** Δ_0 על F^n כך ש

$$|A| = \Delta_0(A_lines) = \Delta_0(A^t_columns) = |A^t| \quad \text{וגם ראינו} \quad \Delta_0(e_1, \dots, e_n) = 1$$

מסקנה 2: שורות של A בת"ל אמ"מ עמודות של A בת"ל.

פיתוח דטרמיננטה לפי שורה ולפי עמודה

הגדרה: יהי $A = (a_{ij})$. לכל $1 \leq k, l \leq n$ נגדיר מטריצה A_{kl} המתקבלת מ-A על ידי מחיקת השורה k והעמודה l (נקרא לה גם המינור ה (k, l)). לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט: פיתוח דטרמיננטה לפי שורה i:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

הוכחה: עבור $i = 1$. יהי $e_1, \dots, e_n$ הבסיס הסטנדרטי של F^n . תהי השורה ה k של A. α_k

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} e_j \quad \alpha_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} e_j \quad \text{אזי}$$

$$|A| = \Delta_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta_0\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} e_j, \dots, \alpha_n\right) = \sum_{j=1}^n a_{1j} \Delta_0(e_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

אנו רוצים להראות כי $|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} A_{1j}$. לכן נשאר לבדוק כי לכל $j = 1, \dots, n$ מתקיים

$$(-1)^{1+j} |A_{1j}| = \Delta_0(e_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ נגדיר את } j = 1 \text{ .}$$

עלינו לחשב את

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \delta(1, \sigma(1)) a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\delta, \sigma(1)=1} \text{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} = |A_{11}|$$

עבור j כללי – נחליף עמודות. במקרה ש $i \neq 1$ - נחליף את שורות המטריצה, וזה יתאים לקטע של הסימן.

שיעור 5, 29.3.2006

תוכנית להמשך:

1. פתוח דטרמיננטות לפי שורה / עמודה
2. דרגת העמודות = דרגת השורות, ע"פ דטרמיננטה
3. נוסחת קרמר
4. משפט המכפלה - $|AB| = |A||B|$.

פתוח דטרמיננטה לפי שורה / עמודה

נוכר:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

נחפש פתרון רקורסיבי

פתרון כזה יתן אפשרות להגדרה אלטרנטיבית (רקורסיבית). אולי יפשט את חישוב הדטרמיננטה.

נניח ונצטרך לחשב את הדטרמיננטה - רעיון בנפנופי ידיים:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

נוכר בהגדרת המינור A_{ij} $1 \leq i, j \leq n$ - המטריצה A כאשר משמיטים את השורה ה-i והעמודה ה-j.

$$\text{משפט: } |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \quad (\text{פיתוח לפי שורה } i)$$

הוכחה: נוכיח עבור $i=1$. נגדיר $\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ (השורה הראשונה של המטריצה).

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{1j} \begin{vmatrix} \varepsilon_j \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} \quad \text{מליניאריות והומוגניות } (\varepsilon_j \text{ הינו הוקטור שמכיל 1 רק במקום } j).$$

$$\left| \begin{matrix} \varepsilon_j \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{matrix} \right| = (-1)^{j+1} A_{1j} \quad \text{ש נתבונן במקרה } j=1 \text{ . צ"ל}$$

$$\left| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{matrix} \right| = A_{11} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=2}^n a_{j\sigma(j)} = \left| \begin{matrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{n2} & & & a_{nn} \end{matrix} \right| =$$

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \text{sgn}(\sigma)^* \prod_{j=2}^n a_{j\sigma(j)}$$

*נשים לב שהסימן כאן הינו הסימן של σ כפרמוטציה של $\{2, \dots, n\}$. אם זה שווה לסימנה כפרמוטציה של $\{1, \dots, n\}$, הרי סיימנו. ברור שזה נכון –

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

בסדרה $\sigma(2), \dots, \sigma(n)$ ובסדרה $1, \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ יש אותו מספר חילופים, ובפרט – אותה זוגיות. לכן, סיימנו עבור $i=1, j=1$.

$$\left| \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{21} & & & & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{matrix} \right| \quad \text{בואו ונטפל ב } j \text{ כללי. נתבונן ב}$$

. בואו נזיז את העמודה ה j על ידי

$j-1$ החלפות שמאלה $(j, j-1)(j-1, j-2) \dots (2, 1)$, וכך נביא את העמודה ה j למקום הראשון מבלי לשנות את סדר העמודות האחרות. נקבל

$$\left| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{nj} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{matrix} \right| \cdot (-1)^{j-1}$$

אבל את זה כבר פיתחנו לפני דקותיים:

$$= (-1)^{j+1} A_{ij}$$

וכל שנותר הוא להגיד 'אאוריקה' – סיימנו את המקרה $i=1$.
בואו ונוכיח ל i כללי – בשיטת הקומקום. פיתוח על פי השורה ה i : נקפיץ את השורה ה i לשורה הראשונה באותו אופן

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{i-1} = (-1)^{i+1} |C|$$

C היא המטריצה שיש משמאל. נשים לב שלכל $1 \leq j \leq n = C_{1j} = A_{ij}$

$$|A| = (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} C_{1j} \cdot a_{ij}$$

(פיתוח ע"פ השורה הראשונה – את זה כבר הוכחנו)

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

וכעת באמת אפשר לומר – 'אאוריקה'

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} |A_{ij}| a_{ij}$$

הוכחה: (א) בדיוק אותה הוכחה כמו קודם.

(ב) הוכחנו ש $|A| = |A'|$. נסמן את האיבר a_{ij} ב A' כ a'_{ij} .

$$a'_{ij} = a_{ji}$$

נסמן את המינור ה i, j ב A' כ $A'_{ij} = A_{ji}$.

נפתח את הדטרמיננטה של A' לפי שורה

$$|A'| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a'_{ij} |A'_{ij}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{ji} |A_{ji}|$$

קיבלנו את הנוסחה המבוקשת.

דרגת עמודות / שורות

הגדרה: יהי F שדה. תהי $A_{m \times n}$ מטריצה מעל F . דרגת השורות של A היא המספר המקסימלי של שורות A שהן בת"ל ב F^n . באופן דומה דרגת העמודות היא המספר המקסימלי של עמודות A ב F^m שהן בת"ל.

משפט: דרגת השורות = דרגת העמודות

הגדרה: דטרמיננטה חלקית מסדר k של מטריצה A היא דטרמיננטה של מטריצה $k \times k$ המתקבלת מ A ע"י מחיקת שורות ועמודות.

למה: דרגת השורות של מטריצה A שווה לסדר המקסימלי של דטרמיננטה חלקית שונה 0 ב A .

אבחנה: למה $\Leftarrow$ משפט, כי הדטרמיננטות החלקיות של A הן (עד כדי שיקוף) בדיוק הדטרמיננטות החלקיות של A' , ולכן דרגת השורות של A , שווה לדרגת השורות של A' , ששווה לדרגת העמודות של A .

הוכחת הלמה: נתחיל בכך שקיום r שורות בת"ל ב A גורר קיום דטרמיננטה חלקית מסדר r השונה מ0.

בה"כ השורות $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F^n$ בת"ל. (הצדקה לבה"כ – החלפת סדר שורות לא משנה את ההנחה /

מסקנה). נשלים את $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ לבסיס של F^n באמצעות הבסיס הסטנדרטי $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

לכן נניח ש $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$ הם בסיס.

נתבונן במטריצה ששורותיה הם בדיוק איברי הבסיס הזה וע"י סידור מחדש של העמודות, נוכל להניח

שהשורות הן $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n$, עד שהמטריצה תראה:

$$B := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & & a_{1n} \\ & & & & \\ & a_{r1} & & a_{rr} & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

יתכן שאיברים אלו התקבלו למעשה ע"י חילוף העמודות ב-A אבל אנו נתעלם מכך ונניח בה"כ שלא היה צורך בהחלפת שורות העמודות.

נשים לב כי $|B| \neq 0$ (שכן שורות B בת"ל). מתקיים גם:

$$0 \neq |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

ומצאנו דטרמיננטה חלקית $r \times r$ השונה מ-0.

בכיוון השני – נוכיח כעת כי אם יש דטרמיננטה חלקית מסדר r השונה מ-0 אזי יש r שורות בת"ל

$$\text{ב } F^n. \text{ נניח בה"כ כי } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ אזי הוקטורים המהווים את שורותיה בת"ל ב } F^r, \text{ על}$$

כן r השורות הראשונות של A בת"ל גם ב F^n .

למה בת"ל ב F^r גורר בת"ל ב F^n ? תוספת קוארדינטות לא יכולה לגרום לתלות ליניארית.

לסיכום – הראנו כי r שורות בת"ל $\Leftarrow$ דטרמיננטה מסדר r שונה מ-0, וגם את הכיוון השני. ומכאן הלמה, וע"פ האבחנה, יש גם את המשפט.

הודעה: בוחן בשבוע הראשון לאחר פסח.

נוסחת קרמר:

F שדה. מערכת של n משוואות ב- n נעלמים. כל משוואה נסמן $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $1 \leq i \leq n$. נסמן ב-A את

$$Ax = \beta. x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \text{ מטריצת המקדמים.}$$

כזכור פתרון יחיד למטריצה קיים אם"מ A הפיכה (מדרגה n), ואז $|A| \neq 0$.

יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ עמודות A. נסמן ב- A_k את המטריצה המתקבלת ע"י החלפת α_k ב- β .

משפט: נתונה מערכת משוואות ליניארית אי הומוגנית כנ"ל ונניח $|A| \neq 0$. אזי $(x_1, \dots, x_n)$ מהווה

$$\text{פתרון כאשר } x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \text{ עבור } 1 \leq k \leq n.$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - 1 = -1$$

$$2x + y - z = 1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = 1$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = 2$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = 3$$

שבוע 5, שיעור א', 4.4.2006

נוסחת קרמר:

תהי $Ax = \beta$ מערכת אי הומוגנית של n משוואות ב- n נעלמים.

$$A = (a_{ij}), 0 \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = b_i, X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

נניח ש $|A| \neq 0$, הוה אומר, למערכת קיים פתרון יחיד, ונניח $\chi_1, \dots, \chi_n$ הוא הפתרון.
(נסמן: X נעלם, χ פתרון).

מה אומר קרמר: $\chi_k = \frac{|A_k|}{|A|}$ כאשר A_k היא המטריצה המתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה ה- k ב- β .

(הפסקה מתודית כדי לזרוק גירים על מאחרים).

הוכחה:

נסמן את עמודות A ב- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. אזי $A = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

נתבונן ב- $|A_k| = \begin{vmatrix} (index) & 1 & k & \dots & n \\ \alpha_1 & \beta & \dots & \alpha_n \end{vmatrix}$. נשים לב שעבור כל $1 \leq i \leq n$ מתקיים

$$\beta = \sum_{j=1}^n \chi_j \alpha_j, \text{ ולכן } b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_j$$

$$|A_k| = \begin{vmatrix} (index) & 1 & k & \dots & n \\ \alpha_1 & \sum_{j=1}^n \chi_j \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} (index) & 1 & k & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \chi_k |A|$$

(*) – הצדקה למעבר – כאשר $j \neq k$ מתקיים שיש שתי עמודות זהות, ועל כן הדטרמיננטה שווה.
סבבה ☺

דוגמא (שימושית). נניח $|A| \neq 0$, נניח $A \in M_n(F)$. רוצים לחשב את $B = A^{-1}$. נטען כי בשביל לעשות את זה צריך לפתור n מערכות של n משוואות ב- n נעלמים (סד"ג של $\Theta(n^3)$)
לאמר ש $B = A^{-1}$ שקול לדבר הבא: $AX^{(i)} = \varepsilon_i$ (זה הבסיס הסטנדרטי של מרחב העמודות).

$$B = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

נניח ש $\chi_1^{(1)}, \dots, \chi_m^{(1)}$ פתרון למערכת זו, אזי המטריצה A^{-1} היא B .
למה? כי אז $AB = I$.
מהו האיבר B_{ij} ? $X_i^{(j)}$, שהוא האיבר ה- j בפתרון של $AX^{(j)} = \varepsilon_j$, כלומר

$$(*) \frac{|\alpha_1, \dots, \varepsilon_j, \dots, \alpha_n|}{|A|} \quad (*) \text{ - במקום ה-} i \text{ שמים את } \varepsilon_j.$$

נפתח את תוצאה זו לפי עמודה j :

$$= \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{|A|}$$

וכך קיבלנו את הנוסחה ל A^{-1} כאשר היא קיימת (כלומר, כאשר A הפיכה).

משפט המכפלה:

בקצרה: $|AB| = |A||B|$.

באריכות: תהייה A, B מטריצות רבועיות $n \times n$ מעל שדה F, אזי $|AB| = |A||B|$.

למה: יהי F שדה, V מ"ו n מימדי מעל F, $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה ליניארית, אזי קיים $|T| \in F$

(סקלר) כך שלכל פונקציית נפח Δ ולכל $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$ מתקיים

$$\Delta(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n)) = |T| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

הוכחת הלמה: בהינתן Δ פונקציית נפח נגדיר פונקציית נפח חדשה Δ_T על ידי

$$\Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \Delta(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \dots, T(\alpha_n))$$

נבדוק שזו אכן פונקציית נפח:

$$\bullet \text{ נניח } \alpha_i = \alpha_j, i \neq j \text{ אז } \Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)) =_{T(\alpha_i)=T(\alpha_j)} 0$$

מולטי ליניאריות:

$$\Delta_T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i + \alpha'_i, \dots, \alpha_n) =_{T \text{ Linearit}} \Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_i) + T(\alpha'_i), \dots, T(\alpha_n)) =$$

$$\Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_i), \dots, T(\alpha_n)) + \Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha'_i), \dots, T(\alpha_n)) =$$

$$\Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + \Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha'_i, \dots, \alpha_n)$$

$$\Delta_T(\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_n) = \Delta(T(\alpha_1), \dots, cT(\alpha_i), \dots, T(\alpha_n)) =$$

$$c\Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)) = c\Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

הומוגניות:

הוכחנו שכל שתי פונקציות נפח נבדלות רק בקבוע כפלי, כלומר, קיים סקלר (שנסמנו $|T|$) כך שלכל

$$\Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = |T| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n))$$

מתקיים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

טענה: יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס למ"ו V ותהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל ותהי A המטריצה המייצגת את T ע"פ

$$\text{בסיס זה, אזי } |T| = |A|$$

מסקנה: אם A, B מייצגות אותה טרל"נ לפי בסיסים שונים, אזי $|A| = |B|$.

הוכחת הטענה: נתבונן ב $A = (T(\alpha_1) \dots T(\alpha_n))$. תהי $\Delta \neq 0$ פונקציית נפח.

$$\Delta_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)) = |T| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\text{נזכר כי } T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i \text{ (A מייצגת את T ע"פ הבסיס } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{)}$$

$$= \Delta(T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)) = \Delta\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \alpha_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} \alpha_i\right) = \underset{\text{Multi-Linear and Homogeneous}}{\Delta} = |A| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

וזו הגדרת הדטרמיננטה של A . כנדרש.

הוכחת משפט המכפלה, (סוף כל סוף):

נראה ראשית שאם $T, S: V \rightarrow V$ אזי $|TS| = |T||S|$.

$$\Delta_{TS}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Delta(TS(\alpha_1), \dots, TS(\alpha_n)) = |T| \Delta_S(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = |T||S| \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

ראינו את משפט המכפלה עבור טרנספורמציות. תהינה A, B מטריצות $n \times n$ מעל F , נבחר בסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ותהינה S, T הטרל"נים המתאימות ל A, B (בהתאמה) ע"פ בסיס זה. ST מתאימה ל AB (הרכבת טרל"נים זהה לכפל מטריצות)

$$|AB| = |ST| = |S||T| = |A||B|$$

"בזאת סיימנו עם נושא המטריצות... הממ... דטרמיננטות. עם המטריצות לא נסיים לעולם!"

פותחים דף חדש

פרק י"ב בעמיצור – הפולינום האופייני והפולינום המינימלי

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

(בעמיצור – נקרא ערכים אופייניים). באנגלית eigenvalues, eigenvectors.

יהי V מ"ו. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס. $T: V \rightarrow V$ טרל"נ. $A = (T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n))$

Wanted: בסיס כך שלמטריצה המייצגת את T ע"פ בסיס זה צורה פשוטה ככל האפשר, למשל מטריצה אלכסונית.

אבחנה: ל A תהיה צורה אלכסונית אם"מ קיימים סקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ כך

ש $T(\alpha_j) = \lambda_j \alpha_j, \forall 1 \leq j \leq n$. כמו כן אם ל A הצורה הנ"ל, אזי $T(\alpha_j) = \lambda_j \alpha_j$.

דוגמא: $V = R^2, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. אם ניקח את הבסיס $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, אזי המטריצה של T היא

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. נחפש בסיס α_1, α_2 כך שקיימים סקלרים $\lambda_1, \dots, \lambda_2$ כך ש $T(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i, i=1,2$.

צריך ש $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. כלומר, $\begin{cases} x = \lambda y \\ y = \lambda x \end{cases}$, ואז $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} = \lambda$, כלומר $\lambda = 1$ או

$\lambda = -1$, ולכן בסיס אפשרי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. נכתוב את המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

הגדרה: יהי V מ"ו מעל שדה F , $T: V \rightarrow V$ טרל"נ, וקטור $\alpha \neq 0$ המקיים $T(\alpha) = \lambda \alpha$

עבור סקלר $\lambda \in F$ יקרא **וקטור עצמי** המתאים ל**ערך העצמי** λ .

מטרה: בהנתן ט"ל T נרצה למצוא בסיס המורכב כולו מוקטורים עצמיים של T .

שבוע 5, שיעור 2, 5.4.2006

(תזכורת / חומר חדש)

מהו החוג? (Ring)

לא החוג למתמטיקה.

יסומן באות R. מוגדרות 2 פעולות:

1. חיבור

a. סגירות

b. קומוטטיבי / חילופי

c. אסוציאטיביות

d. קיום נייטרלי (0)

e. קיום הפכי

2. כפל

a. אסוציאטיביות

b. סגירות

מתקיים חוק הדיסטרבטיביות (פילוג). (נשים לב – צריך לרשום אותו משני הכיוונים, כי אין קומוטטיביות בכפל)

דוגמאות:

1. כל שדה הוא חוג (לא כל חוג הוא שדה)

2. Z - חוג חילופי (בכפל), ועם איבר היחידה (נייטרלי לכפל).

3. $2Z$ - כל השלמים הזוגיים. חילופי, בלי איבר יחידה.

4. F שדה, $M_n(F)$ הוא חוג. לא חילופי, אבל עם איבר יחידה.

5. השלמים של גאוס - $\{a + bi \in C \mid a, b \in Z\}$

והחוג שבשבילו התכנסנו היום:

F שדה, $F[X]$ - חוג הפולינומים מעל שדה F . מה הכוונה? כל היצורים מהצורה

$$\{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i, 0 \leq i \leq n \in F\}$$

x נקרא 'משתנה פורמלי'.

חיבור וכפל פולינומים כפי שמוכר לנו. איך מחברים פולינומים?

$$(1+x) + (2+x^2) = 3+x+x^2 \text{ Y EY!}$$

איך מכפילים פולינומים?

$$(1+x)(2+x^2) = 2+2x+x^2+x^3 \text{ (Y EY2!)}$$

עוד דוגמא לחוג שניתקל בו בהמשך:

R חוג - $M_n(R)$ - אוסף המטריצות מעל החוג.

נסתכל ב $M_n(F[X])$ עבור F שדה כלשהו. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ 1+x & 17 \end{pmatrix}$$

נניח F שדה, נשים לב כי $F[X] \subseteq F(x)$ - חוג הפולינומים, $F(x)$ - שדה הפונקציות הרציונליות מעל שדה F .

מהו שדה הפונקציות הרציונליות?

$$F(x) = \left\{ \frac{r}{s} \mid r, x \in F[x], s \neq 0 \right\}$$

כאשר, כמו כן, מזהים בין $\frac{r}{s}$ ו $\frac{p}{q}$ אם $ps = rq$.
חיבור וכפל כפי שמוכר לנו.

תזכורת:

F שדה, V מ"ו n מימדי מעל F . $T: V \rightarrow V$ טרל"ן. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס של V .
 A מייצגת את T ביחס לבסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - מתבוננים ב $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)$, כאשר אנו רושמים
 $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i$ (מייצגים מחדש באמצעות אותו בסיס). מגדיר מטריצה.
 $A = (T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n))$.

בהינתן $\beta \in V$, ורוצים לחשב $T(\beta)$, נרשום את β באמצעות $\alpha_1, \dots, \alpha_n$: $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$.
$$(A) \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

בואו נחזור לוקטורים עצמיים וערכים עצמיים:

F שדה, V מ"ו n מימדי מעל F , $T: V \rightarrow V$ ט"ל.
וקטור $\alpha \neq 0$ המקיים $T(\alpha) = \lambda \alpha$ עבור סקלר $\lambda \in F$ יקרא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי λ . (אין דרישה ל $\lambda \neq 0$).

למה: אם $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ וקטורים עצמיים של T , המתאימים לערכים עצמיים שונים, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, בהתאמה, אזי אוסף $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ בת"ל.

מסקנה: לטרל"ן T יש לכל היותר n ערכים עצמיים שונים.

הוכחת הלמה: נניח בשלילה כי $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ת"ל, אזי קיים $1 < m \leq k$ כך ש $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ בת"ל,

אבל $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ת"ל, אזי קיימים סקלרים $a_1, \dots, a_m$ לא כולם 0, כך ש $\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i = 0$.

$$T\left(\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \alpha_i = T(0) = 0$$

נחסיר את λ_m כפול $*$ מ $(**)$ ונקבל:

$$0 = a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \alpha_1 + a_2 (\lambda_2 - \lambda_m) \alpha_2 + \dots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \alpha_{m-1}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ בת"ל, ולכן כל המקדמים בקומבינציה הנ"ל הם 0, כלומר $a_j (\lambda_j - \lambda_m) = 0$ עבור

$j = 1, \dots, m-1$, $\lambda_m \neq \lambda_j$ ועל כן $a_j = 0$. נציב ב $(*)$ ונקבל $a_m \alpha_m = 0$. אבל $\alpha_m \neq 0$, ולכן $a_m = 0$, וזוהי סתירה.

הגדרה: F שדה, $A \in M_n(F)$, נאמר $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ

$$\text{אם } \alpha \neq 0 \text{ ומתקיים } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

אבחנה / טענה: אם $T: V \rightarrow V$ ט"ל $A \in M_n(F)$ מייצגת את T לפי בסיס כלשהו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ אזי ל T ול A בדיוק אותם ערכים עצמיים.

הוכחה: יהי $\beta \in V$ ונניח $\beta = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$ אזי $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ אמ"מ

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ אמ"מ } \lambda \beta = T(\beta)$$

מסקנה:

אם A, B מייצגות את אותה טרל"נ T לפי בסיסים שונים, כלומר A, B דומות, אזי ל A ול B אותם ערכים עצמיים.

הוכחה אלטרנטיבית:

$$A = PBP^{-1}$$

עבור P הפיכה.

$$\text{ניקח } \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ וקטור עצמי של } A. \text{ מתקיים } \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = PBP^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

נפעיל P^{-1} על שני האגפים. נקבל:

$$\lambda P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = BP^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

כלומר, $P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ וקטור עצמי של B עם ערך עצמי λ .

הגדרה: $T: V \rightarrow V$ יקרא טרנספורמציה לכסינה (ניתנת ללכסון) אם קיים ל V בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T .

מטריצה $A \in M_n(F)$ תקרא לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית, כלומר, קיימת

$P \in M_n(F)$ הפיכה כך ש PAP^{-1} אלכסונית. $\Leftrightarrow$ אם A מייצגת טרל"נ T לפי בסיס כלשהו, הרי ל T לכסינה.

תזכורת לאבחנה: אם T יש n וקטורים עצמיים שונים המהווים בסיס V , אזי המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה היא אלכסונית.

למה: אם $A \in M_n(F)$ n ערכים עצמיים שונים הרי A לכסינה.

הוכחה 1: נבחר בסיס כלשהו, ותהי T הטרל"נ המיוצגת על ידי A לפי בסיס זה. אזי T יש n ערכים עצמיים שונים, לכן יש לה n וקטורים עצמיים בת"ל, כלומר, בסיס למרחב, כלומר T לכסינה, כלומר A לכסינה.

הוכחה 2: יהיו $x_1, \dots, x_n$ וקטורים עצמיים של A , המתאימים לערכים העצמיים השונים.

$$x_j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix} \text{ ידוע כי } \{x_j\}_{j=1}^n \text{ בת"ל. לכן המטריצה } P = (x_1, \dots, x_n) \text{ הפיכה.}$$

$$AP = (Ax_1, \dots, Ax_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$$

כאשר λ_j הערך העצמי המתאים ל x_j .

$$= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

נכפיל את שני הצדדים ב P^{-1} ונקבל:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

לא רק A לכסינה, גם מצאנו קשר מפורש בין הוקטורים העצמיים של A המתאימים לערכים העצמיים השונים ולמטריצה המלכסנת.

איך מוצאים וקטורים עצמיים / ערכים עצמיים של מטריצה? כיצד מלכסנים?

אבחנה: אם λ ערך עצמי המתאים ל A אזי נוכל למצוא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי λ $Ax = \lambda x = \lambda Ix$, כלומר: $(A - \lambda I)X = 0$, כלומר צריך לפתור מערכת משוואות הומוגנית. נשים לב שאנו דורשים $X \neq 0$. (מחפשים פתרון לא טריביאלי).

פתרון לא טריביאלי $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$. אמ"מ קיים וקטור עצמי X המתאים לערך עצמי λ אזי $|A - \lambda I| = 0$. קל לראות שגם הכיוון ההפוך נכון – אם $|A - \lambda I| = 0$, אזי λ ערך עצמי של A . מדוע קל לראות? כי אז יש למשוואה $A - \lambda I X = 0$ פתרון לא טריביאלי.

נתבונן בפולינום מעל F $F[X]$, $|XI - A| = f(x)$. למה זה פולינום?

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$|XI - A| = \left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1$$

הפולינום הנ"ל נקרא הפולינום האופייני של A. ראינו כי λ ערך עצמי של A אם $f(\lambda) = 0$, כלומר – השורשים של f הם בדיוק הערכים העצמיים של A.

בהמשך, פתרונות הפולינום הנ"ל הם $1, -1$, ואלא בדיוק הערכים העצמיים של A. ☺

שאלות למחשבה: $|XI - A| = x^n - t_{n-1}x^{n-1} + t_{n-2}x^{n-2} + \dots + (-1)^n t_0$

א. למה הדרגה היא n?

ב. מהו t_0 ?

ג. מהו t_{n-1} ?

חג שמח ☺

אלגברה ליניארית 2, 25.4.2006

תזכורת להגדרות - וקטורים עצמיים וערכים עצמיים:

F שדה, V מ"ו n מימדי מעל F , $T: V \rightarrow V$ ט"ל.

וקטור $\alpha \neq 0$ המקיים $T(\alpha) = \lambda\alpha$ עבור סקלר $\lambda \in F$ יקרא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי λ . (אין דרישה ל $\lambda \neq 0$).

אם קיים V בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T , המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה היא אלכסונית. במקרה זה נאמר ש T לכסינה.

משפט: וקטורים עצמיים המתאימים לע"ע שונים הינם בת"ל

מסקנה: ל T יש לכל היותר n ע"ע שונים.

וקטור עצמי של מטריצה $A \in M_n(F)$: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ יקרא ו"ע של A אם $Ax = \lambda x$.

אבחנה: אם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס כלשהו של V ו A מייצגת את T ביחס לבסיס זה,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ אזי } \alpha \in V, \alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \text{ ו"ע של } T \text{ מתאים לע"ע } \lambda \text{ (כלומר } T\alpha = \lambda\alpha \text{) אם"מ}$$

כלומר $Ax = \lambda x$.

מסקנה: למטריצות דומות יש אותם ע"ע, כי הן מייצגות אותה ט"ע ביחס לבסיסים שונים, ולכן הע"ע שלהם בדיוק הע"ע של אותה ט"ל.

הגדרה: נאמר שמטריצה $A \in M_n(F)$ לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית. (אם A מייצגת את T ביחס לבסיס כלשהו, אזי A לכסינה $\Leftrightarrow T$ לכסינה).

אבחנה: תהי $A \in M_n(F)$ ויהיו $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ ו"ע של A עם ע"ע λ_i בהתאמה, כלומר $Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$.

אם $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ בת"ל אזי נוכל ללכסן את A כדלקמן: $P^{-1}AP$ כאשר P הינה $P = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$. היות שהם בת"ל קיימת ל P הפכית:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

נזכור כי $P^{-1}P = I$, כלומר $y^{(i)}x^{(j)} = \delta_{ij}$ (תזכורת: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$).

$$AP = A(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = (\lambda_1 x^{(1)}, \dots, \lambda_n x^{(n)})$$

$$P^{-1}(AP)_{ij} = y^i \lambda_j x_j = \lambda_j \delta_{ij}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

מה המוסר השכל? אם נדע למצוא בסיס ל- V המורכב מוקטורים עצמיים של A נוכל ללכסן את A .

תזכורת (נוספת) על פולינומים:

יהי F שדה, $F[x]$ הינו חוג הפולינומים מעל F במשתנה הפורמלי x . אוסף הביטויים מהצורה

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{כאשר } n \text{ שלם אי שלילי כלשהו, ו } a_i \in F. \text{ נזהה את } x^0 \text{ עם האיבר 1 בשדה. לכן פולינומים}$$

מהצורה $a_0 x^0$ נזהה עם $a_0 \in F$. כלומר, $F \subseteq F[x]$.

כמו כן $F[x] \subseteq F(x)$ (שדה הפולינומים מוכל בשדה הפונקציות הרציונליות ב- x מעל F).

אם $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $a_n \neq 0$, אזי n יקרא הדרגה של f . נסמנו כ- $\deg(f)$ - המקדם הגבוה ביותר השונה מ-0 קובע את הדרגה.

$$\text{אם } c \in F, f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ אזי נגדיר } f(c) = \sum_{i=0}^n a_i c^i.$$

אבחנה: אם $h = f \cdot g$, f, g פולינומים, אזי $h(c) = f(c) \cdot g(c)$, לכל $c \in F$. כנ"ל לחיבור.

אבחנה 2: קיום חילוק עם שארית, אם $f, g \neq 0$ פולינומים, $\deg f \geq \deg g$, אזי ניתן לחלק את f ב- g עם שארית, כלומר, קיימים פולינומים יחידים q, r כך ש- $f = qg + r$ ומתקיים $\deg r < \deg g$.

הגדרה: $\deg(0) = -\infty$.

הגדרה: נאמר ש- f מחלק את g , ונסמן $f | g$, אם קיים פולינום q כך ש- $g = q \cdot f$.

טענה: אם $f | g$ אזי $f(c) = 0 \iff g(c) = 0$.

הוכחה: $g(c) = f(c)q(c) = 0$.

הגדרה: $c \in F$ יקרא שורש של $f \in F[x]$ אם $f(c) = 0$, וראינו כעת כי $f | g$, c שורש של F , גוררים כי c שורש של g .

טענה: c שורש של $f(x)$ אם $x - c | f$.

הוכחה: נחלק את f ב- $x - c$ עם שארית. $f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$.

$\deg r < \deg(x - c) = 1$, ולכן $r \in F$. נציב c בשני האגפים. $f(c) = q(c) \cdot 0 + r$, ועל כן $r = 0$, ועל כן $x - c | f$.

טענה: לפולינום ממעלה n יש לכל היותר n שורשים שונים.

הגדרה: הרבוי של שורש c של פולינום $f(x)$ הוא החזקה הגבוהה ביותר כך ש $(x - c)^d \mid f(x)$.

הפולינום האפייני של מטריצה

מטרה: בהינתן מטריצה A מחפשים פולינום ששורשיו הם בדיוק הערכים העצמיים של A .

נשאל? מתי קיים $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$ כך ש

$$Av = \lambda v = \lambda Iv = \lambda(Iv) = (\lambda I)v = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists v, (\lambda I - A)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} v = 0$$

כלומר, $\lambda I - A$ סינגולרית, $|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow$

מסקנה: λ ע"ע של A אם"מ $|\lambda I - A| = 0$.

$$F[x] = |xI - A| = \begin{vmatrix} x - a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ משתנה פורמלי, } A \in M_n(F) \quad \textbf{הגדרה:}$$

יקרא הפולינום האופייני של A .

דוגמא 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F_A[x] = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

דוגמא 2:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, F_B(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

משפט: תהי A מטריצה, λ ע"ע של A אם"מ λ שורש של הפולינום האופייני של A .

הוכחה: $f(x) = |xI - A|$, אזי $f(\lambda) = |\lambda I - A|$, ולכן אם $f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$$|\lambda I - A| = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ ע"ע.}$$

מה זה $f(\lambda)$ - קחו את המטריצה $xI - A$, חשבו את הדטרמיננטה שלה, קבלו את $f(x)$, הציבו λ .

$\equiv |\lambda I - A|$ - הציבו λ בכל הפולינומים המופיעים במטריצה $xI - A$ ואז חשבו את הדטרמיננטה.

שניהם שווים, בגלל שפעולת ההצבה מתחלפת עם כפלים וחיבורים ולכן גם עם חישוב דטרמיננטה.

26.4.2006

תהי $A \in M_n(F)$, הפולינום האופייני של A הוא $f_A(x) = |xI - A|$. אחד מהמחברים בביטוי

הנ"ל הוא מכפלת איברי האלקסון, $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$, מדרגה n . כל מחובר אחר הינו מדרגה $n - 2 \geq$.

$$f_A(x) = x^n - t_{n-1}x^{n-1} + t_{n-2}x^{n-2} + \dots + (-1)^n t_0$$

מיהו $-t_{n-1}$? הרי ראינו כי המקדם היחיד של x^{n-1} יכול לנבוע מ $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$, ועל כן

$$(x - a_{11})(x - a_{22}) \dots (x - a_{nn}) = x^n + \sum_{i=1}^n -a_{ii}x^{n-1}$$

(למה? כי הדרך היחידה לקבל x^{n-1} זה לבחור $-a_{ii}$ וכל השאר x ים).
ועל כן:

$$t_{n-1} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A)$$

ובעצם, זוהי העקבה של A .

קצת על העקבה:

$$A, B \in M_n(F)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$$

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC) \text{ לאו דווקא מתקיים}$$

ואחרי קצת רכילות על העקבה, בואו נסתכל על t_0 , המקדם החופשי. נשים לב ש

$$f(x) = \sum a_i x^i \Rightarrow f(0) = a_0$$

ועל כן,

$$(-1)^n t_0 = f_A(0) = |xI - A| = |0I - A| = |-A| = (-1)^n |A|$$

ועל כן, t_0 זוהי הדטרמיננטה של A ! ☺

משפט: למטריצות דומות אותו פולינום אופייני.

הוכחה: נניח $A = P^{-1}BP$, ואזי הפולינום האופייני של A הינו

$$|xI - A| = |xI - P^{-1}BP| =_* |P^{-1}xIP - P^{-1}BP| =_{***} |P^{-1}(xI - B)P| =$$

$$|P^{-1}| |xI - B| |P| =_{**} |xI - B|$$

(*) - כי $P^{-1}xI = xIP^{-1}$, ועל כן $P^{-1}xIP = xIP^{-1}P = xI$, כי xI מתחלפת עם כל מטריצה).

$$|P| |P^{-1}| = |PP^{-1}| = |I| = 1 \quad (**)$$

(***) - האם $|AB| = |A||B|$ גם עבור $A, B \in M_n(F[x])$? כן! למה? כי $F[x] \subseteq f(x)$.

(פולינום הוא חלק משדה הפונקציות הרציונליות).

למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ע"ע, אותה דטרמיננטה, ואותה עקבה.

הפולינום המינימלי של A

בהנתן $\sum_{i=0}^n a_i x^i = f(x) \in F[x]$, הגדרנו עבור $c \in F$, $f(c) = \sum_{i=0}^n a_i c^i$, וראינו שפעולת

ההצבה מתחלפת עם כפל וחיבור. כלומר - $\forall c \in F, g = f \cdot h \Rightarrow g(c) = f(c) \cdot h(c)$.

נגדיר $f(A)$ כ $\sum_{i=0}^n a_i A^i$, כלומר $a_0 A^0 + a_1 A + \dots + a_n A^n$, ונגדיר $A^0 := I$. ניתן לבדוק (אך

לא נעשה זאת), כי $f \cdot g = h \Rightarrow f(A)g(A) = h(A)$.

מתי $f(A) = 0$? נזכר כי $M_n(F)$ הוא מרחב וקטורי n^2 מימדי מעל F, ועל כן $n^2 + 1$ מטריצות תלויות ליניארית – והקבוצה $A^0, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ תלויה ליניארית, וקיימים $a_0, \dots, a_{n^2} \in F$ לא כולם 0 כך ש:

$$\sum_{i=0}^{n^2} a_i x^i = 0, \text{ כלומר } A \text{ מאפסת את הפולינום } \sum_{i=0}^{n^2} a_i x^i.$$

הגדרה: אם $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ נאמר ש f פולינום מתוקן אם $a_n = 1$.

הגדרה: הפולינום המתוקן שאינו 0 בעל הדרגה המינימלית כך ש A מאפס אותו, נקרא הפולינום המינימלי של A.

משפט: א. יהי $m_A(x)$ פולינומים מינימלי כנ"ל אזי $g(A) = 0$ אם $m_A | g$, כלומר, קיים h כך ש $g = m_A \cdot h$.

ב. אם m_1, m_2 פולינומים מדרגה מינימלית כנ"ל, אזי $m_1 = m_2$.

הוכחה: א. כיוון אחד קל – אם $m | g$, כלומר $\exists h$ כך ש $g = mh$ אזי $g(A) = m(A)h(A)$, ומכיוון ש $m(A) = 0$ אזי $g(A) = 0$.

כעת צ"ל $m | g \Rightarrow g(A) = 0$. נחלק את g במ $g = qm + r$, כלומר $g = qm + r$ כאשר $\deg m > \deg r$. נציב A בשני האגפים, נקבל $0 = g(A) = qA \cdot m(A) + r(A) = 0 + r(A)$ כלומר $r(A) = 0$, אבל מהנחת המינימליות של m , נובע כי $r = 0$, $g = qm$, כלומר - $m | g$.

ב. לפי א' $m_1 | m_2$, כלומר קיים h כך ש $m_2 = hm_1$, אבל מכיוון ש $\deg(m_2) = \deg(m_1)$, ועל כן $\deg(h) = 0$, כלומר $m_2 = cm_1, c \in F$, אבל m_1 ו m_2 מתוקנים, ולכן $c = 1$, ולכן $m_1 = m_2$.

טענה: אם $A \sim B$, כלומר $A = P^{-1}BP$, אזי ל A ול B אותו פולינום מינימלי.

הוכחה 1: בהנתן $T: V \rightarrow V$, ניתן להגדיר $f(T) = \sum_{i=0}^n a_i T^i$, כאשר $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. נגדיר

$T^0 = Id$, ולכן ניתן לדבר גם על הפולינום המינימלי של T . נקבע בסיס ל V , והרי נקבל התאמה בין הסרל"נ $T \in Hom(V, V)$ לבין המטריצות $A \in M_n(F)$ - התאמה זו היא איזומורפיזם – כלומר,

מכבדת חיבור, כפל, וכפל בסקלר. ולכן אם A מייצגת את T לפי בסיס זה, אז
 $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$, ולכן הפולינום המינימלי של A שווה לפולינום המינימלי של T , לכן
למטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי, שכן הן מייצגות את אותה טרל"נ לפי בסיסים שונים.
אבחנה: פעולת הדמיון מתחלפת עם כפל וחיבור – כלומר,

$$P(A+B)P^{-1} = PAP^{-1} + PBP^{-1}$$

$$P(AB)P^{-1} = (PAP^{-1})(PBP^{-1})$$

ולכן לכל $f(x) \in F$ מתקיים $Pf(A)P^{-1} = f(PAP^{-1})$, לכן אם $A = PBP^{-1}$,

$$f(A) = f(PBP^{-1}) = Pf(B)P^{-1} = P0P^{-1} = 0 \text{ אזי } f(B) = 0$$

לדוגמא, אם $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, מהו A^{100} ? אם $A = PDP^{-1}$, כאשר D אלכסונית, אזי היה מתקיים

$$A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = PD^{100}P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{100} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} \end{pmatrix} P^{-1}$$

לדוגמא, עבור A נתונה, מתקיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}, F_n := \text{fibonnachi number } n$$

דוגמאות: מהו הפולינום המינימלי של $I - x$?

מהו הפולינום המינימלי של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? נשים לב כי $A^2 = A$, ולכן $A^2 - A = 0$, ולכן

הפולינום $x^2 - x$ מאפס את A . מכיוון $(x^2 - x) = x(x - 1)$, אזי אם היה פולינום מינימלי קטן יותר, הוא היה אחד מ $1, x, (x - 1)$, ומכיוון שהוא לא – אזי $x^2 - x$ הוא המינימלי.

דוגמא 3: ניקח את הטרל"נ שמסובבת עם כיוון השעון ב-120 מעלות המטריצה המייצגת היא:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ נשים לב ש } T^3 = I, \text{ ולכן גם } A^3 = I, \text{ ולכן } A \text{ מאפסת את } x^3 - 1.$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

הפולינום המינימלי במקרה זה הוא $x^2 + x + 1$ הוא הפולינום המינימלי - הצדקה גאומטרית.

משפט קיילי - המילטון: $A \in M_n(F)$, ו $f \in F[x]$ הפולינום האופייני של A , אזי

$$f(A) = 0, \text{ כלומר - הפולינום האופייני מאפס את המטריצה.}$$

משפט (מקרה פרטי של הקודם): אם $A \in M_n(F)$ עם n ע"ע שונים אזי A מאפסת את הפולינום האופייני שלה.

הוכחה: יהיו $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ וקטורים עצמיים של A המתאימים לע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. כלומר, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

הם בדיוק השורשים של הפולינום האפייני של A , וגם A דומה למטריצה $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, ולכן

הפולינום הוא $\prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$. צ"ל כי $\left| \begin{pmatrix} x - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x - \lambda_n \end{pmatrix} \right|$

$B := (A - \lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (A - \lambda_n I) = 0$ מתחלף בכפל עם $A - \lambda_j I$.
נחשב את

$$B(x^{(i)}) = \dots (A - \lambda_i I)x^{(i)} = 0$$

(השוויון הוא כי $Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}$).

קיבלנו כי $Bx^{(i)} = 0, \forall 1 \leq i \leq n$, כי ה $x^{(i)}$ בת"ל, ולכן מהוים בסיס ל V .

9.5.2006

משפט קיילי-המילטון

הוכחה 1 (לא למבחן, לא מלאה)

F שדה, $A \in M_n(F)$, הפולינום האופייני של A - $f_A(x)$ או $f(x)$, כשנקצר). הפולינום המינימלי - מאפס את A .

הוכחנו שבוע שעבר: אם A יש n ע"ע שונים אזי $f_A(A) = 0$ (מקרה פרטי של קיילי המילטון). להגיד של A יש n ע"ע שונים, $\Leftrightarrow$ לפולינום האופייני של A יש n שורשים שונים.

נתרכז במקרה של $F = C$. עבור "רוב" המטריצות $A \in M_n(C)$ יש ל $f_A(x)$ n שורשים שונים.

מה הכוונה רוב המטריצות? נתבונן $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \in M_2(C)$.

$f_A(x) = x^2 - (a+b)x + (ad-bc)$. נשאל כמה שורשים יש לו? ל $ax^2 + bx + c$ יש

שורש כפול אם $b^2 - 4ac = 0$. ל f_A שורש כפול אם $(a+b)^2 - 4(ad-bc) = 0$.

π לא מקיים שום זהות אלגברית עם מקדים רציונליים, ועל כן, אם

$a \in Q, b \in Q, c \in Q, d \in \pi Q$ אז אם $(a+d)^2 - 4(ad-bc) \neq 0$ לכן מטריצה מהצורה

כש $A = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4\pi \end{pmatrix}$ $r_1, r_2, r_3, r_4 \in Q, r_4 \neq 0$ מקיימת $f_A(A) = 0$ אם $B = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}$ לכל

ε קיים $A = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4\pi \end{pmatrix}$ כנ"ל כך ש A ε קרוב ל B . כלומר $|r_4\pi - s_4| < \varepsilon$, וגם $|r_1 - s_1| < \varepsilon$.

היות שהפונקציה $f_B(B)$ (מקבלת מטריצה ומחזירה מטריצה שמתקבלת על ידי הצבה בפולינום

האופייני) היא פונקציה רציפה, לכן גם $f_B(B) = 0$.

Wanted: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ כך שהם לא מקיימים שום קשר אלגברי עם מקדמים רציונליים. ניקח

$x_1 = 1$. יש רק מספר בן מניה של מספרים x_2 שמקיימים קשר אלגברי עם x_1 . היות שיש מספר לא בן מניה של ממשיים ניתן לבחור x_2 כנ"ל, וכך נמשיך.

לסיכום: קרוב כרצוננו לכל מטריצה $A \in M_n(C)$ נוכל למצוא מטריצה B שאבריה אינם מקיימים

שום זהות אלגברית עם מקדמים רציונליים, ולכן ל $f_B(x)$ יש n שורשים שונים, ולכן $f_B(B) = 0$,

מרציפות, גם $f_A(A) = 0$.

חומר למחשבה: מדוע אם הזהות $f_A(A) = 0$ מעל שדה אינסופי ובעל מציין 0, היא מתקיימת מעל

כל שדה?

'יצורים שונים, באים מעולמות שונים' מאיזה עולם בא $xI - A$? זוהי מטריצה, לא? ושייכת לעולם $M_n(F[x])$ (איבריה הם פולינומים). אפשר להתייחס לזה גם אחרת – ניתן לחשוב על ביטוי זה כפולינום בא שמקדמיו הם מטריצות (כלומר, $(Ix - A) \cdot x^0 = x - A \in M_n(F)[x]$), נשים לב שגם הסימונים מבלבלים... – אז לא להתבלבל.

וניתן בהם סימונים - $M_n(F[x])$ - מטריצות שאבריהן פולינומים – לדוגמא

$$(X \text{ מציבים סקלרים}). \begin{pmatrix} 4x^2 + x + 1 & 2x^2 + x \\ x^2 + x & x + 7 \end{pmatrix}$$

$$M_n(F)[x] - \text{פולינומים שמקדמיהם מטריצות} - \text{לדוגמא: } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} (X \text{ מציבים מטריצות}).$$

הדגמנו התאמה בין $M_n(F[x])$ ל $M_n(F)[x]$ (לא נגדיר את ההתאמה באופן פורמלי – התלמיד החרוץ ישלים בביתו, או יקרא בעמיצור). לא קשה לבדוק שהתאמה זו היא איזומורפיזם (שומרת כפל וחיבור, חז"ע ועל).

אזהרה: לגבי $M_n(F)[x]$ אם $h = f \cdot g$ אזי לא בהכרח $h(A) = f(A)g(A)$.

דוגמא: תהיינה A, B מטריצות שלא מתחלפות בכפל ($AB \neq BA$). נתבונן ב $f(x) = Ix - B$ $g(x) = Ix - B$.

$$h = f \cdot g = (Ix^2 - 2BX) + B^2$$

$$h(A) = A^2 - 2BA + B^2$$

$$f(A) = g(A) = A - B$$

$$f(A)g(A) = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$h(A) - f(A)g(A) = AB - BA \neq 0$$

טענה: תהי $A \in M_n(F)$ ו $g \in M_n(F)[x]$ אזי $g(A) = 0$ אם"מ $h \in M_n(F)[x]$ כך ש $g(x) = h(x)(xI - A)$.

למה: קיימת $h'(x)$ כך ש $g(x) = h'(x)(xI - A) + g(A)$ (כלומר,

$$g(x) - g(A) = h'(x)(xI - A).$$

הוכחה (למה $\Leftarrow$ טענה):

$$\text{אם } g(A) = 0 \text{ אז } g(x) = h'(x)(xI - A).$$

כיוון שני – אם קיים h כך ש $g(x) = h(x)(xI - A)$ וגם

$$g(x) = h'(x)(xI - A) + g(A) \text{ אזי } g(x) = [h(x) - h'(x)](xI - A) + g(A). \text{ מכיוון}$$

ש $g(A)$ הוא מטריצה, הוא פולינום ממעלה 0, ומכיוון ש $xI - A$ הוא פולינום ממעלה 1, אזי בהכרח $g(A) = 0$ ואז $h(x) - h'(x) = 0$.

הוכחת הלמה:

$$\begin{aligned} &: g(x) - g(A) \text{ נתבונן ב } g(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_0 \\ &= A_n x^n - A_n A^n + A_{n-1} x^{n-1} - A_{n-1} A^{n-1} + \dots + A_0 - A_0 \\ &= \sum_{i=0}^n A_i (x^i - A^i) = \sum_{i=0}^n A_i [h_i(x)(Ix - A)] = \left(\sum_{i=0}^n A_i h_i(x) \right) (Ix - A) \end{aligned}$$

מ.ש.ל.

(*) - אנחנו רוצים לכתוב ביטוי כנ"ל - אבל עדיין אסור לנו. נותר עוד לבדוק ש $x^i - A^i = h_i(x)(Ix - A)$.

הערה (בסוגריים): מעל שדה מתקיים $x^i - a^i = (x^{i-1} + x^{i-2}a + \dots + a^{i-1})(x - a)$ ואכן, גם מעל אם $A \in M_n(F)$ מתקיים $x^i - A^i = (x^{i-1}I + x^{i-2}IA + \dots + IA^{i-1})(xI - A)$ (למה? A מתחלף עם עצמו בכפל, וגם Ax^i מתחלף עם עצמו - באופן כללי, פולינומים ב A מתחלפים בכפל). ולכן $h_i = Ix^{i-1} + Ax^{i-2} + A^2x^{i-3} + \dots + A^{i-1}$.

הוכחת משפט קיילי המילטון:

נתחיל בזהות $Adj(A)A = |A|I$. הוכחנו זהות זו עבור $A \in M_n(F)$, אבל היא נכונה גם עבור $A \in M_n(F[x])$. (למה? $F \subseteq F[x] \subseteq f(x)$, ובפרט עבור המטריצה $xI - A$, כלומר $adj(xI - A)(xI - A) = |xI - A|I$ אבל מההתאמה שהגדרנו נקבל גם שיויון ב $M_n(F)[x]$: אם $f_A(x) = |Ix - A| = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ אזי $h(x)(xI - A) = \sum a_i Ix^i$ כאשר h פולינום מסויים. קיבלנו ש $f_A(x) | (xI - A)$, לכן A מאפס את $f_A(x)$ מ.ש.ל.

מסקנה: מקיילי המילטון: אם $m_A(x)$ הוא הפולינום המינימלי ו $f_A(x)$ הוא הפולינום האפייני, אזי $m_A(x) | f_A(x)$.

טענה: $f_A(x) | [m_A(x)]^n$

הוכחת הטענה: נסמן $m_A(x) = \sum b_i x^i$. ידוע כי A מאפס את $m(x)$ ולכן m מתחלק ב $xI - A$

(בעולם $(M_n(F)[x])$. ועל כן - $h(x)(xI - A) = \sum b_i Ix^i$. נעבור לעולם $M_n(F[x])$ קיבלנו

$$B(xI-A)=\begin{pmatrix} m(x) & & \\ & m(x) & \\ & & m(x) \end{pmatrix}$$

$$f_A(x)=|B||xI-A|=[m(x)]^n \text{ ונקבל } \text{נוציא דטרמיננטה משני האגפים,}$$

10.5.2006

מרחבים עצמיים ותנאי לכסינות

הגדרות, תזכורות, ומיני מסקנות

F שדה, V מ"ו מעל F, $T: V \rightarrow V$, $A \in M_n(F)$ מייצגת את T עבור בסיס כלשהו.

תזכורת: נאמר – T לכסינה אם קיים בסיס ל V המורכב מו"ע של T.
 $f_T(x) = f_A(x) \in F[x] = |xI - A|$ - הפולינום האפייני של T (או של A – אין הבדל). שורשי f_T הם בדיוק הע"ע של T.

בנוסף הגדרנו $m_T(x)$ - הפולינום המינימלי של T (הפולינום המתוקן בעל הדרגה המינימאלית המאפס את T). - כלומר $m(T) = 0, m(A) = 0$.

בנוסף – ראינו כי $h(x) \in F[x]$, אזי $h(T) = 0 \Leftrightarrow m | h$ (כי m מינימלי).
 בנוסף ראינו כי $f_T(T) = 0$ (משפט קיילי המילטון), ולכן $m_T | f_T$ (כל שורש של m הוא גם שורש של f).

ראינו גם ש $f_T | m_T^n$ (כאשר n הוא מימד המרחב הוקטורי בו מתרחש כל האקשן). מכאן אפשר להסיק כי כל שורש של הפ"א (f) – כלומר כל ערך עצמי, הוא שורש של הפ"מ (m). למה? ברור.

נניח שכל שורשי f נמצאים ב F (לא תמיד נכון), ואז

$$f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$$

 כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הם הערכים העצמיים של T. m_i נקרא הריבוי האלגברי של הע"ע λ_i . ברור כי $m_i \geq 1$. בנוסף $\sum_{i=1}^k m_i = \deg(f) = n$.

מה שנאמר לעיל, נובע כי $m_T = \prod (x - \lambda_i)^{l_i}$ ידוע כי $\forall i, l_i \geq 1$ (מהמסקנה קודם - $m | f$).

טענה – תוכח בשנים הבאות – למי שממשיך במתמטיקה: $f \in F[x]$ אזי $F \subseteq E$ כש E שדה

בו נמצאים כל שורשי f – כלומר, אם f מדרגה n - $\lambda_i \in E$, $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$

ציטוט: 'אתם צריכים להאמין בטענה כמו בעולם הבא. כאן לא כל כך נעים, אבל בעולם הבא הכל טוב ויש את כל השורשים לכל הפולינומים. נדמיין אז שאנחנו בעולם הבא'.
 הערה למחשבה – האם בשנה הבאה מגיעים לעולם הבא כל תלמידי מתמטיקה?

הגדרה: אם λ הוא ע"ע של T $\ker(T - \lambda I) = V_\lambda \subseteq V$ - אוסף כל הוקטורים w כך ש $Tw = \lambda w$. נזכר כי $\ker S$ הוא תמיד תת מרחב לכל ט"ל S, בפרט במקרה זה (אפילו אפשר להוכיח בנפרד).

נגדיר את $\dim V_\lambda$ כריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ . כלומר, אם λ הוא ערך עצמי, $\dim V_\lambda \geq 1$.

טענה: אם λ ע"ע, אזי ריבוי גאומטרי $(\lambda) \geq$ ריבוי אלגברי (λ)
הוכחה: נניח $\dim(V_\lambda) = k$. הוא הריבוי הגאומטרי. נבחר בסיס ל V_λ . ניקח בסיס ל V_λ - $w_1, \dots, w_k$. נשלים את הבסיס לבסיס של V כולו.

נתבונן במטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס זה. במטריצה יהיו k שורות בהם באינדקס ii יהיה לנו λ ,

$$\text{כלומר: } A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \dots & & B \\ & & \lambda & \\ & & & 0 \\ & & & & C_{n-k \times n-k} \end{pmatrix}, \text{ ועל כן:}$$

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x - \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & -B \\ 0 & 0 & x - \lambda & \\ & 0 & & xI - C \end{vmatrix} = (x - \lambda)^k |xI - C|$$

כלומר $f_T(x) = |x - \lambda|^k h(x)$, כלומר λ שורש מרבי $k \leq$ - כלומר, הריבוי האלגברי $\leq$ גאומטרי. ☺

נשים לב שלפעמים מתקיים שיוויון, ולפעמים אי שיוויון חזק. זה לא שסתם אנו רושמים $\leq$. לדוגמא:

עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f_A = (x - 1)^2$, ולכן הריבוי האלגברי של 1 הוא 2. למה הריבוי הגאומטרי הוא 1 (ולא 2)? כי אז כל הוקטורים מתאימים לע"ע 1, ואז זו טרל"נ הזהות, וזה לא. ועכשיו בנסוח יותר פורמלי:

$\dim(V_1) = 2$ אזי $Av = v$ לכל v כלומר $A = I$. אבל $A \neq I$. באסה. לכן $\dim V_1 = 1$.

דוגמא אחרת: עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V_1 = R^2$, והריבוי האלגברי = ריבוי גאומטרי = 2. נשים לב שאם

λ ע"ע אזי קיים $w \in V$ כך ש $Tw = \lambda w$, ואז $V_\lambda \supseteq \text{sp}(w)$, $\dim(V_\lambda) \geq 1$.

'פינת התלפיון': לא אומרים תתי אלופים, אלא תת-אלופים.

סכום ישר של תת-מרחבים

V מ"ו, $V_1, V_2 \subseteq V$. מהו סכום של תת מרחבים? $\{w_1 + w_2 \mid w_i \in V_i\}$. גם $v_1 + v_2$ הוא תת מרחב (ראה סמסטר קודם).

נאמר כי סכום זה הוא **סכום ישר** ונסמן זאת $v_1 \oplus v_2$ אם מתקיים אחד מהתנאים השקולים הבאים

(אזהרה: הביטוי $V_1 \oplus V_2$ הינו חר משמעות אם לא מתקיימים התנאים):

$$1. \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

$$2. \text{לכל } w \in V_1 + V_2 \text{ יש הצגה יחידה } w = w_1 + w_2, w_1 \in V_1, w_2 \in V_2.$$

3. אם $u_1, \dots, u_l$ בסיס ל V_1 , $w_1, \dots, w_k$ בסיס ל V_2 , אזי $u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_k$ בסיס ל $V_1 + V_2$.

4. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

לתלמיד החרוץ: הוכח בבית שקילות.

סכום ישר של $V_1, \dots, V_k$ - כמה תת מרחבים

נאמר ש $V_1 + V_2 + \dots + V_k = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ אם מתקיימים התנאים הבאים (הגדרה אינדוקטיבית):

$$1. V_1 + V_2 + \dots + V_{k-1} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_{k-1}$$

$$2. (V_1 + \dots + V_{k-1}) + V_k = (V_1 \oplus \dots \oplus V_{k-1}) \oplus V_k$$

אפשר גם להגדיר כמו ההגדרה הקודמת, רק באופן גנרי ולא רק על 2. אפשר לוותר על ההעתקה. רק במקום ד':

$$\text{ד-חדש. } \forall i, V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$$

$$\text{ד-חדש2. } \forall i, V_i \cap \sum_{j < i} V_j = \{0\}$$

דוגמא לכך שלא מספיק שחיתוך של כל שני מרחבים הוא 0:

$$R^2, V_1 = \{(t, 0) \in R\}$$

$$V_2 = \{(0, t), t \in R\}$$

$$V_3 = \{(t, t), t \in R\}$$

תהי $T: V \rightarrow V$ טרל"נ עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

משפט 1: T לכסינה אמ"מ $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.

משפט 2: T לכסינה אמ"מ הפולינום האפייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים, והריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגאומטרי שלו.

משפט 3: T לכסינה אמ"מ הפולינום המינימלי של T מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.

הערה – הוכחות למטה

למה הפולינום המינימלי לא תלוי בייצוג לפי בסיס אלא רק בטרל"נ? אם A מייצג את T ביחס לבסיס כלשהו אז $P(A)$ מייצג את $P(T)$ ביחס לבסיס הנ"ל.

למה: אם $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ ע"ע שונים, אזי $\sum_{i=1}^l V_{\lambda_i}$ הינו סכום ישר.

הוכחה: באינדוקציה: עבור $k=1$, אין מה להוכיח.

עבור $k > 1$ - נוכיח כי $V_{\lambda_k} \cap \sum_{i=1}^{k-1} V_{\lambda_i}$ יהי $V_{\lambda_k} \cap \sum_{i=1}^{k-1} V_{\lambda_i}$. אפשר לכתוב:

$$w = \sum_{j=1}^{k-1} w_j, w_j \in V_{\lambda_j}$$

$$Tw = \lambda_k w = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_k w_j$$

$$(*) T(w) = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_k w_j \text{ - מצד שני - } w \in V_{\lambda_k}$$

ועל כן $\sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_k w_j$. אבל $\sum_{i=1}^{k-1} V_{\lambda_i}$ הוא סכום ישר, לכן לכל וקטור בסכום זה הצגה יחידה, לכן $\forall j, \lambda_j w_j = \lambda_k w_j$, אבל היות ש $\lambda_k \neq \lambda_j$, מתקיים $w_j = 0$, ולכן $w = 0$.

הוכחת משפט 1

(הערה: ראינו כי $\sum V_{\lambda_i} = \oplus V_{\lambda_i}$ - כל פעם שנרשום סיגמא, הכוונה לסכום ישר).

$\Leftarrow$ נניח T לכסינה. קיים ל T בסיס המורכב מוקטורים עצמיים, $w_1, \dots, w_n$, המתאימים לערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

נסמן $\forall 1 \leq i \leq k, V_i = sp\{***\}$ - איברי הבסיס המתאימים לע"ע λ_i . ברור כי $V_i \subseteq V_{\lambda_i}$. ועל כן $\dim V_i \leq \dim V_{\lambda_i}$.

$$n = \sum \dim V_i \leq \sum_{i=1}^k \dim V_{\lambda_i} = \dim \left(\sum V_{\lambda_i} \right) = n$$

(*) - כי הסכום הוא ישר. לכן $n = \dim \oplus V_{\lambda_i}$, כלומר $V = \oplus V_{\lambda_i}$.

$\Rightarrow$ נניח $V = \oplus V_{\lambda_i}$, אזי אם ניקח בסיס לכל V_{λ_i} , איחוד הבסיסים הנ"ל יהיה בסיס ל V , ובסיס זה מורכב מוקטורים עצמיים של T , ועל כן T לכסינה.

הוכחת משפט 3:

$\Leftarrow$ נניח ש T לכסינה, כלומר יש בסיס המורכב מוקטורים עצמיים (המתאימים לערכים העצמיים

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$). נגדיר $h(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$. ראינו שכל λ_i הוא שורש של הפולינום המינימלי של T ,

ולכן $h | m$, ולכן אם $h(T) = 0$, אזי $h = m$ - כי h הוא פולינום מתוקן).

$$h(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i I)$$

אבל $T - \lambda_j I$ מתחלף בכפל עם $T - \lambda_j I$ לכן

$$h(T) = (T - \lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_{i-1} I) \cdot (T - \lambda_{i+1} I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_k I) (T - \lambda_i I)$$

הוא וקטור בסיס המתאים לערך העצמי λ_i , אזי $h(T)w = 0$ כי $(T - \lambda_i I)w = 0$ - לכן $h(T)$

מאפס את כל איברי הבסיס, ולכן $h(T) = 0$.

למה הוא מתחלף בכפל:

$$(T - \lambda_i I)(T - \lambda_j I) = T^2 - \lambda_i IT - T \lambda_j I - \lambda_i \lambda_j I = T^2 - T \lambda_i I - \lambda_j IT + \lambda_i \lambda_j I$$

בכלליות: פולינומים מעל מטריצה ספציפית מתחלפים בכפל. $P(T)Q(T) = Q(T)P(T)$, לכל שני פולינומים $F[x]$.

$\Rightarrow$ - כיוון שני - נניח ש $m_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$ לפי משפט 1, די להראות ש $V = \bigoplus V_{\lambda_i}$. נגדיר

לכל $1 \leq j \leq k$ - $Q_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x - \lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i}$ יהי $w \in V$ ויהי $w_j = Q_j T(w)$.

טענה: א. $w = \sum_{j=1}^k w_j$

ב. $w_j \in V_{\lambda_j}$

לכן $V = \sum V_{\lambda_j}$

16.5.2006

תנאי המשחק להיום:

F שדה, V מ"ו מעל F , $T: V \rightarrow V$ טרל"נ. אם λ ע"ע של T – אזי $V_\lambda = \{*\}$ – התת מרחב הנפרש על ידי כל הוקטורים העצמיים של T המתאימים לע"ע λ . $\dim(V_\lambda)$ מוגדר כריבוי הגאומטרי של λ . הריבוי האלגברי של λ מוגדר כריבוי של λ כשורש של $f_T(x)$ (הפולינום האפייני של T).

הוכחנו כי ריבוי אלגברי $\leq$ ריבוי גאומטרי.

אם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ע"ע שונים של T , אזי $\sum V_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$

משפט: T לכסינה אמ"מ $V = \sum V_{\lambda_i} (= \bigoplus V_{\lambda_i})$

עד כאן – הוכחנו בשבוע שעבר.

משפטים שלא הוכחו מהפעם הקודמת:

משפט 2: T לכסינה אמ"מ הפולינום האפייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים, והריבוי האלגברי של כל ערך עצמי שווה לריבוי הגאומטרי שלו.

משפט 3: T לכסינה אמ"מ הפולינום המינימלי של T מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.

הערה: יש סבירות שיהיה במבחן – הוסבר ממש מספר פעמים.

הוכחת 2: $\Leftarrow$ אם T לכסינה, קיים V בסיס המורכב מו"ע של T . המטריצה של T לפי בסיס זה היא

אלכסונית, כלומר: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$ (הע"ע השונים של T). קל לראות

ש $f_T(x) = \prod (x - \lambda_i)^{m_i}$ (הוא הריבוי האלגברי). נגדיר $V_i =$ המרחב הנפרש ע"י וקטורי

הבסיס העצמיים המתאימים לע"ע λ_i . ברור כי $V_i \subseteq V_{\lambda_i}$. ידוע כי $\dim(V_i) =$ ריבוי אלגברי.

$\dim(V_{\lambda_i})$ – ריבוי גאומטרי. הגענו לכך שהריבוי הגאומטרי $\leq$ ריבוי אלגברי. ידוע גם כי ריבוי אלגברי $\leq$ ריבוי גאומטרי. כלומר – הם שווים.

$\Rightarrow$ בכיוון השני – נניח כי $f_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$ וכן שהריבוי הגאומטרי = ריבוי גאומטרי.

ידוע כי $\sum \dim(V_{\lambda_i}) =$ סכום הריבויים הגאומטריים שווה לסכום הריבויים האלגבריים =

$n = \sum m_i$. לכן $V = \sum V_{\lambda_i} \Rightarrow \dim \left(\sum_{i=1}^k V_{\lambda_i} \right) = \dim \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$ ועל כן T לכסינה (ע"פ משפט ראשון).

משפט 3: T לכסינה אמ"מ הפולינום המינימלי של T מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.

הוכחת 3:

$\Leftarrow$ אם T לכסינה, עם "ע" $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, ראינו ש $\prod_{i=1}^k (T - \lambda_i I)$ מאפסת את כל איברי הבסיס (שהם וקטורים עצמיים) – ולכן היא זהותית 0. ניתן גם להתבונן במטריצה המייצגת את T ע"פ בסיס של ו"ע

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad A - \lambda_i I = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_k - \lambda_i \end{pmatrix} \quad - \text{במיקום כלשהו יהיה על}$$

האלכסון 0, ולא קשה לראות שמכפלה מהצורה של מטריצת בלוקים, כמו:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(רמז – זה נכון לא רק ב 4×4 . סתם לא היה לי כוח לעשות נקודות).

$\Leftarrow$ (המשך הוכחת שבוע שעבר) – מכאן ש $h(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$ אזי $h(T) = 0$. לכן $m_T | h$.

אבל גם $m | h$ כי $(x - \lambda_i)$ חייב לחלק את m לכל λ_i . ועל כן $h = m$.

מה הרעיון בכל ההוכחה הזו:

אם ניתן למצוא הצגה $w = \sum w_j$, אזי היא יחידה, לכן באופן עקרוני, ניתן למצוא את w_i כפונקציה של w .

נחפש ונמצא (ונאמין) שבמקרה זה $w_i = (T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_k I) w$ (בלי $T - \lambda_i I$ במכפלה).

נבדוק 2 דברים: א. $w = \sum w_i$. ב. $0 = (t - \lambda_i I) w_i$.

$\Rightarrow$ יש הוכחה מטריציונית. אנחנו לא ריבס – לא אוהבים לעבוד עם מטריצות.

נניח ש $m_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$, $\forall i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$. צ"ל T לכסינה – כלומר –

$$V = \sum V_{\lambda_i} = \bigoplus V_{\lambda_i}. \text{ כלומר, רוצים להוכיח שלכל } w \in V \text{ ניתן לכתוב } w_i \in V_{\lambda_i}, w = \sum_{i=1}^k w_i.$$

אם קיימת הצגה כנ"ל, לכל $w \in V$, אזי היא יחידה – כי $\sum V_{\lambda_i} = \bigoplus V_{\lambda_i}$. בהנתן $w \in V$ נניח

$$w = \sum_{i=1}^k w_i, \text{ וננסה למצוא את } w_i.$$

נניח כי $w = w_1 + w_2 + \dots + w_k$.

$$T(w) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k$$

$$(T - \lambda_k I)w = (\lambda_1 - \lambda_k)w_1 + (\lambda_2 - \lambda_k)w_2 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)w_{k-1}$$

$$(T - \lambda_{k-1} I)(T - \lambda_k I)w = (\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_1 - \lambda_{k-1})w_1 + \dots +$$

...

$$(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) \cdot \dots \cdot (T - \lambda_k I)w = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_k)w_1$$

$$\lambda_i \text{ ראינו, אם כן, שאם יש הצגה } w = \sum w_i \text{ כנ"ל, אזי } w_1 = \frac{\prod_{i=2}^k (T - \lambda_i I)w}{\prod_{i=2}^k (\lambda_1 - \lambda_i)} \text{ (לא חילקנו ב0, כי } \lambda_i \text{ שונים).}$$

$$w_j = \frac{\prod_{i \neq j} (T - \lambda_i I)w}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} \text{ מצאנו את } w_1 \text{ , ובדרך דומה, אם יש הצגה } w = \sum w_i \text{ , אזי } w_j = \frac{\prod_{i \neq j} (T - \lambda_i I)w}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} \text{ . נסמן}$$

$$P_j(x) = \frac{\prod_{i \neq j} x - \lambda_i}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} \text{ , אזי, אם קיימת הצגה } w = P_j(T)w \text{ , כלומר, אם יש הצגה - אז}$$

$$w = \sum_{j=1}^k P_j(T)w \text{ . אם השיוויון נכון לכל } w \text{ , אזי } \sum_{j=1}^k P_j(T) = Id \text{ . יתר על כן - מדובר באמ"מ}$$

$$Id = \sum P_j(T) \text{ אם } P_j(T)w \in V_{\lambda_j} \text{ , } w = \sum P_j(T)w \text{ (למה הכיוון ההפוך?)}$$

$$(T - \lambda_j I)P_j(T) = (T - \lambda_j I) \frac{\prod_{i \neq j} (T - \lambda_i I)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} = \frac{\prod_{i=1}^k (T - \lambda_i I)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i)} = 0 \text{ . נותר להוכיח}$$

$$w \text{ ש } \sum_{j=1}^k P_j(T) = Id \text{ . נוכיח אפילו כי } \sum P_j(x) = 1$$

$$\deg(P_j(x)) = k - 1$$

$$\deg\left(\sum_{j=1}^k P_j(x)\right) \leq k - 1$$

$$P_j(\lambda_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\forall i, \sum_{j=1}^k P_j(\lambda_i) = 1$$

נסמן $P = \sum P_j$ אזי, $\deg P \leq k - 1$. $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = \dots = P(\lambda_k)$. $P - 1$ הוא פולינום

מדרגה $k - 1 \geq$ עם k שורשים שונים. כלומר $P - 1 = 0$. כלומר $P = 1$.

מרחבי מכפלה פנימית

(פרק י"ג בעמיצור)

עד הודעה חדשה, נעסוק במ"ו מעל R או מעל C .
המלצה: חזרה על מרוכבים.

במרחבים מהסוג R^n יש לנו אינטואיציה לגבי אורך של זווית בין 2 וקטורים. ב R^n נהוג להגדיר

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum a_i^2} \quad \alpha \in R^n \quad \text{את האורך של } \alpha$$

בהנתן α, β , נגדיר $\cos(\alpha, \beta)$ באופן הבא:

$$\cos(\alpha, \beta) = \frac{\|\alpha_0\|}{\|\beta\|}$$

(כאשר α_0 זה ההטלה על של β על α).

באמצעות מושג האורך והזווית, ניתן להגדיר מכפלה סקלרית בין וקטורים ב R^n (בהמשך נגדיר מכפלה סקלרית בכל מ"ו V מעל R ובאמצעותו נגדיר אורך וזווית).
איך נגדיר את המכפלה הסקלרית?

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : R^n \times R^n \rightarrow R$$

מוגדרת כ:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cos(\alpha, \beta)$$

(בעמיצור מסמנים - (α, β)).

הערה:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \cdot \|\alpha_0\|$$

כאשר α_0 ההטלה הניצבת של β על α .

ב R^n עם האורך והזווית המוטלים לנו יש נוסחה במיוחד למכפלה פנימית:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (a_1, \dots, a_n) \\ \beta &= (b_1, \dots, b_n) \end{aligned} \right\} \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

הגדרה: יהי V מ"ו מעל R . פונקציית $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$ תקרא מכפלה סקלרית אם היא מקיימת:

$$1. \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \quad \text{סימטריות}$$

$$2. \quad \langle a\alpha, \beta \rangle = a \langle \alpha, \beta \rangle, \forall a \in R \quad \text{הומוגניות (במשתנה הראשון)}$$

$$3. \quad \langle \alpha + \alpha', \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha', \beta \rangle \quad \text{ליניאריות (במשתנה הראשון)}$$

$$4. \quad \langle \alpha, \alpha \rangle > 0, \alpha \neq 0 \quad \text{חיוביות}$$

הערה: מסימטריות + הומוגניות וליניאריות במשתנה הראשון, ניתן להסיק הומוגניות וליניאריות במשתנה השני.

הגדרות: בהנתן מכפלה סקלרית כנ"ל, האורך של וקטור α יסומן: $\|\alpha\| := \langle \alpha, \alpha \rangle$

ולכל $\alpha, \beta \neq 0$ נגדיר $\cos(\alpha, \beta)$ ע"י הזהות: $\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\alpha, \beta)$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ תקרא מכפלה סקלרית אם מתקיים:

1. סימטריה: $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$
2. הומוגניות (במשתנה הראשון): $\langle a\alpha, \beta \rangle = a\langle \alpha, \beta \rangle, \forall a \in R$
3. ליניאריות (במשתנה הראשון): $\langle \alpha + \alpha', \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha', \beta \rangle$
4. חיוביות: לכל $\alpha \neq 0, \langle \alpha, \alpha \rangle > 0$.

הערה: מסימטריות + הומוגניות וליניאריות במשתנה הראשון, ניתן להסיק הומוגניות וליניאריות במשתנה השני.

הערה 2: ניתן להחליף את 3 + 4 בדרישה $\langle \alpha + a\alpha', \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + a\langle \alpha', \beta \rangle$. (בואו נחסוך דיו – חבל על הדיונונים).

הערה 3: מהומוגניות נובע $\langle 0, \alpha \rangle = 0 \forall \alpha$ (למה? $\langle 0 \cdot \alpha, \alpha \rangle = 0 \langle \alpha, \alpha \rangle = 0$).

הגדרה: אורך של וקטור α , שנסמנו $\|\alpha\| := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ (הערה: מותר להוציא שורש כי מדרישה 3 זה חיובי).

הגדרה: נגדיר $\cos(\alpha, \beta)$ כך (רק עבור $\alpha, \beta \neq 0$): (נתונה מכפלה פנימית, אנו מגדירים cosine):

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\alpha, \beta) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha, \beta) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

הגדרה: נאמר ש α ניצב ל β ונסמן $\alpha \perp \beta$ אם $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ונשים לב שאם $\alpha, \beta \neq 0$ מתקיים $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \cos(\alpha, \beta) = 0$, וכמובן $\alpha \perp 0$ לכל α .

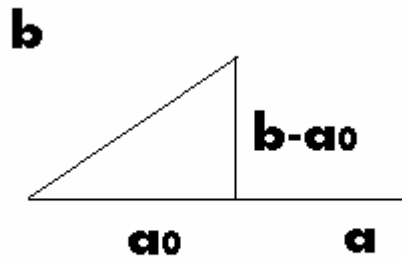
הערה: יש מכפלות סקלריות שונות, שקובעות את האורך והזווית.

דוגמאות:

1. יהי $V = R^n$, $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, ונגדיר $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. לא קשה לבדוק שהגדרה זו

מקיימת את התכונות הנדרשות. לדוגמא, נבדוק את תנאי 4: $\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ (אלא אם

כן $\forall i, a_i = 0$). מכפלה סקלרית זו נקראת **המכפלה הסקלרית הסטנדרטית** ב R^n והגדרות האורך וה $\cos$ ע"פ מכפלה זו הן המוכרות לנו.



(מה זה $\cos$? נניח שיש שני וקטורים, עם זווית ביניהם, שמטילים וקטור ביניהם (עם זווית

ישרה), ואז $\cos$ זה $\frac{\|\alpha_0\|}{\|\beta\|}$, כאשר α_0 זה α עד ההטלה עליו. למה?

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \cos(\alpha, \beta) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|} = \frac{\|\alpha_0\|}{\|\beta\|}$$

$$\alpha_0 = x - \alpha$$

$$\|\alpha_0\| = x \|\alpha\|$$

$$\frac{x \|\alpha\|}{\|\beta\|} = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

$$x = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}$$

$$\alpha_0 = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}$$

α_0 נקרא ההיטל של β על α . נבדוק כי מתקיים $\beta - \alpha_0 \perp \alpha$:

$$\langle \beta - \alpha_0, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle - \langle \alpha_0, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle - \frac{\langle \alpha, \beta \rangle \langle \alpha, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} = 0$$

כנדרש. על כן, קיים וקטור α_0 שהוא כפולה של $\alpha = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}$ כך ש $\beta - \alpha_0 \perp \alpha$.

ננקרא ההטלה של β על α .

(נשים לב: מה שעשינו נכון לכל מכפלה פנימית, לא רק לסטנדרטית).

2. יהי V מ"ו n מימדי מעל R עם בסיס $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ אזי בהנתן שני וקטורים

$$\alpha = \sum a_i \varepsilon_i, \beta = \sum b_i \varepsilon_i. \text{ נגדיר } \langle \alpha, \beta \rangle = \sum a_i b_i. \text{ קל לבדוק שהכללה זו של הדוגמא}$$

הקודמת היא אכן מכפלה סקלרית. נראה בהמשך כי אלו הדוגמאות היחידות.

3. V מעל R - אוסף כל הפונקציות הרציפות על הקטע $[-\pi, \pi]$. נגדיר:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

משפט הקוסינוסים: בהנתן V מ"ו מעל R עם מכפלה סקלרית, אז

$$\forall \alpha, \beta \in V, \|\alpha - \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2\|\alpha\|\|\beta\|\cos(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned}\|\alpha - \beta\|^2 &= \langle \alpha - \beta, \alpha - \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle - 2\langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle = \\ &= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2\|\alpha\|\|\beta\|\cos(\alpha, \beta)\end{aligned}$$
$$\|\gamma\| = \sqrt{\langle \gamma, \gamma \rangle} \Rightarrow \|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle$$

נרצה להגדיר **מכפלה פנימית** שהיא הכללה של המכפלה הסקלרית. מעל R דרשנו $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ וגם $\langle a\alpha, a\alpha \rangle = a^2 \langle \alpha, \alpha \rangle$. לכן אם ננקוט בגישה נאיבית מעל C , נקבל $\langle i\alpha, i\alpha \rangle = -1 \langle \alpha, \alpha \rangle$, ואז לא יתכן שגם $\langle i\alpha, i\alpha \rangle > 0$ וגם $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$. באסה.

(הערה: כשאומרים שמרוכב גדול מ-0, הכוונה הוא שהוא ממשי גדול מ-0).

תזכורת:

$$|a|^2 = a \cdot \bar{a}$$

ואכן מסתבר שההגדרה $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum a_i \bar{b}_i$ עבור $(a_1, \dots, a_n) = \alpha \in C^n$ ו- $(b_1, \dots, b_n) = \beta \in C^n$ שימושית עד מאוד.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$$
$$\langle \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, \alpha \rangle} \quad .1$$

2. הומוגניות במשתנה הראשון: $\langle a\alpha, \beta \rangle = a\langle \alpha, \beta \rangle, \forall a \in F$

3. ליניאריות: $\langle a + a', \beta \rangle = \langle a, \beta \rangle + \langle a', \beta \rangle$

4. חיוביות: $\forall \alpha \neq 0, \langle \alpha, \alpha \rangle > 0$

הערות:

- מ(1) – מכיוון ש $\langle \alpha, \alpha \rangle = \overline{\langle \alpha, \alpha \rangle}$, אזי $\langle \alpha, \alpha \rangle \in R$
- $\langle \alpha, a\beta \rangle = \bar{a} \langle \alpha, \beta \rangle$
- $\langle \alpha, \beta + \beta' \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \beta' \rangle$

כמו קודם, נגדיר אורך של וקטור: $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. נאמר ש $\alpha \perp \beta$ ניצב ל β אם

$\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ונגדיר עבור $\alpha, \beta \neq 0$ $\cos(\alpha, \beta)$ ע"י הזהות:

$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\alpha, \beta)$ ונשים לב כי $\cos(\alpha, \beta)$ יכול להיות מרוכב.

הערה: אם $F = R$, אז המכפלה הפנימית היא מכפלה סקלרית.

למרחב וקטורי כנ"ל עם מכפלה פנימית קוראים מרחב מכפלה פנימית.

למה:

א. $\|\alpha\| = 0$ אם ורק אם $\alpha = 0$

ב. $\|a\alpha\| = |a| \|\alpha\|$

ג. $\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \langle \alpha, \beta \rangle$ (הערה: $\operatorname{Re}(a + bi) := a$)
הממשי של c.

הוכחה:

א. $\|\alpha\| = 0 \iff \alpha = 0$ מהגדרה. $\Rightarrow$ כתרגיל.

ב. מכיוון ששניהם חיוביים, אפשר לבדוק את

הריבועים. $\|a\alpha\|^2 = \langle a\alpha, a\alpha \rangle = a \langle \alpha, \alpha \rangle = a \bar{a} \langle \alpha, \alpha \rangle = |a|^2 \|\alpha\|^2$. מ.ש.ל.

$\|\alpha \pm \beta\|^2 = \langle \alpha \pm \beta, \alpha \pm \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \pm \beta \rangle \pm \langle \beta, \alpha \pm \beta \rangle =$

$\langle \alpha, \alpha \rangle \pm \langle \alpha, \beta \rangle \pm \langle \beta, \alpha \rangle + \langle \beta, \beta \rangle = \|\alpha\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2$ ג.

$*c + \bar{c} = 2 \operatorname{Re}(c)$

מקרה פרטי של ג: $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ - משפט פיתגורס - $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$. $\alpha \perp \beta \Rightarrow$

משפט (קושי שוורץ):

'איפה האפסילון של קושי? שוורץ היה שם, הרגיע אותו'

V מרחב מכפלה פנימית, $\alpha, \beta \in V$, אזי $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$

ניסוח שקול:

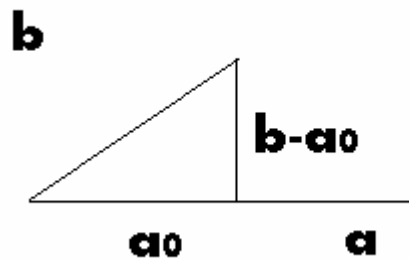
$$\|\alpha\| \|\beta\| \cos(\alpha, \beta) \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

כלומר, $|\cos(\alpha, \beta)| \leq 1$. אנו משתמשים ב $|ab| = |a| |b|$.

דוגמאות קונקרטיות:

- א. אם $a_1, \dots, a_n$ ממשיים, אזי $\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right) \left(\sum b_i^2\right)$
- ב. f, g פונקציות רציפות על קטע סגור $[-1, 1]$ $\int f \cdot g \leq \sqrt{\int f^2} \sqrt{\int g^2}$
- ג. דוגמא נוספת – כשנלמד הסתברות: x משתנה מקרי, אזי $E(x^2) \geq [E(x)]^2$.

הערה: מיד נראה שיש שיוויון באי שיוויון קושי – שוורץ אמ"מ α, β תלויים ליניארית.
הוכחה (קושי שוורץ):



ראשית, נשים לב שאם $\alpha = 0$ או $\beta = 0$, אזי יש שיוויון. לכן, נניח שלא.

$$\alpha_0 = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha \quad \text{יהי}$$

$$\gamma = \beta - \alpha_0 \quad \text{ויהי}$$

נראה ש $\|\gamma\| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$ שקול ל $0 \leq \|\gamma\|$. כמו כן, נראה שיש שיוויון אמ"מ $\gamma = 0$, ואז $\beta = \alpha_0$, ואז α, β תלויים ליניארית.

$$\|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \beta - \alpha_0, \beta - \alpha_0 \rangle =$$

חישוב עזר – נטען כי $\gamma \perp \alpha_0$.

$$\alpha_0 = x \cdot \alpha, x = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\|^2}$$

$$\langle \gamma, \alpha_0 \rangle = \langle \gamma, x\alpha \rangle = \bar{x} \langle \gamma, \alpha \rangle = \bar{x} \langle \beta - \alpha_0, \alpha \rangle = \bar{x} (\langle \beta, \alpha \rangle - \langle \alpha_0, \alpha \rangle) =$$

$$\bar{x} (\langle \beta, \alpha \rangle) \dots$$

to be continued....

23.5.2006

אי שיוויון קושי שוררין

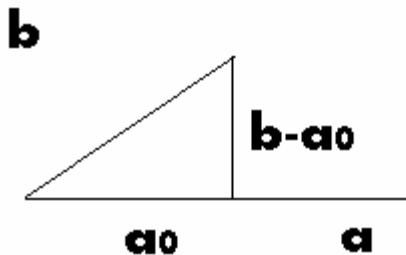
V מרחב מכפלה פנימית, $\alpha, \beta \in V$ אזי $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$

ניסוח שקול:

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\alpha, \beta)$$

ובנוסף – שיוויון אמ"מ α, β ת"ל.

הוכחה:



$$\gamma := \beta - \alpha_0$$

נתחיל בכך שנמצא $x \in F$ כך שאם $\alpha_0 = x \cdot \alpha$ ו $\gamma = \beta - \alpha_0$ אזי $\gamma \perp \alpha$ (כמו כן $\gamma \perp \alpha_0$).

$$0 = \langle \gamma, \alpha \rangle = \langle \beta - \alpha, \alpha \rangle = \langle \beta - x\alpha, \alpha \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle - x \langle \alpha, \alpha \rangle \Leftrightarrow x = \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}$$

$$0 \leq \|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \langle \gamma, \beta - \alpha_0 \rangle = \langle \gamma, \beta \rangle - \langle \gamma, \alpha_0 \rangle = \langle \gamma, \beta \rangle = \langle \beta - \alpha_0, \beta \rangle =$$

$$\langle \beta, \beta \rangle - \langle \alpha_0, \beta \rangle = \|\beta\|^2 - x \langle \alpha, \beta \rangle = \|\beta\|^2 - \frac{|\langle \alpha, \beta \rangle|^2}{\|\alpha\|^2} \quad \text{כעת,}$$

כלומר:

$$\|\beta\| \|\alpha\| \geq |\langle \alpha, \beta \rangle|$$

שיוויון $\Leftrightarrow \gamma = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha_0 \Leftrightarrow \beta = x\alpha$ כלומר β, α ת"ל.

הוכחה נוספת:

לכל מספר מרוכב $b \neq 0$ קיים $|c| = 1$ כך ש $0 < bc$. מפורשות: $c = e^{-i\theta}, b = re^{i\theta}$.

נוסחה: $e^{\pi i} + 1 = 0$. 'תלמדו אותה בתורת החבורות המבולבלות'.

בהנתן $\alpha, \beta \neq 0$ קיים $|c| = 1$ כך ש $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. נגדיר $\alpha' = c\alpha$ ואז

$$\|\alpha'\| = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle c\alpha, c\alpha \rangle = |c| \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle = \|\alpha\|^2$$

אם נסתכל על $\langle \alpha', \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle c$ ועל כן $|\langle \alpha', \beta \rangle| = |\langle \alpha, \beta \rangle|$

ועכשיו נוכיח. לכל $t \in R$ נתבונן ב:

$$0 \leq \langle a' + t\beta, a' + t\beta \rangle = \|a'\|^2 + t^2 \|\beta\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle a', \beta \rangle =$$

$$\|a'\|^2 + 2t \langle a', \beta \rangle + t^2 \|\beta\|^2$$

הדיסקרימיננטה $0 \geq$, כלומר $\langle a', \beta \rangle \leq \|a'\| \|\beta\| \Leftrightarrow \langle a', \beta \rangle^2 \leq \|a'\|^2 \|\beta\|^2$.

להגיד שיש שיוויון, אומר שהדיסקרימיננטה $0 =$, ואז t יחיד כך ש $f(t) = 0$. $\Leftrightarrow$ קיים t כך

ש $\|a' + t\beta\| = 0$. כלומר $a' + t\beta = 0$. כלומר $ca + tb = 0$, כלומר a, β ת"ל.

אי שיוויון המשולש:

V ממ"פ $\alpha, \beta \in V$, אזי $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$, שיוויון אמ"מ $\alpha = 0$ או $\beta = \lambda\alpha$, $\lambda \geq 0$.

הוכחה:

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \|\alpha\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2 \leq$$

$$\|\alpha\|^2 + 2|\langle \alpha, \beta \rangle| + \|\beta\|^2 \stackrel{Cauchy\ Schwartz}{\leq} \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \|\beta\| + \|\beta\|^2 = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$$

בואו נראה מתי יש שיוויון:

אם $\alpha = 0$ או $\beta = 0$. נניח $\alpha, \beta \neq 0$. שיוויון ב(*) אומר שהם ת"ל, כלומר $\beta = \lambda\alpha$. שיוויון

ב(**) אומר ש $\langle \alpha, \beta \rangle \in R \Leftrightarrow \langle \alpha, \lambda\alpha \rangle \in R \Leftrightarrow \lambda \langle \alpha, \alpha \rangle \in R \Leftrightarrow \lambda \in R$

צריך לראות שאם $\lambda < 0$ אין שיוויון – נשאיר לתלמיד החרוץ.

תוצאה:

$$\|\alpha + \beta\| \geq \|\alpha\| - \|\beta\|$$

הוכחה:

$$\|\alpha\| = \|\beta + \alpha - \beta\| \leq \|\beta + \alpha\| + \|-\beta\| = \|\beta + \alpha\| + \|\beta\| \Leftrightarrow$$

$$\|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha + \beta\|$$

באופן סימטרי - $\|\beta\| - \|\alpha\| \leq \|\alpha + \beta\|$, כלומר $\|\alpha\| - \|\beta\| \leq \|\alpha + \beta\|$.

מערכות אורתונורמליות:

יהי V ממ"פ מעל שדה F (R או C) נאמר שקבוצת וקטורים $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ מהווה מערכת אורתוגונלית

(ניצבת) אם $\varepsilon_i \perp \varepsilon_j$ לכל $i \neq j$.

נאמר שהמערכת אורתונורמלית אם בנוסף אורך כל ה- ε הוא 1, כלומר $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$.

דוגמא: הבסיס הסטנדרטי ב R^n הוא אורתונורמלי ביחס למכפלה הסקלרית הסטנדרטית ב R^n .

למה: יהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ מערכת אורתונורמלית, אזי אם $\alpha \in V$ הנמצא ב $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k$ אזי

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \quad \text{וכמו כן:}$$

$$\|\alpha\|^2 = \sum |a_i|^2 = \sum |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2, a_i := \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \quad \text{שיוויון פרסבל:}$$

הוכחה: נניח $\alpha = \sum a_i \varepsilon_i$ עבור a_i כלשהם. לכל i נתבונן

$$\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \sum_{j=1}^k a_j \langle \varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle = \sum a_j \delta_{ji} = a_i \quad \text{ב} \quad (\text{הוכחנו את הלמה}).$$

בואו ונחשב :

$$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \left\langle \sum a_i \varepsilon_i, \sum a_i \varepsilon_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i \overline{a_j} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \sum_{i=1}^k a_i \overline{a_i} = \sum |a_i|^2$$

הערה: עם קצת מאמץ ניתן גם להוכיח את פרסבל באינדוקציה.

תוצאה: אם $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית אזי ε_i בת"ל. למה? נניח $0 = \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i$, אזי לכל i יתקיים $a_i = \langle 0, \varepsilon_i \rangle = 0$.

בהנתן מערכת אורתונורמלית $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ ווקטור α הוקטור $\sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ יקרא **ההטלה הניצבת** של α על $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k$. $\gamma := \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ יקרא **הניצב** היורד מ α ל $span$ של $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$.

הגדרה: $B \subseteq V$. נאמר $\alpha \perp B$ אם $\alpha \perp \beta$ לכל $\beta \in B$.

הערה: אם $B = span\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ אז $\alpha \perp B \Leftrightarrow \alpha \perp \beta_i$ $\forall i$.

למה: אם $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית אזי $\alpha \in sp\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ אם ורק אם

$$(א) \quad \gamma = \alpha - \sum \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = 0 \quad \text{וכמו כן}$$

$$(ב) \quad \gamma \perp sp(\{\varepsilon_i\}) \quad \text{וכמו כן}$$

$$(ג) \quad \|\alpha\|^2 = \sum |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2 + \|\gamma\|^2$$

הוכחה:

א. אם $\gamma = 0$ אזי $\alpha = \sum \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$, כלומר α ב $span$. אם α ב $span$ כבר הוכחנו

$$\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \sum \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$$

ב. לפי ההערה די להוכיח כי $\gamma \perp \varepsilon_i$ לכל i :

$$\langle \gamma, \varepsilon_i \rangle = \left\langle \alpha - \sum_j \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j, \varepsilon_i \right\rangle = \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle - \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = 0$$

ג.

$$\alpha = \gamma + \sum a_i \varepsilon_i, \quad a_i = \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle$$

$$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \left\langle \gamma + \sum a_i \varepsilon_i, \gamma + \sum a_i \varepsilon_i \right\rangle = \|\gamma\|^2 + \sum |a_i|^2$$

תרגיל: $\|\gamma\|$ הוא המרחק בין α ל span , כלומר ההטלה של γ היא הנקודה הקרובה ביותר ל α ב span .

הגדרה: המרחק בין שני וקטורים α, β הוא $\|\alpha - \beta\|$ ונסמנו $d(\alpha, \beta)$. הוא מקיים:

- סימטריה: $d(\beta, \alpha) = d(\alpha, \beta)$
- אי שוויון המשולש: $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \leq d(\alpha, \gamma)$
- אי שלילות: $d(\alpha, \alpha) = 0$, $d(\alpha, \beta) > 0$, $\alpha \neq \beta$

תוצאה: תהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ מערכת אורתונורמלית:

א. **אי שוויון בסל:** לכל $\alpha \in V$ מתקיים $\|\alpha\|^2 \geq \sum |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$

ב. $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ בסיס אמ"מ יש שוויון לכל α באי שוויון הנ"ל.

הוכחה:

א. לפי סעיף ג' $\|\alpha\|^2 \geq \sum |\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle|^2$ ושוויון אמ"מ $\gamma = 0$.

ב. אם $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אזי כל α שייך ל span שלהם, ו γ תמיד 0. $\Leftarrow$ אם $\gamma = 0$ אזי α שייך ל span .

משפט: יהי V ממ"פ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס, אזי קיימים $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי, וכמו כן,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \text{span}\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k = \text{span}\{\alpha_i\}_{i=1}^k$$

מסקנה: בהנתן מכפלה פנימית קיים בסיס $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ כך שהמכפלה הפנימית נתונה ע"י הנוסחה הבאה:

$$\alpha = \sum a_i \varepsilon_i, \beta = \sum b_i \varepsilon_i$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum a_i \bar{b}_i$$

24.5.2006

V מרחב מכפלה פנימית מעל C או R .
 V ממימד סופי.

$U \subseteq V$ תת מרחב. $\alpha \in V$. נרצה לכתוב $\alpha = u + \gamma$ כאשר $u \in U$ ו- $\gamma \perp U$.
 נטען כי הצגה זו קיימת ויחידה.

אם ε וקטור יחידה ($\|\varepsilon\| = 1$) אזי הטלה של α על ε שווה ל- $\langle \alpha, \varepsilon \rangle \varepsilon$.
 אם $\alpha \in sp(\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$, כאשר $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ מערכת אורתונורמלית, אזי
 $\alpha = \langle \alpha, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle \alpha, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2$.

אם $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ מערכת אורתונורמלית, לכל α קיימת הצגה יחידה
 $\alpha = \gamma + u$, $\gamma \perp sp(\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k)$, $u \in sp(\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k)$ (ועל כן גם ל- γ).

$$\alpha = \gamma + \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$$

($\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ זה ההיטל של α על ε_i).

כל זה היה קצת רכילות. נחזור למשפט מאתמול:
משפט: יהי V ממ"פ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס, אזי קיימים $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי, וכמו כן,

$$\forall 1 \leq k \leq n, span\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k = span\{\alpha_i\}_{i=1}^k$$

הוכחה: תהליך האורתוגונליזציה של גרם שמידט.
 באינדוקציה על k :

$$k=1: \alpha_1 \neq 0 \text{ (חלק מבסיס)} - \text{לכן נגדיר } \varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}. \text{ נבדוק:}$$

$$\|\varepsilon_1\|^2 = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \left\langle \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} \right\rangle = \frac{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2} = 1$$

שלב האינדוקציה: נניח מצאנו $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}\}$ מערכת אורתונורמלית כך ש

$$sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}) = sp(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$$

נכתוב:

$$\alpha_k = \varepsilon'_k + \sum_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \text{ (פירוק להטלה + ניצב)}.$$

כלומר:

$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon'_k\}$ ועל כן $\varepsilon'_k \perp sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ (ממה שהוכחנו אתמול פרוק זה קיים ויחיד).
 מערכת אורתוגונלית. $\varepsilon'_k \neq 0$ ($\alpha_k \notin sp(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$), כי הם בת"ל. ועל כן
 $\alpha_k \notin sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ (ולכן הניצב ל- $span$ זה אינו 0).

$$\alpha_k \in sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \alpha_k) \text{ , ועל כן } \varepsilon'_k \in sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \alpha_k)$$

$$sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \alpha_k) = sp(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon'_k) = sp(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

נגדיר: $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon'_k}{\|\varepsilon'_k\|}$ ונקבל את הדרוש.

דוגמא: נתחיל ב $\{\alpha_2 := (3, 3), \alpha_1 := (5, 0)\}$ בתבונן ב R^2 עם המכפלה הסקלרית הסטנדרטית. ראשית:

$$\varepsilon_1 = (1, 0) \text{ (חלוקה באורך של } \alpha_1 \text{)}$$

ε'_2 הוא הניצב מ α_2 $sp(\varepsilon_1)$, ועל כן $\varepsilon'_2 = (0, 3)$. נגרמל את ε'_2 ונגיע לזה ש $\varepsilon_2 = (0, 1)$. הללויה.

מסקנות:

ראינו שלכל מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי יש בסיס אורתונורמלי. ביחס לבסיס שכזה מקבלת המכפלה הפנימית צורה פשוטה במיוחד:

אם הבסיס האורתונורמלי הוא $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, $\alpha = \sum a_i \varepsilon_i$, $\beta = \sum b_i \varepsilon_i$, אזי

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum a_i \bar{b}_i = \sum \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \langle \varepsilon_i, \beta \rangle$$

הערה: במהלך תהליך גרם-שמידט אם α_k הוא וקטור יחידה ניצב ל $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}$ אזי $\varepsilon_k = \alpha_k$. למה?

$$\varepsilon_k = \frac{\alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i}{\left\| \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\|}$$

(הסיגמאות מתאפסות, והאורך של α_k הוא 1).

מסקנה מהערה: בהנתן מערכת אורתונורמלית $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ ניתן תמיד להשלים אותה לבסיס אורתונורמלי

(ראשית נשלים אותה לבסיס $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$, ואז נבצע גרם-שמידט, ולפי ההערה $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ ישארו כמו שהם.

המשלים הניצב של תת מרחב

דוגמא: R^3 עם מכפלה סקלרית סטנדרטית. $U = sp(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$. כל $\alpha \in R^3$ ניתן $\gamma = (0, 0, 1)$

להצגה יחידה $(\alpha = \beta + \gamma, \beta \in U, \gamma \in sp(\gamma))$.

הגדרה: יהי V מ"פ. ויהי $U \subseteq V$ ת"מ. המשלים הניצב של U ב V הוא

$$U^\perp = \{\alpha \in V \mid \alpha \perp U\} = \{\alpha \in V \mid \forall \beta \in U, \alpha \perp \beta\}$$

למה: יהי $U \subseteq V$ ת"מ אזי:

א. $U^\perp$ הוא תת מרחב.

ב. $U \subseteq (U^\perp)^\perp$

ג. $\{0\} = U \cap U^\perp$

הוכחה:

א.

a. $0 \in U^\perp$

b. סגירת לחיבור וכפל בסקלר: $\alpha \in U^\perp, \beta \in U^\perp, c \in F, \gamma \in U$
כלומר $\langle \alpha + c\beta, \gamma \rangle = 0 + c0 = 0$

$$\alpha + c\beta \in U^\perp$$

ב. יהי $\alpha \in U$, אם $\beta \in U^\perp$ אזי $\alpha \perp \beta$, ולכן $\alpha \in (U^\perp)^\perp$.

a. הערה: מייד נראה כי שאם V ממימד סופי, אזי $(U^\perp)^\perp = U$, אבל זה לא נכון

במימד אינסופי.

ג. $\alpha \in U \cap U^\perp$. $\alpha \perp \alpha$ (כי הוא ניצב לכל הוקטורים ב- U , ולכן גם לעצמו), כלומר

$$\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

דוגמאות להערה ב-a

נראה דוגמא ב- $U \neq (U^\perp)^\perp$. $V = l_2(R)$ מ"ו מעל R :

$$l_2(R) = \left\{ (a_1, a_2, \dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$$

חיבור וכפל קוארדינטה קוארדינטה.

נראה שזה מ"ו:

$$\sum a_i^2 < \infty \Rightarrow \sum (ca_i)^2 < \infty$$

חיבור סכימות:

$$a = (a_1, a_2, \dots)$$

$$b = (b_1, \dots)$$

$$\sum a_i^2 < \infty, \sum b_i^2 < \infty$$

$$\sum (a_i + b_i)^2 = \sum a_i^2 + 2\sum a_i b_i + \sum b_i^2 = \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

נשים לב שלכל n

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = M < \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i < M$$

ועל כן זה מרחב וקטורי.

נגדיר מכפלה פנימית:

$$a = (a_1, a_2, \dots)$$

$$b = (b_1, b_2, \dots)$$

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i < \infty$$

(זה קטן מאינסוף, ולכן זה מספר ממשי, קל לבדוק את שאר התכונות הנדרשות של מכפלה פנימית).

יהי $U \subseteq l_2(R)$ אוסף כל הוקטורים האפסים (eventually zero)

$$\{a \mid \exists m, \forall n > m, a_n = 0\}$$

קל לבדוק ש U תת מרחב. בפרט:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, \dots) \in U$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, \dots) \in U$$

...

$$e_i = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) \in U$$

אנו רואים כי $e_i \in U$ לכל i .

נניח $a \in U^\perp$, ולכן $a_1 = \langle a, e_1 \rangle = 0$.

$$0 = \langle a, e_2 \rangle = a_2$$

...

$$0 = \langle a, e_i \rangle = a_i$$

ועל כן - $a = 0$.

$$(U^\perp)^\perp = l_2(R) \neq U$$

$$a_n = \frac{1}{n} \in l_2(R) \text{ - לדוגמא}$$

$$a_n \notin U$$

'סיום קצר בנבכי החשבון האינפיניטסימלי'.

משפט: אם V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $U \subseteq V$ תת מרחב, אזי $V = U \oplus U^\perp$.

(תזכורת: $U \oplus U^\perp$ - אם $V_1, V_2 \subseteq V$ תת מרחבים, אזי

$$v_1 + v_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in V_1, a_2 \in V_2\}$$

התנאים השקולים:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 \quad \text{א.}$$

$$V_1 + V_2 \text{ איחוד של בסיס של } V_1 \text{ שווה לבסיס של } V_2 \quad \text{ב.}$$

$$V_1 \cap V_2 = \{0\} \quad \text{ג.}$$

$$\alpha \in V_1 + V_2 \text{ קיימת הצגה } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \text{ יחידה } \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2 \text{ (} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \text{).} \quad \text{ד.}$$

הוכחה:

אנו יודעים כי $U \cap U^\perp = \{0\}$ לכן די להוכיח כי $V = U + U^\perp$, כלומר לכל $\alpha \in V$ ניתן למצוא $\alpha = u + w$ כך ש $u \in U, w \in U^\perp$.
היות שהמימד של U סופי, נוכל לבחור ל U בסיס אורתונורמלי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ ואז:

$$\alpha = \gamma + \sum \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$$

כש $\gamma \perp U$ כלומר $\gamma \perp \text{sp}(\varepsilon_i)$ וזו ההצגה שחיפשונו.

תוצאה: אם V ממ"פ ממימד סופי, אזי $U = (U^\perp)^\perp$

הוכחה: מהמשפט הקודם נובע $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$. באופן דומה, $\dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp = \dim V$, ועל כן $\dim U = \dim (U^\perp)^\perp$. אבל ראינו $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ ולכן הם שווים.

תם ונשלם פרק י"ג שמדבר על מרחבי מכפלה פנימית. הגענו לפרק י"ד.

טרנספורמציות ליניאריות במרחבי מכפלה פנימית

אבל, לא למדנו את פרק ו', אז נלמד אותו עכשיו.

פונקציונלים ליניאריים ומרחבים דואליים

יהי V מרחב וקטורי מעל F . $\varphi: V \rightarrow F$ תקרא פונקציונל ליניארי אם היא טרנספורמציה ליניארית $V \rightarrow F$. (נזכור ש F מ"ו חד מימדי מעל F).
כלומר:

$$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

$$\varphi(c\alpha) = c\varphi(\alpha)$$

לדוגמא:

$$a. \text{ מעל } R^3, \varphi(x, y, z) = x$$

ב. V מרחב כל הפולינומים הממשיים במשתנה x הפורמלי $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ל n כלשהו. ניתן

להגדיר $\varphi(p) = p(b), b \in F$. קל לראות כי זה פונקציונל ליניארי.

ג. V כלשהו, פונקציונל האפס $\varphi(\alpha) = 0, \forall \alpha \in V$.

ד. V ממ"פ, $\beta \in V$, ניתן להגדיר $\varphi_\beta(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$. העובדה שזהו פונקציונל ליניארי נובע מתכונות המכפלה הפנימית.

$$\text{הערות: } \varphi(0) = 0, \varphi\left(\sum_{i=1}^m a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi(\alpha_i)$$

משפט: יהי V מ"ו מממד n אזי לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס ולכל $a_1, \dots, a_n \in F$ קיים פונקציונל ליניארי יחיד φ כך ש $\varphi(\alpha_i) = a_i$ עבור $1 \leq i \leq n$.

הוכחה:

א. קיום: יהי $\alpha = \sum x_i \alpha_i$. נגדיר: $\varphi(\alpha) = \sum x_i a_i$. קל לבדוק ליניאריות.

ב. יחידות: בגלל ליניאריות.

תוצאות:

א. פונקציונל ליניארי המתאפס על איברי הבסיס הוא זהותית 0.

הגדרה: V^* , המרחב הדואלי ל V הוא אוסף כל הפונקציונליים הליניאריים על V , שהוא מרחב וקטורי מעל F . עם ההגדרות הבאות של כפל וחיבור:

$$\varphi + \psi(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

$$(c\varphi)(\alpha) := c \cdot \varphi(\alpha)$$

צריך לבדוק שקיבלנו מרחב וקטורי.

30.5.2006

פונקציונלים ליניאריים:

V מ"ו מעל F , ממימד סופי.

$\varphi: V \rightarrow F$ טרנספורמציה ליניארית, יקרא פונקציונל ליניארי.

אם φ פ"ל, $a_1, \dots, a_m \in F$, ומתקיים $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V$ אזי:

$$\varphi\left(\sum a_i \alpha_i\right) = \sum a_i \varphi(\alpha_i)$$

בפרט: $\varphi(0) = 0$.

משפט (הוכח קודם): אם V מממד n אזי לכל $a_1, \dots, a_n \in F$ ולכל בסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ קיים

פונקציונל ליניארי יחיד φ כך ש $\varphi(\alpha_i) = a_i, \forall i$.

פונקציונל ליניארי נקבע ע"י ערכיו על בסיס

הגדרה: V^* המרחב הדואלי ל V הוא מרחב כל הפונקציונלים הליניאריים על V , עם הגדרות חיבור וכפל בסקלר ליניאריות:

$$\varphi + \psi(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

$$(c\varphi)(\alpha) := c \cdot \varphi(\alpha)$$

משפט: לכל בסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ של V קיים בסיס יחיד $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ל V^* שנקרא הבסיס הדואלי ומקיים:

$$\varphi_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

הוכחה:

קיום ויחידות נובעים מהמשפט הקודם. האם אכן $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ בסיס ל V^* ? נראה שהם פורשים. יהי

$$\varphi \in V^*, \text{ ונגיח } \forall i, \varphi(\alpha_i) = a_i, \text{ אזי אם הפונקציונל } \psi = \sum a_i \varphi_i \text{ אזי } \psi = \varphi \text{ כי}$$

$$\psi(\alpha_i) = a_i = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(\alpha_i) = a_i$$

$$\varphi = \psi \in \text{sp}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

מסקנות:

$$\bullet \dim(V) = \dim(V^*)$$

$$\bullet \text{ (ממשפט לפני קודם) אם } \alpha \in V \text{ כך ש } \varphi(\alpha) = 0, \forall \varphi \in V^*, \text{ אזי } \alpha = 0.$$

$$\bullet \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ בסיס ל } V, \text{ ו } \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ בסיס דואלי, אם } \varphi = \sum x_i \varphi_i, \alpha = \sum a_i \alpha_i, \text{ אזי}$$

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

טענה: אם V מ"ו מממד סופי, אזי קיים איזומורפיזם טבעי $(V^*)^*$ ל V .

שו האדה איזומורפיזם טבעי? ברור ש $(V^*)^*$ איזומורפי ל V , כי שניהם מאותו מימד. מה זה טבעי? יותר 'ברור'.

טענה: לכל $\alpha \in V$ ניתן להגדיר $\bar{\alpha} \in V^{**}$ כך :

$$\bar{\alpha}(\varphi) := \varphi(\alpha)$$

הוכחה: צ"ל ש $\bar{\alpha}$ הוא אכן פונקציונל ליניארי על V^* :

$$\bar{\alpha}(\varphi + \psi) = \varphi + \psi(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha) = \bar{\alpha}(\psi) + \bar{\alpha}(\varphi)$$

באופן דומה:

$$\bar{\alpha}(c \cdot \varphi) = (c \cdot \varphi)(\alpha) = c(\varphi(\alpha)) = c \cdot \bar{\alpha}(\varphi)$$

הבהרה:

$$\varphi \in V^*$$

$$\varphi: V \rightarrow F$$

$$a: V^* \rightarrow F \text{ אזי } , a \in (V^*)^*$$

$$a \in V, \bar{\alpha}: V^* \rightarrow F$$

$$\bar{\alpha}(\varphi) = \varphi(\alpha)$$

משפט: יהי V מ"ו ממימד סופי מעל F . לכל $\alpha \in V$ נגדיר $\bar{\alpha} \in (V^*)^*$ ע"י

$$\bar{\alpha}(\varphi) = \varphi(\alpha), \forall \varphi \in V^*$$

אזי ההתאמה $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ היא איזומורפיזם מ V ל V^{**} איזומורפיזם זה נקרא 'האיזומורפיזם הטבעי'.

הוכחה: ראשית, ראינו שאכן $\bar{\alpha} \in V^{**}$ לכל $\alpha \in V$. צריך להראות ליניאריות, חח"ע ועל. 1. לינאריות:

$$\overline{\alpha + \beta}(\varphi) = \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \bar{\alpha}(\varphi) + \bar{\beta}(\varphi) \quad a.$$

$$\overline{c\alpha}(\varphi) = \varphi(c\alpha) = c\varphi(\alpha) = c \cdot \bar{\alpha}(\varphi) \quad b.$$

$$2. \text{ חח"ע: מספיק להראות } \bar{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

(למה? טענת עזר: $T: V \rightarrow W$ ט"ל, אזי T חח"ע אמ"מ $\ker T = \{0\}$. הוכחה: אם T

חח"ע ו $\alpha \neq 0$ $T(\alpha) \neq T(0) = 0$ לכן $\ker T = \{0\}$. בכיוון השני – אם T איננה

חח"ע אזי קיימים $\alpha \neq \beta$ כך ש $T(\alpha) = T(\beta)$ ואז $T(\alpha - \beta) = 0$.

כלומר $\ker T$ ההעתקה $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ הוא 0. אם $\bar{\alpha} = 0$ אזי $\bar{\alpha}(\varphi) = \varphi(\alpha) = 0$ וזה יתכן רק

עבור $\alpha = 0$ (מטענה בעמוד הקודם).

3. על: משויון מימדים של V, V^{**} וחח"ע.

סיימנו פונקציונליים ליניאריים (פרק ו' בעמיצור). נעבור לפרק י"ד בעמיצור:

טרנספורמציות במרחבי מכפלה פנימית

V מרחב מכפלה פנימית מעל F (או C , או R), וממימד סופי. תהי $T: V \rightarrow V$ טרל"נ. נתבונן

בתבנית הביילינארית $\langle T\alpha, \beta \rangle$, כאשר $\alpha, \beta \in V$.

נשים לב להגדרה: $\langle T\alpha, \beta \rangle$ נקראת התבנית הבי-ליניארית המוגדרת ע"י T.

טענה: $T: V \rightarrow V$ ט"ל, אזי לכל $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in V, a, b \in F$ מתקיימים:

$$1. \langle T(\alpha + \alpha'), \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\alpha', \beta \rangle$$

$$2. \langle T\alpha, \beta + \beta' \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\alpha, \beta' \rangle$$

$$3. \langle Ta\alpha, \beta \rangle = a \langle T\alpha, \beta \rangle$$

$$4. \langle T\alpha, b\beta \rangle = \bar{b} \langle T\alpha, \beta \rangle \text{ (מעל } \mathbb{R} \text{ } \bar{b} := b \text{)}$$

הוכחות: למשועממים.

למה:

$$א. \text{ אם } \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle \text{ לכל } \alpha \in V \text{ אזי } \beta = \gamma$$

$$ב. \text{ אם } \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \gamma, \alpha \rangle \text{ לכל } \alpha \in V \text{ אזי } \beta = \gamma$$

$$ג. \text{ אם } T, S \in HOM(V, V) \text{ ו-} \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle S\alpha, \beta \rangle \text{ לכל } \alpha, \beta \text{ אזי } T = S$$

$$ד. \text{ אם } \langle \alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, S\beta \rangle \text{ לכל } \alpha, \beta \text{ אזי } T = S$$

$$ה. \text{ אם } \langle T\alpha, \beta \rangle = 0 \text{ או } \langle \alpha, T\beta \rangle = 0 \text{ לכל } \alpha, \beta \text{ אזי } T = 0.$$

a. הערה: לא נכון $\langle \alpha, T\alpha \rangle = 0 \forall \alpha$ אזי $T = 0$ - במקרה של העתקה שמסובבת וקטור, לדוגמא.

הוכחה:

$$א. \text{ אם } \langle \alpha, \beta - \gamma \rangle = 0 \forall \alpha, \text{ ובפרט } \langle \beta - \gamma, \beta - \gamma \rangle = 0 \text{ ולכן } \|\beta - \gamma\|^2 = 0$$

$$\beta - \gamma = 0$$

ב. כנ"ל.

$$ג. \text{ נקבע את } \alpha \text{ לכל } \beta \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle S\alpha, \beta \rangle, \text{ כלומר } \langle T\alpha - S\alpha, \beta \rangle = 0, \forall \beta,$$

$$\text{והמסקנה היא } T\alpha = S\alpha, \text{ ומכיוון שזה נכון לכל } \alpha, \text{ אזי } T = S.$$

ד. כנ"ל.

$$ה. \text{ נובע מג' וד' - } \langle T\alpha, \beta \rangle = 0 \forall \alpha, \beta \text{ אומר שזה שווה ל-} \langle 0\alpha, \beta \rangle, \text{ כלומר } T = 0.$$

בקרב

בהנתן $\beta \in V, T \in HOM(V, V)$, מחפשים β' כך ש $\langle \alpha, \beta' \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle$. נמצא β' יחיד

כזה, ולכן נוכל להתבונן בהעתקה $\beta \rightarrow \beta'$. נראה כי העתקה זו היא טרל"נ, ונסמן: $\beta' = T^*(\beta)$.

כלומר, T^* היא טרל"נ מ $V \rightarrow V$ המקיימת $\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle \forall \alpha, \beta$.

נראה כי T^* מוגדרת היטב, והיא נקראת הטרנספורמציה הצמודה ל-T.

$$(\text{נראה כי } T^{**} = T).$$

טענה: יהי V ממ"פ ממימד סופי, ויהי $\varphi \in V^*$. אזי קיים $\beta \in V$ יחיד כך ש $\varphi(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$.

31.5.2006

V מרחב מכפלה פנימית (מעל R או C כמובן), ממימד סופי.

מטרה: לכל $T \in \text{Hom}(V, V)$ רוצים להוכיח קיום ויחידות של $T^* \in \text{Hom}(V, V)$ (נקראת הטרנספורמציה הצמודה) כך ש $\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle$ לכל α, β במרחבנו.
 T, T^* תקראנה **צמודות**.

הגדרה: $\langle T\alpha, \beta \rangle$ תקרא התבנית הביליניארית המוגדרת ע"י T . ראה אתמול לתכונות.
תזכורת ללמדה:

- א. אם $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle$ לכל $\alpha \in V$ אזי $\beta = \gamma$
 - ב. אם $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \gamma, \alpha \rangle$ לכל $\alpha \in V$ אזי $\beta = \gamma$
 - ג. אם $T, S \in \text{Hom}(V, V)$ ו $\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle S\alpha, \beta \rangle$ לכל α, β , אזי $T = S$
 - ד. אם $\langle \alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, S\beta \rangle$ לכל α, β , אזי $T = S$
 - ה. אם $\langle T\alpha, \beta \rangle = 0$ או $\langle \alpha, T\beta \rangle = 0$ לכל α, β אזי $T = 0$.
- a. הערה: לא נכון $\langle \alpha, T\alpha \rangle = 0 \forall \alpha$ אזי $T = 0$ - במקרה של העתקה שמסובבת וקטור, לדוגמא.

טענה: יהי $\beta \in V$ נגדיר $\varphi_\beta \in V^*$ ע"י $\varphi_\beta = \langle \alpha, \beta \rangle$. זהו פונקציונל ליניארי.
הוכחה: ראה שיעורי בית.

טענה: יהי $\varphi \in V^*$ אזי קיים וקטור יחיד $\beta \in V$ כך ש $\forall \alpha, \varphi(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$
(בקצרה – כל הפונקציונלים הליניאריים ניתנים להגדרה כמו בטענה הקודמת).
הוכחה: מה שיש בעמיצור – לא נכון. מה יש בעמיצור:
לכל $\beta \in V$ נגדיר $\varphi_\beta \in V^*$, $\varphi_\beta(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$. נראה כי ההעתקה $\beta \rightarrow \varphi_\beta$ היא איזומורפיזם בין V ל V^* .
תרגיל: מצאו את השגיאה בהוכחה זו.

הוכחה נכונה:
לכל $\beta \in V$ נגדיר $\varphi_\beta \in V^*$, כך ש $\varphi_\beta(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle$, $\forall \alpha \in V$. נתבונן ב $U \subseteq V^*$.
 $U = \{\varphi_\beta \mid \beta \in V\}$

טענה:
1. U תת מרחב.
2. $\dim U = \dim V$ (כזכור $\dim V = \dim V^*$).

מסקנה מטענה: $U = V^*$, שזה מה שרצינו להוכיח.

הוכחת הטענה:
1.

a. $\varphi_\beta + \varphi_\gamma = \varphi_{\beta+\gamma}$, $\beta, \gamma \in V$ כי
 $\varphi_\beta(\alpha) + \varphi_\gamma(\alpha) = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \varphi_{\beta+\gamma}(\alpha)$

$$b. \langle \alpha, \bar{c}\beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle \text{ לכל } c \in F \text{ ולכל } \alpha \in V, c \cdot \varphi_\beta(\alpha) = \varphi_{\bar{c}\beta}(\alpha)$$

כלומר $c \cdot \varphi_\beta = \varphi_{\bar{c}\beta}$ - יש סגירות לכפל בסקלר.

c. קיום האפס - ברור.

2. יהיו $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ בסיס ל- V , אזי $\varphi_{\beta_1}, \dots, \varphi_{\beta_n}$ בת"ל, לכן $\dim U \geq \dim V$ ומ1

$\dim U \leq \dim V^* = \dim V$, ועל כן, אם נוכיח בת"ל מתקיים $\dim U = \dim V$.

מדוע הם בת"ל? נניח $\sum a_i \varphi_{\beta_i} = 0$, כלומר - $\sum a_i \varphi_{\beta_i}(\alpha) = 0$ לכל α , כלומר

$$\forall \alpha, \left\langle \alpha, \sum \bar{a}_i \beta_i \right\rangle = 0, \text{ כלומר } \sum \bar{a}_i \beta_i = 0, \text{ כלומר } a_1 = \dots = a_n = 0$$

משפט: לכל $T \in \text{Hom}(V, V)$ קיים $T^* \in \text{Hom}(V, V)$ **יחיד** כך

$$\forall \alpha, \beta \in V, \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^* \beta \rangle$$

הערה: $T^{**} = T$ ולכן נאמר ש T ו T^* צמודות.

מדוע? $\langle T^* \alpha, \beta \rangle = \overline{\langle \beta, T^* \alpha \rangle} = \overline{\langle T\beta, \alpha \rangle} = \langle \alpha, T\beta \rangle$ כלומר $T = T^{**}$

הוכחה: נקבע את T ולכל $\beta \in V^*$ נגדיר $\psi_\beta \in V^*$ כך

$$\psi_\beta = \langle T\alpha, \beta \rangle$$

(יש לבדוק שאכן ψ_β הוא פונקציונל לינארי. אנחנו לא נבדוק את זה.)

מהטענה הקודמת, נובע כי קיים β' כך ש $\psi_\beta(\alpha) = \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta' \rangle$. אם נראה שההתאמה

$\beta \rightarrow \beta'$ היא טרל"נ, אזי נגדיר $T^*(\beta) = \beta'$ ונקבל כי $\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^* \beta \rangle$ לכל α, β .

למה זה טרל"נ?

נגדיר $T^*(\beta)$ כנ"ל (התאמה זו מוגדרת היטב - β' קיים ויחיד). צריך להראות T^* ט"ל:

$$1. T^*(\beta + \gamma) = T^*(\beta) + T^*(\gamma)$$

$$\forall \alpha, \langle \alpha, T^*(\beta + \gamma) \rangle =_{\text{definition}} \langle T\alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\alpha, \gamma \rangle =$$

נשים לב כי

$$\langle \alpha, T^* \beta \rangle + \langle \alpha, T^* \gamma \rangle = \langle \alpha, T^* \beta + T^* \gamma \rangle$$

$$T^*(\beta + \gamma) = T^* \beta + T^* \gamma, \text{ כי יש שיוויון בתוך המכפלה פנימית.}$$

$$2. T^*(c\beta) = cT^*(\beta)$$

$$\forall \alpha, \langle \alpha, T^*(c\beta) \rangle =_{\text{def}} \langle T\alpha, c\beta \rangle = \bar{c} \langle T\alpha, \beta \rangle = \bar{c} \langle \alpha, T^* \beta \rangle = \langle \alpha, cT^* \beta \rangle$$

כמו קודם - השגנו שיוויון.

לכן T^* טרל"נ כנדרש. בנוסף נבדוק יחידות - אם $\forall \alpha, \beta, \langle \alpha, T^* \beta \rangle = \langle \alpha, S\beta \rangle$ אזי $T^* = S$

(ע"פ למה) ולכן יש יחידות.

טענה: יהי V מ"פ מממד סופי, $T, T^* \in \text{Hom}(V, V)$ צמודות, ויהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי ל- V . תהינה A ו- A^* המטריצות המייצגות את T, T^* בהתאמה, ביחס לבסיס זה.

$$\forall i, j, a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}, A = (a_{ij}), A^* = (a_{ij}^*)$$

$$A = \begin{pmatrix} i & 5 \\ 2-i & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -i & 2+i \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ אם לדוגמא:}$$

הוכחה:

$$A = (T\varepsilon_1 \dots T\varepsilon_i \dots T\varepsilon_n) \text{ (מטריצת עמודות), כלומר:}$$

$$a_{ji} = \langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle \text{ כלומר: } T\varepsilon_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^n \langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j$$

$$(\alpha = \sum_{j=1}^n \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j \text{ אזי בסיס אורתונורמלי, } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \text{ (תזכורת: באופן כללי, אזי)}$$

באופן דומה:

$$a_{ji}^* = \langle T^* \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \overline{\langle \varepsilon_j, T^* \varepsilon_i \rangle} = \overline{\langle T \varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle} = \overline{a_{ij}}$$

לסיכום: $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$.

המעבר $T \rightarrow T^*$ "דומה" להעתקה $Z \rightarrow \overline{Z}$

טענה:

$$(T + S)^* = T^* + S^* \quad 1.$$

$$a \in F, (aT)^* = \overline{a} T^* \quad 2.$$

$$(TS)^* = S^* T^* \quad 3.$$

$$T^{**} = T \quad 4.$$

$$T \rightarrow T^* \text{ חז"ע ועל מ } \text{Hom}(V, V) \text{ לעצמו.} \quad 5.$$

הוכחה:

$$\langle \alpha, (T + S)^* \beta \rangle = \langle (T + S)\alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle S\alpha, \beta \rangle =$$

1.

$$\langle \alpha, T^* \beta \rangle + \langle \alpha, S^* \beta \rangle = \langle \alpha, (T^* + S^*) \beta \rangle$$

ע"פ הלמה – אדום = כתום.

$$a \in F, \langle \alpha, (aT)^* \beta \rangle = \langle aT\alpha, \beta \rangle = a \langle T\alpha, \beta \rangle = a \langle \alpha, T^* \beta \rangle =$$

2. באופן דומה:

$$\langle \alpha, \overline{a}(T^* \beta) \rangle = \langle \alpha, (\overline{a} T^*) \beta \rangle$$

ע"פ הלמה – אדום = כתום.

$$\langle \alpha, (TS)^* \beta \rangle = \langle TS\alpha, \beta \rangle = \langle S\alpha, T^* \beta \rangle = \langle \alpha, S^* T^* \beta \rangle \quad 3.$$

מכיוון שזה נכון לכל α, β , יש שיוויון.

4. ראינו בעבר.

5. נובע מד' – נראה ש $T \rightarrow T^*$

a. חח"ע - נניח כי $T \neq S$, $T^* = S^*$, אבל הגענו לשלילה – כי אז $T^{**} = S^{**}$, כלומר $T = S$, בסתירה.

b. על: משיקולי מימד, אבל גם – כי $(T^*)^* = T$.

מה בתוכנית האמנותית

- נבדוק מתי $T = T^*$ - ט"ל הרמיטיות (או סימטריות)
- $TT^* = I$ - ט"ל אורתוגונליות, ובמקרה זה: $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, T\beta \rangle$.
- $TT^* = T^*T$ - ט"ל נורמלית. אם $T \in \text{Hom}(V, V)$ ו $\forall$ מ"פ מעל C אזי נורמליות היא תנאי מספיק והכרחי ללכסינות. מעל R – הכרחי, אבל לא מספיק.

יש לנו 18 דקות לסיום – נראה דוגמא כמה אלגברה ליניארית זה מגניב:

היה היה כפר זוג. היו בו $2^6 = 64$ חברים וחברות. יש שתי תקנות:

1. גודל כל וועדה יהיה זוגי.
 2. גודל חיתוך כל שתי וועדות יהיה זוגי.
- במקרה זה ניתן להקים 2^{32} וועדות (בלי כללים – אפשר היה 2^{64} וועדות). כדי להוריד את הכמות, שינו את כלל 1:
1. גודל כל וועדה יהיה אי זוגי.

אפשר לפחות 64 וועדות – כל חבר = וועדה.

אי אפשר יותר מ-64 וועדות. למה:

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל F^2 (השדה עם שני איברים). נייצג כל וקטור בעזרת הבסיס הסטנדרטי.

$V = F_2^n$, כלומר $(0, 1, 0, 0, \dots, 0) = \alpha \in V$. נגדיר:

$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum a_i b_i \in F_2$. נשים לב שלא מדובר במכפלה פנימית: יתכן $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ עבור $\alpha \neq 0$,

אבל נגדיר מערכת אורתונורמלית, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ שתקרא אורתונורמלית אם $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$. לדוגמא:

הבסיס הסטנדרטי. הוא מערכת אורתונורמלית.

טענה: אם $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ מהווים מערכת אורתונורמלית, אזי הם בת"ל.

הוכחה: נניח $\sum a_i \varepsilon_i = 0$. ניקח "מכפלה פנימית" עם ε_i ונקבל $a_i = 0$ לכל i. כעת נחזור לכפר-זוג.

ונניח שיש m וועדות המתאימות לתנאים א' וב' החדשים. יהי $\alpha^i \in (F_2)^{64}$ המציין של הוועדה ה-i.

כלומר - $\alpha_j^i = \begin{cases} 1, & j' \text{ in the comitee} \\ 0, & j' \text{ not in the comitee} \end{cases}$. מתנאי א' - $\langle \alpha^i, \alpha^i \rangle = 1$ (כי נדרש כמות אי זוגית של חברים, והמכפלה הפנימית מבטאת כאן את הזוגיות).

כשניקח $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ מקבלים את זוגיות של חיתוך הוקטורים (הוועדה) – כלומר 0 – במקרה של חיתוך זוגי.

כלומר $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$ מערכת אורתונורמלית, ו $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in (F_2)^{64}$ ו $m \leq 64$.

6.6.06

V ממ"פ ממימד סופי, $T: V \rightarrow V$ טרל"ג, T^* צמודה ל:

$$\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle, \forall \alpha, \beta \in V$$

T^* קיימת ויחידה. נתרכז בטרנספורמציות נורמליות, כלומר: $TT^* = T^*T$

V ממ"פ מעל R נקרא אוקלידי, ומעל C נקרא מרחב אוניטרי.

טרנספורמציות צמודות לעצמן $T = T^*$.

נשים לב, אם $z \in C$, $c = x + iy$, אזי: $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. באופן דומה, ניתן לכתוב כל

טרל"ג $T: V \rightarrow V$ כ $T = T_1 + iT_2$, כאשר $T_1 = \frac{T + T^*}{2}$, $T_2 = \frac{T - T^*}{2i}$, ניתן לראות כי T_1, T_2 צמודות לעצמן.

נבדוק כי $T_2^* = T_2$:

נשתמש ב $(T + S)^* = T^* + S^*$ וב $(aT)^* = \bar{a}T^*$, וב $\frac{1}{i} = -i$, $\frac{1}{i} = i$ וב $T^{**} = T$

$$T_2^* = \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)}(T - T^*)^* = -\frac{1}{2i}(T^* - T) = \frac{1}{2i}(T - T^*) = T_2$$

תזכורת: אם $\langle T\alpha, \beta \rangle = 0 \forall \alpha, \beta$ אזי $T = 0$ אבל $\langle T\alpha, \alpha \rangle = 0 \forall \alpha$ לא בהכרח $T = 0$

משפט: $T: V \rightarrow V$ ט"ל צמודה לעצמה המקיימת $\langle T\alpha, \alpha \rangle = 0 \forall \alpha \in V$ אזי $T = 0$

הוכחה: תחילה נניח V מרחב אוקלידי, ויהי $\alpha, \beta \in V$ ונתבונן ב

$$0 = \langle T(\alpha + \beta), \alpha + \beta \rangle = \langle T\alpha, \alpha \rangle + \langle T\beta, \beta \rangle + \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\beta, \alpha \rangle =$$

$$\langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\beta, \alpha \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, T\beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\alpha, \beta \rangle$$

היות שזה נכון לכל α, β אזי $T = 0$.

במקרה האוניטרי:

כמו קודם, נקבל $0 = \langle T\alpha, \beta \rangle + \langle T\beta, \alpha \rangle$

חישוב נוסף:

$$0 = \langle T(i\alpha + \beta), (i\alpha + \beta) \rangle = \langle Ti\alpha, \beta \rangle + \langle T\beta, i\alpha \rangle = i[\langle T\alpha, \beta \rangle - \langle T\beta, \alpha \rangle]$$

משני החישובים, נובע $\langle T\alpha, \beta \rangle = 0$ וגם $\langle T\beta, \alpha \rangle = 0$ לכן $T = 0$.

אבחנה: מעל C לא השתמשנו בתנאי $T = T^*$, לכן מעל C אם $\langle T\alpha, \alpha \rangle = 0 \forall \alpha$ אזי $T = 0$.

אם A מייצגת את T ביחס לבסיס אורתונורמלי, ו A^* מייצג את T^* , אזי $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$.

אם $T = T^*$ לכסינה, ויש לה יצוג אלכסוני לפי בסיס אורתונורמלי, אזי

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים של T הם ממשיים.

משפט: יהי V מרחב אוניטרי, $T \in \text{Hom}(V, V)$ צמודה לעצמה ($T = T^*$), אזי כל הערכים העצמיים של T הם ממשיים.

טענת עזר: V, T כנ"ל, אזי T צמודה לעצמה אמ"מ $\forall \alpha \in V \langle T\alpha, \alpha \rangle \in R$.

הוכחת טענת העזר: נניח $T = T^*$, $\langle T\alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, T^*\alpha \rangle = \langle \alpha, T\alpha \rangle = \overline{\langle T\alpha, \alpha \rangle} \in R$.

בכיוון השני: נניח $\forall \alpha \langle T\alpha, \alpha \rangle \in R$

$$\langle (T - T^*)\alpha, \alpha \rangle = \langle T\alpha, \alpha \rangle - \langle T^*\alpha, \alpha \rangle = \langle T\alpha, \alpha \rangle - \langle \alpha, T\alpha \rangle = \langle T\alpha, \alpha \rangle - \overline{\langle T\alpha, \alpha \rangle} = 0$$

מעל C , נובע ש $(T - T^*) = 0$, כלומר- $T = T^*$.

הוכחת המשפט: אם $T\alpha = \lambda\alpha$, $\alpha \neq 0$, אזי

$$R \ni \langle T\alpha, \alpha \rangle = \langle \lambda\alpha, \alpha \rangle = \lambda \langle \alpha, \alpha \rangle = \lambda \|\alpha\|^2$$

$$\|\alpha\|^2 \text{ מספר ממשי שונה מ-0, ולכן } \lambda \in R, \text{ וביתר פירוט: } \lambda = \frac{\langle T\alpha, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}$$

קצת מספרים מרוכבים: מספר מרוכב ניתן לייצג כ $x + iy$, וגם כ $z = r \cdot e^{i\theta}$. יוצר את הזווית, ותמיד $|e^{i\theta}| = 1$.

טרנספורמציות ליניאריות אוניטריות

(מעל R נקראות גם אורתוגונליות)

הגדרה: $T \in \text{Hom}(V, V)$ תקרא אוניטרית אם $\forall \alpha, \beta \langle \alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, T\beta \rangle$

משפט: התנאים הבאים שקולים:

א. T אוניטרית

ב. $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$ לכל α

ג. $TT^* = Id$

ד. T מעבירה כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.

ה. T מעבירה בסיס אורתונורמלי מסויים לבסיס אורתונורמלי.

הערה: אם $TT^* = Id$ אזי $T^*T = Id$, לכן T נורמלית.

הערה 2: אם T אוניטרית ו λ ע"ע של T , אזי $|\lambda| = 1$. למה? , אבל גם $T\alpha = \lambda\alpha$

$$\langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle = \|\alpha\|^2$$

$$= \langle \lambda\alpha, \lambda\alpha \rangle = \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 \|\alpha\|^2$$

הוכחה:

$$\| \alpha \|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle T\alpha, T\alpha \rangle = \| T\alpha \|^2 \quad \text{א} \Leftarrow \text{ב} \\ \text{ב} \Leftarrow \text{ג}:$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle T\alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, T^*T\alpha \rangle \Rightarrow \\ \langle \alpha, (Id - T^*T)\alpha \rangle = 0, \forall \alpha \\ \forall \alpha, \langle (Id - T^*T)\alpha, \alpha \rangle = 0$$

תזכורת: $T = T^*$ אם $T = 0$ $\langle T\alpha, \alpha \rangle = 0, \forall \alpha$
ואכן: $S := Id - T^*T$ צמודה לעצמה (נשתמש ב $T^{**} = T$, $(ST)^* = T^*S^*$, ועל כן:
 $S^* = Id - T^*T$
ולכן $Id - T^*T = 0$.

ג $\Leftarrow$ ד: יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס אורתונורמלי, כלומר - $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ אבל
 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, T^*T\alpha_j \rangle = \langle T\alpha_i, T\alpha_j \rangle$ ועל כן - $T\alpha_1, \dots, T\alpha_n$ גם מערכת אורתונורמלית.
ד $\Leftarrow$ ה: ברור.
ה $\Leftarrow$ א: יהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי כך ש $T\varepsilon_1, \dots, T\varepsilon_n$ גם כן אורתונורמלי. יהו, $\alpha, \beta \in V$
 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i, \beta = \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i$

$$T\alpha = \sum_{i=1}^n a_i T\varepsilon_i, T\beta = \sum_{i=1}^n b_i T\varepsilon_i$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$$

$$\langle T\alpha, T\beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$$

(*) - מכיוון ש $T\varepsilon_i$ בסיס אורתונורמלי.
ועל כן: $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, T\beta \rangle$.

אם A מייצגת את T לפי בסיס אורתונורמלי, אם $A = A^* \Leftarrow T = T^*$, $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3+2i \\ 3-2i & -17 \end{pmatrix}$$

אם $TT^* = Id$ אז $AA^* = I$ ובמקרה זה השורות של A הן וקטורים אורתונורמליים ב C^n עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, כלומר -

אם $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ אזי $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ (כאן נחשוב על α_i כוקטור ב C^n). או במילים אחרות:

$$\sum_{r=1}^n a_{ir} \overline{a_{jr}} = \delta_{ij}$$

הוכחה: $B = AA^* = I$

$$\delta_{ij} = B_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} a_{rj}^* = \sum_{r=1}^n a_{ir} \overline{a_{jr}}$$

דוגמא: מהן הטרנספורמציות האורתוגונליות (אוניטריות) מעל R^2 ?
נמצא את היצוג של הטרנספורמציות הנ"ל לפי הבסיס הסטנדרטי:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, AA^* = Id$$

$$1 = |AA^*| = |A| |A^*| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

$$A^* = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix} = A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ אם } |A| = 1 \text{ אזי}$$

$$\text{אם } |A| = -1 \text{ אזי}$$

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1 \text{ אזי } |A| = 1 \text{ - נבדוק}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \text{ כלומר, קיימת } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ כך ש}$$

7.6.06

V ממ"פ ממימד סופי, $T: V \rightarrow V$, $\exists!$ (קיימת יחידה) $T^*: V \rightarrow V$, כך
 $\forall \alpha, \beta \in V, \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle$.

תהי $A \in M_n(F)$ את T ביחס לבסיס אורתונורמלי – אז נסמן A^* את המטריצה המתאימה ל T^* ,
 ויתקיים $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$.

T תקרא נורמלית אם $TT^* = T^*T$. מקרים מיוחדים:

- T צמודה לעצמה - $T = T^*$ - ובמקרה זה $A = A^*$, מעל R – נאמר ש A סימטרית
- T אוניטרית (מעל R תקרא גם אורתוגונלית) - $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, T\beta \rangle$, ואז זה שקול ל:

$$\alpha \text{ לכל } \|T\alpha\| = \|\alpha\| \quad \circ$$

$$TT^* = Id \quad \circ$$

$$T \text{ מעבירה כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי.} \quad \circ$$

$$T \text{ מעבירה בסיס אורתונורמלי מסויים לבסיס אורתונורמלי.} \quad \circ$$

מהן הטרנספורמציות הליניאריות $T: R^2 \rightarrow R^2$ שהן אורתוגונליות? הן יכולות לסובב את המישור, או להפוך אותו (חייבות לשמר את האורך, זווית, וכו').

תהי A המטריצה המייצגת את T האורתוגונלית ביחס לבסיס הסטנדרטי:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$TT^* = Id$$

$$AA^* = I$$

$$AA^t = I$$

$$A^* = A^t = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^t = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$1 = |I| = |AA^t| = |A||A^t| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \pm 1, \text{ כי } |A| \text{ היא } 1 \text{ או } -1,$$

נפריד לשני מקרים:

$$|A| = a^2 + c^2. A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} - |A| = 1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = A^{-1} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} - |A| = -1$$

$$1 = -|A| = a^2 + c^2$$

אם נגדיר (בשני המקרים) : $a = \cos \theta$
 $c = \sin \theta$ (בגלל שהדטרמיננטה על מעגל היחידה) אם

$$|A|=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- כלומר, סיבוב המישור בזווית θ נגד כיוון השעון.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

אזי, $|A| = -1$, שיקוף דרך הישר $y = ax$, כאשר

$$a = \tan \frac{\theta}{2}$$

הערות: אם T, S אוניטריות אזי גם TS אוניטרית. מכפלה של סיבוב / שיקוף בסיבוב / שיקוף נותנת סיבוב / שיקוף.

אם

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, A_\tau = \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}$$

$$A_\tau A_\theta = A_{\tau+\theta}$$

נבדוק שהמתמטיקה אכן עובדת, והיא עובדת (שהשיויון למעלה רשום).

הערה: תהי $f: S^2 \rightarrow S^2$ (כאשר S הינו הגלובוס – ספירת היחידה ב R^3 -

$\langle (x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1 \rangle$ ששומרת מרחקים. **הראו** או שיש זוג נקודות אנטיפודיות $(x, y, z), (-x, -y, -z)$ שנשארות במקום, או שיש זוג כנ"ל שמתחלף.

הערה 2: לכל $\sigma \in S_n$ קיימות $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ כך ש $\sigma = \tau_1 \tau_2$, כך ש $\tau_1^2 = Id, \tau_2^2 = Id$

אבחנה: אם T לכסינה, אז T נורמלית – נכתוב את T לפי הבסיס המלכסן

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ואז,

$$T^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

נרצה להוכיח כי מעל C נורמליות היא תנאי מספיק והכרחי ללכסינות.

למה: יהי V מ"מ פ, $T: V \rightarrow V$ טרל"נ נורמלית, אזי אם λ ערך עצמי של T , אזי $\overline{\lambda}$ הוא ערך עצמי של T^* עם אותו וקטור עצמי, כלומר:

$$T\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow T^*\alpha = \overline{\lambda}\alpha$$

הוכחה: אם $\beta \in V$ ו $N: V \rightarrow V$ נורמלית, אזי

$$\|N^*\beta\|^2 = \langle N^*\beta, N^*\beta \rangle = \langle \beta, NN^*\beta \rangle = \langle \beta, N^*N\beta \rangle = \langle N\beta, N\beta \rangle = \|N\beta\|^2$$

(כלומר, ההעתקה והצמודה לה נותנות את אותו אורך).

נניח $T\alpha = \lambda\alpha$, נתבונן ב $N := T - \lambda Id$. נטען כי N נורמלית. $N^* = (T^* - \bar{\lambda}Id)$. נטען כי:

$$(T - \lambda Id)(T^* - \bar{\lambda}Id) = (T^* - \bar{\lambda}Id)(T - \lambda Id)$$

- וזה מתקיים בגלל שגם T מתחלפת בכפל עם T^* , וכמובן ש $\lambda Id, \bar{\lambda}Id$ מתחלפות בכפל, ועל כן גם N שהגדרנו נורמלית.

לכן $\|N\alpha\|^2 = \|N^*\alpha\|^2$, כלומר: $\|T\alpha - \lambda\alpha\|^2 = \|T^*\alpha - \bar{\lambda}\alpha\|^2$ $0 =_*$ (בגלל ש λ ערך עצמי), כלומר $T^*\alpha = \bar{\lambda}\alpha$.

טענה: אם T טרל"נ נורמלית, אזי וקטורים עצמים של המתאימים לערכים עצמיים שונים הם ניצבים. **הוכחה:** נניח כי $T\alpha = \lambda\alpha, T\beta = \mu\beta$, $\lambda \neq \mu$.

$$\lambda \langle \alpha, \beta \rangle = \langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle = \langle \alpha, \bar{\mu}\beta \rangle = \bar{\mu} \langle \alpha, \beta \rangle$$

$\lambda \neq \mu$, ולכן $0 = \langle \alpha, \beta \rangle$.

תזכורת: לכל פולינום $f \in C[x]$ יש שורש ב C.

מסקנה: יהי $V \neq \{0\}$ ממ"פ מעל C, לכל $T: V \rightarrow V$ יש וקטור עצמי.

הוכחה: לפולינום האפייני של T יש שורש $\Leftrightarrow$ ערך עצמי $\Leftarrow$ קיים וקטור עצמי.

הערה: כנראה משפט חשוב (בחינה?) – עברנו עליו פעמיים. פרידגוט גם העיר שזו הוכחה 'אידיאלית למבחן' לדעתו

משפט: יהי V ממ"פ מעל C, $T \in Hom(V, V)$ נורמלית אזי T לכסינה, יתר על כן – קיים בסיס **אורתונורמלי** ל V המורכב מוקטורים עצמיים של T. **תמצית הוכחה:**

1. נגדיר מרחבים עצמיים $V_1, \dots, V_m$
2. נמצא בסיסים אורתונורמליים לכולם – בעזרת ידידנו גרם-שמידט
3. אחדנו את הבסיסים, וקיבלנו בסיס אורתונורמלי לסכום של ה V_i שנקרא U (ראינו שזה גם סכום ישר).
4. פירקנו $V = U \oplus U^\perp$
5. ראינו כי $TU^\perp \subseteq U^\perp$
6. הגדרנו $T'U^\perp \rightarrow U^\perp$ - ט"ל שהיא צמצום של T.
7. נניח בשלילה כי $U^\perp \neq \{0\}$, אזי יש $0 \neq \beta \in U^\perp$ כך ש β ו"ע של T' (לכל ט"ל על ממ"פ ממימד סופי מעל C יש ו"ע). נגיע לסתירה.
8. הגענו לסתירה, ועל כן $U^\perp = \{0\}$.

הוכחה: יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ הערכים העצמיים של T , ויהיו $V_1, V_2, \dots, V_m$ המרחבים העצמיים המתאימים – כלומר $V_i = \{\alpha \mid T\alpha = \lambda_i \alpha\}$ (כן, זה תת מרחב). ראשית, נבחר בסיסים אורתונורמליים לכל אחד מהמרחבים העצמיים V_i (תהליך גרם-שמידט). תהי $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ האיחוד של הבסיסים הנ"ל – זו מערכת אורתונורמלית. אם $\alpha_i, \alpha_j \in V_k$ אזי $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ בגלל ש V_k אם $\alpha_i \in V_k, \alpha_j \in V_l, k \neq l$ אזי α_i, α_j מתאימים לערכים עצמיים שונים ולכן $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, כי ו"ע המתאימים לע"ע שונים (של T נורמלית) הם ניצבים.

יהי $U = \sum_{i=1}^m V_i = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ (כי $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ איחוד הבסיסים 0 הוא בסיס – הם ניצבים, ולא בת"ל). נשאר להוכיח כי $U = V$ (כי אז $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ הוא הבסיס האורתונורמלי המלכסן את T). $U \subseteq V$ ת"מ, ולכן $V = U \oplus U^\perp$ (ראינו כי השיויון הנ"ל נכון לכל ממ"פ ממימד סופי) כש $U = \{\beta \mid \beta \perp \alpha, \forall \alpha \in U\} = \{\beta \mid \beta \perp \alpha_i, i=1 \dots l\}$ רוצים להוכיח: $\{0\} = U^\perp$.

טענה: $U^\perp$ הוא T אינווריאנטי – (כלומר) $TU^\perp \subseteq U^\perp$.

הוכחה: יהי $\beta \in U^\perp$. $\langle T\beta, \alpha_i \rangle = \langle \beta, T^* \alpha_i \rangle = \langle \beta, \bar{\lambda} \alpha_i \rangle = \bar{\lambda} \langle \beta, \alpha_i \rangle = \bar{\lambda} \cdot 0 = 0$. $\beta \in U^\perp$.

תהי T' הצמצום של T ל $U^\perp$, כלומר $T'\beta := T\beta, \forall \beta \in U^\perp$, בגלל ש $U^\perp$ הוא T אינווריאנטי אזי $T': U^\perp \rightarrow U^\perp$, וכמובן ט"ל. ולכן, אם $U^\perp \neq \{0\}$ קיים $\beta \in U^\perp$ כך ש $T'\beta = \lambda\beta$ - $T'\beta = \lambda\beta$ B וקטור עצמי של T' (ראינו שמעל C יש לכל טרל"נ וקטור עצמי).

$$T'\beta = T\beta = \lambda\beta$$

כלומר, β ו"ע של T , כלומר $\beta \in U$ - כלומר $\beta \in U$ לאחד המרחבים העצמיים. $\beta \in U \cap U^\perp = \{0\}$ אם $U^\perp \neq \{0\}$ זו סתירה, כי ו"ע לפי הגדרה $0 \neq$.

הגדרה: מטריצה אוניטרית: $UU^* = I$ - או לחלופין, מטריצה המייצגת T אוניטרית לפי בסיס אורתונורמלי.

מסקנה: אם $A \in M_n(C)$ ו $AA^* = A^*A$, אזי A ניתנת ללכסון אוניטרי – כלומר, קיימת מטריצה U אוניטרית כך ש $U^{-1}AU = D$, כך ש D אלכסונית.

הוכחה: נבחר בסיס אורתונורמלי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ל C^n ותהי T הט"ל המיוצגת על ידי A לפי בסיס זה. $T^*T = TT^* \Leftarrow A^*A = AA^*$, לכן T לכסינה, כלומר A לכסינה – יתרה על כן, ראינו ש T לכסינה כך שהבסיס המלכסן $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ הוא אורתונורמלי, כלומר $U^{-1}AU = D$ כאשר U היא המטריצה המעבירה את הבסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ לבסיס $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, כלומר U מייצגת טרל"נ המעבירה בסיס אורתונורמלי אחד לבסיס אורתונורמלי אחר – ט"ל אוניטרית.

13.6.2006

בחנים – תרגילים – דומים לתרגילים בדפי התרגיל. מסוף דטרמיננטות, עד ללפני שבוע בערך.

V ממ"פ ממימד סופי, $T: V \rightarrow V$ טרל"נ. נאמר:

$$1. \quad T \text{ נורמלית} - TT^* = T^*T$$

a. משפט: אם V ממ"פ מעל C , אזי T נורמלית אם T היא ניתנת ללכסון אוניטרי / אורתוגונלי (קיים בסיס אורתונורמלי ל V המורכב מוקטורים עצמיים של T).

b. אם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס אורתונורמלי ל V , A מייצגת את T לפי בסיס זה, אזי A^*

$$\text{מייצגת את } T^* \text{ לפי בסיס זה, כלומר } a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}.$$

באופן דומה, A תקרא נורמלית אם $AA^* = A^*A$.

$$2. \quad A \text{ תקרא אוניטרית (אורתוגונלית) אם } A \in M_n(C) \text{ אם } (A \in M_n(R)) \text{ אם } AA^* = I$$

$$3. \quad A \text{ תקרא הרמיטית (סימטרית) אם } A \in M_n(C) \text{ אם } (A \in M_n(R)) \text{ כך ש } A = A^*.$$

ברור שאוניטרי והרמיטי הם מקרים פרטיים של נורמלי.

טענה: $AA^* = I$ (כלומר A – אוניטרית / אורתוגונלית) אם A היא מטריצת המעבר בין שני בסיסים אורתונורמליים.

פרוש: $AA^* = I$ פרושו שעמודות A הן מערכת אורתונורמלית ב C^n עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$\text{כלומר: אם } A = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \text{, אזי } \sum_{r=1}^n a_{ri} \overline{a_{rj}} = \delta_{ij}$$

נניח $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי, ו $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ בסיס אורתונורמלי אחר, נאמר A היא מטריצת המעבר מה ε ל γ אם העמודה ה j ב A מכילה את מקדמי פיתוח של γ_j לפי הבסיס של ε ים,

$$\text{כלומר } \gamma_j = \sum_{r=1}^n a_{rj} \varepsilon_r$$

הוכחת הטענה: נניח $AA^* = I$, כלומר מתקיים $\sum_{r=1}^n a_{ri} \overline{a_{rj}} = \delta_{ij}$, אזי A היא מטריצת מעבר מהבסיס

הסטנדרטי שהוא אורתונורמלי ביחס לממ"פ הסטנדרטית לבסיס המורכב מעמודות A , שהוא אורתונורמלי

$$\text{לפי } \sum_{r=1}^n a_{ri} \overline{a_{rj}} = \delta_{ij} \text{ (* מעכשיו)}$$

כיוון שני – נניח ש A מטריצת מעבר מ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ ל $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, שניהם בסיסים אורתונורמליים, כלומר -

$$\delta_{ij} = \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle =_{\text{Defenition}} \left\langle \sum_{r=1}^n a_{ri} \varepsilon_r, \sum_{r=1}^n a_{rj} \varepsilon_r \right\rangle =_{\text{ortonormaly}} \sum_{r=1}^n a_{ri} \overline{a_{rj}} = *$$

משפט: $A \in M_n(C)$, A נורמלית ($AA^* = A^*A$) אזי A ניתן ללכסון אוניטרי, כלומר קיימת U

אוניטרית כך ש $U^{-1}AU = D$, כאשר D אלכסונית.

הוכחה: נבחר בסיס אורתונורמלי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ל C^n ותהי T הט"ל המיוצגת ע"י A לפי הבסיס הזה. מכך

$$TT^* = T^*T \Leftrightarrow AA^* = A^*A$$

לפי המשפט שהוכחנו יש בסיס אורתונורמלי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ כך ש T

מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית D לפי בסיס זה. דהיינו $U^{-1}AU = D$ כאשר U היא מטריצת המעבר מהבסיס של ε ים לבסיס של α ים. היות ושני בסיסים אלו הם אורתונורמליים, אזי U היא אוניטרית.

שולבים מעשיים של לכסון אוניטרי

נתונה $A \in M_n(C)$, המקיימת $AA^* = A^*A$.

1. מחשבים פולינום אפייני $|xI - A|$.
 2. מוציאים את שורשי הפולינום – והם הע"ע של A (לפי המשפט היסודי של האלגברה ליניארית).
(1)
 3. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הע"ע, מוצאים את V_{λ_i} המרחבים העצמיים (תזכורת):
 $(V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I) = \{x \mid Ax = \lambda_i x\})$. כלומר, מוצאים בסיס.
 4. מוצאים בסיס אורתונורמלי ל V_{λ_i} בעזרת תהליך גרם-שמידט
 5. תהי $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ איחוד כל הבסיסים שמצאנו בשלב קודם – זוהי מערכת אורתונורמלית – ועל כן בסיס. זהו הבסיס המבוקש
 6. שלב הבדיקה - $U = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ - כדאי לבדוק כי $UU^* = I$.
 7. נקבל $U^{-1}AU = D$, כאשר D אלכסונית. למה?
- $$U^{-1}(AU) = U^{-1}(\lambda_1 \alpha_1 \quad \dots \quad \lambda_n \alpha_n) = U^{-1}U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
- (נשים לב כי $U^{-1} = U^*$ - אין סיבה אמיתית לחשב הפכית).

אם $U^*AU = B$, כאשר B לא אלכסונית, אזי קיים 'דמיון אוניטרי' טענה: דמיון אוניטרי שומר על:

1. הרמיטיות ($A = A^*$)
2. אוניטריות $AA^* = I$

הוכחה:

$$B^* = U^* A^* U$$

$$A = A^* \Rightarrow U^* A^* U = U^* A U$$

כנדרש.

$$AA^* = I \Rightarrow BB^* = U^* AUU^* A^* U = I$$

הערה: יחס הדמיון האוניטרי הוא יחס שקילות (טרנזיטיבי, רפלקסיבי, וסימטרי)

טענה: V ממ"פ ממימד סופי, $T: V \rightarrow V$ טרל"נ נורמלית, אזי

1. T צמודה לעצמה ($T = T^*$) אם"מ כל הערכים העצמיים של T ב C הם ממשיים.
2. T אוניטרית ($TT^* = Id$) אם"מ כל הע"ע של T ב C הם בעלי ערך מוחלט 1.

דוגמא: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$, ט"ל $R^2 \rightarrow R^2$, המטריצה המתאימה היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, הפ"א הוא

$$x^2 + 1 = 0, \text{ ואז הע"ע הם } i, -i.$$

הוכחה: ראשית נבחר ל V בסיס אורתונורמלי, ותהי A המטריצה המייצגת את T לפי בסיס זה.

$AA^* = A^*A$, כי T נורמלית. נתייחס ל A כמטריצה ב $M_n(C)$ (גם אם היא ממשית). לפי מה

שלמדנו – קיימת U אוניטרית כך ש $U^*AU = D$, עבור D אלכסונית.

א. T צמודה לעצמה $D^* = D \Leftrightarrow T = T^* \Leftrightarrow$ (כי U היא מטריצת מעבר מהבסיס האורתונורמלי שבחרנו לבסיס האורתונורמלי שמלכסן את T).

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \dots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda_i} \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$$

ב.

$$|\lambda_i|^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_i \overline{\lambda_i} = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = I \Leftrightarrow DD^* = I \Leftrightarrow TT^* = I$$

טענה: אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית, אזי A ניתנת ללכסון אוניטרי, דהיינו קיימת

$$U \in M_n(\mathbb{R}) \text{ אורתוגונלית כך ש } U^{-1}AU = D.$$

טענת עזר: יהי V ממ"פ ממימד סופי מעל R, ותהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל צמודה לעצמה, אזי ל T יש וקטור עצמי.

הוכחה: כל הע"ע של T הם ממשיים. (בהוכחת המשפט ש T נורמלית ניתנת ללכסון אורתונורמלי היתה נקודה אחת בלבד בה השתמשנו בעובדה ש T מוגדרת מעל C – העובדה של T יש וקטור עצמי) לכן אם T צמודה לעצמה, $T: V \rightarrow V$ ממ"פ מעל R, אזי גם קיים ל V בסיס אורתונורמלי המורכב מוקטורים עצמיים של T.

T צמודה לעצמה מעל R ניתנת ללכסון אורתונורמלי. ומכאן נובעת הטענה על לכסון מטריצות

סימטריות – נבחר בסיס אורתונורמלי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ל V, ותהי $T: V \rightarrow V$ הט"ל המיוצגת ע"י A

ביחס לבסיס זה, ויהי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי המלכסן את T (A סימטרית $T = T^*$)

ותהי U מטריצת המעבר מ ε ל α ים, אזי $U^{-1}AU = D$, כאשר D המטריצה המייצגת את T ביחס ל ε ים, כלומר אלכסונית, ו U אוניטרית, כי היא מטריצת מעבר בין בסיסים אורתונורמליים.

טענה: תהי T ט"ל נורמלית, $T^*T = TT^*$, אזי קיימת טרל"נ U אוניטרית וקיימת טרל"נ H צמודה

לעצמה כך ש $T = HU$ וגם $T = UH$.

הוכחה: מחר.

14.6.2006

טענה (משיעור קודם): V מרחב מכפלה פנימית מעל C . אם $T \in \text{Hom}(V, V)$ טרל"נ נורמלית

$$T = UH = HU \quad \text{אזי קיימות ט"ל } H \text{ הרמיטית ו} U \text{ אוניטרית כך ש} \quad (TT^*) = (T^*T)$$

אבחנה: זה אנלוגי לכך ש $r \cdot e^{i\theta} = z \in C$

הוכחה: נבחר בסיס אורתונורמלי למרחב, שביחס אליו המטריצה המייצגת את T היא אלכסונית.

$$D = \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} & & \\ & \dots & \\ & & r_n e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

$$D = BC$$

$$B = \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \dots & \\ & & r_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \dots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

ברור כי $B = B^*, CC^* = I$, ועל כן B מייצגת את ההרמיטית, ו C את האוניטרית. ברור כי הן מתחלפות בכפל.

סיימנו עם טרנספורמציות נורמליות.

הערה של מרוכבים

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$$

קצת תורת הגרפים

גרף - $G = (V, E)$. V - הקודקודים של הגרף, E - הצלעות של הגרף. V קבוצה כלשהי - נתרכז

$$V = \langle 1, \dots, n \rangle$$

E - קבוצת הצלעות $\{(v_i, v_j)\}$ - מדובר בזוגות לא סדורים (כלומר - גרף לא מכוון).

נאמר i סמוך ל j ונסמן $i \sim j$ אם $(i, j) \in E$

דרגה של קודקוד v , $d(v)$ - מספר הצלעות להן v שייך.

גרף יקרא d רגולרי אם דרגת כל קודקוד בו היא d .

קבוצה בלתי תלויה של קודקודים (אין שום קשר לאי תלות ליניארית) היא קבוצת קדקדים שאינה

פורשת אף צלע - כלומר, $U \subseteq V$ בלתי תלויה פרושו כי $i \in U, j \in U, (i, j) \notin E$.

$\alpha(G)$ - מספר האי תלות של G - גודל הקבוצה הבלתי תלויה הגדולה ביותר. ככל הידוע אין

אלגוריתם פולינומיאלי בגודל הגרף לחישוב $\alpha(G)$. (לכן) מעניין למצוא חסמים על $\alpha(G)$ שניתנים

לחישוב בקלות.

בהנתן גרף G על n קודקודים נייחס ל G מטריצה $A_{n \times n}$ שנקראת מטריצת השכנות של G

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, i \sim j \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

נשים לב שעל האלכסון תמיד יש 0 (כי בהגדרה, i לא שכן של עצמו). ברור כי A תמיד סימטרית (בגלל שהיחס $i \sim j$ סימטרי).

מטריצה סימטרית ממשית צמודה לעצמה, וקיים בסיס אורתונורמלי של R^n המורכב מוקטורים עצמיים של A , ובפרט ל A יש n ע"ע ממשיים (כל הע"ע של A ממשיים).

$$K_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נחשב בשביל הכיף, מה הערכים העצמיים של K_5 ? λ ע"ע של A אמ"מ

המטריצה $A - \lambda I$ סינגולרית, לכן בבירור -1 הוא ע"ע. (למה? קיים v כך ש $Av = \lambda v$).
(מטריצה סינגולרית – דרגתה אינה n)

מהו הריבוי הגאומטרי של -1 (מהו המימד של $V_{-1} = \text{Ker}(A + I)$ זה $5 - \text{rank} A = 4$).
קיבלנו כי הריבוי הגאומטרי של -1 הוא 4, ועל כן הריבוי האלגברי $4 \leq$ העקבה של A $\text{tr} A =$ סכום הערכים העצמיים, ועל כן גם 4 הוא ע"ע.

$$1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הוקטור 1 הוא וקטור עצמי של A המתאים לע"ע 4.

משפט הופמן:

יהי G גרף d רגולרי על N קודקודים, ויהי $\lambda_{\min}$ הע"ע הקטן ביותר של הגרף G אזי

$$\theta = \alpha(G) \leq n \frac{-\lambda_{\min}}{d - \lambda_{\min}}$$

הערות:

• 'קל' לחשב את הע"ע של גרף

$$\alpha(K_5) = 1, n = 5, d = 4, \lambda_{\min} = -1$$

• לעיתים יש שיויון – למשל ב K_5 -

$$1 \leq 5 \frac{- -1}{4 - -1} = 1$$

טענה: אם G גרף d רגולרי, אזי d הוא ע"ע של הגרף, ו $1 = (1, \dots, 1)$ הוא ו"ע המתאים לע"ע זה.

הוכחה:

$$\left[A \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \right]_j = \left\langle (j\text{'th line}), \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{number of ones in line } j = d$$

ועל כן $d1^T = A1^T$

הערות:

• היות ו $\text{trace}(A) = 0$, מתקיים $\lambda_{\min}$ שלילי.

- אם G גרף קשיר, אזי כל הע"ע האחרים הם קטנים ממש מ d . אם G אינו דו צדדי אזי גם כל הע"ע האחרים הם $-d <$

- במקרה שלנו קיים בסיס אורתונורמלי של R^n שמלכסן את A , ומכיל את

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

הוכחה: יהי $G = (V, E)$ גרף d רגולרי על n קודקודים, A מטריצת השכנות שלו, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס אורתונורמלי ל R^n המלכסן את A .

נבחר $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \lambda_1 = d$. תהי $U \subseteq V$ קבוצה בלתי תלויה של קודקודים בעלת גודל מקסימלי,

כלומר: $\theta := \alpha(G) = |U|$. יהי $f \in R^n$ הוקטור המציין של U (כלומר $f_i = \begin{cases} 1, i \in U \\ 0, i \notin U \end{cases}$).

יהי $f = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$ הפיתוח של f באמצעות הבסיס האורתונורמלי המלכסן.

טענות:

א. $a_j = \langle f, \alpha_j \rangle$

ב. $a_1 = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{i=1}^n a_i^2 = \theta$

ד. $fAf^{tr} = 0$

הוכחות:

א. ראינו את זה לגבי כל בסיס אורתונורמלי.

ב. $a_1 = \langle f, \alpha_1 \rangle = \frac{|U|}{\sqrt{n}} = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$

ג. $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle =_{Parseval} \sum a_i^2 = \sum f_i^2 = \text{Number of ones in } f = |U| = \theta$

ד. באופן כללי $fAg^{tr} = \sum_{i,j} f_i A_{ij} g_j$, במקרה שלנו $fAf^{tr} = \sum_{i,j} f_i A_{ij} f_j = 0$

$$0 = fAf^{tr} = \langle f, Af^{tr} \rangle = \left\langle f, A \left(\sum a_i \alpha_i \right)^{tr} \right\rangle = \left\langle f, \sum a_i A \alpha_i^{tr} \right\rangle =$$

$$\left\langle f, \sum a_i \lambda_i \alpha_i^{tr} \right\rangle = \left\langle \sum a_i \alpha_i, \sum a_i \lambda_i \alpha_i \right\rangle = \sum a_i^2 \lambda_i$$

קיבלנו בסוף :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum a_i^2 \lambda_i = a_i^2 \lambda_i + \sum_{i>1} a_i^2 \lambda_i = \frac{\theta^2}{n} d + \sum_{i>1} a_i^2 \lambda_i \geq \frac{\theta^2}{n} d + \left(\sum_{i>1} a_i^2 \right) \lambda_{\min} = \\
&\frac{\theta^2}{n} d + \lambda_{\min} \left(\theta - \frac{\theta^2}{n} \right) \\
0 &\geq \theta d + \lambda_{\min} (n - \theta) = \theta (d - \lambda_{\min}) + n \lambda_{\min} \Rightarrow \\
n \frac{-\lambda_{\min}}{d - \lambda_{\min}} &\geq \theta
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

נעבור לפרק ט"ו בעמיצור – תבניות בי-ליניאריות

תבניות בי-ליניאריות

הגדרה: יהו V, W מרחבים וקטוריים מעל F (אותו F). פונקציה $f: V \times W \rightarrow F$ תקרא תבנית ביליניארית אם מתקיימים לכל $\alpha, \alpha' \in V, \beta, \beta' \in W$:

בי ליניאריות:

$$f(\alpha + \alpha', \beta) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha', \beta) \quad \text{א.}$$

$$f(\alpha, \beta + \beta') = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta') \quad \text{ב.}$$

הומוגניות:

$$f(c\alpha, \beta) = cf(\alpha, \beta) \quad \text{א.}$$

$$f(\alpha, c\beta) = cf(\alpha, \beta) \quad \text{ב.}$$

אם $V = W$ - נאמר כי f תבנית ביליניארית על V .

דוגמאות:

$$f \equiv 0 \quad \text{א.}$$

$$\text{ב. } V = R^n, \text{ אזי } f(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \text{ היא תבנית ביליניארית (לא עובד מעל } C \text{).}$$

$$f: V \times V^*, \alpha \in V, \psi \in V^* \quad \text{ג.}$$

$$f(\alpha, \varphi) = \varphi(\alpha)$$

$$\text{ד. נקבע } \varphi \in V^*, \psi \in W^*, \text{ אזי } f(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \psi(\beta)$$

$$\text{ה. } V = F^m, W = F^n, \text{ ונקבע } A_{m \times n}, \text{ אזי } f(\alpha, \beta) = \alpha A \beta^T$$

20.6.2006

הקדמה – יש סיכוי שטעינו שיעור שעבר, והגדרנו מטריצת מעבר הפוך. נגדיר עכשיו טוב. יהי V מ"ו, עם בסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ובסיס אחר $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

$$u \in V, u = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$$

$$[u]_\alpha = (x_1, \dots, x_n) \in F^n = X$$

$$[u]_\varepsilon = (y_1, \dots, y_n) \in F^n = Y$$

מחפשים מטריצה A כך ש $(*)$ - $A[u]_\alpha^t = [u]_\varepsilon^t$ - מטריצת המעבר מ α ים ל ε ים.

קל לראות שאם $A[u]_\alpha^t = [u]_\varepsilon^t$ אזי גם $A[w]_\alpha^t = [w]_\varepsilon^t$ לכל $w \in V$, אזי גם

$$\forall a, b \in F, A[au + bw]_\alpha^t = [au + bw]_\varepsilon^t$$

לכן $*$ תקיים לכל וקטור u אם הוא מתקיים לאיברי בסיס כלשהו.

נבחר את $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ונכתוב את $*$ עבור בסיס זה.

צריך להתקיים

$$\forall 1 \leq i \leq n, A[\alpha_i]_\alpha^t = [\alpha_i]_\varepsilon^t =$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \quad i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

קיבלנו את העמודה ה- i ב A , כלומר – העמודה ה- i במטריצת המעבר מ α ים ל ε היא $[\alpha_i]_\varepsilon^t$, כלומר -

$$\alpha_i = \sum_{r=1}^n a_{ri} \varepsilon_r$$

איך נזכור את זה: נסתכל במטריצת המעבר מ $(1, 2), (3, 4)$ ל $(1, 0), (0, 1)$ (ε ים):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[Id]_\varepsilon [u]_\alpha^t = [u]_\varepsilon^t$$

תבניות ביליניאריות

יהי V מ"ו מממד m מעל F , W מ"ו מממד n מעל F (אותו F), אזי $f: V \times W \rightarrow F$ תקרא

תבנית ביליניארית אם תקיים:

בי ליניאריות:

$$f(\alpha + \alpha', \beta) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha', \beta) \quad \text{א.}$$

$$f(\alpha, \beta + \beta') = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta') \quad \text{ב.}$$

הומוגניות:

$$f(c\alpha, \beta) = cf(\alpha, \beta) \quad \text{א.}$$

$$f(\alpha, c\beta) = cf(\alpha, \beta) \quad \text{ב.}$$

ראינו מספר דוגמאות. ראה שיעור שעבר.

הדוגמה החשובה, ביותר פירוט:

יהו $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ בסיס V , $\beta_1, \dots, \beta_n$ בסיס W קבועים, תהי $A \in M_{m \times n}(F)$ מטריצה קבוע מעל F , בהנתן $\alpha \in V, \beta \in W$

$$[\alpha]_\alpha = X = (x_1, \dots, x_m)$$

$$[\beta]_\beta = Y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$f(\alpha, \beta) := XAY^t$$

זו דוגמא אוניברסלית – כל תבנית ביליניארית מיוצגת ע"י מטריצה. בדוגמא הנ"ל:

$$f(\alpha_i, \beta_j) = [\alpha_i]_\alpha A [\beta_j]_\beta^t = e_i A e_j^t = [A]_{ij} = a_{ij}$$

(e_i הוא הוקטור שיש בו 1 רק במקום ה- i , ו-0 בשאר)

בדוגמא זו המטריצה A היא טבלה של ערכי f .

בהנתן בסיסים $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ל- V , $\beta_1, \dots, \beta_n$ ל- W , ו- $A \in M_{m \times n}(F)$ נגדיר $f: V \times W \rightarrow F$ ע"י

$$1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m, f(\alpha_i, \beta_j) = A_{ij}$$

טענה: התאמה זו היא התאמה חח"ע ועל בין תבניות ביליניאריות לבין מטריצות $m \times n$ מעל F . (למעשה – איזומורפיזם).

קצת הגדרות:

$$(f + g)(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta)$$

$$(cf)(\alpha, \beta) = c \cdot f(\alpha, \beta)$$

אוסף התבניות הביליניאריות הוא מרחב וקטור ממימד $m \times n$ מעל F , עם החיבור והכפל בסקלר הנ"ל.

הוכחה: נניח ש f, g מתאימות לאותה מטריצה – כלומר:

$$f(\alpha_i, \beta_j) = A_{ij}$$

$$g(\alpha_i, \beta_j) = A_{ij}$$

לכן f וגמזדהות על זוגות איברי הבסיס, ולכן – על כל זוג וקטורים – כי

$$f(\alpha, \beta) = [\alpha]_\alpha A [\beta]_\beta^t$$

$$g(\alpha, \beta) = [\alpha]_\alpha A [\beta]_\beta^t$$

לכן הוכחנו חח"ע.

מדוע זה על? בהנתן A ניקח את התבנית הליניארית המוגדרת ע"י

$$1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m, f(\alpha_i, \beta_j) = A_{ij}.$$

המטריצה $A_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$ נקראת המטריצה של f ביחס לבסיסים $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$.

דוגמא: $V = W$ (במקרה זה נאמר ש f תבנית ביליניארית על V), ונבחר $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \beta_1, \dots, \beta_n$

נתבונן ב $f: V \times V \rightarrow F$ כך ש

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$$

המטריצה המתאימה (המייצגת) את f ביחס לבסיסים אלו היא $I_{n \times n}$, ו $f(\alpha, \beta) = [\alpha]_{\alpha}^t I [\beta]_{\beta}^t$ ("מכפלה פנימית" אם אנו מעל $\mathbb{R}$)

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

הערה: כאשר $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ונרצה לייצג את f ע"י מטריצה תמיד נבחר בסיס אחד כמו בדוגמא הקודמת.

שאלה: בהנתן $f: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ תב"ל, קיצד משתנה המטריצה המייצגת אותה לפי בסיסים שונים?

יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ו $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ בסיסים ל V , ו $\beta_1, \dots, \beta_n$ ו $\beta'_1, \dots, \beta'_n$ בסיסים ל W . נניח A מייצגת את f ביחס לבסיסים α, β ו B ביחס ל α', β' . מה הקשר בין A ל B ?

תשובה: **משפט:** במקרה זה $Q^T A P = B$ כאשר Q מטריצת המעבר מ α' ל α ו P מטריצת המעבר מ β' ל β .

פרוש:

$$Q[u]_{\alpha'}^t = [u]_{\alpha}^t, \forall u \in V$$

$$P[w]_{\beta'}^t = [w]_{\beta}^t$$

$$\alpha'_i = \sum_{r=1}^m Q_{ri} \alpha_r$$

$$\beta'_j = \sum_{s=1}^n P_{sj} \beta_s$$

הוכחה ראשונה:

$$f(u, w) = [u]_{\alpha}^t A [w]_{\beta}^t = [u]_{\alpha'}^t B [w]_{\beta'}^t$$

$$[u]_{\alpha'}^t B [w]_{\beta'}^t = [u]_{\alpha}^t Q^T A P [w]_{\beta}^t$$

(ראה את ההערה מהתחלת השיעור על מעברי בסיס)

$$[u]_{\alpha'} := X, [w]_{\beta'} := Y$$

אזי קיבלנו:

$$\forall x, y, XBY^t = XQ^T APY^t$$

$$B = Q^T A P \quad \text{מכאן}$$

$$e_i (Q^T A P) e_j^t = e_i B e_j^t = B_{ij} = (Q^T A P)_{ij} \quad \text{למשל:}$$

הוכחה שנייה:

$$\beta'_j = \sum_{s=1}^n P_{sj} \beta_s \quad \text{נשתמש בנוסחה}$$

$$B_{ij} = f(\alpha'_i, \beta'_j) = f\left(\sum_{r=1}^m Q_{ri} \alpha_r, \sum_{s=1}^n P_{sj} \beta_s\right) = \sum_r \sum_s Q_{ri} P_{sj} f(\alpha_r, \beta_s) =$$

$$\sum_r \sum_s Q_{ri}^t A_{rs} P_{sj} = (Q^T A P)_{ij}$$

הגדרה: אם $A = Q'BP$ כאשר Q, P הפיכות 9 נאמר ש A, B שקולות.

מסקנה: A, B שקולות אם"מ הם מייצגות אותה תב"ל לפי בסיסים שונים.

הוכחה: ראינו שאם הן מייצגות אותה תב"ל אז הן שקולות. מצד שני - $A = Q'BP$ אזי נבחר בסיסים

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ל V , $\beta_1, \dots, \beta_n$ ל W , נגדיר $f: V \times W \rightarrow F$ לפי הבסיסים הנ"ל. יהיו $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m$ ו $\beta'_1, \dots, \beta'_n$ הבסיסים המתקבלים כאשר לוקחים את Q ו P כמטריצות מעבר (אפשרי כי הן הפיכות). לפי מה שהוכחנו - B מייצגות את f לפי הבסיסים החדשים.

במקרה ש A רבועית ו P הפיכה ו $B = P'AP$ נאמר ש A ו B **חופפות**. באופן דומה - מטריצות הן חופפות אם"מ הן מייצגות תב"ל על V לפי בסיסים שונים.

משפט: בהנתן $f: V \times W \rightarrow F$ תבנית ביליניארית, $\dim(V) = m, \dim(W) = n$, אזי

קיימים בסיסים $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ל V ו $\beta_1, \dots, \beta_n$ ל W , ומספר שלם אי שלילי r כך ש

$$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \leq r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

כלומר המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיסים הנ"ל נראית כך:

$$D_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(כאן $r = 2$ כש $r = 2$)

כלומר, אם

$$V \ni \alpha = \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i$$

$$W \ni \beta = \sum_{j=1}^n y_j \beta_j$$

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r x_i y_i \quad \text{אזי}$$

הוכחה:

באינדוקציה על $m + n$ ונניח $1 \leq m, n$ אחרת טריוויאלי והמקרה $m = n = 1$ טריוויאלי. נניח גם $f \neq 0$ אחרת המשפט גם נכון באופן טריוויאלי.

היות ש f לא זהותית 0, קיימים (α_1, β'_1) כך ש $f(\alpha_1, \beta'_1) = c \neq 0$, לכן נגדיר $\beta_1 = \frac{\beta'_1}{c}$ ואז

$$f(\alpha_1, \beta_1) = 1$$

21.6.2006

תזכורת מסמסטר קודם: יהיו $A_{m \times n}, B_{m \times n}$ נקראת שקולות אם קיימות $P_{m \times m}, Q_{n \times n}$ הפיכות כך ש

$$B = PAQ$$

עובדה: למטריצות שקולות יש אותה דרגה.

תזכורת – משפט האפסיות של סילבסטר:

$$r(A) - \text{הדרגה של } A$$

$$z(A) - \text{האפסיות של } A.$$

$$r(B) - z(A) \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$$

כלומר, אם $r(P) = m, r(Q) = n, z(P) = 0, z(Q) = 0$ - נקבל את העובדה לעיל.

תבניות ביליניאריות

תהי $f: V \times W \rightarrow F$. מתאימה למטריצה $A_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$, כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ בסיס

קבוע ל V , ו $\beta_1, \dots, \beta_n$ בסיס קבוע ל W . נקראת המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיסים הנ"ל.

כדי לחשב עם המטריצה, נחשב - $f(u, v) = [u]_\alpha A [v]_\beta^t$.

משפט: יהיו V ממיד m , W ממיד n , מ"ו מעל שדה F , ותהי $f: V \times W \rightarrow F$, אזי קיימים

בסיסים $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ל V , $\beta_1, \dots, \beta_n$ ל W , וקיים שלם אי שלילי r כך ש:

$$f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \leq r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{כלומר, המטריצה המייצגת את } f \text{ ביחס לבסיסים הנ"ל היא}$$

$$(r = 2).$$

כלומר, אם $\alpha = \sum_{i=1}^r x_i \alpha_i, \beta = \sum_{j=1}^r y_j \beta_j$ אזי $f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r x_i y_i$.

הוכחה: באינדוקציה על $\max(m, n)$.

אם $m = 0$ או $n = 0$ אזי זה טריוויאלי באופן ריק.

אם $m = 1, n = 1$ זה טריוויאלי (יש לנו סקלר).

לכן נניח $m, n \geq 1$. גם אם $f \equiv 0$ זה טריוויאלי - המטריצה היא מטריצת ה-0.

לכן נניח כי יש α_1, β_1 כך ש $f(\alpha_1, \beta_1) = 1$ (ראינו בעזרת נירמול - נחפש וקטורים שנותנים אופציה שונה מ-0, וננרמל).

נסמן $W_2 \subseteq W := \{u \in W \mid f(\alpha_1, u) = 0\}$. קל לראות שזה אכן תת מרחב וקטורי.

$$W_1 = sp(\beta_1)$$

טענה: $W = W_1 \oplus W_2$ (כלומר - $W = W_1 + W_2$, וגם $W_1 \cap W_2 = \{0\}$).

הוכחה: יהי $\beta = W_1 \cap W_2$. היות $\beta \in W_1$ אזי

$$c \in F, \beta = c\beta_1$$

$$\beta \in W_2 \Rightarrow f(\alpha_1, \beta) = 0 = f(\alpha_1, c\beta_1) = cf(\alpha_1, \beta_1) = c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{כלומר - } \beta = 0_F \cdot \beta_1 = 0_V$$

נותר להוכיח כי שכל $\beta \in W$ הוא מהצורה $c\beta_1 + \gamma$, כאשר $\gamma \in W_2$. ראשית, נמצא את c (מתוך הנחה שיש הצגה כזאת). אחרי שנמצא את c , $\gamma = \beta - c\beta_1$, ואז נבדוק כי $\gamma \in W_2$.

בהנתן β , **נניח** כי קיימת הצגה $\beta = c\beta_1 + \gamma$

$$f(\alpha_1, \beta) = f(\alpha_1, c\beta_1 + \gamma) = f(\alpha_1, c\beta_1) + f(\alpha_1, \gamma) = cf(\alpha_1, \beta_1) = c$$

לכן, תחת ההנחה שקיימת הצגה כזו קיבלנו ש $c = f(\alpha_1, \beta)$, ולכן $\gamma = \beta - f(\alpha_1, \beta)\beta_1$

מכיוון שעד כה הנחנו, בואו נבדוק כי $\beta = c\beta_1 + \gamma$ עם β_1, γ כנ"ל, וכי $\gamma \in W_2$. נבדוק שאכן $\gamma \in W_2$ - כלומר $f(\alpha_1, \gamma) = f(\alpha_1, \beta - f(\alpha_1, \beta)\beta_1) = 0$ ואכן,

$$= f(\alpha_1, \beta) - f(\alpha_1, \beta)f(\alpha_1, \beta_1) = 0$$

נחזור להוכחה המקורית

באופן דומה - נגדיר $V_1 = sp(\alpha_1)$, $V_2 = \{v \in V \mid f(v, \beta_1) = 0\}$, ונקבל $V = V_1 \oplus V_2$ (אותה הוכחה).

כעת נתמודד בצמידים של f ל $V_2 \times W_2$ - כאן תופשת הנחת האינדוקציה, ולכן יש בסיסים $\alpha_2, \dots, \alpha_m$

ל V_2 ו $\beta_2, \dots, \beta_n$, ושלם אי שלילי s כך ש $f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 1, & 2 \leq i = j \leq s \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$. כלומר, המטריצה

של f מצומצמת ל $V_2 \times W_2$ כמו D_s .

נרצה לטעון כי המטריצה על $V \times W$ עם הבסיסים $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ו $\beta_1, \dots, \beta_n$ נראית כרצוי - D_r .

ואכן, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ו $\beta_1, \dots, \beta_n$ בסיסים, (כי $W = W_1 \oplus W_2$ ו $V = V_1 \oplus V_2$)

$$\text{כזכור - } f(\alpha_1, \beta_1) = 1, \text{ כמו כן } \begin{matrix} j \geq 2, f(\alpha_1, \beta_j) = 0 \\ i \geq 2, f(\alpha_i, \beta_1) = 0 \end{matrix} \text{ לפי הגדרת } W_2, V_2, \text{ וסיימנו.}$$

תזכורת: A, B מייצגות את f ביחס לבסיסים שונים, אזי A, B שקולות (יש P, Q הפיכות כך

$$B = P^t A Q)$$

מסקנה: $A_{m \times n}$ מדרגה r אזי היא שקולה ל D_r .

הוכחה: ראינו כי A שקולה ל D_r . אבל - דרגת D_r היא r' . ולמטריצות שקולות יש אותה דרגה.

$$\text{ולכן } r = r'$$

מסקנה: $A, B \in M_{m \times n}(F)$ שקולות אם"מ יש להן אתה דרגה.

הוכחה: $\Rightarrow$ ידוע.

$\Leftarrow$ אם יש להן אותה דרגה אזי שתיהן שקולות ל D_r , ושקילות היא טרנזיטיביות.

תבניות סימטריות:

כעת נתרכז במקרה $f: V \times V \rightarrow F$ ותמיד נבחר בסיס אחד לשני העותקים של V .
 $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ תבנית בילינארית על V תקרא תבנית סימטרית אם $\forall \alpha, \beta, f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$
למה: f סימטרית אם"מ היא מיוצגת בסיס מסוים ע"י מטריצה סימטרית $(A_{ij} = A_{ji}) \forall i, j$
הוכחה: f סימטרית אז $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$, כאשר α_i הם הבסיס בהיחיד אליו A מייצגת את f -
 $A_{ji} = f(\alpha_j, \alpha_i) = f(\alpha_i, \alpha_j) = A_{ij}$
כיוון שני - אם A סימטרית (ברור מכיוון ש $f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\alpha_j, \alpha_i)$), אזי עבור $X = [u]_\alpha, Y = [v]_\alpha$ אזי

$$f(u, v) = XAY^t = (XAY^t)^t = Y A^t X^t = YAX^t = f(v, u)$$

מסקנה: אם f אינה סימטרית היא אינה מיוצגת ע"י מטריצה אלכסונית לגבי אף בסיס. אם A אינה סימטרית היא אינה חופפת לאף מטריצה אלכסונית.

ריגורסיה: אם A מייצגת את f ביחס לבסיס אחד, ו B מייצגת את f ביחס לבסיס אחר, הרי $B = P^t A P$, כש P היא מטריצת המעבר בין הבסיסים. מטריצות כנ"ל נקראות **חופפות**.
הגדרה: $A, B \in M_n(F)$ חופפות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $B = P^t A P$, ומהנאמר לעיל נובע ש A, B חופפות אם"מ הן מייצגות אותה תבנית בילינארית על V ביחס לבסיסים אחרים.

עם כך, אם A אינה סימטרית, היא אינה חופפת למטריצה אלכסונית (שהיא כן סימטרית).

משפט: אם F שדה ממציין $2 \neq$ אזי A סימטרית $\iff A$ חופפת למטריצה אלכסונית.
הוכחה: ראה משפט הבא

תזכורת: מעל A סימטרית, אזי קיימת P אורתוגונלית כך ש $P^{-1} A P = D$, D אלכסונית. מכיוון שהיא אורתוגונלית $P^{-1} = P^t$, כלומר A חופפת למטריצה אלכסונית, באמצעות P אורתוגונלית.

משפט: יהי V מ"מ מעל F , $\text{char} F \neq 2$, תהי f תבנית בילינארית **סימטרית** על V , אזי קיים ל V

$$\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & c_r & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} : \text{ש תראה } C_r, f \text{ מיוצגת ע"י } C_r$$

הוכחה: אם $f \equiv 0$ אין מה להוכיח.

טענה: אם $f \neq 0$ קיים $\alpha \in V$ כך ש $f(\alpha, \alpha) \neq 0$ (נזכר במציין $2 -$ אז הטענה לא נכונה)

הוכחת הטענה: יהיו $\alpha, \beta \in V$ כך ש $f(\alpha, \beta) \neq 0$. מתקיים -

$$f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = f(\alpha, \alpha) + f(\beta, \beta) + 2f(\alpha, \beta)$$

אם $f(\alpha, \alpha) = 0$ וגם $f(\beta, \beta) = 0$ אזי $f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 2f(\alpha, \beta) \neq 0$, אחרת $f(\alpha, \alpha) \neq 0$ או $f(\beta, \beta) \neq 0$. בכל מקרה, מצאנו וקטור המקיים $f(v, v) \neq 0$.

נחזור להוכחה המקורית – יהי $\alpha_1 \in V$ כך ש $f(\alpha_1, \alpha_1) = c \neq 0$.
 יהי $V_2 \subseteq V$ המוגדר $V_2 = \{\beta \in V \mid f(\alpha_1, \beta) = 0\}$. יהי $V_1 = sp(\alpha_1)$.
טענה: $V = V_1 \oplus V_2$.

הוכחת הטענה: - זהה להוכחה בהתחלת הקובץ (שהראתה ש $A \sim D_r$ (חופפת)). כל המשך ההוכחה – אותו דבר.

נתמקד כעת בתבניות בילינאריות סימטריות מעל R ומעל C .
הגדרה: הדרגה של תבנית בילינארית היא דרגת המטריצה המייצגת אותה ביחס לבסיס מסוים (ההגדרה טובה – מטריצות המייצגות ביחס לבסיסים שונים חופפות, ולכן בעלות אותה דרגה).

משפט: יהי V מ"ו n מימדי מעל C או R , ותהי f תבנית בילינארית סימטרית על V מדרגה r .
 א. אם V מעל C - אזי ניתן לבחור ל V בסיס, ביחס אליו f מיוצגת ע"י D_r .
 ב. אם V מעל R - ניתן לבחור ל V בסיס, ביחס אליו f מיוצגת ע"י מטריצה הנראית

$$p \text{ אחדים, } m-1, \text{ ואפסים), כאשר } p+m=r \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & 0 & \end{array} \right)$$

ג. משפט ההתמדה של סילבסטר: p ו m אינן תלויות בבחירת הבסיס, והמספר $p-m$ נקרא הסיגנטורה (החתימה) של f .

25.6.2006

תבניות בי ליניאריות סימטריות

$f: V \times V \rightarrow F$, $\text{char } F \neq 2$, ואז תבנית סימטרית אומר כי $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$.
הוכחנו כי: ל f כנ"ל, ניתן לבחור בסיס ל V , כך שביחס אליו, f מיוצגת ע"י מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_r \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ כלומר } - c_i \neq 0 \text{ עבור } 1 \leq i \leq r, \text{ אחרת.}$$

נרכז בתבניות סימטריות מעל R ו C .

משפט: תהי f תבנית בי ליניארית סימטרית על V מעל C או R , אזי:

א. מעל C ניתן לבחור בסיס כך ש f לפי בסיס זה תיוצג כ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (r אחדות), r1

תלוי רק ב f ולא בבסיס הנבחר.

ב. מעל R ניתן לבחור בסיס כך ש f לפי בסיס זה תיוצג כ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ (p, m אחדות), -1 m

(ים)

ג. משפט ההתמדה של סילבסטר: p, m תלויות רק ב f (ולא בבסיס).

הגדרה:

א. **הדרגה** של תבנית בילינארית סימטרית היא הדרגה של מטריצה המייצגת את f ביחס לבסיס כלשהו.

ב. **הסיגנטורה** של תבנית בילינארית סימטרית f מעל R היא $p - m$ (כמו שהגדרנו קודם).

ג. **הסיגנטורה** של מטריצה ממשית סימטרית היא הסיגנטורה של התבנית הבילינארית המיוצגת על ידיה.

מסקנה: $A, B \in M_n(R)$ סימטריות אזי הן חופפות אם"מ יש להן אותה דרגה ואותה סיגנטורה.

הוכחה: A, B חופפות, אזי – הן מייצגות את f ביחס לבסיסים אחרים, ואז דרגתן והסיגנטורה שלהן נקבעת ע"י התב"ל שהן מייצגות (לפי בסיס מסוים).

בכיוון השני – אם ל A, B אותה דרגה ואותה סיגנטורה, אזי – שתיהן חופפות לאותה מטריצה אלכסונית.

הערה: אם אני יודע את $p + m$ ואת $p - m$ אז אפשר לחשב את p ו m .

הוכחה:

א. לפי משפט קודם נבחר בסיס ל V $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש $c_i \neq 0, 1 \leq i \leq r$ ו $f(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ c_i, i = j \end{cases}$

נגדיר בסיס חדש $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$, $1 \leq i \leq r$, $\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{c_i}}$ (השורש קיים מעל c). את שאר איברי

הבסיס לא נשנה. סיימנו בעצם, שכן:

$$i \neq j, f(\alpha'_i, \alpha'_j) = cf(\alpha_i, \alpha_j) = c0 = 0$$

$$r < i = j, f(\alpha'_i, \alpha'_j) = f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$$

$$1 \leq i = j \leq r, f(\alpha'_i, \alpha'_j) = \frac{1}{\sqrt{c_i}} \frac{1}{\sqrt{c_i}} = f(\alpha_i, \alpha_i) = \frac{1}{c_i} c_i = 1$$

ב. כמו בסעיף א', נבחר בסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ביחס אליו f מיוצגת ע"י מטריצה

$$c_i \neq 0, 1 \leq i \leq r, \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \dots & \\ & & c_r \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

המוגדר: $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i, r < i \\ \frac{\alpha_i}{\sqrt{c_i}}, 1 \leq i \leq r, c_i > 0 \\ \frac{\alpha_i}{\sqrt{-c_i}}, 1 \leq i \leq r, c_i < 0 \end{cases}$$

לפי בסיס זה נקבל מטריצה אלכסונית כנדרש עם $1, -1, 0$. אם יש צורך, נסדר מחדש את

$\alpha'_1, \dots, \alpha'_{p+m}$ בכדי לקבל מטריצה כמבוקש.

ג. נניח שביחס לבסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ קיבלנו p, m . וביחס לבסיס $\beta_1, \dots, \beta_n$ קיבלנו p', m' . ראשית, $p + m = p' + m'$ כי המטריצות המייצגות את f ביחס לבסיסים הנ"ל הן חופפות,

ולכן מאותה הדרגה. נניח בשלילה כי $p > p'$, כלומר - $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$ ועל $\beta_1, \dots, \beta_{p'}, \beta_{p'+1}, \dots, \beta_n$

כן $p + n - p' > n$, לכן $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots, \beta_{p'+1}, \dots, \beta_n$ תלויים ליניארית. (יותר מ-

וקטורים במרחב n מימדים).

על כן, קיימים $a_1, \dots, b_{p+1}, \dots, b_n \in R$ לא כולם אפסים כך ש $\sum_{i=1}^p a_i \alpha_i + \sum_{j=p'+1}^n b_j \beta_j = 0$

נשים לב כי לפחות אחד מה $a_i \neq 0$, כלומר $\alpha := \sum_{i=1}^p a_i \alpha_i, \beta := -\alpha = \sum_{j=p'+1}^n b_j \beta_j$

$$f(\alpha, \alpha) = f\left(\sum_{i=1}^p a_i \alpha_i, \sum_{i=1}^p a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^p a_i^2 f(\alpha_i, \alpha_i) = \sum_{i=1}^p a_i^2 > 0$$

$$f(\alpha, \alpha) = f(-\beta, -\beta) = (-1)(-1)f(\beta, \beta) = f(\beta, \beta) =$$

$$f\left(\sum_{j=p'+1}^n b_j \beta_j, \sum_{j=p'+1}^n b_j \beta_j\right) = \sum b_j^2 f(\beta_j, \beta_j) \leq 0$$

מצד שני

הגענו לסתירה.

הוכחה אלטרנטיבית: (אבל דומה) כמקודם נבחר בסיסים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ו $\beta_1, \dots, \beta_n$. נגדיר

$$W^+ = sp(\beta_1, \dots, \beta_{p'}) \quad V^+ = sp(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

$$W^- = sp(\beta_{p'+1}, \dots, \beta_{p'+m}) \quad V^- = sp(\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m})$$

$$W^0 = sp(\beta_{p'+m'+1}, \dots, \alpha_n) \quad V^0 = sp(\alpha_{p+m+1}, \dots, \alpha_n)$$

מתקיים: $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0 = W^+ \oplus W^- \oplus W^0$. קל לראות כי אם $\alpha \in V^+$, אזי

$$f(\alpha, \alpha) > 0, \text{ כי } \alpha = \sum a_i \alpha_i, f(\alpha, \alpha) = \sum a_i^2 f(\alpha_i, \alpha_i)$$

$$\beta \in W^- \oplus W^0, f(\beta, \beta) \leq 0 \text{ (משיקולים דומים). אם } p' < p,$$

$\dim V^+ + \dim(W^- \oplus W^0) > n$, ולכן חיתוכם מכיל $\gamma \neq 0$ וזו סתירה (כי הוא צריך להיות גם חיובי וגם אי שלילי בו זמנית).

תבניות ריבועיות

אם F שדה ממציין $2 \neq$, V מ"ו מעל F , f תבנית בילינארית מעל F , נסמן $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$. אזי $q: V \rightarrow F$, והיא התבנית הריבועית המוגדרת ע"י f .

נשים לב (זה לא לינארי, זה ריבועי!)

$$a \in F, q(a \cdot \alpha) = a^2 q(\alpha)$$

אנו נתעסק רק בתבניות ריבועיות המוגדרות ע"י תבניות בילינאריות סימטריות.

טענה: אם f תבנית בילינארית על V מעל F עם $\text{char } F \neq 2$, q היא התבנית הריבועית המוגדרת

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(q(\alpha + \beta) - q(\alpha) - q(\beta))$$

ע"י f , אזי

הוכחה:

$$q(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = f(\alpha, \alpha) + 2f(\alpha, \beta) + f(\beta, \beta) =$$

$$q(\alpha) + 2f(\alpha, \beta) + q(\beta)$$

הערה: אם f תבנית בילינארית המיוצגת ע"י מטריצה סימטרית A ביחס לבסיס $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ויהי

$$\alpha = \sum x_i \alpha_i, q(\alpha) = \alpha A \alpha^t = \sum_{i,j} x_i x_j a_{ij}$$

אזי f , ע"י f , התבנית הריבועיות המוגדרת ע"י f , אזי

כלומר, קיבלנו פולינום במשתנים $x_1, \dots, x_n$, **שהוא הומוגני מדרגה 2** – כלומר, כל הגורמים הם מהצורה $x_i x_j$ או x_i^2 .

דוגמא: אם $f(\alpha, \beta) = x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y$

כש $\alpha = \sum x_i \alpha_i, \beta = \sum y_j \alpha_j, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$

f סימטרית, ולכן $q(\alpha) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$

טענה: כל פולינום הומוגני מדרגה 2 קובע תבנית ריבועית על V מ"ו מעל שדה עם מציין $2 \neq$ (ביחס לבסיס מסוים).

דוגמא (במקום הוכחה): $x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 7x_1x_2 + 5x_2x_3$, אזי זוהי התבנית הרבועית המתאימה

למטריצה - $\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 \end{pmatrix}$, מעל R^3 .

תבניות ריבועיות מעל R

דוגמא - $\alpha, \beta \in R^n$, נגדיר $f(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$ תבנית בילינארית. ואז $q(\alpha) = \|\alpha\|^2$

דוגמא נוספת: $f(\alpha, \beta) = -\langle \alpha, \beta \rangle$, ואז $q(\alpha) = -\|\alpha\|^2$

דוגמא 3: $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ואז $q((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2$

הגדרה: תבנית ריבועית מעל R תקרא חיובית (שלילית, אי שלילית, אי חיובית)

אם $f(\alpha, \alpha) > 0 \forall \alpha, f(\alpha, \alpha) < 0$ (שלילית, אם < 0 , אי שלילית אם ≥ 0 , אי חיובית אם ≤ 0).

משפט: יהי V מ"ו ממימד סופי מעל R , f תבנית בילינארית סימטרית, q התבנית הריבועית המתאימה,

אזי q חיובית (אי שלילית, ...) אם"מ כל הערכים העצמיים של מטריצה A המייצגת את f ביחס

לבסיס מסוים הם חיוביים (אי שליליים, ...).

הוכחה: תהי A מטריצה המייצגת את f ביחס לבסיס כלשהו. ראשית A סימטרית, ועל כן ניתנת

ללכסון אורתוגונלי - כלומר, קיימת P אורתוגונלית ($P' = P^{-1}$) כך

ש $P'AP = P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & O & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ A חופפת ל D - הן מייצגות אותה תבנית ריבועית

ביחס לבסיסים שונים, ו D - לכן הערכים העצמיים של A הם הערכים העצמיים של D

($\lambda_1, \dots, \lambda_n$). לכן נתרכז בהצגת f לפי הבסיס שבו f, q מיוצגות ע"י D .

נקרא לבסיס המלכסן $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. יהי $a = \sum x_i \alpha_i$. $q(\alpha) = \sum \lambda_i x_i^2$

$$q(\alpha) = xAx^t$$

(כאשר x וקטור המקדמים של α לפי הבסיס). לכן אמ"מ $\lambda_i > 0$ אזי $q(\alpha) > 0$ לכל $\alpha \neq 0$,
 ואם $0 \leq \lambda_i$ אזי $q(\alpha) \geq 0$ לכל $\alpha \neq 0$ וכו'.

בכיוון השני – ראינו שאם כל הע"ע < 0 , אזי $q(\alpha) < 0$ לכל $\alpha \neq 0$. אם יש ע"ע ≥ 0 אזי ניתן
 למצוא α כך ש $q(\alpha) \geq 0$.

27.6.2006

מבנה המבחן:

3 חלקים:

1. חלק א' – להוכיח שניים משלושה משפטים - $2 \times 25_{pt}$ נקודות.
2. חלק ב' – שני תרגילים **טכניים קלים** (כמו מה שהיה בבוחן – אפילו יותר קל. מקביל לפתירת שתי משוואות בשתי נעלמים). $2 \times 10_{pt}$. אין בחירה.
3. חלק ג' – שמונה שאלות קצרות מאוד - $8 \times 4_{pt} = 32$ - כל תשובה צריכה להיות כ-3 משפטים. הרוב אפילו 2 משפטים. לדוגמא – האם המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ דומה ל- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - והכוונה היא לענות, לא – כי למטריצות דומות אותה דרגה. מראה בקיעות במשפטים, לא בהוכחות שלהם.

וכעת לחומר:

יהי V מ"ו מעל R מממד n . נקבע $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס. סימון – אם $u = \sum x_i \alpha_i$, אזי נסמן

$$[u]_\alpha = (x_1, \dots, x_n) = X$$

אם $f: V \times V \rightarrow R$ תבנית בילינארית סימטרית, כלומר - $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ אזי A

מטריצה המייצגת את f - היא $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$

$$\text{ואז: } f(u, v) = [u]_\alpha A [v]_\alpha^t$$

$$[u]_\alpha = X \text{ כזכור, ואז } q(u) = XAX^t = \sum x_i x_j a_{ij}$$

$$x_1, \dots, x_n$$

השתכנענו מדוגמא כי לכל פולינום כזה מתאימה תבנית רבועית.

A מטריצה סימטרית וממשית. קיימת P אורתוגונלית כך ש

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

A חופפת ל- D , ו- D דומה ל- D . כלומר, D מייצגת את f לפי בסיס $\beta_1, \dots, \beta_n$.

$$f(u, v) = [u]_\beta D [v]_\beta^t$$

$$q(u) = [u]_\beta D [u]_\beta^t$$

$$[u]_\beta = (y_1, \dots, y_n)$$

$$q(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

נשים לב כי מאחר ו- A דומה ל- D , אזי $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ אלו בדיוק הערכים העצמיים של A .

נשים לב כי $q(u) > 0$ לכל $y_1, \dots, y_n$ כך שלא כולם 0 אם $\lambda_i > 0$ לכל i . כנ"ל בנוגע ל $\geq, \leq, <$.

נניח בה"כ $0 < \lambda_1, \dots, \lambda_p, 0 < \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+m}, 0 > \lambda_{p+m+1}, \dots, \lambda_n = 0$, אזי A חופפת למטריצה $D_{p,m}$ (ראה הגדרה בשיעור הקודם).

ידוע ממשפט ההתמדה של סילבסטר כי A חופפת למטריצה מהצורה הנ"ל. החידוש הוא ש p, m פקבעים על ידי הערכים העצמיים של A , ולא ע"פ הבסיס.

הוכחה: אם $0 < \lambda_1, \dots, \lambda_p, 0 < \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+m}, 0 > \lambda_{p+m+1}, \dots, \lambda_n = 0$, אזי A חופפת למטריצה $D_{p,m}$, אזי D חופפת ל D' . ממשפט סילבסטר D חופפת רק למטריצה יחידה מסוג $D_{p,m}$, ולכן A חופפת ל D ו D ל D' $A \Leftarrow D'$.

מסקנה: אם q תבנית ריבועית על V ו A מייצגת את q לפי בסיס כלשהו, ו A p ע"ע חיוביים ו m ע"ע שליליים, אזי, $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$, כאשר $0 < q|V^+, 0 < q|V^-, 0 = q|V^0$ (כלומר $q(\alpha) > 0$ לכל $\alpha \in V^+$).
כאשר $0 > q|V^-, 0 = q|V^0$ וכמו כן -
 $\dim(V^+) = p, \dim(V^-) = m, \dim(V^0) = n - m - p$.

הוכחת המסקנה: A חופפת למטריצה $D_{p,m} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ עם p ערכים גדולים מ 0 , ו m

ערכים קטנים מ 0 , ו D מייצגת את q לפי בסיס $\beta_1, \dots, \beta_n$. נגדיר $V^+ = sp\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$, $V^- = sp\{\beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+m}\}$, $V^0 = sp\{\beta_{p+m+1}, \dots, \beta_n\}$. מתקיים $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$ כי איחוד בסיסים הוא בסיס.

נבדוק למשל כי $0 < q|V^+$. מתקיים מההגדרה.

28.6.2006

V מ"ו n מימדי מעל R , $q: V \rightarrow R$ תבנית ריבועית. אם בוחרים בסיס קבוע $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, אזי ניתן לייצג את q באמצעות מטריצה סימטרית A כך ש $q(u) = [u]_\alpha A [u]_\alpha^t$. תמיד ניתן לפרק את V ל $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$ כך ש $q|_{V^0} = 0$, $q|_{V^-} < 0$, $q|_{V^+} > 0$. המימדים של V^+ , V^- , V^0 הם תכונות של q , וניתן למצוא אותם באמצעות המטריצה A (לא תלוי בבחירת הבסיס).
ראינו כי $\dim(V^+)$ הוא מספר הערכים העצמיים החיוביים, $\dim(V^-)$ הוא מספר הערכים העצמיים השליליים, ו $\dim(V^0)$ הוא מספר הערכים העצמיים שהם 0. "מספר הערכים", כאן – **כולל**

ריבוי.

דוגמא:

$X = (x_1, \dots, x_n)$ נתבונן ב $q_n := q(x) = \sum_{j \neq i} x_i x_j$. ביחס לבסיס הסטנדרטי q_n מתאימה למטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (הכל אחדים חוץ מהאלכסון שהוא 0). נחפש ערכים עצמיים – נמצא את (-1) בריבוי $n-1$, ו $n-1$ הוא ע"ע בריבוי 1.

הריבוי הגאומטרי של (-1) הוא

$$\dim[\ker(A - (-1)I)] = n - \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = n - 1$$

הריבוי האלגברי של $n-1$ או n . סכום הע"ע הוא אפס (העקבה) לכן $n-1$ הוא ע"ע. לכן, $R^n = V^+ \oplus V^-$ כך ש $\dim(V^-) = n-1$, $q|_{V^-} < 0$.

נניח $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$. נסמן $q_{AB}(x) = 2 \sum_{\substack{k \in A \\ l \in B}} x_k x_l$. בה"כ נניח A, B רציפות, זרות.

המטריצה המייצגת את q_{AB} תראה כך $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & & \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (יש בלוקים של $A \times B$ ו $B \times A$ אחדות).

הדרגה של A היא 2. 0 ע"ע עם ריבוי גאומטרי $\dim[\ker A] = n - \text{rank}(A) = n - 2$.

כמו קודם, סכום הע"ע הוא 0. יש לנו $n-2$ פעמים 0, ומכיוון שיש עוד שני ערכים עצמיים, והמטריצה אינה מטריצת האפס, יש לנו $c, -c, c \neq 0$ כע"ע עצמיים.
ניתן לרשום עם כן

$$R^n = V_{AB}^0 \oplus V_{AB}^+ \oplus V_{AB}^- = V_{AB}^{\geq 0} \oplus V_{AB}^-$$

$$\dim V_{AB}^{\geq 0} = n - 1$$

הערה: אם A, B מטריצות, $XAX' + XBX' = X(A+B)X'$.

לכן, אם q_1, q_2 תבניות ריבועיות המיוצגות ע"י A_1, A_2 בהתאמה, אזי $q_1 + q_2$ היא תבנית ריבועית המיוצגת ע"י $A_1 + A_2$.

משפט: יהיו $(A_1, B_1), \dots, (A_m, B_m)$ כך ש $A_j, B_j \subseteq \{1, \dots, n\}$ ומתקיים

$$q_n = \sum_{j=1}^m q_{A_j B_j} \quad \forall j, A_j \cap B_j = \emptyset \quad \text{אזי } m \geq n - 1$$

דוגמא – עבור $n = 4$ -

$$(A_1, B_1) = (\{1, 2\}, \{3, 4\})$$

$$(A_2, B_2) = (\{1\}, \{2\})$$

$$(A_3, B_3) = (\{3\}, \{4\})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{כלומר -}$$

הוכחה:

למה: אם $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V מימדי n ו $\dim W = n - 1$, אזי

$$\dim U \cap W \geq \dim U - 1$$

הוכחה: $n \geq \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$ ולכן

$$\dim U \cap W \geq \dim U + (n - 1) - n = \dim U - 1$$

מסקנה: אם $W_1, W_2, \dots, W_r$ תת מרחבים ממימד $n - 1$ אזי $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_r \geq n - r$ כי

$$\dim(W_1) \geq n - 1$$

$$\dim(W_1 \cap W_2) \geq n - 2.$$

...

הוכחת המשפט: נניח בשלילה $n - 2 \geq m$. $q_n = q_{A_1 B_1} + \dots + q_{A_m B_m}$

לכן $0 > q | V^0, V^- \subseteq R^n$

$$0 \leq q_{A_1 B_1} | V_{A_1 B_1}^{\geq 0} \subseteq R^n$$

$$\dots, V_{A_1 B_1}^{\geq 0} \subseteq R^n$$

$$0 \leq q_{A_m B_m} | V_{A_m B_m}^{\geq 0} \subseteq R^n$$

וכל התת מרחבים הנ"ל ממימד $n - 1$. סה"כ $m + 1$ תת מרחבים ממימד $n - 1$ לכן חיתוכים ממימד $1 \leq$ לכן יש וקטור $\alpha \neq 0$ ששייך לכולם. אבל לא יכול להיות, כי אז הוא גם שלילי וגם אי שלילי. סתירה.

הוכחה אלטרנטיבית, באמצעות אלגברה ליניארית 1: נניח בשלילה כי
 $K_n = K_{A_1 B_1} \cup K_{A_2 B_2} \cup \dots \cup K_{A_m B_m}$. $m \leq n - 2$ (כל האיחודים הם זרים).

נתבונן ב $m + 1$ המשוואות הלינאריות ההומוגניות הבאות ב n נעלמים.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$$

$$\sum_{k \in A_1} x_k = 0$$

$$\sum_{k \in A_2} x_k = 0$$

...

$$\sum_{k \in A_m} x_k = 0$$

ע"פ ההנחה, $n \geq m + 1$, ועל כן יש פתרון לא טריוויאלי, ונסמנו $x_1, \dots, x_n$. נסתכל ב

$$0 = \left(\sum x_i \right)^2 = \sum x_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum x_i^2 + 2 \sum_{\substack{l=1 \\ i \in A_l \\ j \in B_l}}^m x_i x_j =$$

$$\sum x_i^2 + 2 \sum_{l=1}^m \sum_{i \in A_l} x_i \sum_{j \in B_l} x_j = \sum x_i^2 > 0$$

סתירה.