

תרגול 1מתרגלת: נועה, hnoa@math.huji.ac.il**תמורות:****הגדרה:** תמורה על n הינה העתקה חח"ע ועל מהקבוצה $\{1, \dots, n\}$ לעצמה. (פונקציית פרמוטציה)

לדוגמא:

$$n = 3, \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3$$

אוסף התמורות על n .בד"כ, תמורות מסומנות ע"י האותיות היווניות σ, π, τ (נקרא – סיגמא, פיי, טאו, משמאל לימין).קב' התמורות על $\{1, \dots, n\}$ מסומנת כ S_n .שתי הצגות מקובלות לתמורה $\sigma \in S_n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

בדוגמא הנ"ל: (עבור $n = 3$).

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

הדרך השנייה לרשום תמורה היא כמכפלת מחזוריים זרים. מה זה אומר?

$$\sigma = (1 \ 2)(3)$$

(1 עובר ל2, 2 עובר ל1, 3 עובר לעצמו).

עוד דוגמא, הפעם ב S_5 :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = (1 \ 2 \ 5)(3 \ 4)$$

נהוג גם לא לרשום מחזור באורך 1, ואז מספר שלא רשום באף מחזור חוזרים לעצמם, ונקראים **נקודות שבת של התמורה**.הגדרה: תהי $\pi \in S_n$. ויהי $1 \leq i \leq n$. אם $\pi(i) = i$ אזי i נקרא **נק' שבת** של π .**הרכבת תמורות:** $\pi, \sigma \in S_n$. קיימת ההרכבה $\pi \circ \sigma$, ומוגדרת $(\pi\sigma)(i) = \pi(\sigma(i))$.

דוגמא:

$$\pi = (125)(34)$$

$$\sigma = (15)(23)(4)$$

$$\pi\sigma(1) = \pi(\sigma(1)) = \pi(5) = 1$$

$$\pi\sigma(2) = \pi(\sigma(2)) = \pi(3) = 4$$

...

דרך אחרת לחשב את התמורה החדשה – נרשום אותם אחת ליד השניה

$$(125)(34)(15)(23)(4)$$

$$(1)(2435)$$

הרכבה של תמורות, זה בעצם כפל, כמו שראינו קודם.

עבור $\pi \in S_n$ נגדיר את קב' החילופים (או ההיפוכים) של π :

$$T_\pi = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n, i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)\}$$

הסימן של π מוגדר

$$\text{sign}(\pi) = (-1)^{|T_\pi|}$$

$$\text{sign}(\pi) = 1 \text{ אם } \pi \text{ זוגית, } \text{sign}(\pi) = -1 \text{ אם } \pi \text{ אי-זוגית}$$

עבור

$$\pi = (12)(3), \pi \in S_3$$

$$T_\pi = \{(1, 2)\}$$

$$\text{sign}(\pi) = (-1)^1 = -1$$

עוד דרך (עדיפה), זה לרשום את התמורה, קווים בין המספרים הזחים, ולספור את ההצטלבויות.

עוד דרך לחשב את הסימן:

טענה:

1. תהי $\pi \in S_n$ אזי π ניתנת להצגה כמכפלת מחזורים באורך 2.

2. $\text{sign}(\pi\sigma) = \text{sign}(\pi) \cdot \text{sign}(\sigma)$ אזי $\pi, \sigma \in S_n$

3. אם $\pi = (ij)$ אזי $\text{sign}(\pi) = -1$.

דוגמא:

$$(125)(34)$$

ניתנת לכתיבה כ

$$(12)(25)(34)$$

ע"פ הטענה ה-2,

$$\text{sign}((125)(34)) = \text{sign}((12)(25)(34)) = \text{sign}(12) \cdot \text{sign}(25) \cdot \text{sign}(34)$$

$$= (-1)(-1)(-1) = (-1)$$

התמורה ההפכית של π תסומן

$$\pi(j) = i \Leftrightarrow \pi^{-1}(i) = j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

ועבור התמורה ההפכית, פשוט נהפוך את השורות.
לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ועם מחזורים:

$$(1234)^{-1} = (1432)$$

(נשים לב – הולכים רוורס מה1)

הערה לתרגיל: אנחנו נצטרך להוכיח מקרה פרטי של המשפט הכללי שנוכיח בשיעור.

תהי $\sigma \in S_n$. הגדרנו

$$T\sigma = \{(i, j) : i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^{|T\sigma|}$$

נגדיר:

$$\text{sign}^*(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

למה:

$$\text{sign}^*(\sigma) = \pm 1 \quad 1.$$

$$\text{sign}^*(\sigma) = \text{sign}(\sigma) \quad 2.$$

הוכחה:

1. $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$. במונה ובמכנה יש מכפלה של כל ההפרשים של זוגות של מספרים שונים בין $1 \dots n$, ולכן הכל יצטמצם, פרט (אולי) לסימן.

2. נטען: $(i, j) \in T\sigma$ אם ורק אם $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$. מדוע?

$$(i, j) \in T\sigma \Leftrightarrow (\sigma(i) < \sigma(j), i < j) \Leftrightarrow \sigma(i) - \sigma(j) > 0, i - j < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$$

מכיוון שהמכפלה בהגדרת $\text{sign}^*(\sigma)$ היא ± 1 , מי שמשפיע על הסימן הם רק האיברים שעבורם

$$\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0, \text{ כלומר ההיפוכים, ולכן}$$

$$\text{sign}^*(\sigma) = \prod_{i > j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = (-1)^{|T\sigma|} = \text{sign}(\sigma)$$

כנדרש.

משפט:

יהי $\sigma, \tau \in S_n$.

$$\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau) \quad 1.$$

$$\text{sign}(id) = 1 \quad 2.$$

$$\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1}) \quad 3.$$

הוכחות:

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma\tau) &= \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i-j} = \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i-j} = \\ &= \prod_{i>j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \prod_{i>j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i-j} = \prod_{k>l} \frac{\sigma(k) - \sigma(l)}{k-l} \prod_{i>j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i-j} = \\ &= \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau) \end{aligned} \quad 1.$$

$$T_{id} = \emptyset \Rightarrow \text{sign}(id) = (-1)^0 = 1 \quad 2.$$

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\sigma^{-1}) &= \text{sign}(\sigma\sigma^{-1}) = \text{sign}(id) = 1 \Rightarrow \\ \text{sign}\sigma &= 1 \Rightarrow \text{sign}\sigma^{-1} = 1 \\ \text{sign}\sigma &= -1 \Rightarrow \text{sign}\sigma^{-1} = -1 \end{aligned}$$

חישוב סימן של תמורה $\sigma \in S_n$:

1. נפרק את σ למכפלת מחזורים זרים
2. נציג כל מחזור ככפל חילופים

איך עושים זאת? לדוגמא, ניקח את המחזור $(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)\dots(k-1\ k)$.
נשים לב שקוראים את זה כהרכבת פונקציות מימין לשמאל.

$$(5123) = (51)(12)(23)$$

נבחין בחוקיות, ונראה כי :

$$\text{sign}(1\ 2 \dots k) = \text{sign}(1\ 2)\text{sign}(2\ 3) \cdot \dots \cdot \text{sign}(k-1\ k) = (-1)^{k-1}$$

נחוד חידה של תמורות:

נאמר כי תמורה $\sigma \in S_n$ היא מסדר 2 אם $\sigma^2 = Id$ $\Leftarrow$ σ היא מכפלה של חילופים זרים.

הראו כי כל תמורה $\sigma \in S_n$ היא מכפלה של שתי תמורות מסדר 2.

הוכחת החידה: אם זה נכון עבור σ שהיא מחזור אזי זה נכון לכל σ . למה? ניקח לדוגמא

$$\sigma = (123)(456) = (12)(23)(45)(56)$$

ב.ה.כ. נניח כי המחזור הוא $(123, \dots, k)$. נרשום את זה כמעין פוליגון סגור וקמור. נעביר קו באמצע,

ונשקף (מ'שיקוף').

מה קיבלנו?

$$(12)(3k)(4k-1)(5k)\dots$$

הערה למה שעשינו קודם: קיימת קומוטטיביות בהכפלה של מחזורים זרים. ניקח לדוגמא את

$$\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)$$

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)$$

$$(4\ 5\ 6) = (4\ 5)(5\ 6)$$

$$(7\ 8) = (7\ 8)id$$

$$\sigma_1 = (1\ 2)(4\ 5)(7\ 8)$$

$$\sigma_2 = (2\ 3)(5\ 6)id$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma$$

רמז לתרגיל: החידה קשורה לסימן של תמורה.

בואו ונחלק פולינומים – חלוקת פולינומים ב $K[X]$ (K הוא שדה).

מסתבר שאפשר לחלק פולינומים – איך? כמו בHOWTO שיש אצלי באתר.

כמו שאנחנו אוהבים – בואו ונוכיח משפט: יהיו $f, g \in K[x]$, אזי קיימים $q, r \in K[x]$ כך ש $r = 0$ או $\deg r < \deg f$ ו $g = qf + r$.

הוכחה:

1. אם $\deg f > \deg g$ אזי ניקח $q = 0$ ואת $r = g$ ואז
 $g = qf + r, \deg r = \deg g < \deg f$, וסיימנו ☺. לדוגמא: נניח ונרצה לחלק עם שארית את $x - 1$ ב x^4 , אזי $x - 1 = 0 \cdot x^4 + (x - 1)$.
 2. $\deg f \leq \deg g$. אם f פולינום קבוע (כלומר $f = f_0$ (מספר)), נגדיר את $q = f_0^{-1} \cdot g$ ואז $qf = g, r = 0$.
 3. וכעת למקרה המעניין – בו באמת אנחנו מבצעים חלוקה. נניח כרגע $\deg g \geq \deg f > 0$. נוכיח באינדוקציה על דרגת g .

אם $\deg g = 1$, אזי $\deg f = 1$, אזי $f = cx + d, g = ax + b$. יהי $q = \frac{a}{c}$.

$$fq = \frac{a}{c}(cd + x) = ax + \frac{ad}{c}, \text{ ויהי } r = \frac{-ad}{c} + b, \text{ וקיבלנו כי } g = fq + r.$$

הנחת האינדוקציה: נניח קיום חלוקה עם שארית עבור פולינומים מדרגה $n - 1$, וכעת עלינו להוכיח זאת עבור פולינום מדרגה n . יהי

$$g = g_0 + g_1x + \dots + g_nx^n$$

$$f = f_0 + f_1x + \dots + f_kx^k$$

$$0 < k \leq n$$

נגדיר את $\lambda = f_k^{-1}g_n$. נתבונן ב

$$\lambda x^{n-k} f = \lambda x^{n-k} (f_0 + f_1 x + \dots + f_k x^k)$$

$$\lambda f_0 x^{n-k} + \lambda f_1 x^{n-k+1} + \dots + \lambda f_{k-1} x^{n-1} + \lambda f_k x^n =$$

$$\lambda f_0 x^{n-k} + \lambda f_1 x^{n-k+1} + \dots + \lambda f_{k-1} x^{n-1} + g_n x^n$$

נגדיר פולינום $h := g - \lambda x^{n-k} f$. נשים לב כי $\deg h \leq n-1$ (מאחר והמקדם של x^n

בפולינום h הוא 0). מהנחת האינדוקציה עבור h קיימים פולינומים $p, r \in K[x]$

($r = 0$ או $\deg r < \deg f$) כך ש $h = pf + r$. מצד שני, ראינו כי

$$h = g - \lambda x^{n-k} f$$

$$pf + r = g - \lambda x^{n-k} f$$

$$g = (p + \lambda x^{n-k}) f + r$$

הערות לתרגיל:

מהי מטריצת פרמוטציה? מטריצה $n \times n$, שבה בכל שורה או עמודה יש רק 1 בלבד, וכל השאר אפסים. (לוח שחמט עם $n \times n$, שבו יש n צריחים שלא יכולים לאיים אחד על השני).

מי שעדיין לא הגדירו לו דטרמיננטה – לחכות עם החלק של הדטרמיננטות.

שעת קבלה – יום ד' 13 – 14, בניין איינשטיין, חדר 308

תזכורת:

הוכחנו כי $f, g \in F[x]$ פולינומים. אזי קיימים $q, r \in F[x]$ כך ש $g = qf + r$ וכן $r = 0$ או $\deg r < \deg f$.

עובדה: $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

שאל מתי פולינום מחלק אחר בלי שארית?

טענה: $f \in F[x]$, אזי α שורש של f (כלומר $f(\alpha) = 0$) אם ומ $(x - \alpha)$ מתחלק ב f ללא שארית.

הוכחה: כיוון 1: נניח ש $f \mid x - \alpha$ (מחלק את f ללא שארית), כלומר $f = (x - \alpha) \cdot q$ לאיזה

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot q(\alpha) = 0 \cdot q(\alpha) = 0 \text{ ז"א } q \in F[x]$$

כיוון 2: נניח α שורש של f . ע"פ התזכורת, קיימים $q, r \in F[x]$ כך

$f = (x - \alpha)q + r(x)$ וכן $r = 0$ או $\deg r < \deg(x - \alpha)$. מכיוון $\deg(x - \alpha) = 1$ אזי בהכרח r הינו קבוע (או 0).

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r = r$$

אבל מההנחה ש α שורש, אזי $f(\alpha) = 0$ ועל כן, $f(x) = (x - \alpha)q(x)$.

הגדרה: שדה F יקרא **סגור אלגברית** אם לכל פולינום עם מקדמים ב F יש שורש ב F , כלומר לכל

$$f \in F[x] \text{ קיים } \alpha \in F \text{ כך ש } f(\alpha) = 0.$$

נראה אם שדות שאנחנו מכירים סגורים אלגברית:

$$Q \text{ לא סגור אלגברית (עבור } x^2 - 2 = 0 \text{)}$$

$$R \text{ לא סגור אלגברית (עבור } x^2 + 1 = 0 \text{)}$$

$$Z_3 \text{ לא סגור אלגברית (עבור } x^2 - 2 = 0 \text{)}$$

המשפט היסודי של האלגברה: C סגור אלגברית.

טענה: יהי F שדה סגור אלגברית, ויהי $f \in F[x]$ מדרגה n . אזי יש ל f n שורשים (לאו דווקא

שונים) ב F , ולכן הוא ניתן לפירוק כמכפלה של n גורמים ליניאריים.

הוכחה: באינדוקציה על מעלת הפולינום. יהי $n = 1$, אזי $f(x) = a_0 + a_1x$, אזי $-\frac{a_0}{a_1}$ שורש של

$$f \text{ וניתן לרשום } f(x) = a_1 \left(x + \frac{a_0}{a_1} \right)$$

שלב האינדוקציה: מכך ש f סגור אלגברית, ל f יש שורש ב F , נניח α . מטענה קודמת, $x - \alpha$

מחלק את f , כלומר, יש $q \in F[x]$ כך ש $f = (x - \alpha)q$. מכך ש q מדרגה $n - 1$, אז יש לו

$$n - 1 \text{ שורשים, והוא מתפרק ל } q(x) = C(x - \beta_1) \dots (x - \beta_{n-1}) \text{ ועל כן}$$

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) = c(x - \alpha)(x - \beta_1) \dots (x - \beta_n)$$

טענה: תמיד לפולינום מדרגה n מעל שדה כלשהו יש לכל היותר n שורשים (חוץ מפולינום ה-0).
הוכחה: נניח $f \in F[x]$ מדרגה n . נניח בשלילה שיש לו $n+1$ שורשים $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. ע"פ טענה שראינו קודם, ניתן לרשום את $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n+1})q(x)$. נשים לב כי מה שרשמנו הוא פולינום מדרגה לפחות $n+1$, וזו סתירה.

דוגמא: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3)$.

הגדרה: יהי α שורש של f , הריבוי של α הינו ה k הטבעי המקסימלי כך ש $(x - \alpha)^k$ מחלק את f .

f מחלק את הפולינום g (ללא שארית) אם בפירוק של f, g לגורמים ראשוניים, כל הגורמים שב f מופיעים גם ב g אך בחזקה שהיא לפחות החזקה שלהם ב f .

הערה לתרגיל: $\alpha \in S_n$.

דטרמיננטות

מוגדרות רק עבור מטריצות ריבועיות.

$A \in M_n(F)$. מגדירים:

$$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{pmatrix}$$

עבור התמורות הזוגיות:

$$id, (1 \ 2 \ 3)(2 \ 1 \ 3)$$

עבור התמורות האי-זוגיות:

$$(1 \ 2), (1 \ 3), (2 \ 3)$$

מהי חבורה: קבוצה עם פעולת כפל, סגורה לכפל, סגורה להופכי, ומכילה את איבר היחידה.

תכונות הדטרמיננטה:

1. מולטי ליניאריות:

$$\left| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + a'_{i1} & \dots & a_{in} + a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right|$$

2. סגירות לכפל בסקלר:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ta_{i1} & \dots & ta_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| = t \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\|$$

3. אם במטריצה A יש שתי שורות זהות, אזי $\det A = 0$.

דוגמא לטריקים בחישובי דטרמיננטות:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4+2 & 5+4 & 6+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

טענה: אם השורות של A תלויות ליניארית, אז $\det A = 0$.

טענה: $\det(A^t) = \det A$

מסקנה: תכונות 1-3 נכונות גם עבור העמודות של A .

עוד דרך לחישוב דטרמיננטות, הפעם אמור לעבוד תמיד:

הגדרה: תהי $A \in M_n(F)$. המינור ה- i, j של A הוא המטריצה מסדר $n-1$ המתקבלת מ- A ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j , ומסומן על ידי A_{ij} .

הנוסחה לפיתוח שורה i

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

לדוגמא:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \text{נפתח על פי שורה 1.}$$

$$(-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

דוגמא: תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה משולשית עליונה. צ"ל שהדטרמיננטה של A מכפלת איברי האלכסון.

הוכחה: באינדוקציה על גודל המטריצה, בסיס האינדוקציה: נתחיל ב- $n=2$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. נזכר

כי $|A| = ac - 0b = ac$, והטענה נכונה.

שלב האינדוקציה: תהי A משולשית עליונה בגודל כלשהו. נחשב את הדטרמיננטה ע"י פיתוח ע"פ עמודה ראשונה 1. (למה? יש שם הרבה אפסים)

$$|A| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} & & a_{22} \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \dots$$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} & & a_{22} \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} =_{IH} \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

מ.ש.ל.

תרגול 4, 26.3.2006

איך מחשבים את דטרמיננט מטרצת ונדרמונדה?

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \cdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = C_n = C_n - x_1 C_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-3} & x_1^{n-2} & 0 \\ & & & & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix} \quad C_{n-1} = C_{n-1} x_1 c_{n-2} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-3} & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ After repeating

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - 1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & x_n - x_1 & x_2(x_n - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \Rightarrow_{Develop_by_line_I}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ x_n - x_1 & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\prod_{j>1} (x_j - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ & & & \\ & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \stackrel{Induction Hypotesis}{=} \prod_{j>1} (x_j - x_1) \prod_{j>i>1} (x_j - x_i) =$$

$$\prod_{j>i} (x_j - x_i)$$

שימוש במטריצה

מצאו קבוצה אינסופית של וקטורים ב R^n כך שכל n מהם בת"ל. – איך – לכל i נגדיר $x_i = i$. ויהי $v_i = (1 \ x_i \ x_i^2 \ \dots \ x_i^{n-1})$ ראינו קודם את הדטרמיננטה, ששונה מ-0, ועל כן כל שורותיה בת"ל.

בואו נחשב שוב את הדטרמיננטה של ונדרונדה, באמצעות שיקולים שונים לחלוטין. באינדוקציה על n :

$$V(x_1, \dots, x_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ & & & \\ & x_n & \dots & x_n^n \\ 1 & x & & x^n \end{vmatrix}$$

נתייחס ל- x כאל משתנה, ואל $x_1, \dots, x_n$ כקבועים. $v(x_1, \dots, x_n, x)$ פולינום ב- x . נשים לב שאם $1 \leq i \leq n$, $x = x_i$, נקבל במטריצה שתי שורות זהות, ולכן הדטרמיננטה תהיה 0, לכן $x_1, \dots, x_n$ הם שורשים של הפולינום $V(x_1, \dots, x_n, x)$. ראינו שאם α שורש של פולינום $p(x)$ ז"א $p(x) = (x - \alpha)q(x)$. במקרה שלנו, מכך ש $x_1, \dots, x_n$ שורשים של V , נובע ש:

$$V(x_1, \dots, x_n, x) = a(x_1, \dots, x_n, x) \prod_{j=1}^n x - x_j$$

ראשית, ננסה לברר את דרגת הפולינום – מכך שא מופיע רק בשורה האחרונה, ושם מעלתו היא לכל היותר n , נובע שדרגת הדטרמיננטה (הפולינום) הוא ממעלה n . גם $\prod_{j=1}^n (x - x_j)$ הוא פולינום ממעלה n בא. מכאן נובע - a לא תלוי בא (דרגתו כפולינום בא היא 0).

I. נציב $x = 0$, ואז:

$$V(x_1, \dots, x_n, 0) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_n & & x_n^n \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{By Last Line}}{=} (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^n \\ x_n & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n x_1 \cdot \dots \cdot x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ & & & \\ & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i V(x_1, \dots, x_n)$$

ראינו כי $V(x_1, \dots, x_n, x) = a \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ נציב $x = 0$, ונקבל

$$V(x_1, \dots, x_n, 0) = a \prod_{j=1}^n (0 - x_j) = a (-1)^n \prod_{j=1}^n x_j$$

מה אנו רואים כאן בעצם? כי $a = V(x_1, \dots, x_n)$ והנוסחה האינדוקטיבית שהגענו אליה היא:

$$V(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = V(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n (x_{n+1} - x_j)$$

נוכיח באינדוקציה את הנוסחה שבתרגיל:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 - n = 2$$

נניח כי $v(x_1, \dots, x_n) = \prod_{n \geq j > i \geq 1} (x_j - x_i)$. שלב האינדוקציה:

$$V(x_1, \dots, x_{n+1}) = V(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n (x_{n+1} - x_j) \stackrel{IH}{=} \prod_{n \geq j > i \geq 1} (x_j - x_i) \prod_{j=1}^n (x_{n+1} - x_j) =$$

$$\prod_{n+1 \geq j > i \geq 1} (x_j - x_i)$$

כנדרש.

הגדרה: עבור $A \in M_n(F)$ נגדיר את המטריצה המצורפת של A :

$$(adj A)_{jk} = (-1)^{k+j} |A_{kj}|$$

$$A(adjA) = (adjA)A = |A|I = \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} \quad \text{טענה:}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} \quad \text{מסקנה: אם } \det A \neq 0 \text{ אזי } A \text{ הפיכה, ו} \quad A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}.$$

$$|AB| = |A||B| \quad \text{כלל המכפלה: עבור } A, B \in M_n(F) \text{ מתקיים}$$

$$|A| \neq 0 \iff A \text{ הפיכה} \quad \text{מסקנה:}$$

$$AA^{-1} = I \text{ ומתקיים } AA^{-1} = I \text{ מכיוון ש } |AA^{-1}| = |I| = 1.$$

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} \text{ ומתקיים } |A^{-1}| = |A|^{-1}, \text{ ועל כן, הדטרמיננטה של } A \text{ אינה } 0.$$

דוגמא: ניקח מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$adjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

סיכום – תכונות שקולות עבור מטריצה A, $A \in M_n(F)$

I. הפיכה A

II. $|A| \neq 0$

III. שורות A בת"ל

IV. עמודות A בת"ל

למה $II \iff III$? אם שורות A בת"ל, אז ע"י פעולות אלמנטריות על שורות A נגיע למטריצה עם שורת

אפסים, ואז $|A| = 0$. אחרת, שורות A בת"ל, כלומר הם מהוות בסיס. כידוע, הדט' היא פונקציית

נפח $\neq 0$, ולכן לא מתאפסת על בסיס.

מטריצות מעל חוגים

מה זה בכלל חוג?

הגדרה: חוג הוא קב' R עם פעולות 2 פעולות סגורות (חיבור וכפל), כך ש:

I. החיבור

a. קומוטטיבי

b. אסוציאטיבי

c. קיים 0

d. קיים נגדי

- II. הכפל
 a. אסוציאטיבי
 b. קיים איבר יחידה
 c. (לא קיים הפכי כפלי, או קומוטטיביות של הכפל).
 III. דיסטרבוטיביות

הגדרה II

חוג R ייקרא חוג קומוטטיבי אם הכפל בו קומוטטיבי.

דוגמאות:

- שדה
- השלמים Z (איברים הפיכים ± 1)
- לכל n, Z_n (חוג קומוטטיבי).
- מטריצות ריבועיות מסדר קבוע n מעל שדה F . $M_n(F)$ (לא קומוטטיבי). איברים הפיכים – מטריצות עם דטרמיננטה $\neq 0$.
- חוג הפולינומים מעל שדה F $F[X]$ - חוג קומוטטיבי. איברים הפיכים $p(x) = c \neq 0, c \in F$:

יהי R חוג קומוטטיבי. נוכל להגדיר כרגיל ל $A \in M_n(R)$ את

- דטרמיננטה: $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$ (לא צריך שוב דבר שאין בחוג)
- המטריצה המצורפת $(adj A)_{jk} = (-1)^{k+j} |A_{kj}|$
- פיתוח לפי שורה / עמודה (נשים לב – נדרשים לקומוטטיביות)

טענה:

R חוג קומוטטיבי, $A \in M_n(R)$. אם $|A|$ הפיך ב R , אז A הפיכה ב $M_n(R)$.

טענה:

F שדה $A \in M_n(F[X])$ (דוגמא): $A = \begin{pmatrix} x^3 + 5x - 12 & x^2 - 1 \\ x - 1 & 10 \end{pmatrix}$. אזי A הפיכה שקול ל $|A| \neq 0$ ממעלה 0.

הוכחה

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ ממעלה 0 ז"א $|A| = 0 \neq c \in F$. הפיך ב $F[x]$ וע"פ הטענה הקודמת A הפיכה ב $M_n(F[x])$

$\Leftarrow$ נניח $A \in M_n(F[x])$ הפיכה, ונניח בשלילה $|A| = p(x)$ פולינום מדרגה גדולה או שווה ל 1. מכך ש A הפיכה, קיימת A^{-1} המקיימת $AA^{-1} = I$. $1 = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = p(x) \cdot q(x)$. יש לנו פולינום ממעלה גדולה או שווה ל 1, והתוצאה היא פולינום קבוע – סתירה

משפט האפסיות של סילבסטר: $A, B \in M_n(F)$ אזי

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

תזכורת:

$$(\text{adj}A)_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ji}$$

טענות, הגדרות, ושימושים של דטרמיננטות:

הוכיחו שהדטרמיננטה הבאה מתחלקת ב17:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

. טיפ – אם קוראים את השורות כמספר, אזי כולם מתחלקות ב17. (לדוגמא,

20604, מתחלק ב17).

נעבוד על פי עמודות:

נוסיף לעמודה השמאלית 10,000 עמודה ראשונה, 1000 עמודה שניה, 100 עמודה שלישית, 10 עמודה רביעית. העמודה השמאלית תהיה מספר שמתחלק ב17, ואז אפשר להוציא מהעמודה הראשונה את הגורם 17.

ועוד קצת דחקיות מטריצות:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \dots & & & & \\ n & n+1 & n+2 & & 2n-1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Subtracting each line from the next}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ועוד אחת:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = nth \text{ fibonnachy number}$$

הכללה:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_n \end{vmatrix}$$

טענה:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = x_1 + 1$$

$$\Delta_n = x_n \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

(נשים לב שאם הטענה נכונה, אזי באמת המטריצה הראשונה היא מטריצת פיבונאצי).
מדוע הטענה נכונה : נפתח לפי שורה ועמודה.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_n \end{vmatrix}$$

איך עושים – נפתח על פי שורה אחרונה, ואחרי לפי עמודה אחרונה.

טענה: (והוכחה לאחריה):

$$A^t B^t = (BA)^t$$

$$(A^t B^t)_{ij} = \sum_k (A^t)_{ik} (B^t)_{kj} = \sum_k a_{ki} b_{jk}$$

$$(BA)^t = (BA)_{ji} = \sum_k b_{jk} a_{ki}$$

דרגה של A :

הגדרנו כמס' מקסימלי של שורות / עמודות בלתי תלויות.

ניתן להגדיר גם כ: **r מקסימלי כך שיש בA תת מטריצה r × r הפיכה.**
חשוב להבין שלא מדובר על כל תת מטריצה, אלא שקיימת תת מטריצה.

עוד משהו:

$$E = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}, |E| = |A| \cdot |B|$$

$(A, B, *, 0)$ הם מטריצות).
 באופן כללי, אם יש לי מטריצה, שעל האלכסון יש מטריצות, מתחתיו 0, מעליו לא מעניין, אזי הדטרמיננטה של המטריצה כולה תהיה מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים.

טענה: $A(adj A) = |A|I$.

הוכחה: נסמן ב' A מטריצה הזוהי לפרט לשורה ה k שבה רשומה השורה ה i של A .
 ברור כי $|A'| = 0$, כי יש בה שתי שורות זהות. נפתח על פי השורה ה k .

$$0 = |A'| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a'_{kj} |A'_{kj}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} |A_{kj}|$$

*- פרט לשורה ה k , ו' A זהות.

$$(A adj A)_{ik} = \sum_j a_{ij} (adj A)_{jk} = \sum_j a_{ij} (-1)^{j+k} |A_{kj}| = 0 \quad \text{יהי } i \neq k. \text{ נחשב את } *$$

* - על פי החישוב הקודם.

$$(A adj A)_{ii} = \sum_j a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}| =_{\text{develop by line } i} |A|$$

משהו נחמד, קשור למטריצת ונדרונדה:

אינטרפולציית לגרנגז':

יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ מספרים שונים, $\beta_1, \dots, \beta_n$ כלשהם. קיים פולינום $p(x)$ מדרגה $n-1$ כך ש
 $p(\alpha_i) = \beta_i$.

כלומר, אנו מחפשים $c_0, \dots, c_{n-1}$ שיגדירו את p_{n-1} , כלומר $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$, כך

$$p(\alpha_j) = \beta_j.$$

ז"א, אנו מחפשים $c_0, \dots, c_{n-1}$ כך שיתקיים $p(\alpha_j) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\alpha_j)^i = \beta_j$.

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$p(\alpha_1) = c_0 \cdot 1 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + \dots + c_{n-1} \alpha_1^{n-1} = \beta_1$$

עבור $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ **שונים** ראינו כי המטריצה הפיכה, ולכן קיים פתרון (ואפילו **יחיד**).

$$q_i(x) := \frac{\prod_{j \neq i} (x - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}$$

נשים לב:

$$q_i(\alpha_i) = \frac{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)} = 1$$

עבור $k \neq i$:

$$q_i(\alpha_k) = \frac{\prod_{j \neq i} (\alpha_k - \alpha_j)}{\prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)} = 0$$

(כי במונה מופיע הגורם $(\alpha_k - \alpha_k)$.)

נגדיר:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

כלומר,

$$q_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

נגדיר:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i q_i(x)$$

נשים לב,

$$p(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n \beta_i q_i(\alpha_j) =_{i \neq j \Rightarrow q_i(\alpha_j)=0} \beta_j$$

☺ וסיימנו.

טענה: $q_1(x), \dots, q_n(x)$ בת"ל כאיברים במרחב הפולינומים מדרגה $\geq n-1$.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימים $c_1, \dots, c_n \in F$ כך ש $\sum_{i=1}^n c_i q_i(x) \equiv 0_{Polinom}$. נראה ש

$$c_1 = \dots = c_n = 0. \text{ לשם כך נציב בצ"ל הנ"ל את } \alpha_j.$$

$$0 = \sum_{i=1}^n c_i q_i(\alpha_j) = c_j$$

(*) לפי ההנחה שמדובר בפולינום ה-0.

(**) המחבר היחיד ה- $0 \neq$ הוא כאשר $i = j$.

ראינו כי כל המקדמים בצ"ל הם 0, ועל כן $q_1(x), \dots, q_n(x)$ בת"ל. ☺ מכיוון שמדובר בו וקטורים בת"ל במרחב n מימדי, מדובר בבסיס. נשאל את עצמנו – מה הקשר בין הבסיס הסטנדרטי לבסיס הזה.

יהי p פולינום כלשהו, אזי ניתן להציגו כ:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n p(\alpha_i) q_i(x)$$

נסתכל על הפולינום הקבוע $p_0(x) \equiv 1$.

$$1 = p_0(x) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot q_i(x)$$

נסתכל על הפולינום $p_1(x) = x$

$$x = p_1(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i(x)$$

$$p_2(x) = x^2$$

$$x^2 = \sum \alpha_i^2 q_i(x)$$

$$p_j(x) = x^j = \sum_i (\alpha_i)^j q_i(x)$$

קיבלנו שמטריצת מעבר הבסיס היא מטריצת ונדרונדה.

ביתן : חומר מהכיתה. כנראה ידחה בשבוע.

תרגול 6, 23.4.2006

פתרון התרגיל:

נתונה $G: M_n(F) \rightarrow F$. נתון:

$$1. G(AB) = G(A)G(B)$$

$$2. G(I) = 1$$

צריך להוכיח כי $G(A) = g(|A|)$ עבור $g: F \rightarrow F$ כפליית.

דוגמא: $G = \det$. מקיימת $|AB| = |A||B|$, $|I| = 1$, ואז $g = id$.

מה האסטרטגיה בפתרון? ע"י פעולות אלמנטריות, ניתן להביא את A למטריצה אלכסונית אם אלכסון של $0, 1$.

ואז מתקיים:

$$A = \prod_{\alpha \in A} E_{\alpha} D \prod_{\alpha \in B} E_{\alpha}$$

כאשר A, B סופיות. המטריצות E_{α} ל $\alpha \in A, B$ אלמנטריות. D אלכסונית עם $0, 1$ על האלכסון.

פעולות אלמנטריות:

$$1. \text{ כפילת שורה } i \text{ ב } \lambda - T_i^{\lambda}$$

$$2. \text{ הוספת שורה } j \text{ } \lambda \text{ פעמים לשורה } i - S_{ij}^{\lambda}$$

מתקיים, מהכפלויות:

$$G(A) = \prod_{\alpha \in A} G(E_{\alpha}) G(D) \prod_{\alpha \in B} G(E_{\alpha}) = \prod_{\alpha \in A} G(T_i^{\lambda}) \prod_{i,j} G(S_{ij}^{\lambda}) G(D)$$

(*) - יש קומוטטיביות ברגע שעברנו לשדה. המכפלה היא של מספר איברים, שלא כל כך מעניינים

...

נזכר כי

$$|A| = \prod_{\alpha \in A \cup B} |E_{\alpha}| |D| = \prod_{i,\lambda} |T_i^{\lambda}| \prod_{i,j,\lambda} |S_{ij}^{\lambda}| |D|$$

נזכר כי $|S_{ij}^{\lambda}| = 1$ תמיד, וכי $|T_{ij}^{\lambda}| = \lambda$, ועל כן

$$|A| = \prod \lambda |D|$$

צריך להראות כי $G(T_i^{\lambda}) = G(T_j^{\lambda}) \forall i, j$.

נגדיר $P_{i,j}$ כמטריצה שמחליפה את השורות i, j כשמכפילים משמאל, ואת העמודות כשמכפילים מימין.

נשים לב כי:

$$T_j^{\lambda} = P_{ij} T_i^{\lambda} P_{ij}$$

$$G(T_j^{\lambda}) = G(P_{ij}) G(T_i^{\lambda}) G(P_{ij}) = G(P_{ij})^2 G(T_i^{\lambda}) = G(T_i^{\lambda})$$

$$(*) - \text{ מכיוון ש } P_{ij}^2 = I \text{ ועל כן } G(P_{ij}^2) = G(I) = 1$$

נגדיר את הפונקציה $g : F \rightarrow F$ ע"י $g(\lambda) = G(T_i^\lambda)$. (מוגדר היטב כי $G(T_i^\lambda) = G(T_j^\lambda)$)

$$g(1) = G(T_i^1) = G(I) = 1$$

נראה כי היא מתנהגת עבור 1 :

$$g(\lambda)g(\mu) = G(T_i^\lambda)G(T_i^\mu) = G(T_i^\lambda T_i^\mu) = G(T_i^{\lambda\mu}) = g(\lambda\mu)$$

כעת, נראה כי:

$$G(S_{ij}^\lambda) = G(S_{ij}^1)$$

$$S_{ij}^\lambda = T_i^\lambda S_{ij}^1 T_i^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow G(S_{ij}^\lambda) = G(T_i^\lambda)G(S_{ij}^1)G\left(T_i^{\frac{1}{\lambda}}\right) = G(S_{ij}^1)G(T_i^\lambda)G\left(T_i^{\frac{1}{\lambda}}\right) =$$

$$G(S_{ij}^1)G\left(T_i^\lambda T_i^{\frac{1}{\lambda}}\right) = G(S_{ij}^1)G(I) = G(S_{ij}^1)$$

$$(S_{ij}^1)^2 = S_{ij}^2 \text{ כעת, נראה כי:}$$

$$S_{ij}^\lambda S_{ij}^\mu = S_{ij}^{\lambda+\mu}$$

$$G(S_{ij}^1) = G(S_{ij}^2) = G(S_{ij}^1)^2 \Rightarrow G(S_{ij}^1) = 0 \vee 1$$

$$G(S_{ij}^1)G(S_{ij}^{-1}) = G(I) = 1 \Rightarrow G(S_{ij}^\lambda) = G(S_{ij}^1) = 1 \text{ כי } 0 \neq 1$$

מה עכשיו: נזכר כי

$$G(A) = \prod_{i,\lambda} G(T_i^\lambda) \prod_{i,j,\lambda} G(S_{i,j}^\lambda) G(D) = \prod_{i,\lambda} g(\lambda) G(D) = g\left(\prod_{i,\lambda} \lambda\right) G(D)$$

כאשר A הפיכה, אזי $D = I$, ואז:

$$G(A) = g\left(\prod_{\lambda,i} \lambda\right)$$

$$|A| = \prod_{i,\lambda} |T_i^\lambda| \prod_{i,j,\lambda} |S_{i,j}^\lambda| |D| = \prod_{i,\lambda} \lambda$$

$$G(A) = g(|A|)$$

$$G(A) = g(0) \text{ כי } |A| = 0 \text{ . לכן נרצה להראות כי } G(A) = g(0) \text{ .}$$

נראה ששניהם שווים ל-0.

$$g(0) = 0 \text{ לכל } a \in F$$

$$g(0) = g(a \cdot 0) = g(a)g(0)$$

$$\text{ועל כן או ש } g(0) = 0 \text{ או ש } g(a) = 1 \text{ וזה מקרה טריביאלי.}$$

$$\text{עכשיו צריך להראות ש } G(D) = 0 \text{ עבור } D \text{ אלכסונית עם לפחות } 0 \text{ אחד על האלכסון.}$$

באינדוקציה, על מספר האחדות (k) ב-D:

עבור $K = 0$, כלומר $D = 0_{n \times n}$ - בסיס האינדוקציה. במקרה זה

$$G(0) = 0 \text{ או שלכל } A \text{ מתקיים } G(0) = G(A \cdot 0) = G(A)G(0)$$

$$G(A) = 1. \text{ נניח ש } G(0) = 0.$$

עבור $D_i, k = 1$, תהי המטריצה שכולה אפסים, חוץ מבמקום ה- i , שם 1.

$$D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_n = 0 \Rightarrow G(D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_n) = G(0) = 0$$

$$G(D_1)G(D_2) \cdot \dots \cdot G(D_n) = 0$$

מטיעון דומה לסעיף א', ע"י הכפלה במטריצות P_{ij} , $G(D_1) = \dots = G(D_n) = 0$.

כך באינדוקציה...

הגדרות:

תהי $\lambda \in F$, $A \in M_n(F)$. λ יקרא ערך עצמי של A אם קיים $v \in F^n$ $0 \neq v$ כך ש $Av = \lambda v$, ואז v יקרא וקטור עצמי של A .
 בדומה, אם $T: V \rightarrow V$ טרל"נ אזי $\lambda \in F$ ע"ע אם קיים $v \in V$ $0 \neq v$ כך ש $T(v) = \lambda v$ ואז v יקרא ו"ע של T .

(הערה: בד"כ נעבוד עם ההגדרה ע"י מטריצות).

הגדרה: $\lambda \in F$, $A \in M_n(F)$, המרחב העצמי של λ מוגדר כ $V_\lambda = \{v \in F^n : Av = \lambda v\}$.
 נשים לב כי גם $0 \in V_\lambda$.

דוגמא:

עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0$, נחפש v המקיים $Av = 0v$, כלומר, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 כלומר:

$$V_0 = sp \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Leftarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ננסה עבור $\lambda = 1$. נחפש v כך ש $Av = 1v = v$, כלומר,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = x \\ 2x + 4y = y \end{cases} \Rightarrow V_1 = \{0\}$$

(קיצר, אין וקטור עצמי).

ננסה עבור $\lambda = 5$

$$\begin{cases} x + 2y = 5x \\ 2x + 4y = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 4x \\ 2x = y \end{cases} \Rightarrow V_5 = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

שאלה: (חשובה) – איך מוצאים ע"ע של A?

λ ערך עצמי $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ המקיים $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)V = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$.

נחשב, עבור הדוגמא הזו:

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

כלומר, λ ע"ע של $A \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow V_\lambda \neq \{0\}$.

הגדרה: עבור $A \in M_n(F)$ נגדיר את $P_A(X) = |A - XI|$ הפולינום האופייני של A .

λ ע"ע של A אם"מ λ שורש של $P_A(x)$.

הגדרה: $A \in M_n(F)$ תקרא **לכסינה** (ניתנת ללכסון) אם קיימת $P \in M_n(F)$ הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D$ אלכסונית. במקרה זה איברי D הינם הערכים הע"ע של A ועמודות P הם הו"ע של A .

הסבר: נניח כי ל A יש בסיס של וקטורים עצמיים $v_1, \dots, v_n$ עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

$$[A]_v^v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & & \dots & \\ \dots & & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P = [Id]_E^v$$

$$D = [A]_v^v = [Id]_v^E A [Id]_E^v = P^{-1}AP$$

דוגמא חדשה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מה נעשה קודם? נחשב פולינום אופייני. מהו:

$$P_A(X) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x)$$

ועל כן הערכים העצמיים הם 1, 3.

בואו נמצא את הוקטורים העצמיים. עבור $\lambda = 1$, מחפשים v המקיים $Av = 1v = v$, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = x \\ 3y = y \end{cases} \Rightarrow v_1 = sp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת, עבור $\lambda = 3$

$$Av = 3v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 3y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow v_3 = sp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ כעת:}$$

צריך להתקיים:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

האם כל מטריצה ניתנת ללכסון? לא. לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$$

אילו A היתה לכסינה, אזי על המטריצה האלכסונית הדומה לה היו מופיעים שורשי הפולינום האופייני. ואז, קיימת P הפיכה, כך ש $A = I \Leftrightarrow P^{-1}AP = I$ וזו סתירה (כי $A \neq I$).

• למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, ולכן גם אותם ע"ע. תזכורת: A, B דומות

$\Leftrightarrow$ קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B \Leftrightarrow A, B$ מייצגות אותו טרל"נ ביחס לבסיסים אחרים.

טענת עזר: תהי $A \in M_n(F)$, ונסמן את $P_A(x) = |A - xI| = (-1)^n x^n + t_{n-1}x^{n-1} + \dots + t_0$ אזי:

$$1. \quad t_0 = |A|$$

$$2. \quad t_{n-1} = \text{tr}(A)$$

למה? (נוכיח רק את 1):

עבור $x = 0$ מתקיים $|A| = t_0$.

מסקנה: מטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, ועל כן אותם ערכים עצמיים, דטרמיננטה, ואותה עקבה.

האם למטריצות שיש אותו פולינום אופייני, ערכים עצמיים, דטרמיננטה, ועקבה, דומות? לאו דווקא. לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגול 7, 30.4.2006

$A \in M_n(F)$ לכסינה $\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע של A .

שאלה – האם תמיד יש ערכים עצמיים? נתבונן ב $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ מעל R .

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

מעל R אין שורשים, ולכן אין גם ערכים עצמיים, ולכן A לא לכסינה.
מעל C יש שורשים $\pm i$, והמטריצה לכסינה.

כלומר: לכסינות תלויה בשדה.

תנאי נוסף ללכסינות מטריצה

$\lambda \in F, A \in M_n(F)$ "ע"ע של A .

הגדרה: הריבוי האלגברי של λ הינו המעלה של הגורם $(x - \lambda)$ בפ"א של A .

הגדרה: הריבוי הגאומטרי של λ הינו המימד של המרחב העצמי v_λ . מהו v_λ ?

$$v_\lambda = \{v \in F^n \mid Av = \lambda v\}$$

משפט: A לכסינה אם"מ לכל ערך עצמי λ הריבוי הגאומטרי שווה לריבוי האלגברי, והפ"א מתפרק לגורמים ליניאריים.

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

כלומר, הערכים העצמיים הינם 1, 2. (הריבוי האלגברי של $\lambda = 1$ הינו 2, ושל $\lambda = 2$ הוא 1).
עבור $\lambda = 1$ נפתור $Av = v$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{matrix} x + 3z = x \\ y = y \\ 2z = z \end{matrix} \right\} z = 0, v_1 = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \dim(v_1) = 2$$

עבור $\lambda = 1$ הריבוי האלגברי = ריבוי גאומטרי.

עבור $\lambda = 2$ נפתור $Av = 2v$:

$$\left. \begin{matrix} x + 3z = 2x \\ y = 2y \\ 2z = 2z \end{matrix} \right\} y = 0, v_2 = sp \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

גם עבור $\lambda = 2$ הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי, ולכן המטריצה לכסינה.

הערה: אם $A \in M_n(F)$ משולשית עליונה (תחתונה) $P_A(x) = (x - a_{11}) \cdot \dots \cdot (x - a_{nn})$ והע"ע של A הם $a_{11}, \dots, a_{nn}$.

דוגמא נוספת, שלא ישעמם:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P_A = (x-1)^2(x-2)$$

עבור $\lambda = 1$

$$Av = v, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = x \Rightarrow y = 0 \\ y = y \\ 2z = z \Rightarrow z = 0 \end{array} \right\} v_1 = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

אנו רואים כי הריבוי הגאומטרי (1) שונה מהריבוי האלגברי (2), ולכן היא לא לכסינה.

הגדרה: עבור $A \in M_n(F)$ הפולינום המינימלי של A, המסומן $m_A(x)$ הינו הפולינום המתוקן בעל הדרגה המינימלית המאפס את A.

משפטים:

1. אם g פולינום המאפס את A, אזי $m_A | g$.

2. **משפט קיילי המילטון:** כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה.

3. מסקנה מ-2 ו- $m_A | p_A$.

4. $p_A | (m_A)^n \Leftarrow A \in M_n(F)$.

מסקנה: ב m_A וב p_A אותם גורמים ליניאריים (כלומר אותם שורשים) (יתכן בריבוי שונה).
דוגמאות:

1. $p_I = (x-1)^2 \Leftarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. הפולינום המינימלי הוא $(x-1)$ או $(x-1)^2$.

מכיוון ש $x-1$ עובד, הוא המינימלי.

2. $p_A(x) = (x-1)^2$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. הפולינום המינימלי הוא $(x-1)$ או $(x-1)^2$.

$x-1$ לא עובד, ולכן זה $(x-I)^2$, שבאמת עובד.

3. $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. האופציות לפולינום המינימלי הוא

$(x-1)(x-2)$ או $(x-1)^2(x-2)$. במקרה הזה $(A-I)(A-2I)$ עובד.

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$, \text{ לא עובד, } (A-I)(A-2I) \text{ כאן, } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, p_A = (x-1)^2(x-2) \quad .4$$

וצריך באמת את $(A-I)(A-2I)$.

שאלה 6 מתרגיל קודם (6)

$$6. A, B \in M_n(F) \text{ נסמן } D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \text{ עבור } a_1, \dots, a_n. \text{ אם } BD = DB \text{ אזי } B$$

אלכסונית.

ב. A לכסינה עם n ע"ע שונים, ו $AB = BA$ אזי A, B לכסינות במשותף.

מהנתון קיימת P הפיכה כך ש

$$P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$a_1 \neq \dots \neq a_n$$

צריך להראות בעצם כי $P^{-1}BP$ אלכסונית גם כן. לשם כך נראה כי $P^{-1}BP$ מתחלפת עם D ואז מסעיף א' רואים שהיא אלכסונית.

$$(P^{-1}BP)D = P^{-1}BPP^{-1}AP = P^{-1}BAP = P^{-1}ABP = P^{-1}APP^{-1}BP = D(P^{-1}BP)$$

טענה: תהי $A \in M_n(F)$. דומה למשולשית עליונה אמ"מ הפ"א של A מתפרק למכפלת גורמים ליניאריים.

הוכחה:

$$B \Leftarrow A \text{ דומה למשולשית } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = P_B(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$$

$\Rightarrow$ נניח הפ"א של A מתפרק כנ"ל, כלומר $P_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$. יהי הוקטור v_i

המתאים ל λ_i ($v_i \neq 0$). נשלים את v_i לבסיס של F^n : $B = \{v_1, u_2, \dots, u_n\}$.

$$[A]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$P_{[A]_B} =_{A, [B] \text{ are similar}} P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$$

$$P_{[A]_B}(x) =_* (x - \lambda_1) P_{A'}(x)$$

$$(*) - \text{אם } C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ 0 & \dots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix} \text{ הוא בלוק בגודל כלשהו), אזי}$$

$$P_C = P_{c_1}(x) P_{c_2}(x) \cdot \dots \cdot P_{c_n}(x)$$

ועל כן:

$$P_{A'}(x) = (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$$

מהנחת האינדוקציה, A' דומה למשולשית עליונה – כלומר, קיימת $Q' \in M_{n-1}(F)$ הפיכה כך

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & Q' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ ואז } (Q')^{-1} A' Q' = \text{upper_triangular} := E' \text{ ניקח את}$$

$$Q^{-1}[A]_B Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & & & \\ 0 & & E' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

הגדרות:

$$\lambda \in F, A \in M_n(F) \text{ ע"ע של } A.$$

הגדרה: הריבוי האלגברי של λ הינו המעלה של הגורם $(x - \lambda)$ בפ"א של A .

הגדרה: הריבוי הגאומטרי של λ הינו המימד של המרחב העצמי v_λ . מהו v_λ ?

$$v_\lambda = \{v \in F^n \mid Av = \lambda v\}$$

למה:

לכל ערך עצמי λ , הריבוי האלגברי $\leq$ ריבוי גאומטרי

הוכחה: נניח כי הריבוי הגאומטרי של λ הוא k , כלומר $\dim V_\lambda = k$, כלומר קיימים k וקטורים

בת"ל $v_1, \dots, v_k \in F^n$ כך ש $Av_i = \lambda v_i$. נשלים את $v_1, \dots, v_k$ לבסיס של F^n בשם B :

$$B = \{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$$

$$[A]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \dots & & C \\ & & \lambda_k & \\ & 0 & & \\ & 0 & & D \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = P_{[A]_B}(x) = (x - \lambda)^k P_D(x)$$

ועל כן הריבוי האלגברי של λ הוא לפחות k , כנדרש.

מתי זה לא יהיה שווה?

• $P_A(x) = (x-2)^2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ועל כן הריבוי האלגברי של 2 הוא 2. בשביל לבדוק

את הריבוי הגאומטרי נפתור $Av = 2v$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$2x + y = 2x$$

$$2y = 2y$$

$$\Leftrightarrow$$

$$V_2 = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

אנו רואים שהריבוי הגאומטרי הוא 1.

עוד דוגמא: $P_A(x) = x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ואז אין ערכים עצמיים (מעל $\mathbb{R}$).

תרגיל: $A \in M_n(F)$, $n > 1$, $rank(A) = 1$. צ"ל: A לכסינה או $A^n = 0$

פתרון: $rank(A) = 1 \Leftrightarrow$ קיים $v \in F^n$ כך ש $Av = 0$ ולכן 0 ע"ע.

מהו הר"ג של 0?

$$\dim V_0 = \dim \{v \in V : Av = 0\} = \dim Ker A = n - rank(A) = n - 1$$

לפחות $n - 1$. (הוא יכול להיות או $n - 1$ או n). (סכום הריבויים האלגבריים של הערכים העצמיים של מטריצה $n \times n$ הוא לכל היותר n - כי הפולינום האופייני הוא מסדר n , ועל כן ניתן לפרק אותו לכל היותר ל n גורמים לינאריים).

האפשרויות הן:

1. הר"א של 0 הוא $n - 1$. ראינו כי גם הר"ג של 0 הוא $n - 1$ - הפ"א של A הוא מדרגה $n - 1$

ומתחלק ב x^{n-1} , כלומר $P_A(x) = x^{n-1} \cdot q(x)$. מכך ש $P_A(x)$ מדרגה n נובע כי $q(x)$

מדרגה 1, בנוסף, מכך ש $P_A(x)$ פולינום מתוקן נובע כי $q(x) = x - \mu$ לאיזה μ . כלומר

$P_A(x) = x^{n-1}(x - \mu)$, ועל כן μ הוא ע"ע, ומימד המרחב העצמי של μ הוא 1 (כי יש

$n - 1$ וקטורים בת"ל עם ע"ע 0, ובסה"כ ניתן להוסיף רק וקטור בלתי תלוי אחד), ולכן לגבי

μ הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי.

קצת הסבר: יש לנו $v_1, \dots, v_{n-1}$ ו"ע בת"ל עם ע"ע 0. נניח בשלילה כי u_1, u_2 בת"ל, ו"ע של 1. מה

קיבלנו? $n + 1$ וקטורים בת"ל, לא יכול להיות.

על כן, $P_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים לגבי הע"ע 0, הריבוי האלגברי = ריבוי גאומטרי

$= n - 1$. לגבי μ הר"א = ריבוי גאומטרי = 1 $\Leftarrow A$ לכסינה.

2. הר"א של $\lambda = 0$ הוא 0, ואז $P_A(x) = x^n$. ממשפט קיילי הילטון - $A^n = 0$. דרך

להראות בלי קיילי - המילטון - $A \sim \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ - כל הכפלה תוסיף עוד אלכסון של

אפסים.

הגדרה: V מ"ו, $U, W \subseteq V$ תת מרחב וקטוריים. V יקרא **סכום ישיר** של u ו w ומסמנים

$$V = U \oplus W \text{ אם מתקיים } V = U + W \text{ ומתקיים } U \cap W = \{0\}.$$

הערה: $U + W$ הם כל האיברים מהצורה: $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$.

$$\text{דוגמא: } W = sp\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, U = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, V = R^2$$

$$\text{עוד דוגמא: } W = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, U = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

משפטים:

V מ"ו, U, W תת מרחבים וקטוריים

$$\bullet \quad v \in V \text{ kfk} \Leftrightarrow V = U \oplus W$$

$$v = u + w, v \in V, u \in U, w \in W$$

$$\bullet \quad \dim V = \dim U + \dim W \Leftrightarrow V = U \oplus W$$

הגדרה:

V מ"ו $U \subseteq V$ תת מרחב, $T : V \rightarrow V$ טרל"נ. U יקרא תת מרחב **אינווריאנטי** אם לכל $Tu \in U, u \in U$.

$$\text{דוגמאות: } V = R^2, U = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, Tv = 2v, \text{ ברור כי } U \text{ הוא } T \text{ אינווריאנטי.}$$

עוד דוגמא:

$$T : V \rightarrow V \text{ טרל"נ, אזי } \ker T, \operatorname{Im} T \text{ אינווריאנטיות:}$$

$$\operatorname{Ker} T : \text{יהי } v \in \ker T \text{ צ"ל } Tv \in \ker T, \text{ אבל } Tv = 0, \text{ ו } 0 \in \ker T.$$

$$\operatorname{Im} T : \text{Im } T \subseteq V \text{ צ"ל } v \in \operatorname{Im} T \text{ אז } Tv \in \operatorname{Im} T - \text{ברור (מהגדרה).}$$

עוד דוגמא:

$A \in M_n(F)$, v ו"ע (עם ע"ע λ), אזי $sp\{v\}$ הוא A אינווריאנטי. איבר כללי ב $sp\{v\}$ הוא

$$A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha\lambda v \in sp\{v\} - \alpha \in F$$

$\Leftarrow$ ו"ע של מטריצה A מגדיר ת"מ A -אינווריאנטי ממימד 1.

נניח $V = F^n$ מ"ו, U, W ת"מ, $V = U \oplus W$, כמו כן, $A \in M_n(F)$ ו- U, W אינווריאנטים. ניקח בסיס B_u ל- U , ו- B_w ל- W . $B = B_u \cup B_w$ בסיס ל- V .
איך נראית A ביחס לבסיס B ?

$$B_u = \{u_1, \dots, u_l\}, B_w = \{w_{l+1}, \dots, w_n\}$$

$A_{u_i} \in U$, שכן $AU \subseteq U$. אינווריאנטים.

$$Au_1 = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_l u_l$$

$$Au_2 = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_l u_l$$

$$Aw_{l+1} \in W \Rightarrow Aw_{l+1} = 0u_1 + \dots + 0u_l + \gamma_1 w_{l+1} + \dots + \gamma_n w_n$$

$$Aw_n = \delta_{l+1} w_{l+1} + \dots + \delta_n w_n$$

$$[A]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ & \alpha_l & \beta_l & & \\ & & & \gamma_{l+1} & \delta_{l+1} \\ & & 0 & & \\ & & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A|u]_{B_u} & 0 \\ & [A|w]_{B_w} \end{pmatrix}$$

כלומר, איך נראית המטריצה A ביחס לבסיס B ? מטריצת בלוקים אלכסונית.

אם ל- A יש בסיס של וקטורים עצמיים, ז"א שניתן לפרק את F^n לסכום ישיר של n מרחבים A אינווריאנטים, שכל אחד מהם ממימד 1. $F^n = sp\{v_1\} \oplus sp\{v_2\} \oplus \dots \oplus sp\{v_n\}$. ביחס לפירוק זה A היא מטריצת בלוקים אלכסונית, שכל בלוק הוא בגודל 1×1 (כי זהו המימד של $sp\{v_i\}$), וזוהי בעצם מטריצה אלכסונית.

תרגיל 9, 14.5.2006

למה:

$c \in F$ דומות לכל $A - cI, B - cI \iff A, B$ דומות

הוכחה: A, B דומות – קיימת P הפיכה $B = P^{-1}AP$ ואז:

$$P^{-1}(A - cI)P = P^{-1}AP - P^{-1}(cI)P = B - cI$$

ואז – סעיף ג' בשאלה 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נסתכל על :

$$B - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(B - 3I) = 3$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(A - 3I) = 2$$

אם המטריצות היו דומות, היתה להם אותה דרגה.

פתרון תרגיל 7, שאלה 5

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \dots & & \dots & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ \dots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix}$$

$$Av_k = \begin{pmatrix} a_0 \cdot 1 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k} \\ a_{n-1} \cdot 1 + a_0 w^k + \dots + a_{n-2} w^{(n-1)k} \\ \dots \\ a_1 \cdot 1 + a_2 w^k + \dots + a_0 w^{(n-1)k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (a_0 + a_1 w^k + \dots + a_{n-1} w^{(n-1)k}) \\ w^k (a_{n-1} w^{(n-1)k} + a_0 + \dots + a_{n-2} w^{(n-2)k}) \\ \dots \\ w^{(n-1)k} (a_1 w^k + a_2 w^{2k} + \dots + a_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik} \\ w^k \sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik} \\ \dots \\ w^{(n-1)k} \sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik} \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ \dots \\ w^{n-1} \end{pmatrix}$$

ולכן $\lambda_k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w^{ik}$, הערך העצמי הנדרש.

ראינו כי $Av_k = \lambda_k v_k$. למה הם בלתי תלויים ליניארית? עבור $0 \leq i \neq j \leq n-1, w^i \neq w^j$ ועל כן $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ היא מטריצת ונדר וונדה, ולכן בעלת דטרמיננטה שונה מ-0. ולכן עמודות $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ בת"ל. יש לנו בסיס של וקטורים עצמיים, ולכן המטריצה לכסינה.

$$\det A = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k$$

תזכורות

1. הפ"א $|A - xI| = P_A(x)$
2. קיילי המילטון: $P_A(A) = 0$
3. הפ"מ = הפולינום המתוקן מהמעלה המינימלית המאפס את A.
4. אם $q(A) = 0$ אזי $m_A | p_A \Leftarrow m_A | q \Leftarrow$

משפט: $p_A | (m_A)^n \Leftarrow A \in M_n(F)$

הוכחה: נסמן את הפולינום המינימלי $m(t) = t^r + c_{r-1}t^{r-1} + \dots + c_1t + c_0$. נגדיר פולינום $B(t)$ ונראה כי $(tI - A)B(t) = m(t)I$. ניקח דטרמיננטה $|m(t)| = |B(t)|$. קיבלנו כי הפולינום האפייני כפול פולינום כלשהו, שווה לפולינום המינימלי בחזקת n. וסיימנו. מה שנשאר – זה להראות את השוויון שהנחנו לעיל.

נגדיר:

$$B_0 = I$$

$$B_1 = A + c_{r-1}I$$

$$B_2 = A^2 + c_{r-1}A + c_{r-2}I$$

...

$$B_{r-1} = A^{r-1} + c_{r-1}A^{r-2} + \dots + c_2A + c_1I$$

מתקיים:

$$B_0 = I$$

$$B_1 - AB_0 = A + c_{r-1}I - A = c_{r-1}I$$

$$B_2 - AB_1 = A^2 + c_{r-1}A + c_{r-2}I - A^2 - c_{r-1}A = c_{r-2}I$$

...

$$B_{r-1} - AB_{r-2} = \dots = c_1I$$

$$\begin{aligned} -AB_{r-1} &= -(A^r + c_{r-1}A^{r-1} + \dots + c_2A^2 + c_1A) = -(A^r + c_{r-1}A^{r-1} + \dots + c_1A + c_0I - c_0I) = \\ m_A(A) + c_0I &= 0 + c_0I = c_0I \end{aligned}$$

נגדיר:

$$B(t) = t^{r-1}B_0 + t^{r-2}B_1 + \dots + tB_{r-2} + B_{r-1}$$

$$(tI - A)B(t) = tB(t) - AB(t) =$$

$$t^rB_0 + t^{r-1}B_1 + \dots + t^2B_{r-2} + tB_{r-1} - (t^{r-1}AB_0 + t^{r-2}AB_1 + \dots + TAB_{r-2} + ABR_{-1}) =$$

$$t^rB_0 + t^{r-1}(B_1 - AB_0) + \dots + t^2(B_{r-2} - AB_{r-3}) + t(B_{r-1} - AB_{r-2}) - AB_{r-1} =$$

$$t^rI + t^{r-1}c_{r-1}I + \dots + t^2c_2I + tc_1I + c_0I = m(t)I$$

מסקנה: נובעת מ $m_A \mid p_A$ ו $(m_A)^n \mid p_A$ - ל m_A, p_A יש בדיוק את אותם שורשים - רק הריבוי יכול להיות שונה.

שאלה: ראינו $(m_A)^n \mid p_A$. האם אפשר לקחת חזקה נמוכה יותר מ-n?

תשובה: לא! n היא החזקה המינימלית, לדוגמא עבור $A = cI$. מתקיים

$$p_A = (x - c)^n, m_A = (x - c)$$

על מה נדבר? על מטריצות בלוקים אלכסוניות, ומשם נעבור לצורת ז'ורדן של מטריצה. זה ממש חשוב, אבל לא נלמד את זה בצורה מלאה.

תהי $A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$ מטריצת בלוקים אלכסונית.

טענה: אם $p(t)$ פולינום, אזי, $P(A) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 & 0 \\ & \dots & 0 \\ 0 & & P(A_k) \end{pmatrix}$

הוכחה: מספיר להראות זאת עבור פולינומים אלמנטריים: $p(x) = cx, c \in F, p(x) = x^m$. למה

זה מספיק? כי $p(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i$, ואז:

$$p(A) = \sum_{i=0}^m \alpha_i A^i = \sum_{i=0}^m \alpha_i \begin{pmatrix} A_1^i & & \\ & \dots & \\ & & A_k^i \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^m \begin{pmatrix} \alpha_i A_1^i & & \\ & \dots & \\ & & \alpha_i A_k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \alpha_i A_1^i & & \\ & \dots & \\ & & \sum_{i=0}^m \alpha_i A_k^i \end{pmatrix}$$

בסיק 2 מסקנות:

מסקנה 1: עבור A כזאת, $p_A = \prod_{i=1}^k p_{A_i}$

הוכחה: נסתכל על הפולינום $f(x) = x - \lambda$. מצד אחד, $f(A) = A - \lambda I$. מצד שני -

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & \dots \\ & \dots & \\ & & f(A_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & & \\ & \dots & \\ & & A_k - \lambda I \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda I & & \\ & \dots & \\ & & A_k - \lambda I \end{pmatrix}$$

נוציא דטרמיננטה, ונקבל: $|A - \lambda I| = \prod_{i=1}^k |A_i - \lambda I|_*$ (כי דטרמיננטה של מטריצת בלוקים אלכסונית

היא מכפלת הדטרמיננטות של הבלוקים).

מסקנה 2: עבור A כנ"ל, m_A הפולינום המינימלי הוא הכפולה המשותפת המינימלית של

$m_{A_1}, \dots, m_{A_k}$. למה?

$$m_A(A) = 0$$

$$m_A(A) = \begin{pmatrix} m_A(A_1) & & \\ & \dots & \\ & & m_A(A_k) \end{pmatrix} \Rightarrow m_A(A_1) = 0, \dots, m_A(A_k) = 0$$

נשים לב שנובע מכך כי $m_A | m_{A_1}, \dots, m_{A_k}$. וזהו.

ויותר פורמלית - קבלנו ש m_A צריך להתחלק בכל אחד מהפולינומים $m_{A_1}, \dots, m_{A_k}$. מצד שני, m_A צריך להיות בעל דרגה מינימלית. הפולינום מהדרגה המינימלית המתחלק ב $m_{A_1}, \dots, m_{A_k}$ הוא בדיוק הכפולה המשותפת המינימלית.

נשים לב שאפשר היה להעזר בזה בתרגיל הקודם.

הערה: פעם לימדו צורת ז'ורדן. עכשיו לא. אבל זה חשוב. לכן נקדיש לזה 20 דקות שלמות.

$$\text{נסתכל על: } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} p_A(x) = (x - \lambda)^k \\ m_A(x) = (x - \lambda)^k \end{matrix} \cdot \text{מטריצה כדוגמת } A \text{ נקרא בלוק}$$

ז'ורדן - ונקרא לה A_λ^k (λ זה מה שיש על האלכסון, k זה הגודל).

$$\text{נתבונן ב- } A = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1}^{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\lambda_m}^{k_m} \end{pmatrix} \text{ - זוהי מטריצה בצורת ז'ורדן.}$$

נתבונן בפולינום האופייני והמינימלי של A .

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^m p_{A_i}(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{k_i}$$

מה הפולינום המינימלי? תלוי בחזרות בין ה- λ ות. ופורמלית - עבור ע"ע λ , נסתכל על כל הבלוקים בהם λ מופיע על האלכסון, ונמצא את הסדר של הבלוק המקסימלי מביניהם. ואז הגורם $x - \lambda$ יופיע בפ"מ עם חזקה השווה לסדר הזה.

למה זה חשוב? **משפט שלא נוכיח:** אם הפ"א של A מתפרק לגורמים ליניאריים (לפי גודלה), אזי A דומה למטריצת בצורת ז'ורדן וצורת ז'ורדן יחידה, עד החלפת סדר בלוקים.

למה זה מעניין? מעל המרוכבים, המשמעות היא שכל מטריצה דומה למטריצה בצורת ז'ורדן. למטריצות דומות יש אותה צורת ז'ורדן.

משפט: A ניתנת ללכסון אם"מ הפ"מ שלה מתפרק לגורמים ליניאריים שונים.

תרגיל (שמשמש במשפט): תהי $A \in M_n(F)$ המקיימת $A^3 = A$. הוכיחו כי A לכסינה.

פתרון: A מאפסת את $q(x) = (x^3 - x)$. ולכן $m_A | q$. נפרק את q למכפלת גורמים ליניאריים:
 $q(x) = (x)(x+1)(x-1)$. על כן, ב m_A כל הגורמים הליניאריים הם הגורמים של q בחזקה ≥ 1
 לזו שב q , ולכן הגורמים הליניאריים ב m_A הם מחזקה ≤ 1 מתפרק למכפלת גורמים ליניאריים
 שונים, ולכן A לכסינה.

דוגמא 2: $A \in M_n(C)$ המקיימת $A^5 = A$. צריך להראות כי A^4 דומה למטריצה אלכסונית, שעל
 אלכסונה יש אפסים ו/או אחדות.

פתרון: A מאפסת את $q(x) = x^5 - x$.
 $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$
 כמו בדוגמא הקודמת, מכיוון ש $m_A | q$, מתפרק למכפלת גורמים ליניאריים שונים, ושורשיו
 שייכים לקבוצה $\{0, \pm 1, \pm i\}$.
 A דומה לאלכסונית, שעל האלכסון מופיעים מספרים מהקבוצה $\{0, \pm 1, \pm i\}$, ועל כן A^4 דומה
 לאלכסונית, שעל אלכסונה מופיעים 0, 1.

תרגול 10, 21.5.2006

נגדיר פונקציה על R^2 :

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos(v, w) \quad \text{טענה:}$$

הוכחה: נעשה שתי רדוקציות לטענה:

1. נראה שמספיק להוכיח עבור וקטורי יחידה – כי

$$\langle \alpha v, w \rangle = \alpha v_1 w_1 + \alpha v_2 w_2 = \alpha (v_1 w_1 + v_2 w_2) = \alpha \langle v, w \rangle$$

מהצד השני:

$$\|\alpha v\| = \alpha \|v\|$$

$$\cos(\alpha v, w) = \cos(v, w)$$

(הכפלת וקטור לא משפיעה על זווית). יהי v וקטור כללי, נסמן $c = \|v\|$ (הנורמה שלו). $v' = \frac{v}{c}$

הוא וקטור יחידה. נוכיח את השוויון עבור v' , נכפיל ב c ונקבל את השוויון עבור v . תזכורת:

$$\left\| \frac{v}{c} \right\| = \frac{1}{c} \|v\| = \frac{c}{c} = 1$$

2. מספיק להוכיח הטענה עבור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $\|w\| = 1$. נראה שהשוויון אינווריאנטי תחת סיבוב

המישור בזווית θ . אגף ימין: - האורך של הוקטורים v, w והזווית שביניהם לא משנה כאשר מסובבים את המישור.

איזה מטריצה מסובבת את המישור בזווית θ ?

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

נראה כי המכפלה הפנימית $\langle A_\theta v, A_\theta w \rangle = \langle v, w \rangle$.

$$\langle A_\theta v, A_\theta w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta \\ v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \cos \theta - w_2 \sin \theta \\ w_1 \sin \theta + w_2 \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$(v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta)(w_1 \cos \theta - w_2 \sin \theta) +$$

$$(v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta)(w_1 \sin \theta + w_2 \cos \theta) =$$

$$v_1 w_2 \cos^2 \theta - v_1 w_2 \cos \theta \sin \theta - v_2 w_1 \sin \theta \cos \theta + v_2 w_2 \sin^2 \theta +$$

$$v_1 w_1 \sin^2 \theta + v_1 w_2 \cos \theta \sin \theta + v_2 w_1 \sin \theta \cos \theta + v_2 w_2 \cos^2 \theta =$$

$$(v_1 w_1)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \langle v, w \rangle$$

כלומר, ע"י סיבוב בזווית מתאימה, מספיק להוכיח את הטענה עבור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $\|w\| = 1$.

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = w_1$$

$$\|v\| \|w\| \cos(v, w) = \cos(v, w)$$

מהגדרת $\alpha := \cos(v, w) = w_1 \cos(v, w)$ (כאשר w_1 זה ההיטל של w על v).

מסקנה: יהי $v, w \in R^2, 0 \neq v, w$ אזי $\langle v, w \rangle = 0$ אם ורק אם $v \perp w$. מדוע? מכך

ש $v, w \neq 0$ נובע $\|v\|, \|w\| \neq 0$ ולכן $\langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos(v, w) = 0$, ועל כן

$$\langle v, w \rangle = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow v \perp w.$$

(*) ב- R^3 נגדיר $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$ ומתקיים $\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos(v, w)$. נגדיר

ל $v, w \in R^n$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

$\langle v, w \rangle$ מקיים את התכונות הבאות:

1. סימטריה: $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$
2. לינאריות: $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$
3. הומוגניות: $\alpha \in R, \langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$
4. חיוביות: $\langle v, v \rangle \geq 0$, ויתר על כן - $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

הגדרה:

יהי v מ"ו מעל R , ותהי פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow R$ המקיימת את תכונות 1-4 לעיל, תקרא **מכפלה**

סקלרית.

דוגמאות:

$$1. \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i, v, w \in R^n$$

$$2. \langle f, g \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx, \{f_i: [\alpha, \beta] \rightarrow R\}$$

הגדרה: יהי V מ"ו מעל C . **מכפלה פנימית מעל C** היא פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow C$ המקיימת:

1. **הרמיטיות:** $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
2. לינאריות: $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$
3. הומוגניות: $\alpha \in R, \langle \alpha v, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle$
4. חיוביות: $\langle v, v \rangle \geq 0$, ויתר על כן - $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

דוגמא (נבדוק רק את החיוביות):

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \overline{w_i}, v, w \in C^n$$

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \overline{v_i} = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \geq 0$$

הגדרה:

V מרחב מכפלה פנימית, אזי נוכל להגדיר את הנורמה של $v \in V$ ע"י:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

ב R^2 הזהות הזו היא פשוט משפט פיתגורס, שכן:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = x^2 + y^2$$

אינטואיטיבית: נורמה זה אורך. אבל **הגדרה**: יהי V מ"ו מעל C . נורמה על V היא פונקציה

$$\|\cdot\|: V \rightarrow C$$

$$\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad 1.$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad 2. \text{ אי-שיויון המשולש:}$$

$$\|x\| \geq 0, \text{ ושיויון מתקיים אם } x = 0. \quad 3. \text{ חיוביות:}$$

נצטרך להראות את שיויון המקבילית:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

תרגיל: אם V מרחב מכפלה פנימית, והגדרנו את $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ אזי מתקיים שיויון המקבילית.

טענה: אם V מרחב עם נורמה המקיים את שיויון המקבילית, אזי ניתן להרחיב את הנורמה למ"פ.

כלומר: מרחב נורמי עם שיויון מקבילית $\Leftrightarrow$ מרחב מכפלה פנימית.

הוכחת הטענה: יהי V מרחב נורמי המקיים את שיויון המקבילית. נגדיר פו' $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow C$ על ידי:

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

ונראה כי זוהי מכפלה פנימית:

$$1. \text{ סימטריה: } \langle v, w \rangle \in R \text{ ולכן יש להראות סימטריה.}$$

$$(\| -\alpha \| = |(-1)| \|\alpha\| = \|\alpha\| \text{ - כי } \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 = \|w + v\|^2 - \|w - v\|^2)$$

$$2. \text{ לינאריות: צ"ל } \langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$4\langle v + u, w \rangle = \|v + u + w\|^2 - \|v + u - w\|^2 =_{\pm\|v+w-u\|^2}$$

$$\|v + u + w\|^2 + \|v + w - u\|^2 - (\|v + u - w\|^2 + \|v + w - u\|^2) =$$

$$2(\|v + w\|^2 + \|u\|^2) - 2(\|v\|^2 + \|u - w\|^2)$$

$$=_{*} 2(\|v\|^2 + \|w\|^2 + \|v\|^2) - 2(\|u\|^2 + \|v - w\|^2)$$

(*) מסימטריה ב- v, u

$$\begin{aligned}
8\langle v+u, w \rangle &= 4\langle v+u, w \rangle + 4\langle v+u, w \rangle = \\
2\left(\|v+w\|^2 + \|u\|^2 - \|u^2\| - \|u-w\|^2\right) &+ 2\left(\|u+w\|^2 + \|v\|^2 - \|u\|^2 + \|v-w\|^2\right) = \\
2\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) &+ 2\left(\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2\right) = \\
8\langle v, w \rangle + 8\langle u, w \rangle
\end{aligned}$$

ועל כן $\langle v+u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$.

3. הומוגניות: לכל $\alpha \in R$ $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ $n \in N$ מתקיים

$$\langle nv, w \rangle = \langle v+v+\dots+v, w \rangle = \langle v, w \rangle + \dots + \langle v, w \rangle = n \langle v, w \rangle$$

עבור $\langle 0, w \rangle = \frac{1}{4}(\|0+w\|^2 - \|0-w\|^2) = 0$.

ועל כן: $\langle -v, w \rangle = -\langle v, w \rangle$ (שכן: $\langle v-v, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle v, w \rangle = 0$)

כעת, נבדוק $\frac{m}{n} \in Q$. $\langle \frac{m}{n}v, w \rangle = \langle mv, w \rangle = m \langle v, w \rangle$.

נחלק בח ונקבל: $\langle \frac{m}{n}v, w \rangle = \frac{m}{n} \langle v, w \rangle$. מרציפות, זה נכון לכל מספק ממשי.

4. חיוביות: $\langle v, v \rangle = \frac{1}{4}(\|v+v\|^2) \geq 0$.

פונקציונל ליניארי: פונקציה $f: V \rightarrow F$ טרל"נ כאשר V מ"ו מעל F . בתרגיל נראה שאם $v \in V$ קבוע, אזי הפונקציה $f_v(u) = \langle v, u \rangle$ פונקציונל ליניארי על V .
ניקח

$$v = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -ax + y$$

עבור b קבוע, $f_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$ אם"מ $-ax + y = b \Leftrightarrow y = ax + b$.

מה זה חצי מישור? לוקחים ישר, ומסתכלים על כל מה שמעליו או מתחתיו. נניח כי יש לנו ישר המוגדר ע"י $y = ax + b$. להגיד ש $u \in V$ מעל הישר, זה להגיד $f(u) \geq b$.

טענה: יהי V מרחב מכפלה סקלרית ממימד n . אם $f: V \rightarrow F$ פונקציונל ליניארי, אזי הגרעין ממימד $n-1$ ו f נקבע ביחידות ע"י $\ker f$ ווקטור u שאינו נקבע בגרעין.

הוכחה: $\text{Im } f = F$, כלומר $\dim \text{Im } f = \dim_F F = 1$, ועל כן $\dim \text{Ker } f = n - \dim \text{Im } f = n - 1$.

ניקח $u \notin \ker f$. כל איבר שאינו בגרעין, הוא כפולה של u , ולכן ע"י קביעת $f(u)$ והגרעין נקבע f ביחידות.

תרגול 11, 28.5.2006

תרגיל 9 – שאלה 1

תהי A ישריה $n-1$ מימדית ב V ממימד n .

צ"ל קיים $w_0 \in V$ ו $\alpha \in R$ כך ש $A = \{v \in V : \langle v, w_0 \rangle = \alpha\}$

פתרון: קיים ת"מ $n-1$ מימדי U , ו $v_0 \in V$ כך ש $A = U + v_0$. יהי $u_1, \dots, u_{n-1}$ בסיס ל U . נסתכל

על המערכת $\langle u_i, x \rangle = 0, i = 1, \dots, n-1$. זו מערכת של $n-1$ משוואות ב n נעלמים, והמשוואות

ב"ת, כי $u, \dots, u_{n-1}$ איברי בסיס.

יש פתרון לא טריוויאלי, w_0 .

יהי $v \in A$, כלומר $v = u + v_0, u \in U$.

$$\langle v, w_0 \rangle = \langle u + v_0, w_0 \rangle = \langle u, w_0 \rangle + \langle v_0, w_0 \rangle$$

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i \text{ ועל כן } \langle u, w_0 \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \langle u_i, w_0 \rangle = 0. \text{ נגדיר } \alpha := \langle v_0, w_0 \rangle.$$

הראנו כי קיימים w_0 ו α כך שלכל $v \in A$ מתקיים $\langle v, w_0 \rangle = \alpha$.

להפך, יהי $v \in V$ המקיים $\langle v, w_0 \rangle = \alpha$. נראה כי $v \in A$. נכתוב $v = v_0 + w$. נראה $w \in U$.

$$\langle v, w_0 \rangle = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\langle v_0, w_0 \rangle + \langle w, w_0 \rangle = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\langle w, w_0 \rangle = 0$$

אם בשלילה $w \notin U$ אזי w אינו צ"ל של $u_1, \dots, u_{n-1}$ ולכן $w, u_1, \dots, u_{n-1}$ בת"ל. נתבונן במערכת

$$\langle u_1, x \rangle = 0$$

...

$$\langle u_{n-1}, x \rangle = 0$$

$$\langle w, x \rangle = 0$$

זוהי מערכת הומוגנית של n משוואות ב n נעלמים, והן בת"ל, לכן קיים פתרון יחיד – פתרון האפס. וזו סתירה כי פתרון $w_0 \neq 0$.

דוגמא: (משיעור קודם):

ישריה ב R^2 : ת"מ ב R^2 הוא ישר דרך הראשית. ישרייה ב R^2 זה ישר

$$y = ax + b \Leftrightarrow$$

$$ax - y = -b$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = -b$$

$$\left\{ v \in R^2 : \left\langle \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}, v \right\rangle = -b \right\}$$

לכן ישר $y = ax + b$ מוגדר ע"י

מסקנות מהתרגיל

$A \in M_n(R)$ סימטרית ומוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ מכפלה סקלרית על R^n .

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח $A \in M_n(R)$ סימטרית ומוגדרת חיובית (לכל $v \in R^n, v \neq 0$, מתקיים $v^t A v > 0$). ראינו

בתרגיל ש $\langle v, w \rangle = v^t A w$ הינה מכפלה סקלרית על R^n .

$\Rightarrow$ תהי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה סקלרית על R^n ויהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס כלשהו. נגדיר $A = (a_{ij})$ ע"י

$$a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

A סימטרית – כי $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle = a_{ji}$ (מכפלה סקלרית – סימטרית). A מוגדרת חיובית

– כי לכל $0 \neq a = (a_1, \dots, a_n)$ מתקיים $a^t A a > 0$. ניקח $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. $0 < \langle v, v \rangle = a^t A a$.

(ע"פ שאלה 6 א' בתרגיל 8).

מסקנה 2:

$A \in M_n(C)$ הרמיטית ומוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ מכפלה פנימית על C^n .

שו האדה מטריצה הרמיטית? $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

$\Leftarrow$ ע"פ ההגדרה $\langle v, w \rangle = v^t A \overline{w}$

הערה: נסתכל על $A = I$ המכפלה הסקלרית המוגדרת על ידה היא

$$\langle v, w \rangle = v^t I w = v^t w = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

ומעל C^n :

$$\langle v, w \rangle = v^t I \overline{w} = v^t \overline{w} = \sum_{i=1}^n v_i \overline{w_i}$$

עבור $A \in M_2(R)$ סימטרית נמצא תנאי הכרחי ומספיק לכך ש A מוגדרת חיובית.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ ורוצים } v A v^t > 0 \text{ לכל } v \in R^2, v \neq 0$$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$$

$$ax^2 + 2bxy + dy^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$a \left(x^2 + \frac{2b}{a} xy + \frac{d}{a} y^2 \right) > 0$$

חייבים למצוא a גדול מ0 (אחרת, עבור $x=1, y=0$ נקבל ביטוי שלילי)

$$a \left(\left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 + \left(\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2} \right) y^2 \right) > 0$$

יש לדרוש רק כי $\frac{d}{a} - \frac{b^2}{a^2} > 0$. נכפיל ב $a > 0$, ונקבל:

$$ad - b^2 > 0$$

מה קיבלנו? $|A|$. מה קיבלנו? A סימטרית מוגדרת חיובית אמ"מ $a > 0$, $|A| > 0$.
הערה: זה לא נכון על R^n .

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב. נגדיר
 $U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\}$

טענה: אם V ממ"פ ממימד סופי, אזי $U \subseteq V$ תת מרחב:

$$1. U^\perp \text{ תת מרחב } (U^\perp)$$

$$2. U \cap U^\perp = \{0\}$$

$$3. U + U^\perp = V$$

$$4. (U \oplus U^\perp = V \text{ (להבדיל מ-1-3)})$$

נוכיח את 3

$U \subseteq V$ תת מרחב, ויהי $u_1, \dots, u_k$ בסיס ל U . יהי $v \in V$, אזי קיימים $a_1, \dots, a_k \in C$ ו $h \in U^\perp$ כך ש

$$v = \sum_{i=1}^k a_i u_i + h$$

הוכחה: אנו מחפשים $a_1, \dots, a_k$ כך ש $v - \sum_{i=1}^k a_i u_i \in U^\perp$, כלומר צריך להתקיים

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^k a_i u_i, u_j \right\rangle = 0, j = 1, \dots, k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k a_i \langle u_i, u_j \rangle = \langle v, u_j \rangle, j = 1, \dots, k$$

נסמן מטריצה $B = (b_{ij})$, $b_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$. קיבלנו מערכת של k משוואות ליניאריות ב k המשתנים $a_1, \dots, a_k$ עם מטריצת משתנים A . כדי שיהיה פתרון למערכת צריך להתקיים התנאי ש A רגולרית.

בהנחה ש A רגולרית, אזי קיים פתרון למערכת, כלומר, קיימים $a_1, \dots, a_n$ כך

$$v = \sum a_i u_i + h \text{ ואז } h := v - \sum a_i u_i \in U^\perp$$

A מגדירה מכפלה פנימית, ולכן מוגדרת חיובית – לכל $0 \neq v \in V$ מתקיים $v^t A v > 0$. לכן לא קיים $v \in V$ כך ש $v^t A v = 0$ לכל $w \in V$ כי אז בפרט ל $v = w$ נקבל $v^t A v = 0$ בסתירה. על כן, לא קיים $v \in V$ כך ש $v^t A = 0$, ועל כן היא רגולרית.

דוגמא, כדי להבין:

$$U = sp \left\{ u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V = R^3$$

$$v = au_1 + bu_2 + h$$

(הגדרות: $au_1 + bu_2$ נקרא ההיטל של v על u , h הוא הניצב של v ביחס ל h)

נראה:

$$: \text{כלומר}, h = v - au_1 + bu_2 \in U^\perp$$

$$\begin{cases} \langle h, u_1 \rangle = 0 \\ \langle h, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle v - au_1 - bu_2, u_1 \rangle = 0 \\ \langle v - au_1 - bu_2, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - b \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle - a \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle - b \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\begin{cases} 0 - a - b = 0 \\ 2 - a - 6b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 6b = 0 \end{cases}$$

$$5b = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{5}, a = -\frac{3}{5}$$

$$h = v - au_1 - bu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

נראה כי $h \perp U$

$$\langle h, u_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\langle h, u_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

כנדרש.

המטרה כעת היא בהנתן מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, לפרק אותו לסכום ישר של תתי מרחבים ניצבים שכל אחד מהם ממימד 1, כלומר – מציאת בסיס אורתונורמלי למרחב V .

הגדרה: יהי V ממ"פ ממימד סופי $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ יקרא בסיס אורתונורמלי ל- V אם:

1. $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ בסיס ל- V .

2. $\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_i \rangle = \delta_{ij}$

יהי V ממ"פ ממימד n , $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ בסיס אורתונורמלי, אזי לכל $\alpha \in V$ מתקיים:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \mathcal{E}_i \rangle \mathcal{E}_i \quad 1.$$

$$\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \alpha, \mathcal{E}_i \rangle|^2 \quad 2.$$

דוגמאות:

1. הבסיס הסטנדרטי של R^n .

תהליך גרם שמידט

יהי $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ בסיס ל- V , אזי קיים בסיס אורתונורמלי $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ כך שלכל i מתקיים:

$$sp\{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_i\} = sp\{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}$$

דוגמא לגרם שמידט ב- R^2 :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_1' = \alpha_1$$

$$\|\mathcal{E}_1'\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1'}{\|\varepsilon_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ניקח}$$

$$\varepsilon_2' = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1$$

$$\langle \alpha_2, \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{5}} \sqrt{2+2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\varepsilon_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

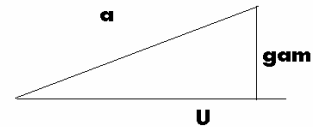
יש לנו כאן טעות חישוב. אפשר להמשיך בבית.

תרגול 12, 4.6.2006

פתרון תרגיל 10, מהכיתה:

שאלה 3 i.1.

V ממ"פ, $W \subseteq V$ ת"מ עם בסיס אורתונורמלי $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, $\alpha \in V$, $\gamma := \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$.
(הניצב).



ראשית, נראה כי $\gamma \perp W$ - כי $\langle \gamma, \varepsilon_j \rangle = 0$:

$$\langle \gamma, \varepsilon_j \rangle = \left\langle \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i, \varepsilon_j \right\rangle = \langle \alpha, \varepsilon_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0$$

משפט פיתגורס המוכלל: לכל $w \in W$:

$$\|\gamma + w\|^2 = \|\gamma\|^2 + \|w\|^2, \forall w \in W$$

נרצה להראות שעבור $w \in W$ כללי מתקיים: $\|\gamma\|^2 \leq \|\alpha - w\|^2$.

ובכן, יהי $a_1, \dots, a_k \in F$, ונסתכל על:

$$\left\| \alpha - \sum_{i=1}^k a_i w_i \right\|^2 = \left\| \alpha - \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i + \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i - \sum_{i=1}^k a_i \varepsilon_i \right\|^2 =$$

$$\left\| \gamma + \sum_{i=1}^k (\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle - a_i) \varepsilon_i \right\|^2 \stackrel{\text{By Pythagoras}}{=} \|\gamma\|^2 + \|w\|^2 \geq \|\gamma\|^2$$

3. ב. צ"ל שהזווית בין α ל $p = \sum_{i=1}^k \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$ היא מינימלית בין α ל $w \in W$. כלשהו.

$$\alpha = p + \gamma$$

(p - ההיטל, γ - הניצב, כלומר - $\langle \gamma, w \rangle = 0$).

כל מקום שרשום w_i - הכוונה היא ל ε_i !!!

יהי $w = \sum a_i w_i \in W$

$$\cos \left(\alpha, \sum a_i w_i \right) = \frac{\left\langle \alpha, \sum a_i w_i \right\rangle}{\|\alpha\| \left\| \sum a_i w_i \right\|} = \frac{\left\langle p, \sum a_i w_i \right\rangle + \left\langle \gamma, \sum a_i w_i \right\rangle}{\|\alpha\| \left\| \sum a_i w_i \right\|}$$

ידוע כי $\langle \gamma, \sum a_i w_i \rangle = 0$ כי $\gamma \perp w$, ולכן:

$$= \frac{\langle p, \sum a_i w_i \rangle}{\|\alpha\| \left\| \sum a_i w_i \right\|} \leq_{\text{Cauchy-Schwarz}} \frac{\|p\| \left\| \sum a_i w_i \right\|}{\|\alpha\| \left\| \sum a_i w_i \right\|} = \frac{\|p\|}{\|\alpha\|} = \frac{\|p\|^2}{\|\alpha\| \|p\|} =^* \frac{\langle \alpha, p \rangle}{\|\alpha\| \|\alpha\|} = \cos(\alpha, p)$$

קיבלנו כי $\cos(\alpha, w) \leq \cos(\alpha, p)$ ולכן הזווית בין α, w גדולה או שווה לזווית בין α, p . $\cos$ פונקציה יורדת). נותר להצדיק את *:

$$\langle \alpha, p \rangle = \left\langle \alpha, \sum \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i \right\rangle = \sum_i \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle = \sum_i \|\langle \alpha, \varepsilon_i \rangle\|^2 \stackrel{\text{Besel equality}}{=} \|p\|^2$$

שאלה 5:

5.ב. נתחיל ב $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V , ו $\{e_1, \dots, e_n\}$ שהגיע מתהליך גרם שמידט, ו $\{f_1, \dots, f_n\}$ מקיים את אותן תכונות של e_i .

צ"ל: $|a_i| = 1, f_i = a_i e_i$.

הוכחה: באינדוקציה על i :

$$\text{וגם } \|f_1\| = 1 \text{ ? } |a_1| = 1 \text{ . } f_1 = a_1 e_1 \text{ , ולכן } sp\{f_1\} = sp\{v_1\} = sp\{e_1\} \\ \|a_1 e_1\| = |a_1| \|e_1\| \text{ . סבבה.}$$

נניח עבור $k-1$, ונוכיח עבור i . $f_1, \dots, f_k, e_k \in sp\{f_1, \dots, f_k\}$ בסיס אורתונורמלי ל $sp\{f_1, \dots, f_k\}$.

$$e_k = \sum_{i=1}^k \langle e_k, f_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, f_i \rangle f_i + \langle e_k, f_k \rangle f_k \stackrel{IH}{=} \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, a_i e_i \rangle f_i + a_k f_k = \\ \sum_{i=1}^{k-1} a_i \langle e_k, e_i \rangle f_i + a_k f_k = 0 + a_k f_k$$

$$1 = \|e_k\| = \|a_k f_k\| = |a_k| \|f_k\| = |a_k|$$

מרחב דואלי ובסיס דואלי

הגדרות:

יהי V מרחב וקטורי הגדרנו מרחב דואלי

$$V^* = \text{Hom}(V, F) = \{f : V \rightarrow F\}$$

הוכחנו איזומורפיזם, ועל כן $\dim V = \dim V^*$.

משפט והגדרה: יהי V מרחב וקטורי מממד n ו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V . אזי, קיים בסיס יחיד

ל V^* , $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ כך ש $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, והוא נקרא הבסיס הדואלי.

הוכחה: נגדיר $f_i \in V^*$ על ידי $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. ראשית כל, f_i פונקציונל ליניארי $V \rightarrow F$ כי

מוגדר על איברי בסיס, ועל כן גם יחיד. מאחר ו $\dim V^* = \dim V = n$ מספיק להראות כי

$f_1, \dots, f_n$ בת"ל, ומזה ינבע שהם בסיס. נניח שקיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש $T = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$ (נשים

לב - 0 כאן הוא פונקציונל האפס). בפרט, לכל j , $T(v_j) = 0$, אבל:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(v_j) = \alpha_j$$

כלומר, לכל j $\alpha_j = 0$, ולכן $f_1, \dots, f_n$ בת"ל.

טענה (הוכחה בתרגיל): יהי V ממ"פ ממרחב סופי, עבור $w \in V$ מגדירים $f_w \in V^*$ ע"י

$$f_w(v) = \langle v, w \rangle. \text{ לכל } f \in V^* \text{ יש } w \in V \text{ יחיד כך ש } f = f_w.$$

משפט והגדרה: יהי V ממ"פ מממד n , ו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V , אזי קיים בסיס יחיד

$\{w_1, \dots, w_n\}$ ל V , כך ש $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$, וזה הבסיס הדואלי ל B .

הוכחה: $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V , ניקח $f_1, \dots, f_n$ בסיס ל V^* כך ש $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. ע"פ הטענה,

לכל i קיים וקטור $w_i \in V$ כך ש $f_i = f(w_i)$, ועל כן:

$$\langle v_i, w_j \rangle = f_{w_j}(v_i) = f_i(v_j) = \delta_{ij}$$

דוגמא: $V = R^2$ עם ממ"פ סטנדרטית, יהי $B = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (3, 4)\}$ נחפש בסיס דואלי

(וקטורים):

$$w_1 = (a, b), w_2 = (c, d)$$

$$1 = \langle v_1, w_1 \rangle = a + 2b$$

$$0 = \langle v_2, w_1 \rangle = 3a + 4b$$

$$0 = \langle v_1, w_2 \rangle = c + 2d$$

$$1 = \langle v_2, w_2 \rangle = 3c + 4d$$

או, במטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

באופן כללי: ב R^n רוצים בסיס דואלי ל $v_1, \dots, v_n$ נחפש:

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}^{-1}$$

והעמודות של B יהיו הבסיס הדואלי. איך נמצא את הבסיס הדואלי ל V^* ? זה פשוט יהיה:

$$\left\{ \begin{matrix} f_{\langle a, b \rangle} \\ f_{\langle c, d \rangle} \end{matrix} \right\} \in V^*$$

העתקה צמודה

משפט והגדרה: יהיו v, w ממ"פ מעל שדה F, $T: V \rightarrow W$ טרל"ן, אזי קיימת טרל"ן יחידה

$$T^*: W \rightarrow V$$

המקיימת:

$$\langle T(v), w \rangle_w = \langle v, T^*(w) \rangle_v, \quad w \in W, v \in V$$

משפט: יהיו W, V ממ"פ מעל F. E בסיס אורתונורמלי ל V , F בסיס אורתונורמלי ל W .

$$T: V \rightarrow W \text{ טרל"ן. נסמן } A = [T]_F^E, B = [T^*]_E^F, \text{ אזי } B = A^* (= \overline{A'})$$

$$\text{הוכחה: } A = [T]_F^E \text{ ועל כן } T(e_j) = \sum_i^n a_{ij} f_i. \text{ נחשב:}$$

$$\langle T e_j, f_k \rangle = \left\langle \sum_i a_{ij} f_i, f_k \right\rangle = \sum_i a_{ij} \langle f_i, f_k \rangle = a_{kj}$$

$$\langle T e_j, f_k \rangle = \langle e_j, T^* f_k \rangle = \overline{\langle T^* f_k, e_j \rangle}$$

$$B = [T^*]_E^F, \text{ ועל כן: } T^* f_k = \sum_i b_{ik} e_i. \text{ אזי:}$$

$$\langle T^* f_k, e_j \rangle = \left\langle \sum_i b_{ik} e_i, e_j \right\rangle = \sum_i b_{ik} \langle e_i, e_j \rangle = b_{jk}$$

$$a_{kj} = \langle T e_j, f_k \rangle = \langle T^* f_k, e_j \rangle = \overline{b_{jk}}$$

מאפסים

יהי V מ"ו מעל F . עבור $A \subseteq V$ תת קבוצה מגדירים את המאפס של A :

$$A^0 = \{f \in V^* \mid f(a) = 0, \forall a \in A\} \subseteq V^*$$

ועבור $B \subseteq V^*$, המאפס של B הוא:

$$B^0 = \{v \in V : f(v) = 0, \forall f \in B\} \subseteq V$$

תכונות:

1. A^0 ת"מ של V^* . אם $f, g \in A^0$, אזי $f(a) = g(a) = 0$ ולכן

$$(f + g)(a) = (cf)(a) = 0$$

2. $V^0 = 0$. אם $f \in V^*$ מאפס את כל V , אז בהגדרה $f \equiv 0$.

3. $\{0\}^0 = V^*$, כי לכל $f \in V^*$, $f(0) = 0$.

4. $A \subseteq B$ - אזי $B^0 \subseteq A^0$.

טענה: V מ"ו מממד n $U \subseteq V$ תת מרחב, אזי: $\dim U + \dim U^0 = \dim V$.

הוכחה: נניח U מממד r , וניקח בסיס $v_1, \dots, v_r$, ונשלימו לבסיס של V ע"י $v_{r+1}, \dots, v_n$

ניקח בסיס $f_1, \dots, f_n$ ל V^* כך ש $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. נראה כי $f_{r+1}, \dots, f_n$ בסיס ל U^0 , ובזה סיימנו.

$$u = a_1 u + \dots + a_r u_r, \quad j \geq 1, \quad u \in U, \quad f_{r+1}, \dots, f_n \in U^0$$

$$f_{r+j}(u) = \sum_{i=1}^r a_i f_{r+j}(u_i) = 0$$

ועל כן $f_{r+j} \in U^0$.

למה בת"ל? $f_{r+1}, \dots, f_n$ בת"ל כי ראינו $f_1, \dots, f_n$ בסיס.

פורשים: יהי $f \in U^0$, ועל כן $f \in V^*$, לכן $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$, יהי $1 \leq j \leq r$.

$$0 = f(u_j) = \sum_i a_i f_i(u_j) = a_j$$

תרגול 13, 11.6.2006

הודעות

1. בוחן שבוע הבא:

1. וקטור עצמיים, ערכים עצמיים, מרחבים עצמיים, פולינום מינימלי, פולינום אפייני
2. מכפלה פנימית – עד מטריצות נורמליות אוניטריות וכיו"ב, לא כולל.
2. תרגיל 12 – להגשה עוד שבועיים, בתא – מתמטיקה קומה ג' – **נעה אדלשטיין**
3. למלא שאלוני הערכה באינטרנט.

פתרון תרגיל 11

שאלה 5

יהי V ממ"פ עם בסיס A , ונתון שלכל $T: V \rightarrow V$ מתקיים $[T^*]_A = ([T]_A)^*$:

- אורתוגונלי A
- לכל איברי A אורך זהה

הוכחה:

בתרגול קודם ראינו, כי אם E, F בסיסים אורתונורמליים, אזי $[T^*]_F^E = ([T]_F^E)^*$.

טענה: עבור E, F בסיסים **כלשהם**, T טרל"ג, מתקיים $[T^*]_F^{E*} = ([T]_F^E)^*$, כאשר E^*, F^*

הם הבסיסים **הדואליים**.

איך מוכיחים: דומה להוכחה משבוע שעבר.

המשך הוכחה – לכל $T: V \rightarrow V$ מתקיים $[T^*]_A = B_T$ $[T^*]_A = ([T]_A)^* = \text{Given}$
נסמן $P = [Id]_A^A$ (מטריצת מעבר בסיס). $B_T = [T^*]_A = [Id]_A^A [T^*]_A [Id]_A^A = PB_T P^{-1}$.
קיבלנו שלכל $T: V \rightarrow V$ $B_T P = P B_T$. מאחר ועל כל מטריצה A ניתן לחשוב כעל יצוג של איזושהי העתקה T^* ע"פ הבסיס A , ועל כן, יוצא שלכל מטריצה M מתקיים $PM = MP$, כלומר P מרכזית ולכן סקלרית – $P = cI$.

נותר להראות: אם $[Id]_A^A = cI$ אזי A אורתוגונלי ואורך הוקטורים שווה.

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

נסמן:

$$A^* = \{a_1^*, \dots, a_n^*\}$$

$$a_i^* = ca_i$$

$$\langle a_i, a_j \rangle = \left\langle \frac{1}{c} a_i^*, a_j \right\rangle = \frac{1}{c} \langle a_i^*, a_j \rangle = \frac{1}{c} \delta_{ij}$$

על כן, עבור $a_i \perp a_j$ $i \neq j$, ומתקיים $\langle a_i, a_i \rangle = \frac{1}{c}$ לכל i . מ.ש.ל.

פתרון שאלה 6

הערה: נשתמש בעובדות הבאות:

$$B^0 \subseteq A^0 \Leftarrow A \subseteq B \quad 1.$$

2. $U \subseteq V$ ת"מ אזי $U^{00} = U$ (למה? – לכל $A \subseteq V$, $A \subseteq A^{00}$, מהגדרה. שיויון ממשפט המימדים).

צ"ל - $U, W \subseteq V$ ת"מ – אזי $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$, וכן $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$.

ראשית - $U_1 \cap U_2 \subseteq U_i, i=1,2$, וכמו כן $U_1^0 \subseteq (U_1 \cap U_2)^0$,

$$U_1^0 + U_2^0 \subseteq (U_1 \cap U_2)^0 \quad (*)$$

באותה צורה - $U_i \subseteq U_1 + U_2$, $U_i^0 \subseteq (U_1 + U_2)^0$,

$$(U_1 + U_2)^0 \subseteq U_1^0 \cap U_2^0 \quad (**)$$

אזי $(U_1 \cap U_2)^{00} = U_1 \cap U_2 \subseteq (U_1^0 + U_2^0)^0$,

ע"פ (**) כאשר נציב U_i^0 במקום U_i נקבל $U_i^{00} \cap U_j^{00} = U_i \cap U_j$, $(U_1^0 + U_2^0)^0 \subseteq U_1^{00} \cap U_2^{00} = U_1 \cap U_2$,

$$U_1 \cap U_2 = (U_1 \cap U_2)^{00} \subseteq (U_1^0 + U_2^0)^0 \subseteq U_1 \cap U_2$$

ולכן הכל שיוויונות.

$$(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0 \Leftarrow U_1 \cap U_2 = (U_1^0 + U_2^0)^0$$

נחליף U_i^0 ב U_i ונקבל $(U_1^{00} + U_2^{00})^0 = (U_1 + U_2)^0$,

טרנספורמציות מיוחדות

תזכורת: $T : V \rightarrow W$ טרל"נ. אזי, קיימת טרל"נ יחידה $T^* : W \rightarrow V$ המקיימת $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$. $\forall v \in V, w \in W$. T^* נקראת ההעתקה הצמודה ל- T .

והמיוחדות הן:

- $T = T^*$ - מעל R סימטרית, מעל C הרמיטית - ע"ע ממשיים.
- $T = -T^*$ מעל R - אנטי סימטרית, מעל C - אנטי הרמיטית - ע"ע מדומים טהורים.
- $T^*T = I$ - מעל R אורתוגונלית, מעל C - אוניטרית,
- $T^*T = TT^*$ - נורמלית.

נשים לב לדוגמא כי מטריצה (אנטי) סימטרית / (אנטי) הרמיטית / אורתוגונלית / אוניטרית $\Leftarrow$ נורמלית.

טענה: V מרחב אוניטרי (מרחב מכפלה פנימית מעל C), $T : V \rightarrow V$ טרל"נ, אזי:

- א. T הרמיטית $\Leftrightarrow \langle T\alpha, \alpha \rangle \in R$ לכל α
- ב. T אנטי הרמיטית $\Leftrightarrow \langle T\alpha, \alpha \rangle \in iR$ לכל α

הוכחת א'

$\Leftarrow$

$$\langle T\alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, T^*\alpha \rangle = \langle \alpha, T\alpha \rangle = \overline{\langle T\alpha, \alpha \rangle}$$

קיבלנו כי $\langle T\alpha, \alpha \rangle$ צמוד לעצמו, ולכן ממשי

$\Rightarrow$

$$\langle T\alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, T^*\alpha \rangle$$

$$\langle \alpha, T\alpha \rangle = \overline{\langle T\alpha, \alpha \rangle} = \langle T\alpha, \alpha \rangle$$

קיבלנו לכל α - $\langle \alpha, T\alpha \rangle = \langle \alpha, T^*\alpha \rangle \Rightarrow T = T^*$.

בפרט - יהי λ ע"ע של T הרמיטית עם ו"ע v , אזי

$$\langle Tv, v \rangle \in R$$

$$\langle Tv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

ולכן, נובע $\lambda \in R$.

הגדרה: $T : V \rightarrow V$ אוניטרית אם משמרת מכפלה פנימית, כלומר - $\forall \alpha, \beta \in V$

$$\langle T\alpha, T\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

דוגמא: $V = R^2$, ונתבונן $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. A סיבוב בזווית θ , סביב הראשית. A שומרת

על נורמה וזווית ולכן על מ"ם, שכן:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\alpha, \beta)$$

יהי λ ע"ע של T אוניטרית עם ו"ע $v \in V$:

$$\left. \begin{aligned} \langle Tv, Tv \rangle &= \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle \\ \langle Tv, Tv \rangle &=_{T \text{ unitary}} \langle v, v \rangle \end{aligned} \right\} |\lambda| = 1$$

משפט: $T: V \rightarrow V$ ט"ל, התנאים הבאים שקולים:

- T אוניטרית (שומרת מכפלה פנימית)
- $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$
- $(T^*T = I \Leftrightarrow) TT^* = I$
- T מעבירה כל בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי
- T מעבירה בסיס אורתונורמלי מסוים לבסיס אורתונורמלי

למה: $T: V \rightarrow V$ אוניטרית, $W \subseteq V$ ת"מ T אינווריאנטי $(\forall w \in W, Tw \in W)$ – אזי $TW^\perp = W^\perp$.

הוכחה: ראשית, T אוניטרית, ולכן הפיכה, ולכן לא מורידה מימד, ולכן $\dim TW = \dim W$. מאינווריאנטיות W , $TW \subseteq W$, ולכן $TW = W$. נראה כי גם $W^\perp$ הוא T אינווריאנטי – ואז, מהשיקול הקודם ינבע $TW^\perp = W^\perp$. יהי $v \in W^\perp$. צ"ל $Tv \in W^\perp$, כלומר – לכל $w \in W$, $\langle Tv, w \rangle = 0$. יהי $w \in W$. מכך ש $TW = W$, קיים $w' \in W$ כך ש $w = Tw'$. $\langle Tv, w \rangle = \langle Tv, Tw' \rangle =_{T \text{ unitary}} \langle v, w' \rangle =_{v \in W^\perp, w' \in W} 0$

קצת מסקנות: T אוניטרית, $W \subseteq V$ ת"מ T אינווריאנטי, אזי:

$$[T]_{W \cup W^\perp} =_{W'}^W \begin{pmatrix} T|_W & 0 \\ 0 & T|_{W'} \end{pmatrix}$$

ושתי 'תתי המטריצות' הפיכות.

הגדרה: $A \in M_n(C)$ מוגדרת אי שלילית (ומסמנים $A \geq 0$) אם קיימת $B \in M_n(C)$ כך $B^*B = A$

משפט:

- A מוגדרת אי שלילית $\Leftrightarrow A$ נורמלית, וכל הע"ע ממשיים אי שליליים.
- A מוגדרת אי שלילית $\Leftrightarrow$ קיימת $C \in M_n(C)$ כך ש $C^2 = A$

הוכחה:

נניח A מוגדרת אי שלילית, כלומר $A = B^*B$. ברור ש $A^* = A$. הרמיטיות $\Leftarrow$ נורמלית. נניח λ ע"ע של A עם ו"ע v . $\langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle B^*Bv, v \rangle = \langle Bv, Bv \rangle \geq 0$ (ולכן λ אי שלילי).

בכיוון השני – נניח A נורמלית וכל הע"ע ממשיים אי שליליים, נראה A אי שלילית. מכך שהיא נורמלית נובע כי A לכסינה (הוכחנו בכיתה), וניתן ללכסן אותה ע"י U אוניטרית, כלומר $UDU^{-1} = A$ אלכסונית. על האלכסון של D מופיעים הערכים העצמיים של A , שהם אי שליליים, לכן נוכל להגדיר את

$$E = \sqrt{D} \quad (\text{כלומר, אם}) \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftarrow E = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \text{כעת, ניקח}$$

$B = UEU^{-1}$, ואז $B^*B = A$ וגם $B^2 = A$ (סעפי ב של ההוכחה). מ.ש.ל.

תרגול 14, 18.6.2006

הודעות:

להגיש את תרגיל 12 שבוע הבא לתא של נועה, עד יום שני הבא ב13:00.
לחפש תרגול לשבוע הבא, לעשות, ולהגיש עד יום ג' ה4.7.

חובת הגשה: 9 תרגילים (מתוך 13).

תרגילים: 10% מהציון.

בחנים: כל בוחן 5% מגן.

ועכשיו לחומר:

טרנספורמציה $T: V \rightarrow V$ נקראת נורמלית אם $TT^* = T^*T$.

למה 1: V ממ"פ $T: V \rightarrow V$ נורמלית. אם $\alpha \in V$ ו"ע של T עם "ע λ אזי α ו"ע של T^* עם "ע λ .

למה 2: אם $T: V \rightarrow V$ נורמלית, ו $\alpha, \beta \in V$ ו"ע המתאימים לע"ע שונים, אזי $\alpha \perp \beta$.

משפט: תהי $A \in M_n(C)$ נורמלית, אזי יש ל C^n בסיס או"נ המורכב כולו מו"ע של A . ז"א, קיים בסיס שביחס אליו A אלכסונית, והמטריצה המלכסנת היא אוניטרית $(U^*U = I)$.

מה המשמעות? נניח $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ בסיס אורתונורמלי של C^n , שכולו ו"ע של A . למה זה אומר שאפשר ללכסן ע"י מטריצה אוניטרית?

נכתוב $U = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (מטריצת עמודות). נטען U מלכסנת, ואוניטרית.

למה אוניטרית למה?

$$U^* = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \overline{\varepsilon_n} \end{pmatrix}$$

$$(U^*U)_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{\varepsilon_{ik}} \varepsilon_{jk} = \sum_k (\varepsilon_i)_k (\varepsilon_j)_k = \langle \varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle$$

ובצורה ישירה: $AU = A(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (A\varepsilon_1, \dots, A\varepsilon_n) = (\lambda_1 \varepsilon_1, \dots, \lambda_n \varepsilon_n)$ ועל כן:

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \overline{\varepsilon_1} \\ \vdots \\ \overline{\varepsilon_n} \end{pmatrix} (\lambda_1 \varepsilon_1, \dots, \lambda_n \varepsilon_n)$$

$$[U^*(AU)]_{ij} = \langle \overline{\varepsilon_i}, \lambda_j \varepsilon_j \rangle = \overline{\langle \lambda_j \varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle} = \overline{\lambda_j} \overline{\langle \varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle} = \overline{\lambda_j} \delta_{ij}$$

קיבלנו: כל מטריצה נורמלית (ולכן גם הרמיטית, אוניטרית) ניתנת ללכסון ע"י מטריצה אוניטרית.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{דוגמא:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & i/2 & i/2 \\ -a & i/2 & i/2 \end{pmatrix}$$

A אוניטרית, ועל כן נורמלית.

נרצה ללכסן אותה – נעשה זאת בעצמנו. ראשית, נמצא את הע"ע של A:

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x & a & -a \\ -a & x - i/2 & -i/2 \\ a & -i/2 & x - i/2 \end{vmatrix} \stackrel{L_3=L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} x & a & -a \\ -a & x - i/2 & -i/2 \\ 0 & x-1 & x-i \end{vmatrix} =$$

נפתח לפי שורה 3, ונקבל:

$$\begin{aligned} & -(x-i) \begin{vmatrix} x & -a \\ -a & -i/2 \end{vmatrix} + (x-i) \begin{vmatrix} x & a \\ -a & x - i/2 \end{vmatrix} = \\ & -(x-i) \left(-\frac{i}{2}x - \frac{1}{2} \right) + (x-i) \left[x \left(x - \frac{i}{2} \right) + \frac{1}{2} \right] = \\ & (x-i) \left[\frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{2} \right] = (x-i)(x^2 + 1) = (x-i)^2(x+i) \end{aligned}$$

קיבלנו $\lambda = i$ הוא ע"ע בריבוי אלגברי 2, ואילו $\lambda = -i$ הוא ע"ע בריבוי אלגברי 1. בפרט, A אוניטרית, כי כל הע"ע שלה הם בעלי ערך מוחלט 1.

שלב 2:

לכל ע"ע λ , מחשבים את V_λ . נחשב את V_i - מפתים V כך ש $Av = iv$, כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & i/2 & i/2 \\ -a & i/2 & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -ix - ay + ax = 0 \\ ax - \frac{1}{2}y - \frac{i}{2}z = 0 \\ -ax + \frac{i}{2}y - \frac{i}{2}z = 0 \end{cases}$$

$L_3 = -L_2$, ולכן נתעלם מ L_3 . נכפיל את L_1 ב a ואת L_2 ב i, ונקבל:

$$\begin{cases} -aix - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ aix + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$L_2 = -L_1$, כלומר האילוץ היחיד הוא המשוואה הראשונה, כלומר:

$$V_i = \{(x, y, z) \in C^3 \mid -ix - ay + az = 0\}$$

$$spV_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -ia \\ ia \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-i} = sp \left\{ \begin{pmatrix} -2ai \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

נעשה כאילו חישבנו, ונגלה ש

נשים לב שבתהליך האותונורליזציה של גרם-שמידט, לא צריך לעשות אותו לאיחוד הבסיסים, אלא מספיק לכל מרחב עצמי בנפרד (כי הם כבר מאונכים) (אוסף הוקטורים שנקבל בסוף יהיה או"נ כי ע"פ הלמה, אם $\lambda \neq \mu$ ע"ע של A נורמלית, אזי $V_\lambda \perp V_\mu$).

$$V_i = sp \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix} \right\}, V_{-i} = sp \left\{ \begin{pmatrix} -ai \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

ועל כן:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a & -ai \\ a & -i/2 & 1/2 \\ a & i/2 & -i/2 \end{pmatrix}$$

ניתן לבדוק בבית שמתקיים:

$$\begin{aligned} U^*U &= I \quad \bullet \\ U^*AU &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \bullet \end{aligned}$$

טענה: (לא נורא חשובה, אבל נהוג לתת במבחנים)

V ממ"פ ממימד סופי, $T: V \rightarrow V$ טרל"נ, אזי:

1. $W \subseteq V$ ת"מ T אינווריאנטי, אזי $T^* W^\perp = W^\perp$ אינווריאנטי.

2. $\text{Im}(T^*) = (\ker T)^\perp$

3. אם T נורמלית, אזי:

a. $\ker T = \ker T^*$

b. $\text{Im} T = \text{Im} T^*$

הוכחה:

1. $v \in W^\perp$, נראה כי $T^*v \in W^\perp$, יהי $w \in W$. נרצה להראות כי $\langle w, T^*v \rangle = \langle Tw, v \rangle = 0$. מתקיים כי $Tw \in W$ וכי $w \perp v$.

2. יהי $v \in \text{Im}(T^*)$, כלומר קיים $y \in V$ כך ש $v = T^*y$. יהי $u \in \ker T$, אזי $\langle u, v \rangle = \langle u, T^*y \rangle = \langle Tu, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0 \Rightarrow$

$$\text{Im}(T^*) \subseteq (\ker T)^\perp$$

$$\dim(\ker T)^\perp = \dim V - \dim \ker T = \dim \text{Im } T = \dim \text{Im}(T^*)$$

(*) – למה? כי המטריצות של הטרל"נים מעל בסיס או"נ מאותה דרגה.

3. תהי T נורמלית, $Tv = 0 \iff v \in \ker T$.

$$0 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle = \langle v, TT^*v \rangle = \langle T^*v, T^*v \rangle = \|T^*v\|^2 \Rightarrow T^*v = 0 \Rightarrow v \in \ker T^*$$

הראנו $\ker T \subseteq \ker T^*$. מסימטריה – שוויון.

$$\text{Im}(T^*) = {}_{\text{From 2}} (\ker T)^\perp = (\ker T^*)^\perp = {}_{\text{From 2}} \text{Im } T$$

קצת תבניות ביליניאריות לפני הסיום

הגדרה: יהיו V, W מ"ו מעל שדה F (אותו שדה F). פונקציה $f: V \times W \rightarrow F$ תיקרא תבנית

ביליניארית אם היא מקיימת:

בי ליניאריות:

$$f(\alpha + \alpha', \beta) = f(\alpha, \beta) + f(\alpha', \beta) \quad \text{א.}$$

$$f(\alpha, \beta + \beta') = f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta') \quad \text{ב.}$$

הומוגניות:

$$f(c\alpha, \beta) = cf(\alpha, \beta) \quad \text{א.}$$

$$f(\alpha, c\beta) = cf(\alpha, \beta) \quad \text{ב.}$$

דוגמאות:

$$\text{א. } f \equiv 0 \text{ פונקציית האפס.}$$

$$\text{ב. יהי } V \text{ מרחב אוקלידי, נגדיר את } f: V \times V \rightarrow F \text{ כמכפלה } \underline{\text{סקלרית}}$$

$$f(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle. \text{ למשל } V = R^n, \text{ אזי } f(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

$$\text{ג. } f: R^2 \times R^2 \rightarrow R, \text{ אזי } f(u, v) = u_1 v_1 + 8u_1 v_2 - 6u_2 v_1 + 7.5u_2 v_2.$$

$$\text{ד. } V \text{ מרחב אוקלידי, } V^* \text{ המרחב הדואלי. } f: V^* \times V \rightarrow F \text{ ע"י } f(\varphi, \alpha) = \varphi(\alpha).$$

$$\text{ה. תהי } A \in M_{m \times n}(F), \text{ נגדיר תבנית ביליניארית } f_A: F^m \times F^n \rightarrow F \text{ ע"י}$$

$$f_A(x, y) = xAy^t.$$

משפט: יהי V מ"ו מעל F מממד m עם בסיס $v_1, \dots, v_m$ ו W מ"ו מעל F מממד n עם בסיס

$$w_1, \dots, w_n, \text{ אזי קיימת התאמה חד-על בין תבניות ב"ל } f: F^m \times F^n \rightarrow F \text{ ובין מטריצות}$$

$$M_{m \times n}(F) \text{ ביחס לבסיסים הנתונים.}$$

למה זה נכון? ראינו כי מטריצה מגדירה תבנית ב"ל. למה הפוך? נניח $f: F^m \times F^n$ תבנית ב"ל, נגדיר

$$a_{ij} = f(v_i, w_j) \text{ ע"י } A \in M_{m \times n}(F)$$

$$. f(v, w) = xAy' \text{ אזי } , \sum_{i=1}^n y_i w_i = w \in W \text{ ו } , \sum_{i=1}^m x_i v_i = v \in V$$

דוגמא: $f(u, v) = u_1 v_1 + 8u_1 v_2 - 6u_2 v_1 + 7.5u_2 v_2$ מ $f: R^2 \times R^2 \rightarrow R$, נציג את f ע"י מטריצה ביחס לבסיסים הסטנדרטיים:

$$\left. \begin{array}{l} f(e_1, e_1) = 1 \\ f(e_1, e_2) = 8 \\ f(e_2, e_1) = -6 \\ f(e_2, e_2) = 7.5 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 8 & 7\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$