

מת"פ 1 – חגית לסט

hagitl@math.huji.ac.il

ציון – 90% - 100% בחינה סופית

2 בחנים, 5% כל אחד, מגן.

אין הגשת תרגילים עקב מחסור בתקציב.

לקנות: טבלאות אינטגרלים ונוסחאות מתמטיותהיום – קבוצות וחתכי חרוטקבוצות – מושגים בסיסייםקבוצה

קבוצה היא אוסף של איברים שונים זה מזה. ראה מתמטיקה דיסקרטית מאת מול.

סימון: $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$. ראה אלגברה ליניארית...דוגמאות לקבוצות במישור1. קו ישר - $l = \{(x, y) \in R^2 \mid ax + by = c\}$. למשל: $l_0 = \{(x, y) \in R^2 \mid 2x = 1\}$. l_0 הוא מקרה פרטי של l , כאשר מציבים $a = 2, y = 0, c = 1$.2. מעגל - $\{(x, y) \in R^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}$, כאשר a, b, R מספריםממשיים קבועים. מעגל הוא אוסף כל הנקודות במישור שמרחקן מנקודה נתונה (a, b) הואקבוע $(R =)$, שנקרא רדיוס המעגל.תזכורת: משפט פיתגורס למשולש ישר זווית. אם הצלעות הן a, b, c (כאשר c הינה היתר),

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

מעגל – נקודת מבט אחרתכזכור, מעגל הוא $\{(x, y) \in R^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}$ נעבור למערכת צירים חדשה - x', y' .

$$x' = x - a$$

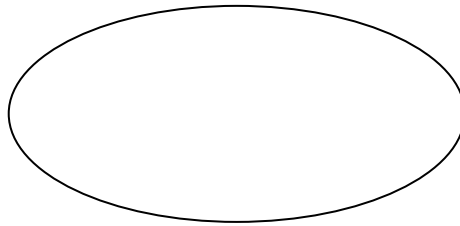
$$y' = y - b$$

במערכת הצירים החדשה, המעגל מקבל את הצורה - $x'^2 + y'^2 = R^2$ - וזה מעגל שמרכזו הראשית.עקומות קוניות במישור(קונוס = חרוט)

על מה מדובר? על מעגל, אליפסה, פרבולה, היפרבולה.

אליפסה

הגדרה: אליפסה היא אוסף הנקודות במישור שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות הוא קבוע.



לקבוע אנו קוראים $2a$. לנקודות הקבועות נהוג לקרוא -
 $F_1 = (c, 0)$
 $F_2 = (-c, 0)$

נקרא p לנקודה הימנית שהאליפסה חותכת את ציר ה- x - המרחק הוא $(x - c)$. המרחק מול הנקודה השמאלית הוא $(x + c)$. מתקיים $(x + c) + (x - c) = 2a \Rightarrow 2x = 2a \Rightarrow x = a$. יוצא שהנקודות הינן $(a, 0), (-a, 0)$. מטעמי סימטריה - יוצא אותו דבר בחיתוך עם ציר y - החיתוך הוא ב $(0, b), (0, -b)$, כאשר $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

נעת ננסה לפתח משוואת אליפסה שמוקדיה על ציר x בנקודות $(c, 0), (-c, 0)$ עם מרחק קבוע $2a$.
 (x, y) נמצאת על האליפסה אם סכום מרחקיה מ $(c, 0)$ ומ $(-c, 0)$ הוא $2a$.
המרחק מ $(c, 0)$ הוא $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$. המרחק מהנקודה השנייה הוא $\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$. סכום המרחקים הוא

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

נעלה בריבוע פעמיים, ונפשט, ונקבל:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

נסמן - $a^2 - c^2 = b^2$. באליפסה כנ"ל $a > c$ וע"כ זה אפשרי. ניתן לכן גם לרשום:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

כזכור, מדובר במשוואת אליפסה כאשר החיתוך על ציר x הם $(a, 0), (-a, 0)$, במוקדים $(c, 0), (-c, 0)$ וחיתוך על ציר y הוא $(0, b), (0, -b)$, במרחק קבוע $2a$.
אם $c = 0$ אז מדובר במעגל, שרדיוסו a .

26.10.2006

אליפסה: אוסף כל הנקודות במישור שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות (מוקדים) הוא מספר קבוע.

אליפסה שמוקדיה נמצאים על ציר x:

המוקדים הם $(c, 0)$, $(-c, 0)$. קיים מספר קבוע $2a$, ונקודות החיתוך על ציר ה- x הן

$(0, a)$, $(0, -a)$. החיתוך עם ציר ה- y הוא $(0, b)$.

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$. פיתוח משוואת האליפסה כנ"ל. נבחר נקודה כלשהיא על האליפסה - (x, y) - צריך

להתקיים שסכום מרחקיה משתי הנקודות הנתונות הוא $2a$.

תזכורת: מרחק בין שתי נקודות (x_1, y_1) , (x_2, y_2) הוא $\delta = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

מתקיים:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\text{כלומר, } \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

העלאה בריבוע:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$

נחלק ב-4 ונקבל:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

נעלה שוב בריבוע ונקבל:

$$(x+c)^2 + y^2 = a^2 + acx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) + y^2 = a^2 - c^2$$

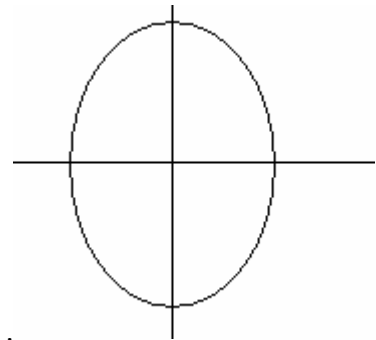
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

אליפסה שמוקדיה על ציר x : $(c, 0), (-c, 0)$ עם מספר קבוע $2a$ היא האליפסה שמשוואתה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \text{ כאשר } b^2 = a^2 - c^2$$

בואו ונתבונן במקרה בו המוקדים על ציר y : $(0, c), (0, -c)$ עם מספר קבוע $2b$, משוואתה:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ כאשר } a^2 = b^2 - c^2. \text{ אליפסה זו נקראת לפעמים גם 'אליפסה עומדת':}$$



דוגמאות: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ - שרטטו. בואו ננסה לחליץ:

$a = 4, b = 3$. ברור שהיא שוכבת - שכן הציר ה'גדול' הוא ציר ה-x.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \pm\sqrt{7}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1 \text{ דוגמאות:}$$

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{16} = 1 \text{ קיבלנו } x' = x - 2, y' = y - 3.$$

נשרטט את האליפסה במערכת ה' x', y' כמו קודם. זוהי אליפסה עומדת. היא חותכת את ציר y'

ב $(0, \pm 4)$ ואת ציר x' ב $(\pm 3, 0)$. איך נשרטט את זה ב x, y ? פשוט על ידי הסטה הפוכה למה

שעשינו קודם.

שאלה: האם $(0, 0)$ נמצא בתוך / על / מחוץ לאליפסה?

נציב $(0,0)$ במשוואות האליפסה, ונראה...

נקודת מבט אחרת על אליפסה:

ניזכר במה שכתבנו קודם באדום:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

$$\text{וזה כמובן שקול ל } \underbrace{\sqrt{(x-(-c))^2 + y^2}}_{D_1} = \underbrace{\frac{c}{a} \left(x - \left(-\frac{a^2}{c} \right) \right)}_{D_2} \text{ נגדיר } e = \frac{c}{a} \text{ e מייצגת}$$

אקסצנטריות – לא קשור ל $e = 2.718...$. מתקיים $0 \leq e < 1$. כאשר $e = 0$ מדובר במעגל, ברדיוס a . אם $e \sim 1$ אז האליפסה דחוסה ביותר.

$$\text{הישר } x = \frac{-a^2}{c} \text{ נמצא משמאל לאליפסה כי } -\frac{a^2}{c^2} < -a \Rightarrow \underbrace{\frac{a}{c}}_{\substack{>1 \\ \text{ע'}}} \cdot a > A$$

הערה כללית: מרחק של נקודה (x, y) מישר $x = k$ הוא $x - k$.

כעת, אפשר לתת הגדרה אחרת לאליפסה:

אליפסה: (שאיננה מעגל) היא אוסף כל הנקודות במישור שמרחקן D_1 מנקודה קבועה F (מוקד)

פרופורציוני למרחקן מישר קבוע l (מדריך), ומקתיים $D_1 = eD_2$, כאשר e הוא קבוע הפרופורציה, ומקיים $0 < e < 1$.

היפרבולה: אוסף כל הנקודות במישור שהפרש המרחקים שלהן משתי נקודות הוא מספר קבוע $(2a)$.

היא חותכת את ציר x בנקודות $(\pm a, 0)$. מציירים את שני הישרים הנקראים אסימפטוטות, ומשיקים

$$\text{לה, שנוסחאותיהם } y = \pm \frac{b}{a}x, \text{ כאשר } b^2 = c^2 - a^2. \text{ משוואת ההיפרבולה היא } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

היפרבולה עם מוקדים על ציר y : $(0, \pm c)$, עם מספר קבוע $2b$.

$$\text{נוסחא: } \frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$\text{האסימפטוטות יהיו } y = \pm \frac{b}{a}x$$

דוגמאות: לשרטט, לחשב מוקדים –

$$1. \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a = 4, b = 3 \quad .a$$

b. נצייר מלבן עם a (± 4) על ציר x , ו b (± 3) על ציר y , נצייר את אלכסוני המלבן –

האסימפטוטות – ונוסיף את ההיפרבולה. המוקדים על ציר x .

$$2. \quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$$a = 4, b = 3 \quad .a$$

b. מוקדים על ציר y .

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

אפשר כמובן להגדיר $[a, b]$ ו (a, b) . הגדרה פורמלית – התלמיד החרוץ ישלים בבית.
קיים גם $(-\infty, a]$.

פונקציות

הגדרה פורמלית – ראה דיסקרטית מאתמול (הגדרה זהה לחלוטין).

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - פונקציה של משתנה אחד.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - פונקציה של n משתנים.

הגדרות שלא היו אתמול:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת עולה בקטע $[a, b]$ אם לכל $x_1 < x_2 \in [a, b]$ מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת יורדת בקטע $[a, b]$ אם לכל $x_1 < x_2 \in [a, b]$ מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$.

3. מונוטוניות: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת מונוטונית בקטע $[a, b]$ אם היא עולה או יורדת בקטע.

a. לדוגמא: $f(x) = x^2$ אינה מונוטונית בקטע $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. היא גם איננה מונוטונית

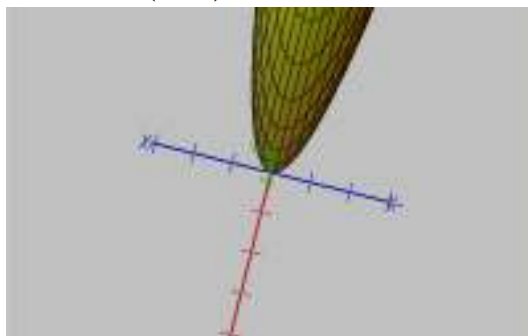
$$\text{בקטע } \left(-\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

4. גרף של פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הוא אוסף הנקודות במישור $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$.

a. אם f יפה ($\equiv$ רציפה) אז הגרף של f היא עקומה במישור. לדוגמא $f(x) = x^2$

5. גרף של פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הוא אוסף הנקודות במרחב $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$

a. דוגמא: $f(x, y) = x^2 + y^2$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - פונקציה עם תחום הגדרה מפוצל

לדוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 3x + 5, & x \geq 1 \end{cases} . f(x) \text{ נקראת גם פונקציה 'מוטלאת' .}$$

דוגמא נוספת לפונקציה מוטלאת

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

הערה: המשוואה $f(x, y) = 0$ מתארת עקומה במישור, אם f רציפה. דוגמא:

$f(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ (זוהי אליפסה שמוקדה על ציר y). **לא כל עקומה במישור היא פונקציה** - כמו למשל במקרה הזה, אבל המשוואה הנ"ל יכולה לתאר ∞ פונקציות (למה אינסוף? נגדיר תחומים שונים).

המשוואה $f(x, y, z) = 0$ מתארת משטח במרחב (אם f רציפה). לדוגמא - $z - x^2 - y^2 = 0$. משוואה זו מתארת משטח פעמון. למה? כי זה אומר $z = x^2 + y^2$.

עוד דוגמא למשטח: $\{(x, y, z) | x = 5\}$ - זהו מישור מקביל למישור y, z .

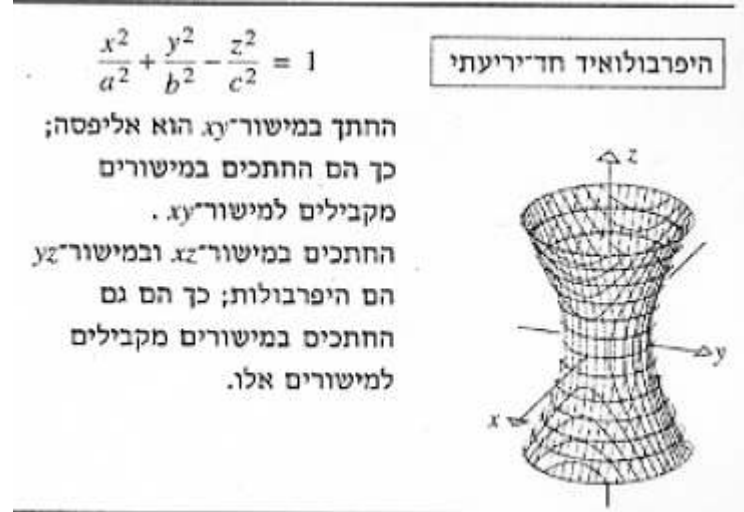
2.11.2006

נזכור כי $f(x, y) = 0$ אומר כי אוסף הפתרונות של המשוואה מתאר עקומה במישור.

$f(x, y, z) = 0$ אומר כי אוסף הפתרונות של המשוואה מתאר משטח במרחב.

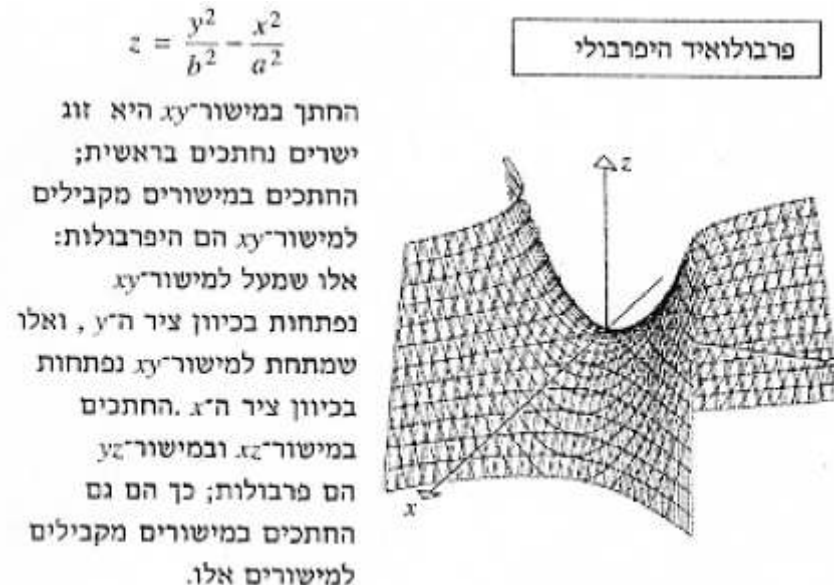
גרף של פונקציה עם משתנה אחד הוא עקומה במישור. לא כל עקומה במישור הוא גרף של פונקציה עם משתנה אחד.

לדוגמא, היפרבולואיד:



וזה שקול כמובן ל $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. כמובן שזו לא פונקציה.

נדבר כרגע על הפרבולואיד היפרבולי:



נזכר כי $\{(x, y, z) | x = 5\}$ מתאר מישור שמקביל למישור yz .

$\{(x, y, z) | z = 5\}$ מתאר מישור שמקביל למישור xy .

פרבולואיד היפרבולי:

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}. \text{ כמובן שאם } x = 0, \text{ אזי זאת משוואה של פרבולה.}$$

$$0 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}x \text{ - כלומר } z = 0, \text{ נציב } xy \text{ עם המישור?}$$

זה שני קווים ישרים (האסימפטוטות).

$$c = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}, \text{ כלומר } z = c, \text{ מישור מקביל למישור } xy.$$

$$\text{אם } c \text{ חיובי, אזי זה שקול ל } \frac{y^2}{(b\sqrt{c})^2} - \frac{x^2}{(a\sqrt{c})^2} = 1, \text{ וזו היפרבולה במערכת צירים } (x', y').$$

שזו הזזה של (x, y) מעלה (כי c חיובי), שמוקדיה הם על ציר y' .

$$\text{אם } c \text{ שלילי, אזי } 1 = \frac{y^2}{cb^2} - \frac{x^2}{ca^2}. \text{ נסמן } k = -c, \text{ וכמובן ש } k > 0, 1 = \frac{x^2}{(\sqrt{k}a)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{k}b)^2},$$

וזאת היפרבולה עם מוקדים על ציר x' .

תחום הגדרה: אם $f: A \rightarrow B$, אזי A היא תחום ההגדרה של A .

לדוגמא, עבור פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{מהו תחום ההגדרה של } f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}-2}?$$

$$x \geq 0 \wedge x \neq 4 \wedge x > -1 \Rightarrow x \geq 0 \wedge x \neq 4$$

(כי $\sqrt{x}$ דורשת $x \geq 0$, $\ln(x)$ דורש $x > 0$).

$$\text{דוגמא נוספת: } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} - f(x, y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$$

הערה: תחום ההגדרה של פונקציה עם שני משתנים הוא קבוצה חלקית ל $\mathbb{R}^2$.

$$\{(x, y) | y \geq 0\}$$

$$\text{דוגמא נוספת: } f(x, y) = \sqrt{xy}$$

כאן הדרישה היא $\sqrt{xy} \geq 0$, כלומר x, y באותו סימן, כלומר - הרביע הראשון והשלישי.

$$\{(x, y) | x, y \leq 0 \vee x, y \geq 0\}$$

קו גובה של פונקציה $f(x, y)$

הגדרה: $z = k$, קו הגובה של פונקציה $f(x, y)$, הוא אוסף כל הנקודות (x, y) במישור xy

$$\text{שמקיימות } f(x, y) = k.$$

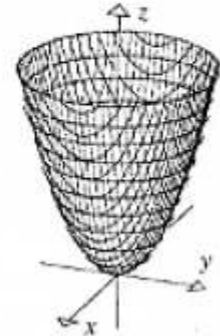
דוגמא

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \text{ - פרבולואיד אליפטי}$$

פרבולואיד אליפטי

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים המקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ובמישור yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.



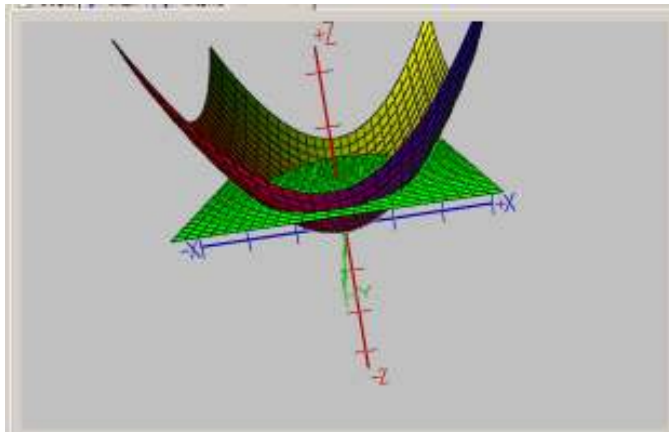
לדוגמא, נחשב את קו הגובה $z = 0$. ע"פ הגדרה, זה אוסף הנקודות (x, y) המקיימות

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

כעת, נחשב את קו הגובה $z = c > 0$. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - c = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$. זוהי אליפסה

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{c})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{c})^2} = 1 \text{ . נקודות החיתוך עם ציר } x \text{ } \pm(a\sqrt{c}) \text{ ועם ציר } y \text{ } \pm(b\sqrt{c})$$

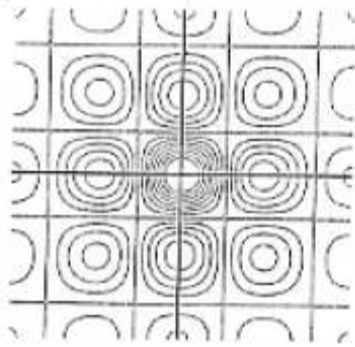
ככל ש c יגדל, אזי האליפסה תגדל.



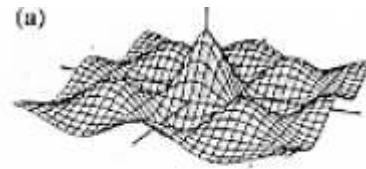
שאלת הבנה: האם קווי גובה יכולים להחתך? לא! כי זוהי סתירה להגדרת קו גובה.

התאמה של קווי גובה עם המרחב:

15.

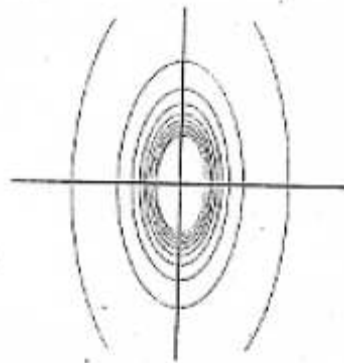


עם

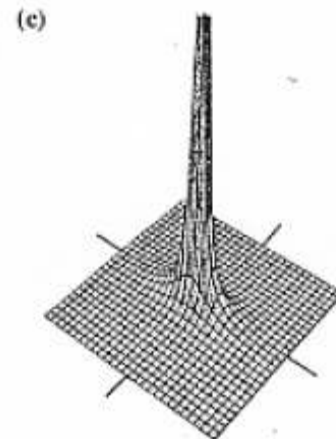


$$z = (\cos x)(\cos y) e^{-\sqrt{x^2 + y^2}/4}$$

16.

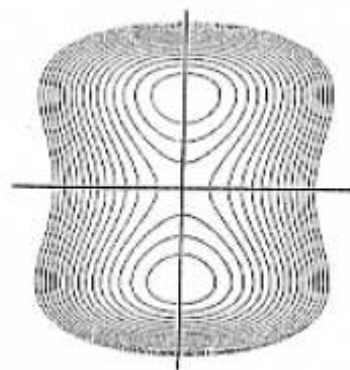


עם

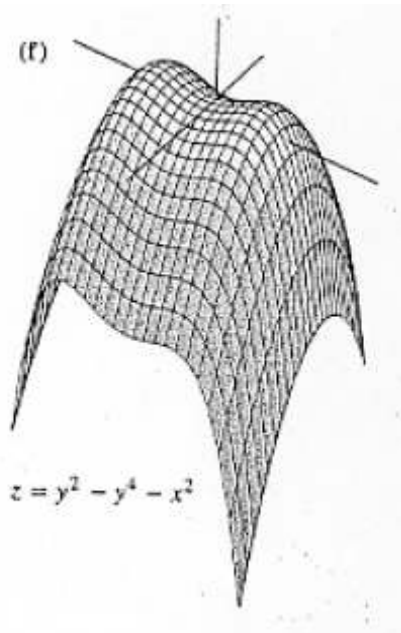


$$z = \frac{1}{(4x^2 + y^2)}$$

13.

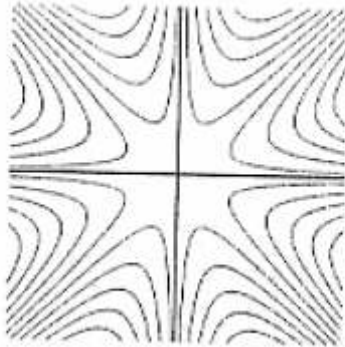


עם



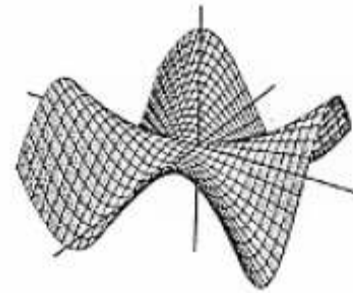
$$z = y^2 - y^4 - x^2$$

14.



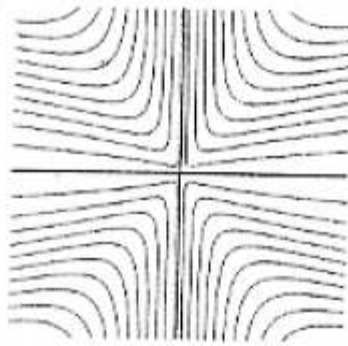
עם

(e)



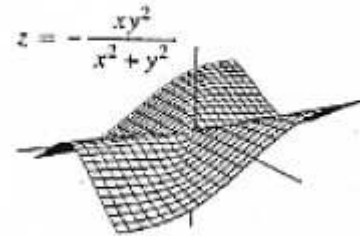
$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

18.



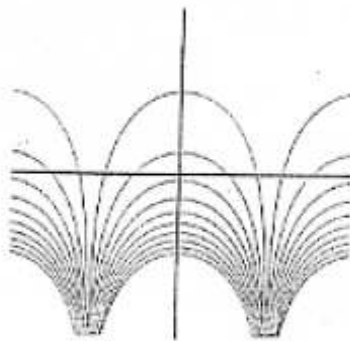
עם

(b)



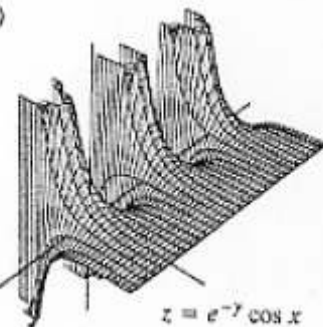
$$z = -\frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

17.



עם

(d)



$$z = e^{-y} \cos x$$

גבולות של פונקציות

פונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

הגדרה: תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0 (קטע שמכיל את x_0), למעט אולי x_0 עצמה.

אם ערכי f קרובים כרצוננו לגודל L (סופי), כאשר x מתקרב ל x_0 מימין אז נסמן $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

L נקרא **הגבול מימין** של $f(x)$ בנקודה x_0 .

באופן דומה, מגדירים את הגבול משמאל.

אם ערכי f קרובים כרצוננו לגודל L (סופי), כאשר x מתקרב ל x_0 משמאל אז נסמן $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$. נקרא הגבול משמאל של $f(x)$ בנקודה x_0 .

הגדרה: אם $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ ו $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ אזי נסמן $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

גבולות של פונקציות אלמנטריות:

$$f(x) = \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

אפשר להגדיר גם אינטואיטיבית את $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ו $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

האם קיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$? לא.

נתבונן ב $\arctg$. מתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ ו $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

נגדיר $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ כאשר הפונקציה גדולה כרצוננו בנקודה x_0 מימין. אפשר להגדיר גם משמאל,

אפשר להגדיר גם גבול כללי...

לדוגמא $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

6.11.2006

גבולות

'הסברנו' מה זה גבול של פונקציה. תרגילים – חשבו את הגבולות הבאים, אם הם קיימים:

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x)$. ראשית, נשים לב ש $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$, ולא סתם – אפשר להגיד

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0^+$ לא פורמלית. על כן, נתבונן $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln = -\infty$, ועל כן

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x) = -\infty$

2. לא קיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ (כי כאשר x גדל ללא הגבלה, $\sin x$ לא מתקרב לאף גודל L כרצוננו,

גם במונח הרחב).

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$

4. לא קיים $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

גבולות מיוחדים

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

וגם

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

אבל רק כאשר x נמדד ברדיאנים!!!

אריתמטיקה של גבולות:

כשאנו אומרים כאן $\lim$, זה מתאים לכל הגדרה של $\lim (L^+, L^-, L, \pm\infty)$

- $\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$
- $\lim (f(x)g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- $\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ אם מוגדר ($\lim g(x) \neq 0$)

דוגמאות

- $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 3) = 25 - 20 + 3 = 8$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \frac{10}{1} = 10$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} -5x^3 + x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x^3 \left(\underbrace{-5}_{-5} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\downarrow 0} \right)}_{-5} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 + x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^3 \left(\underbrace{-5}_{-5} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\downarrow 0} \right)}_{-5} = \infty$$

הערה למשפט אריתמטיקה של גבולות

$$\left. \begin{matrix} \lim f(x) \\ \lim g(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \exists f(x)g(x) \quad \exists, \text{ אבל לא להפך. לדוגמא:}$$

$$\text{קיים } \lim_{x \rightarrow \infty} (8 + \sin x) \cdot \frac{1}{8 + \sin x} = 1, \text{ אבל אין גבול לאף אחד מהם בנפרד.}$$

$$\text{האם } \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \text{ ? לא, כי יש לפונקציה משמאל תחום הגדרה שונה } x \neq \pi k$$

עוד קצת דוגמאות:

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{\overset{\rightarrow 8}{x}}{\underbrace{x-8}_{\rightarrow 0^+}} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x}{x-8} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x}{x-8} \text{ וכמובן שלא קיים}$$

אריתמטיקה אינסופית של גבולות

$$f(x) \rightarrow A$$

$$g(x) \rightarrow B$$

$$\text{לוח החיבור - כמה שווה } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x) \text{ ?}$$

A/B	∞	$-\infty$	c
∞	∞	$?$	∞
$-\infty$	$?$	$-\infty$	$-\infty$
d	∞	$-\infty$	$c+d$

לוח הכפל – כמה שווה $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x)$?

A/B	∞	$-\infty$	$c_1 > 0$	$c_2 < 0$	0
∞	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞	?
$d_1 > 0$	∞	$-\infty$	$d_1 c_1$	$d_1 c_2$	0
$d_2 < 0$	$-\infty$	∞	$d_2 c_1$	$d_2 c_2$	0
0	?	?	0	0	0

כעת

? מסמן שאין כלל, ויש לחשב באופן פרטני.

דוגמאות $(x \rightarrow \infty)$:

$$\frac{1}{x} \cdot x^2 \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{x^2} \cdot x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{x} \cdot 8x \rightarrow 8$$

לוח החילוק – כמה שווה $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$?

דוגמאות:

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{x}} \rightarrow -\infty$$

אתגר- למצוא $g(x)$ כך ש $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, ולא קיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g(x)}$

תהי $g(x) = \sin x \frac{1}{x}$, אזי $\frac{1}{\sin x} \cdot x = \frac{x}{\sin x}$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin x \frac{1}{x}}$ כמובן שלא קיים.

משפט הסנדביץ

אם $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ לכל x בסביבת הנקודה x_0 (פרט אולי ל x_0) ואם $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים ושווה ל L .

לדוגמא, נחשב את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

האריתמטיקה של גבולות לא תעזור לנו כאן...

אבל, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$, ועל כן $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$. כאשר $x \rightarrow 0$, אזי גם x^2 וגם $-x^2$

שואפים ל 0 . ועל כן, $x^2 \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$.

טענה: $|f(x)| \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) \rightarrow 0$.

(כמובן שלא נכון ש $f(x) \rightarrow 5 \Leftrightarrow |f(x)| \rightarrow 5$).

כיוון ראשון: $\Leftarrow$ ברור.

$\Rightarrow$ $|f(x)| \rightarrow 0 \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.
מסנדביץ, מתקיים.

9.11.2006

ציטוטי השיעור:

'אם תרשמו כל דבר שאני רושמת על הלוח, המחברת שלכם תראה כמו סלט ירקות'
'מה זה 3 מול האינסוף? זה כמו להזליף בטיפת עיניים לתוך האוקיינוס'

תזכורת: משפט הסנדביץ' - אם $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ לכל x בסביבת הנקודה x_0 (פרט אולי ל x_0) ואם $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים ושווה ל L .

טענה: $f(x) \rightarrow 0$ אם"מ $|f(x)| \rightarrow 0$
הוכחה: באמצעות סנדביץ'.

תרגיל: חשב את $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

ידוע כי $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$. צריך להפריד למקרים:

עבור $x > 0$ מתקיים $-x \leq x \sin x \leq x$
עבור $x < 0$...

אבל אפשר לפתור באמצעות סנדביץ' - שכן $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$, כי $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, ומכיוון

ש $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, ועל כן $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$ (מהטענה לעיל).

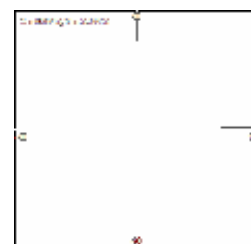
הגדרה: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ אז אומרים כי $f(x)$ היא אפסה בסביבת הנקודה $x = a$.

טענה: מכפלה של פונקציה חסומה בפונקציה אפסה היא פונקציה אפסה.

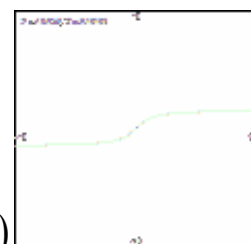
($f(x)$ נקראת חסומה אם קיים K קבוע חיובי כך ש $|f(x)| \leq K$).

דוגמאות:

$f(x) = \frac{1}{x}$ לא חסומה בסביבת $x = 0$.



$f(x) = \arctan(x)$ חסומה על כל $\mathbb{R}$



פורמלית: אם קיימת סביבה של $x = a$ כך שלכל x בסביבה זו מתקיים $|f(x)| \leq K$, ואם

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ אז } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

הוכחה: $-K|g(x)| \leq |f(x)g(x)| \leq K|g(x)|$

ידוע כי $|g(x)| \rightarrow 0$, ועל כן מסנדיץ $f(x)g(x) \rightarrow 0$.

נחזור לתרגיל $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. אפסה ב-0, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ חסומה, ועל כן $x \sin \frac{1}{x}$ אפסה בסביבת $x = 0$.

טכניקות לטיפול במצבי אי וודאות בגבולות של פונקציה

- **פירוק לגורמים** - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1 = 2$. למה מותר לצמצם

את $(x-1)$? כי גבול מוגדר בסביבה, לא צריך את הנקודה.

- **החלפת משתנים** - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. נגדיר $t := x - 1$. כאשר $x \rightarrow 1$ מתקיים $t \rightarrow 0$, ועל

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^2 - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (t+2) = 2$$

כן המשוואה שקולה ל-2

- **הוצאת גורם דומיננטי כמשותף** - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x^5}{4x^7 + x^3}$. זוהי אי וודאות מהצורה $\frac{0}{0}$. נשים לב

שבשאיפה ל-0, x^2 דומיננטי יותר מ- x^5 - אז חשוב לשים לב מה

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3+x^3)}{x^2(4x^4+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+x^3}{(4x^4+1)x}$$

דומיננטי

גבול, אבל יש גבול ימני של ∞ , ושמאלי של $-\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^6 + x^4}{x^3 + 1}$ גם כאן נוציא גורם דומיננטי - כאן זה בעל החזקה הגבוהה ביותר, ועל

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{1}{x^3}} \rightarrow -\infty$$

כן (שכן המונה שואף ל- ∞ והמכנה

(1).

שיטת נוספת: - לחלק מונה ומכנה בחזקה הגבוהה ביותר בדוגמא הקודמת זה יהיה

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6}}$$

שווה ל-4. המונה שואף ל-4. המכנה שואף ל-0. אבל לא ידוע אם זה

0^+ או 0^- . $\frac{1}{x^6} \rightarrow 0^+$ ו $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0^-$, ומכיוון ש $x^3 < x^6$ כאשר $x \rightarrow \infty$, ולכן

$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{x^6}$ כאשר $x \rightarrow \infty$, ולכן $\frac{1}{x^3}$ מנצח גם ב $-\infty$. כדי להמנע מהצורך לחשוב, עדיף לעבוד ע"פ הדרך הקודמת.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{2x^2 + 2}$ - אי ודאות מסוג $\infty - \infty$. זה נראה כמו $-\infty$. גם כאן

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)} - \sqrt{x^2 \left(2 + \frac{2}{x^2} \right)} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - |x| \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}} = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(-x)}_{\rightarrow -\infty} \left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}}_{\rightarrow \sqrt{1} - \sqrt{2}} \right) &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 100} \right)$. האינטואיציה אומרת 0, אבל כאן נכפיל בצמוד, כדי להוכיח.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 100} \right) \left(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 100} \right)}{\left(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 100} \right)} &= \frac{x^2 + 3 - (x^2 + 100)}{\left(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 100} \right)} = \\ \frac{-97}{\left(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 100} \right)} & \end{aligned}$$

המונה שואף ל-97 (הוא ממש -97), והמכנה שואף ל ∞ , ולכן כל הביטוי שואף ל0.

רציפות של פונקציה

הגדרה: $f(x)$ נקראת רציפה בנקודה $x = c$ אם מתקיים $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

הערה: הגדרה זו דורשת:

- $f(x)$ מוגדרת ב $x = c$
- קיימים גבולות חד צדדיים ב $x = c$.
- הגבולות החד צדדיים שווים וזהים ל $f(c)$.

נשים לב שההגדרה של רציפות שקולה ל

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow c} x)$
- $\lim_{t \rightarrow 0} f(c + t) = f(c)$

הגדרה: $f(x)$ נקראת רציפה מימין (משמאל) בנקודה $x = c$ אם $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$
 $(x \rightarrow c^-)$

הגדרה: $f(x)$ נקראת רציפה בקטע $[a, b]$ אם f רציפה בכל נקודה $x \in [a, b]$, רציפה מימין ב a ורציפה משמאל ב b .

דוגמאות לפונקציות שאינן רציפות בנקודה $x = c$

- גבולות חד צדדיים קיימים אבל שונים.
- גבול קיים ושונה מהערך בנקודה (אי רציפות סליקה).
- גבול קיים אבל $f(c)$ לא מוגדרת
- גבולות קיימים במובן הרחב בלבד $(\lim_{x \rightarrow c} f(x))$ לא קיים במובן הצר – לא קיים L סופי ששווה אליו).

13.11.2006

דוגמאות לפונקציות רציפות

כל הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן

- $P(x)$ פולינומים
- $Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ - הרציונליות
- $|x|$
- $\sqrt{x}$
- $a^x (a > 0), \log_a x, \sin, \cos, \log, \tan, \arcsin, \arccos, \arctg$

נשים לב, כי אפילו $\tan$ רציפה, שכן היא לא מוגדרת ב $\frac{\pi}{2} + \pi k$, ובכל שאר הנקודות היא רציפה.

משפט: אם f, g רציפות ב c אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב c :

- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}, g \neq 0$
- $g \circ f, f \circ g$

הגדרה שקולה לרציפות: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} x\right)$

שימוש ברציפות לחישוב גבולות:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-2}}} =$$

מרציפות (של כל הפונקציות שיש כאן), אפשר פשוט להציב 1, ועל כן זה שווה פשוט ל $\frac{1}{1 + 2^{-1}}$

מה נעשה במקרה כזה (אי אפשר להציב - זה לא מוגדר...)?

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-2}}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 + 2^{\frac{1}{x-2}}\right)} \stackrel{\text{Non formal writing}}{=} \frac{1}{1 + 2^{\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}}} \underset{\rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + 2^{-\infty}} = 1$$

עוד דוגמא:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) =$$

$$\log_a(e) = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}$$

בפרט, כאשר $a = e$, אז כדאי לזכור ש $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

תרגיל – הוכיחו, שאם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ אז $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = A^B$.
תזכורת: הראנו בתרגול - $x = e^{\ln x}$ לכל $x > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

(*) - המעבר מותר כי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$, ולכן בסביבה מסויימת של a $f(x) > 0$.

$$= \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (g(x) \ln f(x))} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)} = e^{B \ln A} = e^{\ln A^B} = A^B.$$

רשימת אי ודאויות:

$\infty^0, 0^0, 1^\infty, 1^{-\infty}$ (מדובר בגבול בחזקת גבול, כמובן).

נשים לב - $\infty^{-\infty} = 0$.

בדיקת רציפות של פונקציה מוטלאת

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x > 3 \\ 6, & x = 3 \\ 4x - 6, & x < 3 \end{cases} \quad \text{תהי}$$

ברור כי f רציפה ב $(-\infty, 3), (3, \infty)$.
נבדוק רציפות ב $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 4x - 6 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3) = 6$$

מאחר והגבולות החד צדדיים שווים לערך הפו' בנקודה, הפו' רציפה ב $x = 3$, ובסיכומו של דבר – רציפה בכל $\mathbb{R}$.
עוד דוגמא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

הפונקציה רציפה בתחום $(-\infty, 0), (0, \infty)$. נחשב את $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2}{x} = \infty$. מאחר וזה שונה מהערך ב 0 , הפונקציה לא רציפה ב 0 .

הערכת סדרי גודל של פונקציה

הקדמה: אם $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ אז $\frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow 1 - b = 0$

שאלה: האם $f - g \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} \rightarrow 1$

הכיוון $\Rightarrow$ - לא נכון. דוגמא נגדית, בסביבת $x=0$ $f(x)=x^4$ $g(x)=x^4+x^2$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \infty$ אבל $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0$ נאמר
 כי קצב השאיפה ל-0 של $f(x)$ הוא יותר גדול מזה של $g(x)$.

הכיוון $\Leftarrow$ - לא נכון. דוגמא נגדית (בסביבות $x=0$) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x}{1} = 1$ אבל $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 2$ אמנם ההפרש
 ביניהם הוא 2, אבל ההפרש היחסי¹ שואף ל-0.

הגדרה (תזכורת): $f(x)$ נקראת אפסה בסביבת $x=a$ אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
 יהיו f, g פונקציות אפסות בסביבת נקודה a . אנו מתעניינים בקצב השאיפה לאפס.

הגדרה (טיפה ארוכה, וטיפה מבלבלת): תהיינה f, g פונקציות חיוביות ואפסות ב $x=a$, ונניח

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \text{ שקיים הגבול אזי:}$$

1. אם $L=0$, אז נאמר ש $f(x)$ היא פונקציה אפסה מסדר גבוה יותר מהפונקציה האפסה

$$g(x), \text{ ונסמן } f(x) = o(g(x)) \text{ (או } f \ll g \text{)}$$

(הערה): המינוח 'אפסה מסדר גבוה יותר' משתמשים בו בסביבת $x=0$

$$a. \text{ דוגמא: בסביבת } x=0, x^3 = o(x^2).$$

2. אם $L=c$ עבור c כלשהו, אזי נסמן $f(x) = O(g(x))$.

a. **הערה:** אם $f(x) = o(g(x))$, אזי בבירור מתקיים $f(x) = O(g(x))$,

$$\text{עבור } c=0.$$

$$b. \text{ דוגמא: בסביבת } x=0, x^4 = O\left(\frac{1}{3}x^4\right).$$

c. **דוגמא 2:** בסביבת $x=0$, $x^4 = O(x^3)$ (עבור $c=0$, אבל אפשר להגיד

$$x^4 = o(x^3) \text{ ככה שעדיף לומר זאת}).$$

3. אם $L=c \neq 0$, אז מסמנים $f(x) = \Theta(g(x))$.

4. אם $L=1$, אז אומרים ש f, g אקוויולנטיות בנקודה $x=a$, ומסמנים $f \sim g$.

$$\frac{f-g}{g}$$

a. דוגמא: $\sin x \sim x$ בסביבת $x = 0$, כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

16.11.2006

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות אפסות (אח"כ נרחיב את ההגדרה לפונקציות כלשהן). אנו מניחים כי

$$\text{קיים } L \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad (a \text{ הוא במובן הצר, בד"כ } 0, L \text{ במובן הצר})$$

- א. אם $L = 0$ אז $f(x) = o(g(x))$
ב. אם L קבוע כלשהוא אזי $f(x) = O(g(x))$
ג. אם $L \neq 0$ קבוע כלשהו $f(x) = \Theta(g(x))$
ד. אם $L = 1$ אז $f \sim g$

משמעות: אם f, g חיוביות, אזי:

- א. $f(x) = o(g(x))$ ב $x \rightarrow a$, אזי $f(x) \ll g(x)$ (קטנה ממש) בסביבת $x = a$.
 f אפסה מסדר קטן יותר.
ב. $f(x) = O(g(x))$ אזי $f(x) \leq kg(x)$ בסביבת $x = a$.
ג. $f(x) = \Theta(g(x))$ אז $k_1 g(x) \leq f(x) \leq k_2 g(x)$ בסביבת $x = a$, k_1, k_2 קבועים.

דוגמאות: בסביבת $x = 0$

- א. $x^3 = o(x^2)$ (שכן $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$)
ב. $x^2 = o(\sin x)$ (שכן $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{x}{\sin x} = 0$)
ג. $\sqrt{1+x} - x \sim \frac{1}{2}x$ שכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(2)} = 1$$

שאלה: ראינו $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$. האם מכאן נובע ש $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$?

תשובה: לא מוגדר, שכן הפונקציות לא אפסות. אבל אם נרחיב את ההגדרה של אקוולנטיות גם לפונקציות שאינן אפסות, **אז כן**.

הרחבת ההגדרה: יהו f, g פונקציות המקיימות $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. נאמר

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - L}{g(x) - L} = 1 \text{ אם } x = a \text{ ב } f(x) \sim g(x)$$

על סמך הגדרה זו אכן אפשר לרשום $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$ ב $x = a$.

טענה: $f(x) \sim g(x)$ ב $x = a$ אם"מ $f(x) = g(x) + o(g(x))$. (הכוונה ב $o(g(x))$ - פונקציה כלשהיא המקיימת $h(x) = o(g(x))$).

הוכחה:

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{If } \frac{f}{g} \text{ exists } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f \sim g$$

$$\text{לכן, מכך ש } \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \text{ נובע ש } \sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x + o\left(\frac{1}{2}x\right)$$

אפשר גם להגיד ש $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x + o(x)$. למה?

טענה: אם $h(x) = o\left(\frac{1}{2}x\right)$ אז $h(x) = o(x)$, שכן $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{\frac{1}{2}x} = 0$, לכן $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{x} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h}{x} = 0 \text{ כלומר } h = o(x)$$

$$\text{ועל כן } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{100}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} \cdot \sqrt{1.01} \text{ שימוש מעשי: רוצים למצוא קירוב ל } \sqrt{1.01}$$

דוגמאות:

א. $\sin x \sim x$ ב $x = 0$ ולכן $\sin x = x + o(x)$ (כלומר, $\sin x$ שווה ל x ועוד גורם שזניח ביחס ל x).

טענה: (תוכיחו בתרגיל הבית):

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$$

שאלה: $1 - \cos x \sim ?$ ב $x = 0$ - נחפש פולינום ב x .

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \sim 2 \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \text{ שכן}$$

$$(\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

ועל כן $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

האם נכון: $1 - \cos x = \theta(x^2)$ - כן! - כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, ומכיוון

$\frac{1}{2}$ הוא קבוע שונה מ-0, אזי מתקיים התנאי.

האם נכון כי $1 - \cos x = o(x^2)$? לא, כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \neq 0$.

האם נכון כי $1 - \cos x = O(x^2)$? כן, כי $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$, מתפקד כקבוע כלשהוא.

האם נכון כי $1 - \cos x = O(x^5)$? לא, כי $\frac{1 - \cos x}{x^5} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{x^3} \rightarrow \pm\infty \neq c \in \mathbb{R}$.

הערה: הגדרנו את הסימנים $\sim, o, O, \Theta$ עבור f, g אפשר לתת את אותן ההגדרות עבור פונקציות כלשהן.

דוגמאות:

א. $f(x) = o(1)$ ב $x = a$, ז"א $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = 0$, אזי המשמעות של $f(x) = o(1)$

הוא ש $f(x)$ אפסה ב a .

א. האם $\sin x = o(1)$ ב $x = 0$? כן.

ב. $f(x) = O(1)$, אזי $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1} = K \in \mathbb{R}$, אזי המשמעות היא ש $f(x)$ חסומה ב a .

ג. האם $1 = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ב $x = 0$? כן, שכן, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = 0$. (אם כי אי אפשר לומר ש'1'

שואף ל-0 חזר יותר מ $\frac{1}{x^2}$).

גבולות של פונקציה בשני משתנים

הגדרה (לא פורמלית¹): $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ אם ערכי $f(x,y)$ מתקרבים כרצוננו ל- L

כאשר (x,y) מספיק קרוב ל- (x_0,y_0) .

$$f(x,y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

משפט: לפונקציה $f(x,y)$ קיים גבול L כאשר $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$ אם"מ $f(x,y) \rightarrow L$

לאורך כל עקומה חלקה העוברת ב- (x_0,y_0) .

הגדרה: עקומה חלקה זו עקומה נטולת שפיצים.

¹ נטולת ε, δ וקישואים אחרים.

20.11.2006

גבולות של פונקציות עם שני משתנים

אם ערכי $f(x, y)$ קרובים לרצוננו L כאשר (x, y) מספיר קרוב ל (x_0, y_0) .
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$

משפט: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ קיים אם הוא קיים לאורך כל עקומה חלקה הנמצאת בתחום של $f(x, y)$.

נשים לב שהמקביל למשפט הזה עבור פו' עם משתנה אחד הוא ש $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים אם הגבולות החד צדדיים קיימים ושווים.

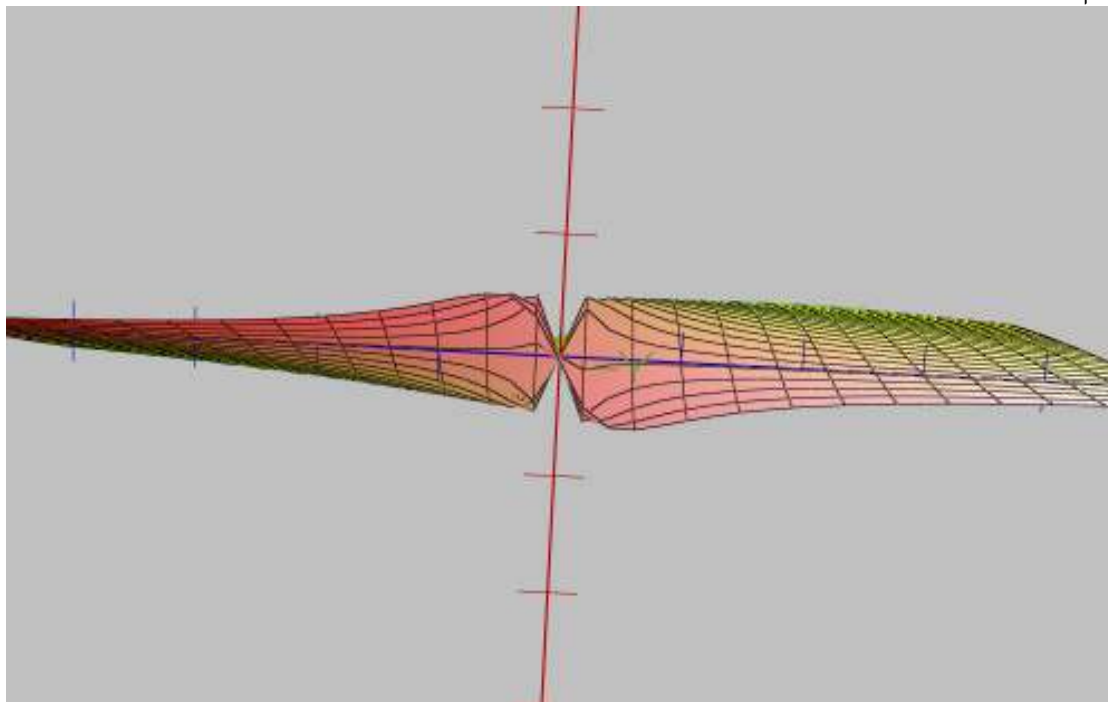
נשים לב שהמשפט הנ"ל לא מאפשר לנו להוכיח קיום גבול – אלא מהווה כלי עזר להוכחת אי קיום גבול.

תרגיל: הוכיחו שהגבול הבא לא קיים: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.
 נחשב את הגבול לאורך עקומות מהצורה $y = kx$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2k}{1 + k^2}$$

עבור ערכי k שונים נקבל גבולות שונים. עבור $k = 0$ הגבול הוא 0 (התקרבות לראשית הצירים לאורך ציר x).
 עבור $k = 1$ אזי הגבול הוא 1, ועל כן הגבול לא קיים.

איך היא נראית?



תרגיל: האם קיים הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$?

נבדוק את הגבול לאורך מסלולים מהצורה $y = kx$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^3}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2 + k^2}$$

אם $k = 0$, אזי הגבול הוא 0.

אם $k \neq 0$, אזי הגבול הוא עדיין 0.

קווים ישרים לא עזרו. בואו ננסה פרבולה. נבדוק את הגבול לאורך מסלולים מהצורה $y = kx^2$.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

נבחר למשל $k = 1$ ונקבל שהגבול של $f(x, y)$ לאורך העקומה $y = x^2$ הוא $\frac{1}{2}$.

אריתמטיקה של גבולות

זהה לאריתמטיקה של גבולות במשתנה אחד.

אם $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = B$ אז:

$$\lim f + g = A + B$$

$$\lim f - g = A - B$$

$$\lim f \cdot g = AB$$

$$\lim k \cdot f = kA$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{A}{B}, B \neq 0$$

רציפות

הגדרה: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ אם מתקיים (x_0, y_0) בנקראת רציפה ב (x_0, y_0) אם מתקיים

אריתמטיקה של רציפות: אם f, g רציפות ב (x_0, y_0) , אז גם $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}, kf$ רציפות

ב (x_0, y_0) .

דוגמה להרכבה: $f(x, y) = \sin(x + y^2 x)$. היא רציפה בכל נקודה, כהרכבה של פונקציות

רציפות $f = g \circ h$ ו $g(x) = \sin x$, $h(x, y) = x + y^2 x$.

משפט: הרכבה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.

משמעות גאומטרית של רציפות בנקודה: אין במשטח חור, קיפול, או קרע בנקודה האמורה.

כלי להוכחת קיום גבול של $f(x, y)$:

משפט הסנדביץ: (וגרסותיו) נשארים נכונים גם עבור פונקציות בשני משתנים.

נניח ש $h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ בסביבת הנקודה (x_0, y_0) , ונניח שמתקיים

ש $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x) = L$ אזי גם $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x) = L$ קיים ושווה ל L .

גרסותיו -

$$\bullet \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} |f(x, y)| = 0 \text{ אם } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = 0$$

• מכפלה של פונקציה אפסה בפונקציה חסומה היא פונקציה אפסה.

בואו ונוכיח גבולות:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = \frac{1}{2} \text{ , מרציפות, חשבו את הגבול -}$$

$$\text{ועכשיו - } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ מתקיים } \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \cdot \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\text{נשים לב - } \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \text{ פונקציה חסומה, כי } x^2 + y^2 \geq x^2 \text{ מתקיים } 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \text{ . על כן}$$

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow_{(0,0)} 0 \text{ , ועל כן } 0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \cdot \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \rightarrow 0 \text{ , ומתנאי א' גם הפונקציה המקורית.}$$

בדקו את רציפות הפונקציה:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בכל נקודה $(x, y) \neq (0, 0)$ הפונקציה רציפה מאריתמטיקת רציפות (המכנה שונה מ-0). לגבי $(0, 0)$, ראינו שהגבול בנקודה $(0, 0)$ הוא 0, כמו הערך בנקודה.

עוד כלי להוכחת גבולות

ניתן לעיתים לחשב גבול ע"י מעבר לפונקציה של משתנה אחד.

$$\text{תרגיל: } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{x^2 + y^2}{2x^2 + 2y^2}\right) \text{ . נגדיר } t := x^2 + y^2 \text{ , ואז נקבל } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}$$

אינטואיציה – (שלא תמיד עובדת) - ב $(0, 0)$ אם הפונקציה היא מנה של פולינומים, אז אם מעלת המונה $<$ מעלת המכנה, קיים גבול. אחרת, לא קיים גבול.

$$\text{לדוגמא - } \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ - מעלת המונה היא 2, גם מעלת המכנה, ולא היה גבול.}$$

דוגמא מתי האינטואיציה לא עובדת - $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{y^2}$ - הגבול לא קיים. לאורך מסלול $y = x^2$ נקבל את הגבול 1. לאורך מסלול $y = x$ נקבל את 0. לכן אין גבול.

23.11.2006

ציטוט השיעור: 'פונקציה מוטלאת היא סוג של קומבינה'

נגזרת של פונקציה עם משתנה אחד

מוטיבציה פיזיקלית: נתובנן בחלקיק, ש $s(t)$ מייצג את מיקומו של חלקיק בזמן t .
מהי המהירות הממוצעת של החלקיק בקטע הזמן $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$ - הדרך שעבר חלקי הזמן.

לדוגמא, אם עברתי 200 ק"מ בשעתיים, אזי $\frac{200}{2} = 100$ היא המהירות הממוצעת שלי. אם נחזור

$$\text{לחלקיק, מדובר ב } \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

מהי מהירות רגעית בנקודה t ? היא גבול של מהירויות ממוצעות, כאשר קטעי הזמן $[t, t + \Delta t]$ הולכים וקטנים, כלומר

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

נשים לב שאם Δt שלילי, אז מדובר ב'הליכה אחורה' בזמן.

בואו ונגדיר נגזרת:

הגדרה: אם הגבול הבא קיים וסופי אזי הוא נקרא הנגזרת הימנית של $f(x)$ בנקודה x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

באופן דומה נגדיר נגזרת שמאלית:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

הגדרה: אם הגבול הבא קיים וסופי אזי הוא נקרא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0 ונסמן:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

הערה: $f'(x_0)$ קיימת אם $f'_+(x_0)$ ו $f'_-(x_0)$ קיימות ושוות.

סימונים שונים ל $f'(x_0)$:

$$\frac{d}{dx} f | x_0$$

$$\frac{df}{dx} | x_0$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} | x_0$$

$$f'_x(x_0)$$

הערה: $f'(x)$ הוא גם פונקציה של x (כמובן שיתכן שיש נקודות בהן $f(x)$ מוגדרת ו $f'(x)$ לא מוגדרת).

משמעות גאומטרית: $f'(x_0)$ הוא קצב השינוי של f בנקודה x_0 - השינוי בערך הפונקציה, חלקי השינוי ב x .

שאלת הבנה: אם $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ אזי בהכרח קיים לגרף $y = f(x)$ משיק בנקודה x_0 ושיפועו הוא $f'(x_0)$? כן.

שאלה: האם הביטויים הבאים מייצגים אותו דבר?

1. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ - גבול של שיפועי מיתרים ש'יוצאים ימינה'

2. $f'_+(x_0)$ - גבול של שיפועי משיקים מימין לנקודה $(x_0, f(x_0))$

לא - כי הנגזרת לא תמיד רציפה. קיום שיוויון גורר רציפות מימין של $f'(x)$ בנקודה x_0 .

הערה: באופן כללי לא תמיד $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

לדוגמא: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ אזי $f'(0) = 0$, אבל $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ לא קיים.

חישוב נגזרת לפי הגדרה:

דוגמא: $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}_{\rightarrow \cos x} = \cos x \end{aligned}$$

דוגמא נוספת: $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

נחלק ל3 מקרים:

א. $x > 0$ אזי $|x + \Delta x| = x + \Delta x$ (מותר לבחור $\Delta < x - 0$), ואז $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$

ב. $x < 0$ אזי $|x + \Delta x| = -x - \Delta x$ (כי אם $x < 0$, אזי עבור $|\Delta x|$ מספיק קטן

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-x - \Delta x - (-x)}{\Delta x} = -1 \text{ ואז } (x + \Delta x < 0)$$

ג. $x = 0$ - אין נגזרת, שכן $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ לא קיים, ונאמר שבנקודה $x = 0$ הפונקציה לא גזירה.

מושג הדיפרנציאביליות

'אני מזהירה מראש - זה יראה מראש מושג עמום, שכל מטרתו לסבך לכם את החיים'.

הגדרה: $f(x)$ נקראת דיפרנציאבילית ב $x = x_0$ אם קיימת $f'(x_0)$ וקיימת פונקציה α אפסה

$$\alpha(\Delta x) \rightarrow 0 \quad (\text{כלומר} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0) \quad \text{כך שמתקיים}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \Delta x\alpha(\Delta x)$$

טענה: $f(x)$ גזירה ב x_0 אם היא דיפרנציאבילית ב $x = x_0$.

הוכחה: דיפרנציאבילית $\Leftarrow$ גזירה - נתון.

גזירה $\Leftarrow$ דיפרנציאביליות - מניחים ש $f'(x_0)$ קיימת, לכן

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\text{נסמן: } \alpha(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0, \text{ ומתקיים מהגדרת } \alpha(\Delta x)$$

$$\Delta x\alpha(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - \Delta x f'(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \Delta x\alpha(\Delta x)$$

ועל כן $f(x)$ דיפרנציאבילית ב x_0 .

שימו לב ש $\Delta x\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ (כלומר - $\Delta x\alpha(\Delta x)$ - היא זניחה ביחס ל Δx) - כי

$$\frac{\Delta x\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

טענה: $f(x)$ גזירה ב x_0 $\Leftarrow$ רציפה ב x_0

הוכחה: $f(x)$ גזירה ב x_0 ולכן, $f(x + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0) + \Delta x\alpha(\Delta x)$. נתבונן

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x f'(x_0) + \Delta x\alpha(\Delta x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x)$$

הערה: כמובן שרציפות לא גוררת גזירות (ראה $|x|$).

27.11.2006

הודעות:

• הבחנים יהיו בשבועות 8,12 בזמן שיעור תרגול

• אין שעות קבלה גם השבוע

נגזרות – סיכום ביניים.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{הגדרת הנגזרת:}$$

נגזרת היא גבול של שיפועי מיתרים שיוצאים מהנקודה $(x_0, f(x_0))$ לכיוון ימין ושמאל.

$f'(x_0)$ (אם קיימת) היא שיפוע המשיק לגרף בנקודה $(x_0, f(x_0))$.

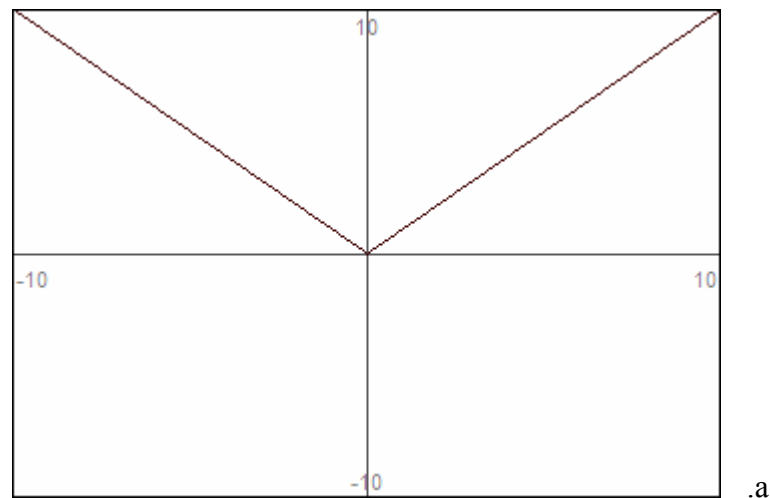
$$f'(x_0) \text{ קיימת אם } \alpha(\Delta x) \text{ אפסה ב } \Delta x = 0 \text{ כך שמתקיים}$$
$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \underbrace{\Delta x \alpha(\Delta x)}_{=o(\Delta x)}$$

הראנו שגזירות $\Leftarrow$ רציפות, אבל לא להפך.

אי קיום נגזרת בנקודה x_0

יכול לקרות אם

1. ב x_0 יש נקודת חוד או קרע



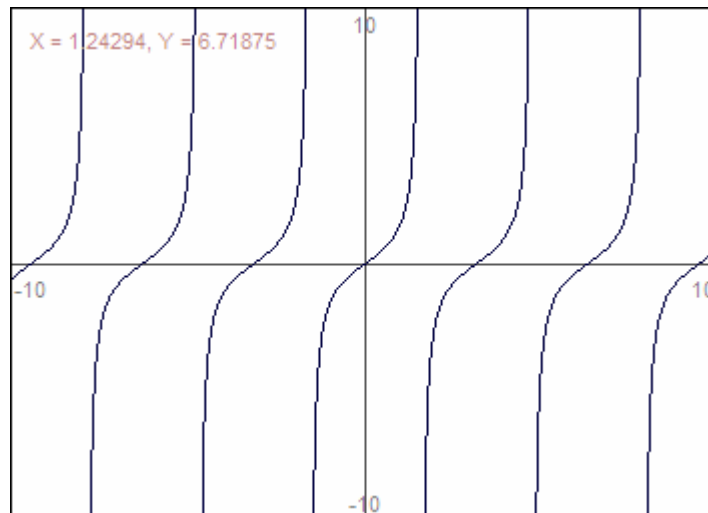
2. המשיק לגרף בנקודה $(x_0, f(x_0))$ הוא אנכי.

נשים לב: למרות שערך שונה בנקודה x_0 לא ישפיע על הגבול, הוא כן משפיע על נגזרת, שעבורה יש משמעות לערך בנקודה עצמה.

נשים לב 2: נגזרת מוגדרת כמספר ממשי. לא ניתן להגיד שהנגזרת היא $\pm\infty$.

משפט: פונקציות אלמנטריות ($\sin, \cos, \log, \exp, \arcsin, \arccos, \dots$) הן גזירות בתחום הגדרתן.

דוגמא: $f(x) = \tan x$ גזירה בכל נקודה $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$



טבלת נגזרות של פונקציות אלמנטריות – את זה צריך לזכור בע"פ...

$$a' = 0, a \in \mathbb{R}$$

$$(x^a)' = axa^{a-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, a \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

כללי גזירה

משפט: אם $f(x), g(x)$ גזירות בנקודה x_0 , אז גם $cf, f-g, f+g, f \cdot g, \frac{f}{g} g \neq 0$

גזירות ב x_0 ומתקיים :

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

נגזרת של הרכבת פונקציות

כלל השרשרת: אם $g(x)$ גזירה בנקודה x , ו f גזירה בנקודה $g(x)$, אז ההרכבה

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \text{גזירה בנקודה } x \text{ ומתקיים } [f(g(x))]'_x = f'_g(g(x)) \cdot g'_x(x)$$

צורת רישום אחרת - נסמן $u = g(x)$, $y = f(g(x))$, ואז כלל השרשרת אומר -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{internal derivative}}$$

דוגמא:

$$\sqrt[3]{\underbrace{x^2+1}_{=u}} = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' \cdot x = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2+1}{1-tgx}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^2+1}{1-tgx}\right)' =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{x^2+1}{1-tgx}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2x(1-tgx) - \frac{1}{\cos^2 x}(x^2+1)}{(1-tgx)^2}\right)$$

תרגיל - חשב את $(x^x)'$.

פתרון: עבור $x > 0$

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = \ln a^b = b \ln a \left(e^{\overbrace{x \ln x}^{u=}} \right)' = e^u = e^{u(x)} \underbrace{e^{x \ln x}}_{=x^x} (x \ln x)' =$$

$$x^x \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = x^x (1 + \ln x)$$

הערה: בשיטה זו משתמשים לחישוב נגזרות של פונקציות מהצורה $f(x)^{g(x)}$, שכן:

$$(f(x)^{g(x)})' = e^{\ln(f(x)^{g(x)})}' = (e^{g(x) \ln f(x)})'$$

המעבר הראשון מותר, שכן כל החזקה לא מוגדרת אם $f(x) > 0$.

$$\text{עוד דוגמא: } (\sin x^{tgx})' = (e^{tgx \ln \sin x})' = \sin x^{tgx} (tgx \ln \sin x)'$$

קירוב לינארי

הישר המשיק לגרף של פונקציה $f(x)$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$ עובר דרך הנקודה $(x_0, f(x_0))$, ושיפועו הוא $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

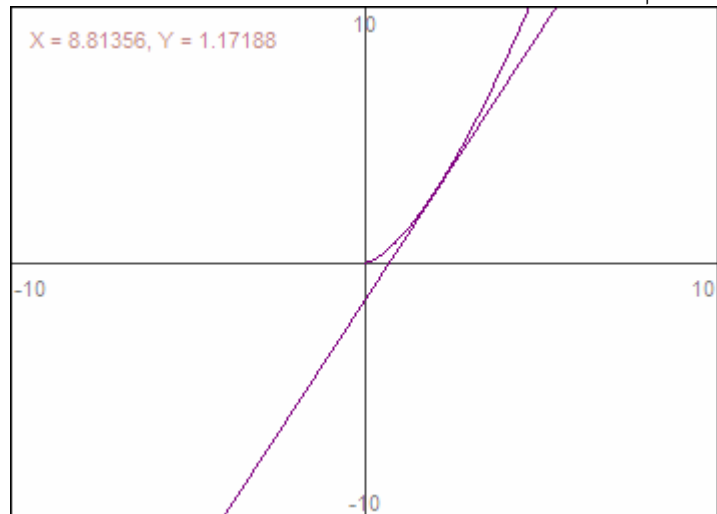
$$y(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \quad \text{משוואת המשיק}$$

נסמן: $x = x_0 + \Delta x$ ואזי משוואת המשיק היא $y(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0)$.

ניזכר כי $f(x)$ גזירה ב x_0 אם $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + o(\Delta x)$.

$$f(x_0 + \Delta x) \approx_{\text{almost equals when } \Delta x \text{ is small}} y(x_0 + \Delta x) \quad \text{משמעות (גאומטרית):}$$

כלומר – הערך שמתאים ל $x_0 + \Delta x$ על $f(x)$ הוא בקירוב הערך שמתאים ל $x_0 + \Delta x$ על הישר המשיק.



נוסחת הקירוב הלינארי

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0)$$

$\approx$ - קירוב לינארי בסעיף זה.

תרגיל: מצאו קירוב לינארי ל $\sqrt{4.1}$. נגדיר $f(x) = \sqrt{x}$, וניקח את $x_0 = 4$. $\Delta x = 0.1$. נזכור כי

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0)$$

$$f(4 + 0.1) \approx f(4) + 0.1 f'(4) = 2 + 0.1 \frac{1}{4} = 2.025$$

נשים לב שבמחשבון זה יוצא 2.0248 - ככה שיצא לנו קירוב לא רע בכלל.

דיפרנציאל

$f(x)$ גזירה ב x_0 אם $\underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} = \underbrace{\Delta x f'(x_0)}_{df} + o(\Delta x)$. Δf היא התוספת

השלמה, כלומר - בכמה זזה הפונקציה על ציר y כשזזנו Δx על ציר x .
 df הוא הדיפרנציאל - כשזזנו Δx על ציר x , בכמה זו המשיק.

$$\frac{df}{\Delta x} = \tan \alpha = f'(x_0)$$

$$df = \Delta x f'(x_0)$$

סימון: $\Delta x = dx$

$$df = f'(x_0) dx$$

עבור נקודה x כלשהי $df = f'(x) dx$

ועל כן, הסימון המקובל יהיה: $dy = f'(x) dx$

נשים לב, אם רשום $(\sin x)' = \cos x \Leftrightarrow d \sin u = \cos u du$

$$dy = y'(u) du$$

אפשר גם לקרוא זאת כך: $\frac{d}{du} \sin u = \cos u$

30.11.2006

ציטוט השיעור: 'לא תמיד המצוי הוא גם הרצוי'

'אותי לא מטריד להיות יותר מדי פסימית, מטריד אותי להיות יותר מדי אופטימית'.

דיפרנציאביליות

$$f(x) \text{ דיפרנציאבילית ב- } x_0 \text{ אם } f'(x_0) \text{ קיימת ואם קיימת פונקציה אפסה } \alpha(\Delta x) \text{ כך}$$

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} = \underbrace{\Delta x f'(x_0)}_{df} + \underbrace{\Delta x \alpha(\Delta x)}_{o(\Delta x)}$$

בבעיות מעשיות אנו יודעים $f(x_0)$, $f'(x_0)$. אנו רוצים לדעת את $f(x_0, \Delta x)$.

כלומר - df מצוי, Δf רצוי.

תרגיל: רוצים לחשב שטח של עיגול ולשם כך מודדים את הרדיוס שלו. תוצאות המדידה - $r = 10_{\text{meter}}$. נניח שהטעות המקסימלית במדידה היא 5_{cm} . הערכו את הטעות המקסימלית בערך של השטח אם מחשבים אותו לפי הנוסחה $S = \pi r^2$.

פתרון:

$$\Delta s = \underbrace{S(r + \Delta r)}_{\text{measured value}} - \underbrace{S(r)}_{\text{real value}} \approx ds = s'(r) dr$$

א. **בעזרת דיפרנציאל.** השגיאה היא . טעות

$$= 2\pi r dr = 2\pi \cdot 10 \cdot 0.05 = \sim 3.142 m^2$$

של 5 ס"מ במדידת r יכולה להוביל בערך לטעות מקסימלית של $3.142 m^2$ בחישוב השטח. למה 'בערך'? בגלל ה $\approx$ המסומן בחץ.

$$\text{השגיאה היחסית המקורבת לשטח שחישבנו היא } \frac{ds}{s} = \frac{3.142}{\pi 10^2} = \frac{1}{100}$$

של 1%, כלומר שגיאה של $0.005 = \frac{0.05}{10} - \frac{1}{2}\%$ במדידת r , מובילה לשגיאה (מקורבת) מקסימלית של 1% בחישוב השטח.

ב. **פתרון ללא דיפרנציאל:**

$$\Delta s(r + dr) - s(r) = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2rdr + (dr)^2) - \pi r^2 =$$

$$2\pi r dr + \underbrace{\pi(dr)^2}_{=o(dr)} = 2\pi \cdot 10 \cdot 0.05 + \underbrace{\pi \cdot (0.05)^2}_{0.00785} = \sim 3.149$$

$$\frac{3.149}{\pi \cdot 10^2} = 0.01002 = 1.002\% \text{ יחסית לתוצאה}$$

כלומר, ההערכה שנתנו בעזרת דיפרנציאלים לשגיאה המקסימלית בחישוב השטח היתה אופטימית יחסית לשגיאה באמת, אבל מדויקת עד כדי שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

יישומים למשוואות משיק

תזכורת: משוואות המשיק לגרף הפונקציה $(y = f(x))$ בנקודה $x = x_0$

$$y(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

תרגיל: מצאו את משוואת המשיק לאליפסה $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2$ בנקודה $(2, -3)$. (אליפסה עומדת).

$$\text{(הערה: הנקודה } (2, -3) \text{ אכן נמצאת על האליפסה - } \frac{2^2}{4} + \frac{(-3)^2}{9} = 2 \text{)}$$

פתרון א': נרשום את משוואת הישר לפי שיפועו ונקודה עליו. נקודה $(2, -3)$. אבל איפה נמצא שיפוע? צריך נגזרת. אבל זה לא פונקציה. אז נפרק את זה לשתי פונקציות ☺

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 \quad \text{זה לא פונקציה, אבל:}$$

$$\frac{y^2}{9} = 2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow y = \pm 3\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$$

באופן כללי, המשוואה מתארת יותר מאשר פונקציה אחת. נבחר את הרלוונטית -

$$y(x) = -3\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}$$

שיפוע המשיק בנקודה $y'(2)$.

$$y'(x) = -3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}} \cdot \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)' = \frac{-3}{2\sqrt{2 - \frac{x^2}{4}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)$$

$$\text{נציב } 2, \text{ ונקבל - } \frac{-3}{2} \cdot (-1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{על כן, משוואת הישר דרך } (2, -3) \text{ עם שיפוע } \frac{3}{2} \text{ היא } \frac{y - (-3)}{x - 2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 6$$

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 2$$

אפשר גם להציב בנוסחת המשיק -

$$y(x) = -3 + \frac{3}{2}(x - 2)$$

פתרון ב' אפשר לחשב את שיפוע המשיק בנקודה $(2, -3)$ היא ע"י

$$\text{לקיחת משוואת העקומה } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 \text{ . נגזור את שני האגפים לפי } x, \text{ אבל ניקח בחשבון ש } y \text{ הוא}$$

פונקציה של x .

$$\frac{2x}{4} + \frac{2y \cdot y'(x)}{9} = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{9}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{9}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{2y}{9}}_{\frac{2y}{9} \cdot y'(x)} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ - את } \frac{y^2}{9} \text{ אנחנו גוזרים לפי כלל השרשרת -}$$

$$y'(x) = -\frac{x}{2} \cdot \frac{9}{2y(x)}$$

$$y'(2) = -\frac{2}{2} \cdot \frac{9}{2 \cdot (-3)} = \frac{3}{2}$$

בנקודה $(2, -3)$.

בנקודה $(2, 3)$, היינו מגיעים לאותו דבר בדיוק, רק בשלב האחרון היינו מציבים 3 במקום (-3) ,

ומקבלים שיפוע של $-\frac{3}{2}$.

כלל לופיטל

זהו כלל שימושי לחישוב גבולות.

$\lim$ יכול להיות כאן $a, a^-, a^+, \pm\infty$

משפט 1:

נניח ש $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$. אם לגבול $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ יש ערך סופי L , או אם גבול זה הוא

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{אז } \pm\infty$$

הכיוון השני – לא נכון.

ניסוח במילים – קיום הגבול $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ גורר קיום הגבול $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ וקיום שיוויון ביניהם. כל זה –

$$\frac{0}{0}.$$

רק באי ודאות מהצורה

משפט 2: משפט 1 נכון אם מחליפים את ההנחה $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ ל

$$\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$$

שאלה: $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$. האם אפשר לחשב באמצעות לופיטל? כן, פשוט נעבוד

$$\text{על } -\lim \frac{f(x)}{-g(x)}.$$

לסיכום [ביניים]: כלל לופיטל נותן כלי עזר לחישוב גבולות עם אי ודאות מהצורה

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}$$

נשים לב:

דוגמאות:

$$a > 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xa^x}{a^x - 1} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + xa^x \ln a}{a^x \ln a} = \frac{1}{\ln a} . \&$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{e^{3x} - 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{2 \sin 5x \cos 5x}^{\rightarrow 0} \cdot 5}{\underbrace{3e^{3x} - 3}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin(10x)}{3e^{3x} - 3} = \text{ב.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos(10x) \cdot 10}{3e^{3x} \cdot 9} = \frac{50}{9}$$

ג. שיטה לחישוב גבולות עם אי ודאות מהצורה 0^0 , ∞^0 , 0^∞ בעזרת כלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{a=e^{\ln a}} e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{*:=}} = e^0 = 1$$

כעת ננסה לחשב את * - אבל הוא אי ודאות מהצורה $0 \cdot \infty$, אז מה נעשה?! - הכפלה ב x שקולה

לחילוק ב $\frac{1}{x}$, ואז מגיעים לאי ודאות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$

$$* = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

4.12.2006

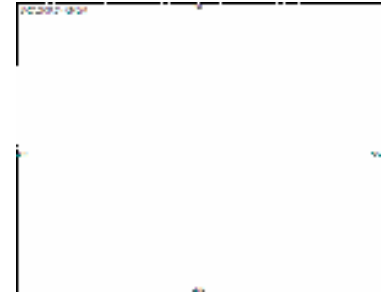
ציטוט השיעור: חגית לסט: 'זוכרים את הפונקציה הזו?'
סטודנט אנונימי: 'ברור! זה מונגולואיד היפרבולי'

המשך דוגמאות לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} \stackrel{Lupital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = Non \ Exist$$

איך ננמק את העובדה שאין גבול? המכנה מתאפס עבור $x = 2\pi k$, ועבורו הגבול לא קיים. איך נראה

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$



נשים לב טוב טוב טוב: זה לא אומר שאין גבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$ - אם לופיטל לא נותן תשובה, זה לא

אומר שאין גבול.

$$\text{כעת, נחשב את } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = 1$$

אמנם $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = 1$ אבל $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ כמובן, ולכן הגבול המקורי הוא 1.
(* הוצאת גורם דומיננטי כגורם משותף)

תרגילון: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$ לכל $k > 0$ (אפילו $k < 1$)

נגזרות חלקיות

הערה: רלוונטי לפונקציות עם שני משתנים או יותר.

הגדרה: תהי $f(x, y)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של (x_0, y_0) . אם קיים הגבול הבא והוא סופי אז הוא נקרא הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה x :

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

משמעות: מתקרבים אינפיניטסימלית על גבי ציר x , כשמקבעים את ציר y . כלומר, קצב שינוי הפונקציה בכיוון ציר x .

משמעות גאומטרית: שיפוע המשיק לעקומה על ציר x .

נניח כי $z = f(x, y)$ משטח, $y = y_0$ מישור, אז חיתוכם הוא עקומה במרחב $p(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ מונחת על העקומה הזו. שיפוע המשיק לעקומה זו בנקודה p הוא $f'_x(x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} | (x_0, y_0) \quad \textbf{סימונים:}$$

$$f'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad \text{באופן דומה נגדיר}$$

שימו לב: $f'_x(x_0, y_0)$ היא פונקציה של x ושל y .

שיטת החישוב של נגזרת חלקית

על מנת לחשב את $\frac{\partial f}{\partial x}$ יש להתייחס אל y כאל קבוע ולגזור את f לפי המשתנה x בלבד (לפי הכללים הרגילים):

$$f(x, y) = x^y + \ln(x^2 y) \quad \textbf{דוגמא:}$$

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1} + \frac{1}{x^2 y} \cdot 2xy$$

$$f'_y(x, y) = x^y \ln x + \frac{1}{x^2 y} \cdot x^2$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \textbf{תרגיל:} \text{ חשבו נגזרות חלקיות } f'_x, f'_y \text{ של הפונקציה}$$

$$f'(x) \text{ בכל נקודה } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} \right) = \frac{3x^2(2x^2 + y^2) - 4x(x^3 + y^3)}{(2x^2 + y^2)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ - חייבים לחשב לפי הגדרה. אי אפשר פשוט להגיד שזה 0...
על כן

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^3}{2(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 1$$

(ראינו כי הנגזרות החלקיות כאן שונות אחת מהשניה...)

תזכורת: עבור פונקציה במשתנה אחד, מתקיים - $f(x)$ גזירה ב $x_0 \Leftarrow f(x)$ רציפה ב x_0 . זה לא קורה בשני משתנים.

טענה: (עבור פונקציות בשני משתנים) - קיום $f'_y(x_0, y_0), f'_x(x_0, y_0)$ לא גורר רציפות ב (x_0, y_0) .

דוגמא: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ (ניזכר שהראינו שהיא לא רציפה ב $(0,0)$ כי

לאורך ישר מהצורה $y = kx$ מקבלים ערכי גבול שונים).

אבל $0 = f'_y(0,0) = f'_x(0,0)$: שכן :

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\Delta x \cdot 0}{(\Delta x^2) + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

באותו אופן נחשב את f'_y .

נגזרות חלקיות מסדר גבוה

נזכור כי $f'_x(x, y)$ היא פונקציה של x, y , ולכן אולי אפשר להגדיר $\frac{\partial}{\partial x}(f'_x(x, y))$, וגם

$$\frac{\partial}{\partial y}(f'_x(x, y))$$

כל אלו - $\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right), \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right), \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right), \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$ נקראות נגזרות מסדר שני.

סימונים (מבלבלים):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}'' = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}'' \left[= (f_x')_y \right]$$

$$f_{xyyx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \text{ תרגיל בקריאת סימונים – מה המשמעות:}$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y) \text{ - חשבי נגזרות חלקיות מעורבות מסדר שני}$$

$$f_x = \frac{1}{x^2 + y} \cdot 2x$$

$$f_y = \frac{1}{x^2 + y}$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{(x^2 + y)^2} \cdot 2x$$

$$f_{yx} = \frac{2}{2x} \left(\frac{1}{x^2 + y} \right) = -\frac{1}{(x^2 + y)^2} \cdot 2x$$

כאן קיבלנו $f_{xy} = f_{yx}$. זה מוביל ל**משפט שוורץ**:

משפט שוורץ: תהי $f(x, y)$ מוגדרת בסביבת הנקודה (x_0, y_0) ובעלת חלקיות f_{xy}, f_{yx}

רציפות בסביבת הנקודה (x_0, y_0) , אזי הן שוות - $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

7.12.2006

תזכורת: עבור פונקציה $f(x)$ דיפרנציאבילית אדם $f'(x_0)$ וקיימת פונקציה אפסה $\alpha(\Delta x)$ ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$) כך ש $f(x + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \Delta x \alpha(\Delta x)$

דיפרנציאביליות של פונקציה בשני משתנים - $f(x, y)$

הגדרה: $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $p(x_0, y_0)$ אם קיימות f'_x, f'_y בנקודה p וקיימות פונקציות אפסות $\alpha_1(\Delta x, \Delta y), \alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ (כלומר $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \alpha_i(\Delta x, \Delta y) = 0$) כך ש

$$\overbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}^{\Delta f} = \Delta x f'_x(x_0, y_0) + \Delta y f'_y(x_0, y_0) + \Delta x \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + \Delta y \alpha_2(\Delta x, \Delta y)$$

על כן, ברישום מרושל של דיפרנציאביליות, נאמר:

$$\Delta f = \Delta x f'_x + \Delta y f'_y + \Delta x \alpha_1 + \Delta y \alpha_2$$

(לעומת רישום מרושל דיפרנציאביליות במשתנה 1: $\Delta f = \Delta x f'_x + \Delta x \alpha$).

אפשר גם לרשום:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta x f'_x + \Delta y f'_y + \Delta x \alpha_1 + \Delta y \alpha_2$$

(בהקבלה ל $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'_x + \Delta x \alpha$).

כלומר, אם $z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + \Delta x f'_x + \Delta y f'_y$ אזי זוהי משוואה של מישור משיק לגרף $z = f(x, y)$ בנקודה x_0, y_0 .

נזכור, כי במשתנה 1, הדיפרנציאל היה $df = f'_x(x_0) dx$. כאן,

$$df = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy$$

בשני המקרים, אם f דיפרנציאבילית, אזי $\Delta f \approx df$.

משמעות גיאומטרית של דיפרנציאביליות

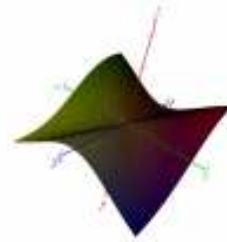
$f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) אדם קיים למשטח $z = f(x, y)$ מישור משיק בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות: אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) אז $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ קיימות (נובע ישירות מההגדרה).

$$f'_x, f'_y \cdot f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

דוגמא לכך שזהו תנאי הכרחי, אך לא מספיק:

קיימות, אבל אין מישור משיק ב $(0, 0)$ ולכן היא לא דיפרנציאבילית. (כך היא נראית:)



משפט: דיפרנציאביליות בנקודה $\Leftarrow$ רציפות באותה נקודה.
(הערה – הראנו כי קיום f'_x, f'_y לא גורר רציפות).

הוכחה: נראה כי $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = 0$

דיפרנציאבילית, לכן f דיפרנציאבילית, לכן $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \left[\underbrace{f'_x \Delta x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{f'_y \Delta y}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\Delta x \alpha_1}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\Delta y \alpha_2}_{\rightarrow 0} \right] = 0$
הראנו ש $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \Delta f = 0$, ולכן היא רציפה.

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות

אם f'_x, f'_y קיימות בסביבת (x_0, y_0) , ורציפות ב (x_0, y_0) אז $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0)

סיכום – קשר בין דיפרנציאביליות לרציפות

דיפרנציאביליות $\Leftarrow$ רציפות.
רציפות לא גוררת דיפרנציאביליות

דיפרנציאביליות $\Leftarrow$ קיום f'_x, f'_y
קיום f'_x, f'_y לא גורר דיפרנציאביליות.

f'_x, f'_y קיימות ורציפות $\Leftarrow$ דיפרנציאביליות
דיפרנציאביליות לא גוררת את רציפות f'_x, f'_y .

שאלה: האם הפונקציה הבאה היא דיפרנציאבילית?

$$f(x, y) = e^{-y} \cos x$$

כן, כי f'_x, f'_y קיימות ורציפות בכל המישור.

$$f'_x(x, y) = e^{-y} \sin x$$

$$f'_y(x, y) = -e^{-y} \cos x$$

נוסחת הקירוב הלינארי

אומרת בעצם כי $\Delta f \approx df$

הקירוב הוא 'טוב' כאשר $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) ו $\Delta x, \Delta y$ קטנים.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

(אפשר להקביל לקירוב לינארי למשתנה אחד: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$).

תרגיל: נתונה $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. מצאו קירוב לינארי ל $f(3.04, 3.98)$.
נשתמש בנוסחת הקירוב הלינארי – מותר, מאחר והנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בסביבת $(3, 4)$.

(למה? $f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x$ מנה של פו' רציפות ובנוסף מכנה $0 \neq$).

$$(x_0, y_0) = (3, 4)$$

$$\Delta x = 0.04$$

$$\Delta y = -0.02$$

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f'_x(3, 4) = \frac{3}{5}, f'_y(3, 4) = \frac{4}{5}$$

$$\Delta f \approx df = f'_x(3, 4)\Delta x + f'_y(3, 4)\Delta y =$$

$$\frac{3}{5} \cdot 0.04 - \frac{4}{5} \cdot 0.02 = 0.008$$

$$\Delta f = f\left(\underbrace{x_0 + \Delta x}_{3.04}, \underbrace{y_0 + \Delta y}_{3.98}\right) - f\left(\underbrace{x_0, y_0}_{3, 4}\right) \Leftrightarrow$$

$$f(3.04, 3.98) \approx f(3, 4) + \Delta f = 5 + 0.008 = 5.008$$

המחשבון נותן לנו 5.0081932. די טוב.

11.12.2006

נוסחת הקירוב הלינארי

$$\Delta f \approx df$$

כלומר:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ו $\Delta x, \Delta y$ קטנים אז הקירוב 'טוב'.

תרגיל:

נמקו את הקירוב הבא עבור (x, y) בסביבת $(0, 0)$:

$$e^x \ln(1+y) \approx y$$

נגדיר $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$. f דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$ (כי הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות ב $(0, 0)$).

$$f'_x(x, y) = e^x \ln(1+y)$$

$$f'_y = \frac{e^x}{1+y}$$

$$\Delta f \approx df = d'_x(0, 0) \Delta x + f'_y(0, 0) \Delta y =$$

על כן

$$0 + 1 \cdot \Delta y = \Delta y$$

לכן, $e^{\Delta x} \ln(1 + \Delta y) \approx \Delta y$ כאשר $\Delta x, \Delta y$ קטנים.

תרגיל 3 משתנים:

x, y, z נמדדו באופן ניסויי:

$$x = 7 \pm 0.01$$

$$y = 4 \pm 0.02$$

$$z = 3 \pm 0.03$$

לפנינו נוסחה: $w = \frac{x^2 y}{z}$. רוצים להעריך את השגיאה המקסימלית בחישוב w לפי הנוסחה.

$$\Delta w \approx w'_x(7, 4, 3) \Delta x + w'_y(7, 4, 3) \Delta y + w'_z(7, 4, 3) \Delta z$$

$$w'_x(7, 4, 3) = \frac{2xy}{z} \Big|_{(7, 4, 3)} = 18.67$$

$$w'_y(7, 4, 3) = \frac{x^2}{z} \Big|_{(7, 4, 3)} = 16.33$$

$$w'_z(7, 4, 3) = \frac{-x^2 y}{z^2} \Big|_{(7, 4, 3)} = -21 \frac{7}{9}$$

ועל כן

$$|\Delta w| \approx |dw| \leq |w'_x(7, 4, 3) \Delta x| + |w'_y(7, 4, 3) \Delta y| + |w'_z(7, 4, 3) \Delta z| =$$

$$18.67 \cdot 0.01 + 16.33 \cdot 0.02 + 21 \frac{7}{9} \cdot 0.03 = 1.15$$

כללי שרשרת

(תזכורת – עבור פו' במשתנה אחד:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \quad \text{עבור } y = y(t), t = t(x) \text{ לכן } y \text{ פו' של } x, \text{ ו}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\cos x^2}_{\frac{dy}{dt}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{aka} \\ \text{internal} \\ \text{derivative}} \frac{dt}{dx}} \quad \text{לדוגמא: } y(x) = \sin x^2, \text{ אזי } y = \sin t, t = x^2 \text{ אזי}$$

משפט: (כלל שרשרת 1) אם $x = x(t)$, $y = y(t)$ פו' גזירות בז, $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(x(t), y(t))$ אזי $z = f(x(t), y(t))$ (z פו' של t) ומתקיים גזירה בז ומתקיים

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

דוגמא: $z = (x, y) = x^2 y$, $x = t^2$, $y = t^3$ אזי $z(x(t), y(t)) = (t^2)^2 t^3 = t^7$

נבדוק את המשפט על הדוגמא. נחשב אופן ישיר $\frac{dz}{dt} = 7t^6$. כעת נשתמש בכלל השרשרת,

ונראה מה נקבל:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \underbrace{2xy}_{\frac{\partial z}{\partial x}} \cdot \underbrace{2t}_{\frac{dx}{dt}} + \underbrace{x^2}_{\frac{\partial z}{\partial y}} \cdot \underbrace{3t^2}_{\frac{dy}{dt}} = 2t^2 t^3 \cdot 2t + (t^2)^2 \cdot 3t^2 = 7t^6$$

כמה נפלא - קיבלנו אותו דבר.

משפט: (כלל שרשרת 2) אם ל $x(u, v)$, $y(u, v)$ יש נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנק' (u, v) ואם $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(x(u, v), y(u, v))$ אז ל $z = f(x(u, v), y(u, v))$ יש נגזרות חלקיות מסדר ראשון ב (u, v) ומתקיים:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{\text{internal derivative}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{\text{internal derivative}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

תרגילים: הוכיחו שהפונקציות הבאות מקיימות את המשוואה:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$f_1(x, y) = \sin(x + y) + (x - y)^2$$

$$f_2(x, y) = \arctg(x + y) + \ln^2[(x - y)^2] + \frac{1}{4}(x - y)$$

טענה: אם $f(x, y) = g(x + y) + h(x - y)$ כאשר g, h פונקציות של

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

משתנה אחד גזירות פעמיים, אזי מתקיים

הערה: עבור $f_1(x, y) = g_1(x + y) + h_1(x - y)$, אזי

אזי $g_1(t) = \sin t, h_1(t) = t^2$ עבור

$$g_2(t) = \arctg(t), h_2(t) = \ln^2(t^2) + \frac{1}{4}t$$

(סיום הערה)

כעת, נסמן $u = x + y$ ועל כן $v = x - y$, אזי $f(x, y) = g(u) + h(v)$

$$f(x(u, v), y(u, v)) = g(u) + h(v)$$

על כן:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} g + \frac{\partial}{\partial x} h = \frac{\partial g}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = g'_u + h'_v$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (g'_u + h'_v) = \frac{\partial}{\partial x} g'_u + \frac{\partial}{\partial x} h'_v = \frac{\partial}{\partial u} g'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} h'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$g''_{uu} \cdot 1 + h''_{vv} \cdot 1 = g''_{uu} + h''_{vv}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} g + \frac{\partial}{\partial y} h = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$g'_u \cdot 1 + h'_v \cdot (-1) = g'_u - h'_v$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} g'_u - \frac{\partial}{\partial y} h'_v = \frac{\partial}{\partial u} g'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial v} h'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = g''_{uu} + h''_{vv}$$

\

לכן מתקיים כי $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (יש שיוויון בין שני האגפים) (זה נקרא גם 'משוואת הגלים')

נגזרות של פונקציות סתומות

פונ' סתומה במשתנה אחד.

הגדרה: תהי $f(x, y)$ ויהי E המלבן $E = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

נאמר שהמשוואה $f(x, y) = 0$ מתארת את y כפונקציה סתומה של x ב E אם לכל $x \in [a, b]$ קיים y יחיד כך ש $f(x, y) = 0$.

באופן כללי, אם $f(x, y) = 0$, כאשר f רציפה, אזי היא מתארת עקומה במישור. לדוגמא:
 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ מתאר מעגל ברדיוס 5 על ראשית הצירים. $f = 0$ לא מתארת את y כפונ' סתומה של x .

$f(x, y) = 2x + 4y - z = 0$ המשוואה מתארת את y כפונ' סתומה של x כי לכל ערך של x מתאים ערך יחיד של y .

$$4y = 2 - 2x$$

$$y = \frac{1 - x}{2}$$

כאן y הוא פונ' מפורשת של x , ואין צורך בהגדרת הפונ' הסתומה.

$$\text{דוגמא נוספת: } f(x, y) = y + \frac{1}{2} \sin y - x = 0$$

טענה: המשוואה הזו מתארת את y כפונ' סתומה של x לכל x . אבל, אי אפשר לחלץ את y מהמשוואה. צריך להראות שלכל ערך של x מתאים y יחיד. (לכן $y(x)$ היא פונקציה).

$$x = y + \frac{1}{2} \sin y$$

x הוא פונקציה של y . שנראה ש $x(y)$ חז"ע (ז"א, לכל x בטווח מתאים y יחיד בתחום). אפשר להראות שהיא חז"ע, מאחר ו x מונוטונית עולה ממש – נראה ש $x'(y) > 0$. (אם $f'(x) > 0$ בקטע (a, b) אז f פונ' מונוטונית עולה ב (a, b)).

$$x'(y) = 1 + \frac{1}{2} \cos y > 0 \quad \text{ועל כן הנ"ל מתקיים. בסיכום, המשוואה } y + \frac{1}{2} \sin y - x = 0$$

מגדירה את y כפונ' סתומה של x .

1. אם $f(x, y)$ רציפה אז המשוואה $f(x, y) = 0$ מתארת עקומה במישור.
2. אם $f(x, y, z)$ רציפה אז המשוואה $f(x, y, z) = 0$ מתארת משטח במרחב.

יתכן ש $f(x, y) = 0$ מגדירה את y כפונקציה סתומה של x בסביבה של נקודה (x_0, y_0) . **מתי היא לא תגדיר?** כאשר אי אפשר לחסום את הנקודה x_0, y_0 במלבן, בו לא קיים ערך של x שמתאימים לו שני ערכי y .

נשים לב, שיתכן שהמשוואה $f(x, y, z) = 0$ מגדירה את z כפונקציה סתומה של (x, y) בסביבה של (x_0, y_0, z_0) , ויתכן שלא.

הערה: משפט הפונקציה הסתומה נותן קריטריון שלפיו אפשר לקבוע האם המשוואה $f(x, y, z) = 0$ מגדירה את z כפונקציה סתומה של x, y בנקודה מסויימת (x_0, y_0, z_0) . אנו לא ננסח אותו.

דוגמא: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$. מדובר במעגל ברדיוס 5 סביב הראשית. הנקודה $(3, 4)$ נמצאת על המעגל (בודקים ע"י הצבה). המשוואה הנ"ל מתארת את y כפונקציה סתומה של x בסביבת הנק' $(3, 4)$. הדבר נכון גם לגבי $(3, -4)$. למרות שאנו לא יודעים לחלץ את y כמשוואה של x , אנו יכולים לדעת את הנגזרת, ע"י גזירה סתומה.

תרגיל: חשבו את $y'(x)$ בנקודה $(3, 4)$ ובנקודה $(3, -4)$.

נשים לב, כי $y'(x)$ הוא פונקציה של x ושל $y(x)$.

$$x^2 + y^2 - 25 = 0$$

$y(x)$ הוא פונ' של x . נגזור את שני האגפים לפי x , ונקבל:

$$2x + 2yy'(x) = 0$$

(את y^2 גוזרים לפי כלל השרשרת).

$$y'_x(3, 4) = \frac{-3}{4} \quad \text{ומקבלים } y'_x = \frac{-x}{y} \quad \text{על כן}$$

$$y'_x(3, -4) = \frac{3}{4}$$

תרגיל: המשוואה $f(x, y, z) = y^3 + xz + y^2 + e^z - 3 = 0$ מתארת את z כפונ' סתומה של

(x, y) . חשבו את z'_x, z'_y ואת z''_{xy} .

$$y^3 + xz + y^2 + e^z - 3 = 0$$

נחשב את z'_x ע"י גזירה ע"פ x של שני האגפים. (הנחיות כלליות: x, y בלתי תלויים, z תלוי בשניהם).

$$z'_x = \underbrace{(y^3)'}_{=0} + \underbrace{(xz)'}_{=xz'_x} + \underbrace{(y^2)'}_{=0} + \underbrace{(e^z)'}_{=e^z z'(x)} - \underbrace{(3)'}_0 =$$

$$z'_x (x + e^z) = -z$$

$$z'_x = \frac{-z}{x + e^z}$$

נשים לב כי z'_x הוא פונקציה של (x, y, z) . לא מספיק לדעת את x, y , צריך את z . כעת, נחשב את z'_y (x, y לא תלויים, z תלוי בשניהם)

$$y^3 + xz + y^2 + e^z - 3 = 0$$

$$3y^2 + xz'_y + 2y + e^z z'_y = 0$$

$$z'_y (x + e^z) = -3y^2 - 2y$$

$$z'_y = \frac{-3y^2 - 2y}{x + e^z}$$

כעת, נחשב את z''_{xy} . ניקח את z'_x ונגזור אותו לפי y .

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (z'_x) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-z}{x + e^z} \right) = \frac{-z'_y (x + e^z) - (e^z \cdot z'_y)(-z)}{(x + e^z)^2}$$

כעת, נציב את z'_y , ונקבל את z''_{xy} כפונקציה של (x, y, z) .

הערה: אם אנו מתעניינים בנקודה ספציפית (לדוגמא, $x=0, y=0$), אז צריך למצוא את z המתאים. נציב $x=0, y=0$ במשוואה המקורית.

$$0^3 + 0 \cdot z + 0^2 + e^z - 3 = 0$$

$$e^z = 3$$

$$z = \ln 3$$

עכשיו, אפשר לחשב את z''_{xy}, z'_y, z'_x בנקודה $(0, 0, \ln 3)$, ע"י הצבה.

$$z'_x = \frac{-z}{x + e^z} = \frac{-\ln 3}{3}$$

תרגיל: נתון ש $f(x-z, z-y) = 0$ מתארת את z כפונקציה של x, y . חשבו את $z'_x + z'_y$.

$$f(x-z, z-y) = 0$$

נגזור את שני האגפים ע"פ x (בלתי תלויים, (x, y, z)).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f \left(\underbrace{x-z}_u, \underbrace{z-y}_v \right) \right) = 0$$

$$u = x - z$$

נגדיר , ונגזור לפי כלל השרשרת.

$$v = z - y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u,v) = 0$$

$$u(x,y,z) = x - z$$

$$v(x,y,z) = z - y$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}}_{f'_u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{1-z'_x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}}_{f'_v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{z'_x} = 0$$

$$z'_x(-f'_u + f'_v) = -f'_u$$

$$z'_x = \frac{f'_u}{f'_u - f'_v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(u,v) = 0$$

$$f'_u \cdot u'_y + f'_v v'_y = 0$$

$$f'_u(-z'_y) + f'_v(z'_y - 1) = 0 \text{ נסתכל על}$$

$$z'_y(-f'_u + f'_v) = f'_v$$

$$z'_y = \frac{-f'_v}{f'_u - f'_v}$$

$$z'_x + z'_y = 1 \text{ על כן}$$

הקדמה לנושא הנגזרת המכוונת

מדובר על $\mathbb{R}^3$

1. משוואה פרמטרית של ישר
2. משוואה של מישור העובר דרך נקודה נתונה וניצב לוקטור מסוים.

נתחיל ב $\mathbb{R}^2$.

נתון וקטור $\langle a, b \rangle$. נתונה נקודה $p_0 = (x_0, y_0)$. מצאו משוואה של ישר שעובר דרך (x_0, y_0) ומקביל לוקטור $\langle a, b \rangle$.

$p = (x, y)$ נמצאת על $l \Leftrightarrow \vec{pp_0} \parallel \langle a, b \rangle \Leftrightarrow$ קיים סקלר t כך ש $\vec{pp_0} = t \langle a, b \rangle$, כלומר:

$$\vec{pp_0} = \langle x - x_0, y - y_0 \rangle = t \langle a, b \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \end{cases}$$

משוואה פרמטרית של ישר דרך (x_0, y_0) בכיוון מקביל לוקטור $\langle a, b \rangle$ היא:

$$l := \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

באופן אנלוגי, משוואה פרמטרית של ישר דרך (x_0, y_0, z_0) בכיוון מקביל ל $\langle a, b, c \rangle$:

$$l := \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

דוגמא: מצאו משוואת ישר דרך $(-2, 3)$ שמקביל לוקטור $\langle 1, 2 \rangle$.

$$l := \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

כעת, ננסה למצוא את המשוואה הקנונית של הישר:

נחליף $t = x + 2$, ועל כן $y = 3 + 2(x + 2) = 2x + 7$

משוואת מישור במרחב

משוואת מישור ב $\mathbb{R}^3$ לפי וקטור ניצב $\langle a, b, c \rangle$ ונקודה עליו (על המישור, לא על הוקטור) $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

נקודה (x, y, z) נמצאת על המישור $\Leftrightarrow \vec{p_0p} \perp \langle a, b, c \rangle \Leftrightarrow \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \vec{p_0p} \perp \langle a, b, c \rangle$. שני וקטורים ניצבים אם"מ המכפלה הסקלרית שלהם שווה לאפס, כלומר:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \cdot \langle a, b, c \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

וזו משוואה של מישור שעובר דרך (x_0, y_0, z_0) וניצב ל $\langle a, b, c \rangle$. לדוגמא:

תרגיל: מצאו משוואת מישור שעובר דרך $(0, -1, 3)$ וניצב לוקטור $\langle 2, -3, 5 \rangle$

$$2(x - 0) - 3(y - (-1)) + 5(z - 3) = 0$$

$$2x - 3(y + 1) + 5(z - 3) = 0$$

18.12.2006

ציטוט השיעור: 'זה צחוק של יאוש, או שהכל ברור?'

הגדרה: גראדיאנט - תהי $f(x, y)$ כך ש $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ קיימות, אזי:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \langle f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \rangle$$

נשים לב למה זה מוגדר נכון - $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ הם סקלרים (מספרים ממשיים), ואז $\nabla f(x_0, y_0)$ הוא וקטור הנגזרות החלקיות.

לדוגמא:

$$f(x, y, z) = x^z + y^z$$

וננסה לחשב את $\nabla f(2, 3, 4)$

$$\nabla f(x, y, z) = \langle zx^{z-1}, zy, x^z \ln x \rangle$$

בנקודה $(2, 3, 4)$ זה שווה $\langle 32, 6, 16 \ln 2 \rangle = \langle 4 \cdot 2^3, 6, 2^4 \ln 2 \rangle$.

נגזרת מכוונת של פונקציה עם שני משתנים

תזכורת: $f'_x(x_0, y_0) \equiv$ קצב השינוי של $f(x, y)$ בנק' (x_0, y_0) בכיוון ציר x (בכיוון הוקטור

$$\langle 1, 0 \rangle = \vec{i}_{\vec{x}} = \vec{x}$$

באופן דומה, מדובר ב f'_y

יהי $\vec{v}$ וקטור כלשהו. שאלה: מהו קצב השינוי של $f(x, y)$ בכיוון $\vec{v}$? (רוצים לפתח נוסחה...).

$$u := \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{כלומר } \vec{v}, \quad \text{ניקח וקטור יחידה בכיוון } \vec{v}$$

הגדרה: יהי $\vec{u}$ וקטור יחידה (כלומר, $\|\vec{u}\| = 1$), אזי הנגזרת המכוונת של $f(x, y)$ בכיוון $\vec{u}$

בנקודה (x_0, y_0) היא קצב השינוי של $f(x, y)$ בנקודה הנ"ל בכיוון $\vec{u}$ והיא מסומנת על ידי $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$.

(הערה: אם $\vec{v}$ וקטור כלשהו [לאו דווקא וקטור היחידה], אז $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) := D_{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}f(x_0, y_0)$ -

כלומר, לא נגיד שזה לא מוגדר - פשוט ננרמל את זה).

יהי $\vec{u}$ וקטור יחידה, ותהי (x_0, y_0) נקודה נתונה. יהי l ישר דרך (x_0, y_0) שמקביל לוקטור

$$l = \begin{cases} x(t) = x_0 + u_1 t \\ y(t) = y_0 + u_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad \vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$$

קצב השינוי של f בנקודה הנתונה, בכיוון הנתון,

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

כאשר Δf הוא ההפרש בין ערכי f בנקודות $p(t), p_{(0)}$, ו Δs הוא ההפרש בין המיקום $p(t)$ ל $p(0)$.

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{\Delta s}$$

כעת, ננסה לחשב את Δs -

$$d_{\text{is tance}} = \sqrt{\underbrace{(x_0 + u_1 t - x_0)^2}_{\Delta x} + \underbrace{(y_0 + u_2 t - y_0)^2}_{\Delta y}} = \sqrt{u_1^2 t^2 + u_2^2 t^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} |t| = |t|$$

$$\Delta s = t \begin{cases} d, t > 0 \\ -d, t < 0 \end{cases} \quad \text{לסיום} \quad \Delta s = t \quad p(t) \text{ הוא המיקום של } p_0$$

הגדרה משודרגת:

יהי $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ וקטור יחידה, אז

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u_1 t, y_0 + u_2 t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

הערה: עבור המקרה הפרטי $\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle$ מתקבלת ההגדרה של f'_x . הפלא ופלא - עבור $\langle 0, 1 \rangle$ - f'_y .

נוסחת הנגזרת המכוונת

אם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0) אז קיימת הנוסחה הבאה לנגזרת מכוונת f בנקודה הנ"ל בכיוון וקטור $\vec{v} \neq 0$

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

$$z(t) = f\left(\underbrace{x_0 + u_1 t}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + u_2 t}_{y(t)}\right) \quad \text{נגדיר} \quad \text{הוכחה:}$$

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} (z(t))|_{t=0} = z'(0)$$

נשים לב כי $z = f(x(t), y(t))$. מאחר ו f דיפרנציאבילית, מותר להשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

אם מעניינת אותנו הנקודה $t = 0$, אז זה שווה

$$f'_x(x_0, y_0)u_1 + f'_y(x_0, y_0)u_2 = \langle f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \rangle \cdot \langle u_1, u_2 \rangle = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

הוכחנו את הנוסחה עבור וקטור יחידה. אם $\vec{v}$ לאו דווקא וקטור יחידה, אז

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = D_{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

דוגמא: חשבו את $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ עבור $f(x, y) = e^x \cos y$ ו $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$ בנקודה $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$$\nabla f(x, y) = \langle e^x \cos y, -e^x \sin y \rangle$$

$$\nabla f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle 1, -1 \rangle$$

$$D_{\vec{u}}f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\frac{1}{\|\vec{u}\|}}_{= \frac{1}{\sqrt{2}}} \nabla f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \text{Scalar multiplication} \langle -1, 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \langle 1, -1 \rangle \cdot \langle -1, 1 \rangle =$$

$$\frac{1}{2} (1 \cdot -1 + -1 \cdot 1) = \frac{1}{2} (-2) = -1$$

תזכורת: מכפלה סקלרית: $\langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$

תכונות הגראדיאנט

משפט: תהי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0)

א. אם $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$ אז כל הנגזרות הכיווניות של f ב (x_0, y_0) .

ב. אם $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ אז :

i. מבין כל הנגזרות הכיווניות של f ב (x_0, y_0) לנגזרת בכיוון הגראדיאנט

$\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ יש את הערך הגדול ביותר, וערך זה הוא $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$

ii. לנגזרת בכיוון הפוך לגראדיאנט $(-\nabla f(x_0, y_0))$ יש את הערך הקטן ביותר, וערך

זה שווה ל $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.

הוכחות:

א. יהי $\vec{u}$ וקטור יחידה כלשהו. $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

ב. יהי $\vec{u}$ וקטור יחידה כלשהו.

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|\vec{u}\| \cos \theta$$

כאשר θ היא הזווית בין $\vec{u}$ ל $\nabla f(x_0, y_0)$. מאחר ו $\vec{u}$ וקטור יחידה, זה שווה ל

$$= \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$$

הגודל המקסימלי של $\|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \theta$ הוא $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ מתקבל כאשר $\theta = 0$, ואז $\cos(\theta) = 1$. על כן, הדבר יקרה כאשר $\vec{u}$ הוא בכיוון וקטור הגרדיאנט $\nabla f(x_0, y_0)$.

הגודל המינימלי הוא $-\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ ויתקבל כאשר $\theta = \pi \Rightarrow \cos(\theta) = -1$, כלומר כאשר $\vec{u}$ הוא בכיוון הפוך מ $\nabla f(x_0, y_0)$.

שימושים:

'נניח ואני גולשת סקי, ואני במצב רוח קרבי, ואני רוצה לגלוש כמה שיותר מהר – אני אגלוש בכיוון הפוך לגרדיאנט!'

21.12.2006

הקשר בין גראדיאנט וקו גובה

תהי $f(x, y)$ ונניח כי f דיפרנציאבילית. יהי $f(x, y) = c$ קו גובה של f .

תזכורת: $f(x, y) = c$ הוא אוסף כל הנקודות במישור ש f מתאימה להן את הערך c . נציג את קו הגובה בצורה פרמטרית.

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

לדוגמא: $x^2 + y^2 = f(x, y) = 25$.

זהו קו הגובה $f(x, y) = 25$ של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ (כלומר, מעגל ברדיוס 5).

אפשר לרשום את עקומה זו בצורה פרמטרית באופן הבא: $0 \leq t \leq 2\pi$ $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$ (הערה: קיימות הצגות פרמטריות רבות (למען האמת, אינסוף), לעקומה הנתונה).

$$z = f(x, y)$$

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

העקומה

$$(f(x(t), y(t)) = c \text{ (קו הגובה } f(x, y) = c \text{)}$$

נגזור את שני האגפים לפי t (את אגף שמאל ע"פ כלל השרשרת), ונקבל:

$$f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t = 0$$

נשים לב שמה שכתוב זה בעצם:

$$\nabla f \cdot \langle x'_t, y'_t \rangle = 0$$

נזכור כי $\langle x'_t, y'_t \rangle$ הוא וקטור משיק לעקומה בנקודה $(x(t), y(t))$.

מסקנה: נזכור כי $(\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v})$ ועל כן $\nabla f(x, y)$ ניצב לקו הגובה $f(x, y) = c$ (ז"א ניצב למשיק לקו הגובה).

שאלת הבנה: מהי הנגזרת הכיוונית בנקודה (x_0, y_0) בכיוון משיק לקו הגובה?

תשובה: כמובן ש-0, שכן $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$ ואם $\vec{u}$ הוא כיוון המשיק, אזי מכך שראינו שהוקטורים ניצבים, הגודל הוא 0.

משפט (כללי יותר): $\nabla f(x_0, y_0)$ הוא וקטור שניצב לעקומה $f(x, y) = c$ בנקודה (x_0, y_0) .

משפט (עוד יותר כללי): $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ הוא וקטור הניצב למשטח $f(x, y, z) = c$ בנקודה (x_0, y_0, z_0) .

פירוש: ניצב למשטח $\equiv$ הוקטור ניצב למישור המשיק למשטח (בנקודה (x_0, y_0, z_0)).

נשים לב $f(x, y, z) = c$ - אוסף כל הנקודות המקיימות את המשוואה $f(x, y, z) = c$.

תרגיל: $f(x, y) = x^2 + y^2$

שרטטו את קו הגובה שעובר דרך הנקודה $(3,4)$ ואת וקטור הגראדיאנט בנקודה זו. מצאו את משוואת הישר המשיק לקו הגובה ב $(3,4)$.

$$f(3,4) = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\nabla f(x,y) = \langle f'_x, f'_y \rangle = \langle 2x, 2y \rangle$$

$$\nabla f(3,4) = \langle 6, 8 \rangle$$

נבצע לו הזזה מקבילה ל $(3,4)$, ונקבל וקטור שמתחיל ב $(3,4)$ ומסתיים ב $(9,12)$. כצפוי, הוא יצא ניצב למשיק ב $(3,4)$.

כעת, עלינו למצוא את משוואת הישר המשיק לקו הגובה. נחשב אותה לפי שיפוע ונקודה. נקודה - $(3,4)$. הישר המשיק ניצב לישר שמקביל לוקטור הגראדיאנט, שהוא $\langle 6, 8 \rangle$.

(נרשום משוואה כלשהי של ישר שמקביל לוקטור $\langle 6, 8 \rangle$. $l: \begin{cases} x = 6t \\ y = 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. נחלץ את t -

$$y = \frac{4}{3}x + c \text{ ל שכל ישר שמתאים } t = \frac{x}{6}, t = \frac{y}{8} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{8} \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

לוקטור $\langle 6, 8 \rangle$. מצאנו ישר בכיוון $\langle 6, 8 \rangle$. שיפוע ישר שניצב לו הוא $-\frac{3}{4}$.

למה: אם מכפלת שיפועי ישרים היא -1 , אז הישרים ניצבים.

$$\text{כעת, יש לנו שיפוע } -\frac{3}{4}, \text{ נקודה } (3,4). \text{ המשוואה המבוקשת היא } \frac{y-4}{x-3} = -\frac{3}{4}$$

תרגיל: מצאו משוואה של המישור המשיק לגרף הפונקציה $z = f(x,y) = x^2y$ בנקודה $(2,1,4)$

פתרון: נבדוק שהנקודה אכן על משטח הגרף $4 = 2^2 \cdot 1$, ואכן, היא שם. נבדוק דיפרנציאביליות בנקודה - ואכן, מתקיים.

המשטח המבוקש (גרף הפונקציה) הוא אוסף כל הנקודות שמקיימות את המשוואה $g(x,y,z) := f(x,y) - z = 0$

מחפשים משוואת מישור משיק למשטח הפונקציה $g(x,y,z) = 0$ בנקודה $(2,1,4)$. כעת נמצא את משוואת המישור לפי וקטור ניצב ונקודה עליו.

נקודה עליו - $(2,1,4)$. וקטור ניצב - $\nabla g(2,1,4)$.

$$\nabla g(x,y,z) = \langle g'_x, g'_y, g'_z \rangle = \langle f'_x, f'_y, -1 \rangle = \langle 2xy, x^2, -1 \rangle$$

$$\nabla g(2,1,4) = \langle 4, 4, -1 \rangle$$

כעת, אנו מחפשים משוואת מישור שניצב לוקטור $\langle 4, 4, -1 \rangle$ ועובר דרך $(2,1,4)$.

$$4(x-2) + 4(y-1) - (z-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 4y - z = 8$$

תזכורת: משוואת מישור דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) שניצב לוקטור $\langle a, b, c \rangle$ היא

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

אינטגרלים

הקדמה לנושא פונקציות קדומות:

משפט לגרנז':

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה ב (a, b) אז היא קיימת נקודה $c \in [a, b]$, כך ש

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

נשים לב ש $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ הוא שיפוע הישר המחבר בין $(a, f(a)), (b, f(b))$. $f'(c)$ הוא שיפוע המשיק לגרף בנקודה $(c, f(c))$ הוא שיפוע המשיק.

משפט: אם $f(x)$ רציפה בקטע I וגזירה בפנים הקטע אז $f(x)$ קבועה אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in I$.

הוכחה: אם $f'(x) = 0 \iff f(x) = c$ (לפי הגדרת הנגזרת).

כיוון שני: נניח כי לכל $x \in I, f'(x) = 0$. יהיו $a \neq b \in I$. נראה כי $f(a) = f(b)$. לפי

משפט לגרנז', קיימת נקודה c , $a < c < b$, כך ש $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$.

(מהנתון), ועל כן, $f(b) - f(a) = 0 \Rightarrow f(b) = f(a)$.

25.12.2006

ציטוט השיעור: 'צריך להזהר בכביש, אבל צריך גם להזהר כשמחשבים פונקציה קדומה'

תזכורת:

משפט: אם $f(x)$ רציפה בקטע I וגזירה בפנים הקטע אז $f(x)$ קבועה אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in I$.

f היא פונקציה קבועה אם $f'(x) = 0$ לכל $x \in I$.

מסקנה: אם f, g רציפות ב I , וגזירות בפנים הקטע, $f'(x) = g'(x)$ בקטע I אז קיים c כך $f(x) = g(x) + c$ (שוות עד כדי קבוע).

הוכחת המסקנה: נגדיר $h(x) = f(x) - g(x)$. מתקיים $h'(x) = 0$ לכל $x \in I$ ולכן קיים c כך ש $h(x) = c$, ז"א $f(x) - g(x) = c$ לכן $f(x) = g(x) + c$.

דוגמא: $f(x) = \arctg x$, $g(x) = \frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2}$. יש להן את אותה נגזרת.

שאלה: האם ניתן להסיק מכך שקיים קבוע c כך שלכל x $f(x) = g(x) + c$? לא - לא $g(x)$ לא מוגדרת ב ± 1 .

אולם, בכל אחד מהקטעים $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ מתקיים $f(x) = g(x) + c$. חשוב לשים לב כי זה לא בהכרח אותו הקבוע לכל הקטעים!!!

בואו נבדוק, עבור I_2 , מהו c_2 המקיים $f(x) = g(x) + c_2$, $x \in I_2$. השוויון נכון לכל x ,

ובפרט עבור $x = 0$, ונראה: $\arctan(0) = \frac{1}{2} \arctan 0 + c_2$, על כן $c_2 = 0$.

נשים לב: מצאנו כאן דרך יפה להוכיח זהויות, בלי להסתבך יותר מדי.

כעת, עבור I_2 , קיים c_1 כך ש $\arctan(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + c_1$. מכיוון שלא נוח להציב כלום, ניקח גבול משני האגפים $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan \left(\underbrace{\frac{2x}{1-x^2}}_{\rightarrow 0} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan(0) = 0$$

לכן $c_1 = -\frac{\pi}{2}$, כלומר - בקטע $x < -1$ מתקיים $\arctan x = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2} - \frac{\pi}{2}$.

באופן דומה, בקטע $x > 1$, נגלה $c_3 = \frac{\pi}{2}$.

האינטגרל הלא מסוים

הגדרה: תהייה $f_{(x)}, F_{(x)}$ פונקציות המוגדרות בקטע I . $F_{(x)}$ נקראת פונקציה קדומה של $f_{(x)}$ אם $F' = f$.

דוגמא: מצאו פונקציה קדומה ל $f(x) = x^2$ - $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. נשים לב שלכל $c \in \mathbb{R}$, מתקיים

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$$

משפט: תהי $F_{(x)}$ פונקציה קדומה של $f_{(x)}$:

1. כל פונקציה מהצורה $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ היא גם פונקציה קדומה של $f(x)$.

2. אם F, G פונקציות קדומות של f , אז קיים קבוע c כך ש $F(x) = G(x) + c$.

הוכחה:

1. $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ ולכן $F(x) + c$ פו' קדומה של x .

2. אם F, G פונקציות קדומות של f , אז $F' = G' = f$. מהמסקנה למשפט שהראנו לפני עמוד, אזי הן נבדלות בקבוע.

הגדרה: אוסף כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$ נקרא אינטגרל לא מסוים, ומסומן $\int f(x)dx$.

הערה: אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז $\int f(x)dx = F(x) + c$.

טבלת אינטגרלים

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + c & \int \cos x dx &= \sin x + c \\ \int a^x dx_{a>0} &= \frac{a^x}{\ln a} + c & \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int e^x dx &= e^x + c & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + c \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + c & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + c \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + c = (-\arccos x + c) & \int x^a dx_{a \neq -1} &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c \\ \int \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c, a > 0 & & \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + c & & \end{aligned}$$

שאלה: מה רע ב $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$?

תחום ההגדרה של $\frac{1}{x}$ הוא $x \neq 0$. $\ln x$ - התחום שלו הוא $x > 0$. מכיוון שתחום ההגדרה שונה, אזי מה שרשום למעלה לא תקין.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \text{טענה:}$$

הוכחה: ראשית, נשים לב כי תחום ההגדרה הוא תקין ($x \neq 0$).

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \ln(|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{(-x)} \cdot (-1), & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad \text{ועל כן,}$$

תכונת הלינאריות של האינטגרל

משפט: אם $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$ אזי

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + c$$

או בעברית: אינטגרל של סכום, הוא סכום האינטגרלים

$$\int k \cdot f(x) = k \int f(x) = kF(x) + c$$

או בעברית: קבוע כפלי יוצא מחוץ לאינטגרל
הוכחה:

$$א. (F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$$

$$ב. (kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

(אנו מראים כי נגזרת של אגף ימין = פונקציה תחת סימן האינטגרל באגף שמאל).

הערה: לינאריות האינטגרל נובעת מלינאריות הנגזרת.

$$\int f(x)g(x) dx \neq \int f(x) dx \int g(x) dx \quad \text{הערה:}$$

דוגמאות לחישוב אינטגרל לא מסוים

$$\int \left(\sqrt{x} + 8x^5 \right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} + 8x^5 dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + 8 \cdot \frac{1}{6} x^6 + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3} x^6 + c$$

כדי לבדוק, אפשרי לגזור את צד ימין, ונקבל (בתקווה) את צד שמאל.

$$\int \frac{1}{(x-1)^6} dx = \int (x-1)^{-6} dx = \frac{1}{-5} (x-1)^{-5} + c$$

$$\int \left(x + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \right) =_{* \text{ see below }} \int x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos(x)) dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} [x + \sin x] + c$$

זהויות שימושיות:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

שאלה: האם $\int \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cos^3 \frac{x}{2} + c$? לא! - אם נגזור את אגף ימין, אז נראה ששכחנו את הנגזרת הפנימית.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{כעת נשתמש בזהות הבאה:}$$

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c$$

טענה: אם $\int f(x) dx = F(x) + c$ אז עבור $a \neq 0$, b קבוע כלשהו, אזי:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

(מחלקים כאן בעצם בנגזרת הפנימית, כאשר היא קבוע).

הוכחה: נגזור את אגף ימין, ונקבל

$$\left(\frac{1}{a} F(ax+b) + c \right)' = \frac{1}{a} F'(ax+b) = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$$

דוגמאות:

$$\int \cos(2x+5) dx = \frac{\sin(2x+5)}{2} + c$$

$$\int \sqrt[4]{(3x+1)} = \int (3x+1)^{1/4} dx = \frac{1}{5/4} \cdot \left(\frac{(3x+1)^{5/4}}{3} \right) + c = \frac{4}{15} (3x+1)^{5/4} + c$$

נשים לב, מתקיים:

$$\int \cos(x^2) dx \neq \frac{\sin(x^2)}{2x} + c$$

אסור לחלק בנגזרת הפנימית אם היא אינה קבועה. למה? $\left(\frac{\sin(x^2)}{2x} \right)' \neq \frac{1}{2x} (\sin(x^2))'$

אין נוסחה מפורשת לאינטגרל הנ"ל.

תרגיל: העזרו $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x$ כדי להראות ש $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a^2} \frac{\arctg \frac{x}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \arctg x \frac{x}{a}$$

שיטות אינטגרציה - שיטת אינטגרציה בחלקים

משפט: $\int (v(x)u'(x)) dx = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x) dx$

הוכחה: נראה כי $\int (v(x)u'(x) + v'(x)u(x)) dx = u(x)v(x) + c$

זה נכון ע"פ גזירה של אגף ימין לפי כלל המכפלה – נקבל את אגף שמאל.

דוגמון: $\int \left(\underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\sin x}_{v'(x)} \right) dx = \underset{\substack{u=x \\ u'=1 \\ v=-\cos x \\ v'=\sin x}}{-x \cos x - \int (1 - \cos x) dx} = -x \cos x + \sin x + c$

28.12.2006

הודעה: בשבוע 13 יהיה את הבוחן השני. נושא: שיטות אינטגרציה של אינטגרל לא מסוים.

אינטגרציה בחלקים

תזכורת:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

(ההוכחה משתמשת בכלל הגזירה של מכפלת פונקציות)

דוגמאות: $\int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\cos x}_{v'} dx$, על כן $u = x^2, v' = \cos x, u' = 2x, v = \sin x$

$$\int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\cos x}_{v'} dx = x^2 \sin x - 2 \int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x}_{v'} dx =$$

$$x^2 \sin x - 2 \left[-x \cos x - \int \cos x dx \right] = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

דוגמא נוספת:

$$\int \underbrace{x}_{u'=\frac{1}{2}x^2} \underbrace{\arctg x}_{v'=\frac{1}{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{v'} dx =$$

$$\frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx =$$

$$\frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} x^2 \arctg x - \frac{1}{2} [x - \arctg x] + c$$

דוגמא:

$$\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'=1, u=x} \cdot \underbrace{\arctg x}_{v=\arctg x, v'=\frac{1}{1+x^2}} dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2|$$

$$(\ln|1+x^2|)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \quad \text{למה?}$$

$$\int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\sin x}_{v'=-\cos x} dx = -e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{\cos x}_{v'=\cos x, v=\sin x} dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

על כן

$$2\int e^x \sin x = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

הערה: מומלץ להשתמש באינטגרציה בחלקים באינטגרלים מהצורה:

$$\int x^k \cos x dx, \int x^k \sin x dx, \int 1 \cdot \ln x dx, \int 1 \cdot \arctg x dx, \int x^k e^x dx$$

שיטת ההצבה

(הבעיה: חישוב $\int f(x) dx$)

נניח שקיימות פונקציות $u(x), g(x)$ כך ש:

$$f(x) = g(u(x))u'(x) \quad 1.$$

$$\int g(t) dx = G(t) \quad 2.$$

אזי

$$\int f(x) dx = \int g(u(x))u'(x) dx = G(u(x)) + c$$

הוכחה: נגזור את אגף ימין ונקבל את אגף שמאל.

$$(G(u(x)))' = G'(u(x)) \cdot u'(x) = g(u(x))u'(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} 2x dx = \int_{u(x)=1+x^2} \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) dx = \ln|1+x^2| + c \quad \text{דוגמא:}$$

חידון נושא פרטים¹: מה משותף לאינטגרלים הבאים?

$$\int x^2 dx, \int \sin^2 x \cos x, \int \ln^2 x \frac{1}{x} dx$$

$$\int u^2(x)u'(x) dx = \frac{1}{3}u^3(x) + c \quad \text{תשובה:} \quad \text{כולם מהצורה}$$

ועל כן:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

$$\int \ln^2 x \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3}\ln^3|x| + c$$

עוד שאלה: מה עם הבאים?

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx, \int \tg x dx, \int \frac{1}{(1+x^2) \arctg} dx$$

$$\int \frac{1}{u(x)} u'(x) dx = \ln|u(x)| \quad \text{תשובה:} \quad \text{כולם 'כמעט' מהצורה}$$

¹ הזוכה המאושר יזכה בסופ"ש זוגי באולם רוטברג.

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln |\ln x| + c$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{1}{\cos x} \sin x dx = \int_{u=\cos x} \frac{1}{\cos x} (-\sin x) dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} dx = \int_{u=\operatorname{arctg} x} \ln |(\operatorname{arctg} x)| + c$$

הבעיה: $\int f(x) dx$

שיטת ההצבה ההפוכה: $x = h(u)$ (יש כאן הגדרה של u באופן עקיף - $u = h^{-1}(x)$).

שיטת ההצבה הישירה: מגדירים משתנה חדשה, $u = h(x)$.

נוח לשימוש אם $f(x) = g(h(x))h'(x)$ ואם יודעים לחשב את $\int g(x) dx$ (כאשר

$$\int g(x) dx = G(x) + c$$

$$\int f(x) dx = \int_{\substack{u=h(x) \\ du=h'(x)dx}} g(h(x))h'(x) = \int g(u) du = G(u(x)) + c$$

דוגמאות:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\substack{u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx}} \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln |\ln x| + c$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int_{\substack{u=\sin x \\ du=\cos x dx}} u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{\substack{u=x^2+1 \\ du=2x dx}} \frac{1}{2} \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln |u| + c = \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx = \int_{\substack{u=\sin x \\ du=\cos x dx}} \frac{1}{1-u^2} du$$

כעת, נשתמש בעובדה $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)}$. נחפש קבועים A, B שמקיימים

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}$$

נמצא $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}$. איך מגיעים לזה?

$$\frac{A(1+u) + B(1-u)}{(1-u)(1+u)} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} \Leftrightarrow 1 = A(1+u) + B(1-u)$$

חזקות של u , ונקבל: $1 = (A+B) + (A-B)u$. משני הצדדים יש פולינום ב u . פולינומים שווים

$$\left. \begin{array}{l} A-B=0 \\ A+B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow A=B=\frac{1}{2}$$

אם כל המקדמים שווים. לכן, צריך להתקיים

$$1 = 2B \quad 1 = 2A$$

דרך ב': $1 = A(1+u) + B(1-u)$. בפרט עבור $u = \pm 1$ ועל כן $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$.

נחזור לאינטגרל שרצינו לחשב, עם התובנות החדשות, ונקבל:

$$\int \left(\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u} \right) du = \frac{1}{2} [(-1) \cdot \ln|1-u| + \ln|1+u|] + c =$$

$$\frac{1}{2} [-\ln|1-\sin x| + \ln|1+\sin x|] + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c$$

עוד דוגמא:

המשך לתלמיד הרציני? $\int \frac{\sqrt{u}}{u-1} du = ?$

$u = 1 + e^x$
 $du = e^x dx$
 $dx = \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{u-1} du$

לפני שנסתבך, ננסה ללכת בדרך אחרת:

$$\int \sqrt{1+e^x} dx = \int u \cdot \frac{2u}{u^2-1} du = 2 \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du$$

$u = \sqrt{1+e^x}$
 $u^2 = 1+e^x$
 $e^x = u^2-1$
 $du = \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}} e^x dx \Rightarrow du = \frac{u^2-1}{2u} dx \Rightarrow dx = \frac{2u}{u^2-1} du$

ועוד דרך שאפשר להשתמש בה:

$$u = \sqrt{1+e^x}$$

$$u^2 = 1+e^x$$

$$2udu = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2u}{e^x} du \Rightarrow e^x = \frac{2u}{u^2-1} du$$

עוד דרך:

$$u = \sqrt{1+e^x}$$

$$u^2 = 1+e^x$$

$$e^x = u^2-1$$

$$x = \ln(u^2-1)$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{u^2-1} \cdot 2udu$$

1.1.2007

שיטות אינטגרציה – שיטת ההצבה

1. הצבה ישירה: כדי לחשב $\int f(x) dx$ מבצעים הצבה מהצורה $u = h(x)$ (המשתנה החדש נתון בצורה ישירה, מפורשת)

2. הצבה הפוכה: כדי לחשב $\int f(x) dx$ מבצעים הצבה מהצורה $x = h(u)$ ואז דורשים ש h הפיכה ומקבלים $u = h^{-1}(x)$, אם אנו יודעים לחשב את $\int f(h(u))h'(u) du$, אזי נציב $x = h(u), dx = h'(u) du$ ונקבל משפחה של פו' ב x

$$\int f(h(u))h'(u) du = \int f(x) dx$$

דוגמאות להצבות הפוכות: הצבות טריגונומטריות

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx =$, $a > 0$ - נגדיר משתנה u ע"י $x = a \sin u$ (נשים לב שזו הצבה

הפוכה). נשים לב שזו לא פונקציה הפיכה בכל הטווח, ולכן נגדיר $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. מתקיים

$\frac{x}{a} = \sin u \Leftrightarrow u = \arcsin \frac{x}{a}$. $\arcsin x$ היא הזווית בקטע $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ שבה ה $\sin$ הוא x .

$$x = a \sin u$$

$$\frac{dx}{du} = a \cos u$$

$$dx = a \cos u du$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a \sqrt{\cos^2 u} = a |\cos u| = \begin{matrix} a \cos u \\ -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos u \geq 0 \end{matrix}$$

נחזור לאינטגרל – ונקבל כי האינטגרל המקורי שווה ל

$$\int \underbrace{a \cos u}_{\sqrt{a^2 - x^2}} \underbrace{a \cos u du}_{dx} = a^2 \int \cos^2 u du = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2u) du = \frac{a^2}{2} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right] + c$$

לצערנו, זה לא הסוף, כי צריך להחזיר את x . לצערנו, גם נרצה שזה יראה פשוט.

$$\sin(2u) = \underset{\substack{\cos u = \pm \sqrt{1 - \sin^2 u} \\ -\frac{\pi}{2} \leq u < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos u \geq 0 \Rightarrow \\ \cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}}}{x = a \sin u} 2 \sin u \cos u = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

האלטרנטיבה: $\sin 2u = \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$, אבל זה לא קביל במבחן.

נחזור שוב לאינטגרל, ונקבל, לבסוף -

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left[\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right] + C$$

2.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \left(\begin{array}{l} 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ x = a \operatorname{tg} u \\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 u)} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}} = \frac{a}{|\cos u|} = \frac{a}{\cos u}$$

(*) נשים לב כי $\cos u > 0$ בגלל הטווח של $\tan$

$$dx = \frac{a}{\cos^2 u} du$$

נחזור לאינטגרל המקורי, והוא שווה ל

$$\int \frac{1}{\left(\frac{a}{\cos u}\right) \cos^2 u} du = \int \frac{1}{\cos u} du = \int \frac{\cos u}{\cos^2 u} du = \int \frac{\cos u}{1 - \sin^2 u} du = \int_{\substack{t = \sin u \\ dt = \cos u du}} \frac{t}{1 - t^2} dt$$

$$\frac{1}{1 - t^2} dt = \text{done in previous lesson} \dots = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} \right| + C = *$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{x}{a}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$x = a \operatorname{tg} u, u = \arctg \frac{x}{a}$. כעת נרצה לחזור לביטוי עם x . נזכור כי

$$\sin^2 u = \frac{1}{1 + \cot^2 u} \xrightarrow[\cot u = \frac{a}{x}]{\operatorname{tg} u = \frac{x}{a}} \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2 + a^2} \quad \text{ועל כן}$$

$$\sin u = \pm \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + a^2}} = \pm \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \text{כלומר,}$$

כעת נחלק למקרים –

$$0 < u < \frac{\pi}{2}, \text{ ואז } \sin u = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \text{ מאחר ו } x = a \operatorname{tg} u, \operatorname{tg} u > 0, \text{ בחלק זה, ולכן}$$

$$x > 0. \text{ ולכן } |x| = x \text{ ולכן } \sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$-\frac{\pi}{2} < u < 0 \text{ ואז } \sin u = \frac{-|x|}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \text{ ובחלק זה } x = a \operatorname{tg} u, \operatorname{tg} u < 0, \text{ ולכן}$$

$$x < 0, \text{ ולכן גם כאן } \sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$\text{לסיכום – לכל } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ מתקיים } \sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \text{ נציב בביטוי המקורי:}$$

$$* = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{a^2 + x^2} + x \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{a^2 + x^2} - x \right| + C.$$

הצבות טריגונומטריות - סיכום

<u>זהות טריגונומטריות בשימוש</u>	<u>הגבלה על u</u>	<u>הצבה</u>	<u>הביטוי בתוך</u> $\int$
$a^2 (1 - \sin^2 u) = a^2 (\cos^2 u)$	$-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ $(0 \leq u \leq \pi)$	$x = a \sin u$ $(x = a \cos u)$	$\sqrt{a^2 - x^2}$
$a^2 (1 + \tan^2 u) = a^2 \left(\frac{1}{\cos^2 u} \right)$	$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$	$x = a \tan u$	$\sqrt{a^2 + x^2}$
		$x = \frac{a}{\sin u}$	<u>בתרגיל:</u> $\sqrt{x^2 - a^2}$

אינטגרלים של פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית: $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, כאשר p, q פולינומים. $p(x) = \sum_{n=0}^k a_n x^n$.

לדוגמא: $2 + \frac{1}{x}$ איננו פולינום, אבל זוהי פונקציה רציונלית.

אלגוריתם לפתרון $\int R(x) dx$.

חישוב אינטגרל מהצורה $J_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx, n \in \mathbb{N}$

$$J_1 = \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c$$

נפתח נוסחת נסיגה לחישוב J_n .

$$J_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \underset{\substack{v'=1 \\ v=x \\ u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n} \\ u'=\frac{-2xn}{(x^2+a^2)^{n+1}}}}{\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx =}$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \left(\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} \right) dx =$$

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$$

קיבלנו כי $J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1})$ נחליץ את J_{n+1} ונקבל

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} J_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n 2na^2} + c$$

למשל, נחשב את J_2 - $J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{x}{(x^2+a^2)^n 2a^2} + c$

פונקציות רציונליות פשוטות

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, 1 \neq k \in \mathbb{N}$$

$$\text{III. } \frac{MX+N}{x^2+px+q} \text{ (למשוואה } x^2+px+q=0 \text{ אין שורשים ממשיים)}$$

$$\text{IV. } \frac{MX+N}{(x^2+px+q)^k}, 1 \neq k \in \mathbb{N} \text{ (למשוואה } x^2+px+q=0 \text{ אין שורשים ממשיים)}$$

איך מחשבים את האינטגרלים שלהם?

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + c$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{-k+1} (x-a)^{-k+1} + c = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$$

$$\text{III. } x^2+px+q=0 \text{ אין שורשים ממשיים, ולכן } p^2-4q < 0 \text{ ולכן } q - \frac{p^2}{4} > 0$$

נשתמש בהשלמה לריבוע:

$$x^2 + px + q = x^2 + \underbrace{2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}}_{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

נגדיר $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ - אפשרי, כי $q - \frac{p^2}{4} > 0$. ולכן

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2$$

נחזור לחישוב האינטגרל: -

$$\int \frac{MX + N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2}$$

(המשך בשיעור הבא)

4.1.2007

ציטוט השיעור: 'המשפט אומר שכל פולינום אפשר לפרק, הוא לא אומר איך, והוא לא אומר שאתה יכול' : 'אני מבינה את היאוש שבפתירת האינטרגלים האלה'

פונקציות רציונליות פשוטות

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, 1 \neq k \in \mathbb{N}$$

$$\text{III. } \frac{MX+N}{x^2+px+q} \text{ (למשוואה } x^2+px+q=0 \text{ אין שורשים ממשיים - כלומר - } (q-\frac{p^2}{4}) > 0$$

$$\text{IV. } \frac{MX+N}{(x^2+px+q)^k}, 1 \neq k \in \mathbb{N} \text{ (למשוואה } x^2+px+q=0 \text{ אין שורשים ממשיים - כלומר } (q-\frac{p^2}{4}) > 0$$

הרעיון באינטגרציה שלהן הוא שכל פונקציה רציונלית אפשר לרשום כסכום של פונקציות רציונליות פשוטות - אחת מהן 4 הקודמות.

נמשיך לחשב את האינטרגל של III - הגענו בפעם הקודמת לכך ש

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \text{ נגדיר}$$

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{p^2}{4}\right)$$

$$\int \frac{MX+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{MX+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \int_{x=u-\frac{p}{2}}^{u=x+\frac{p}{2}} \frac{Mu + \overbrace{\left(N - \frac{Mp}{2}\right)}^{\text{constant}}}{u^2 + a^2} du =$$

$$\frac{M}{2} \int \frac{2u}{u^2 + a^2} du + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{1}{u^2 + a^2} du =$$

$$\frac{M}{2} \ln|u^2 + a^2| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C = \dots$$

$u = x + \frac{p}{2}$
 $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

כעת נפתור את האינטגרל מהצורה הרביעית, כלומר $1 \neq k \in \mathbb{N}$, $\int \frac{MX + N}{(x^2 + px + q)^k} dx$, כמו קודם,

נבצע :

$$\int \frac{MX + N}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{MX + N}{\left[\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) \right]^k} dx = \int_{u=x+\frac{p}{2}} \frac{Mu + \left(N - \frac{Mp}{2} \right)}{(u^2 + a^2)^k} du =$$

$$\frac{M}{2} \int \frac{2u}{(u^2 + a^2)^k} du + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^k} du =$$

$$\frac{M}{2} \frac{1}{-k+1} (u^2 + a^2)^{-k+1} + \underbrace{\left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^k} du}_*$$

ל* יש נוסחת נסיגה שהוכחנו בפעם הקודמת, אז ממנה מתקדמים.

אינטגרלים של פונקציות רציונליות כלשהן

ננסה שני משפטים ללא הוכחה:

משפט 1: כל פולינום אפשר לפרק למכפלה של גורמים לינאריים $(ax+b)$ וגורמים ריבועיים אי-פריקים (פולינום ריבועי שלא חותך את ציר x).

דוגמא: $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ - אבל זה לא טוב, כי יש לנו גורם פריק, לכן נמשיך -

$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ = כעת יש לנו גורמים לינאריים, וריבועי אי-פריק.

יתכן שחלק מהגורמים יופיעו בפירוק עם ריבוי, למשל

$$p(x) = (x^2 + 1)^3 (x - 5)^2 (2x + 3)$$

משפט 2: יהיו $p(x), q(x)$ פולינום כך ש $\deg p(x) < \deg q(x)$ אז אפשר לרשום את

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

כסכום של פונקציות רציונליות פשוטות (ה4 ממקודם).

אלגוריתם למציאת הפירוק שמשפט 2 מבטיח

שלב א': מצאו פירוק ל $q(x)$ כפי שמבטיח משפט 1.

שלב ב': נמצא פונקציות רציונליות פשוטות כנדרש. נסביר ע"י דוגמאות -

$$\frac{x^{10} + 2x^8}{\underbrace{(x-2)^3}_{*} \underbrace{(x-5)}_{**} \underbrace{(x^2+1)}_{***} \underbrace{(3x^2+4)^4}_{****}} = \text{we'll check that the degree of numerator (=mone) is smaller than the degree of denominator (=macane)}$$

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{x-5} + \frac{Ex+F}{x^2+1} +$$

$$\frac{G_1x+H_1}{3x^2+4} + \frac{G_2x+H_2}{(3x^2+4)^2} + \frac{G_3x+H_3}{(3x^2+4)^3} + \frac{G_4x+H_4}{(3x^2+4)^4}$$

קיימים קבועים כך שמתקיים השוויון. איך מוצאים אותם? עם מכנה משותף.

תרגיל

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx =$$

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

חשבונות עזר: מחפשים קבועים כך ש

מציאת הקבועים: טכניקה – מכנה משותף –

$$= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

מתקיים כמובן (מאחר והמכנים שווים) ש

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2)$$

בצד ימין יש פולינום ממעלה רביעית, ובצד שמאל יש פולינום ממעלה 2. אפשר לכתוב אותו כפולינום ממעלה 4:

$$0x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 2x + 13 =$$

$$A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2)$$

יש שתי שיטות למציאת המקדמים:

1. שיטת השוואת המקדמים – שני פולינומים הם שווים אם המקדמים שלהם שווים – לדוגמא,

$$13 = A - 2C - 2E - x^0 \text{ עבור } x^0$$

$$2 = -2B + C - 2D + E \text{ עבור } x^1 \text{ נקבל}$$

$$2 = 2A + B - 2C + D \text{ עבור } x^2 \text{ נקבל}$$

$$0 = -2B + C \text{ עבור } x^3 \text{ נקבל}$$

$$0 = A + B \text{ עבור } x^4 \text{ נקבל}$$

נשים לב, שכאן המשפט מבטיח שקיים פתרון יחיד. כאן הפתרון הוא

$$A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=-4$$

2. להציב ערכי x שונים – מאחר והפולינום שווים, אפשר פשוט להציב $x=0$ ולקבל

$$13 = A - 2C - 2E \text{ (נשים לב לשוויון למשוואה הראשונה) או } x=2 \text{ ולקבל}$$

$$25 = 2A + B - 2C + D \text{ , ועל כן } A=1 \text{ . נמשיך כך, ונגיע לאותם תשובות.}$$

3. המלצה – להשתמש בשתי השיטות ב"ז.

נחזור לאינטגרל המקורי -

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{(x+2)}{x^2+1} - \frac{(3x+4)}{(x^2+1)^2} \right) dx$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{2}{x^2+1} dx - 3 \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx - 4 \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx}_* =$$

$$\ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 2 \arctg x + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - (\int^*)$$

$$\int^* = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = J_2$$

תזכורת:

$$J_1 = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$$

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} J_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n 2na^2}$$

כאן נציב - $n=1, a=1$, ונקבל:

$$J_2 = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

נחזור לאינטגרל המקורי, ונקבל:

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx =$$

$$\ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 2 \arctg x + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - 4 \left(\frac{1}{2} \arctg x + \frac{x}{2(x^2+1)} \right) + C$$

8.1.2007

חישוב אינטגרלים מהצורה $R(\sin x, \cos x)$ (פונקציה רציונלית)

$$R(x, y) = \frac{x^2 y}{x + y}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \cdot \cos x, \sin x$$

אפשר להמיר בעיית אינטגרציה מהסוג $\int R(\sin x, \cos x)$ לבעיית אינטגרציה של פונקציה רציונלית

$$u = \tan \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad (\text{פיתוח הנוסחאות})$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

הבעיה: $\int R(\sin x, \cos x) dx$ - באמצעות ההצבה הנ"ל, נקבל פונקציה רציונלית ב u . אבל אולי dx יקלקל?

$$\tan \frac{x}{2} = u, \frac{x}{2} = \arctan u, x = 2 \arctan u \Rightarrow dx = \frac{2}{1 + u^2} du$$

$$\text{דוגמא: } \int \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx \text{ כאשר } 0 < r < 1, -\pi < x < \pi$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx = \int_{u=\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{(1-r^2)(1+u^2)}{1+u^2-2r(1-u^2)+r^2(1+u^2)} \cdot \frac{1}{(1+u^2)} du =$$

$$\int \frac{1-r^2}{(1-r^2)+u^2(r^2+2r+1)} du = (1-r^2) \int \frac{1}{(1-r)^2+u^2(1+r^2)} du =$$

$$\frac{(1-r^2)}{(1+r)^2} \int \frac{1}{\left[\frac{1-r}{1+r}\right]^2+u^2} du = \frac{\overbrace{1-r^2}^{(1-r)(1+r)}}{(1+r)^2} \left(\frac{1+r}{1-r}\right) \operatorname{arctg} \left(\frac{u(1+r)}{1-r}\right) + C =$$

$$\operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2}\right)(1+r)}{1-r} \right] + C$$

הצבה מהסוג $u = \sin x$

תרגיל: $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. בדרך הקודמת, מה שיקרה לאינטגרל הנ"ל זה :

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_{u=\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \left(\frac{2u}{1-u^2}\right)^2 \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos u = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

ו'זה ממש לא נחמד'!!!

אז ננסה דרך אחרת:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int_{u=\sin x} u^2 \cos^2 x du = \int u^2 (1-u^2) du$$

וזה כבר לא מסובך בכלל ☺.

* הצבה מסוג $u = \sin x$ טובה (באופן כללי) כאשר $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. (כלומר, ה $\cos$ בחזקה אי זוגית).

דוגמא נוספת:

$$- \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx - \text{היא מקיימת את התנאי *}$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{u=\sin x} \frac{1}{u^2(1-u^2)} du = \int \frac{1}{u^2(1-u)(1+u)} du =$$

$$\int \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{1+u} \right) du = \dots$$

הצבה מסוג $u = \tan x$

טובה כאשר $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)^2 du =$$

$$\begin{aligned} u &= \tan x \\ du &= \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} = (1 + \cot^2 x) = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\int \frac{(u^2 + 1)^2}{u^4} du$$

במקרה $u = \cos x$ - מציבים $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$

אינטגרלים של פונקציות מהצורה $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

שיטת ההצבה של אוילר

1. הצבת אוילר במקרה $a > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = u - \sqrt{ax}$ (ניתן לומר שזו הצבה ישירה)

$$u = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax} - \text{ואז,}$$

$$ax^2 + bx + c = u^2 - 2\sqrt{ax}u + ax^2 \Rightarrow x(b + 2\sqrt{au}) = u^2 - c \Rightarrow x = \frac{u^2 - c}{2\sqrt{au} + b}$$

$$\text{ומכאן - } \sqrt{ax^2 + bx + c} = u - \frac{\sqrt{a}(u^2 - c)}{2\sqrt{au} + b} \text{ כלומר, פונקציה רציונלית ב } u \text{ . כעת}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u(2\sqrt{au} + b) - 2\sqrt{a}(u^2 - c)}{(2\sqrt{au} + b)^2} \Rightarrow$$

נותר לבדוק את dx , ואכן -

$$dx = \frac{2u(2\sqrt{au} + b) - 2\sqrt{a}(u^2 - c)}{(2\sqrt{au} + b)^2} du$$

פונקציה רציונלית ב u .

2. הצבת אוילר במקרה $c > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xu + \sqrt{c}$ - ועל כן,

$$ax^2 + bx + c = x^2u^2 + 2xu\sqrt{c} + c \Rightarrow x = \frac{2u\sqrt{c} - b}{a - u^2}$$

למקודם $\frac{dx}{du}$ היא פונקציה רציונלית ב u . $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xu + \sqrt{c}$, וזו פונקציה רציונלית ב u .

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \begin{array}{l} \text{euler substitution 1 (for } a > 0) \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = u - x \quad (\sqrt{} = u - \sqrt{ax}) \\ x^2 - x + 1 = u^2 - 2xu + x^2 \\ 1 - u^2 = x(1 - 2u) \Rightarrow x = \frac{1 - u^2}{1 - 2u} \\ \frac{dx}{du} = \frac{-2u(1 - 2u) + 2(1 - u^2)}{(1 - 2u)^2} = \frac{2u^2 - 2u + 2}{(2u - 1)^2} \end{array}$$

$$\cdot \frac{2u^2 - 2u + 2}{u(2u - 1)^2} = \frac{2}{u} + \frac{-3}{2u - 1} + \frac{3}{(2u - 1)^2} \quad \text{כעת נפרק -}$$

$$\text{ועל כן האינטרגל שווה ל } C + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2u - 1} - \frac{3}{2} \ln|2u - 1| - 2 \ln|u|. \text{ צריך רק להציב}$$

$$. u = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\text{עוד תרגיל: } \int \frac{1}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}} dx \quad \text{גם כאן אפשר לעשות הצבת אוילר עבור } c > 0 \text{ - אבל אפשר}$$

גם דרך אחרת - השלמה לריבוע

$$\int \frac{1}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}} dx = \frac{-2x^2 - 4x + 5 = 5 - 2(x^2 + 2x) = 5 - 2(x^2 + 2x + 1) + 2 =}{7 - 2(x+1)^2} \int \frac{1}{\sqrt{7 - 2(x+1)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2}} = \frac{u = \sqrt{2}x + \sqrt{2}}{du = \sqrt{2}dx} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{(\sqrt{7})^2 - u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{u}{\sqrt{7}} + C =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{7} (x + 1) \right) + c$$

11.1.2007

האינטגרל המסוים

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה $x = a$ נקו' נתונה. נגדיר פונקציה $F(x) =$ השטח נטו שבין הגרף

$$y = f(x) \text{ לבין הקטע } [a, x].$$

שו האדה שטח נטו? סה"כ השטח שמעל ציר x פחות סה"כ השטח שמתחת לציר x . כלומר, יש שטח שלילי.

נסמן $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. כמובן ש $F(x)$ תלויה ב a וב x .

נבצע חלוקה של $[a, x]$ לקטעים קטנים שאורכם $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. נבצע בחירה של נקודות בכל קטע קטן - $x_1^*, \dots, x_n^*$.

קירוב ל $F(x)$ הוא סכום רימן של החלוקה $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ - סכום שטחי מלבנים.

כמובן שהקירוב יהיה יותר טוב ככל ש n יגדל. אם קיים הגבול של סכומי רימן כאשר $\Delta x_i \rightarrow 0$ אז

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

t הוא משתנה אינטגרציה.

הגדרה: אם קיים הגבול של סכומי רימן של $f(x)$ אזי $f(x)$ נקראת אינטגרבילית. כלומר, אם קיים

$$\int_a^x f(t) dt \text{ אז } f \text{ נקראת אינטגרבילית בקטע } [a, x].$$

טענות:

1. אם $f(x)$ רציפה בקטע סגור אז היא אינטגרבילית בו.
2. אם $f(x)$ חסומה ובעלת מספר סופי של נק' אי רציפות, בקטע סגור אזי היא אינטגרבילית בו.
3. אם $f(x)$ לא חסומה בקטע אז היא לא אינטגרבילית בו.

הגדרות:

$$a. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$b. \int_a^a f(x) dx = 0$$

משפט: אדיטיביות האינטגרל - $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ לכל $c \in \mathbb{R}$.

הוכחה:

1. אם $a < c < b$ - אז ניתן לראות זאת גרפית.
2. $c > b$ - ואז $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c \Rightarrow \int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$

המשפטים היסודיים של החדו"א (החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי)

הראשון -

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ ותהי $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. אז, $F(x)$ גזירה בכל נקודה

$$\text{בקטע } [a, b] \text{ ומתקיים } F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\sim = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad \text{הוכחה:} \quad \text{המונה הוא השטח נטו הכלוא בין } x \text{ ל- } x + \Delta x$$

$$\frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x) = f(x)\Delta x$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x) \quad \text{ועל כן,}$$

תרגיל: חשבו את $f'(x)$ במקרים הבאים:

$$a. \quad f(x) = \int_0^x \sin t \, dt \quad \text{נשים לב ש } t \text{ הוא משתנה דמה - משתנה האינטגרציה - שכן}$$

$$(\int_0^x \sin t \, dt = \int_0^x \sin y \, dy$$

a. תשובה: לפי המשפט היסודי, זה שווה ל $\sin t$. אפשר לחשב זאת בדרך ישירה -

$$f(x) = \int_0^x \sin t \, dt = [\cos t]_0^x = -\cos x - (-\cos(0)) = -\cos x + 1$$

$$(-\cos x + 1)' = \sin x$$

$$b. \quad f(x) = \int_0^{4x^3} \sin t \, dt$$

a. תשובה:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{4x^3} \sin t \, dt = \frac{d}{dx} \int_0^u \sin t \, dt \Big|_{u=4x^3} = \frac{d}{du} \int_0^u \sin t \, dt \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$(\sin u)(u') = \sin 4x^3 \cdot (12x^2)$$

$$g. \quad f(x) = \int_{x^3}^8 e^{t^2} \, dt$$

$$a. \quad \text{תשובה: } \frac{d}{dx} \left(\int_{x^3}^8 e^{t^2} \, dt \right) = -\frac{d}{dx} \int_8^{x^3} e^{t^2} \, dt = -e^{(x^3)^2} \cdot 3x^2 = -e^{x^6} \cdot 3x^2$$

$$-\frac{d}{dx} \int_8^u e^{t^2} \, dt \Big|_{u=x^3} = -e^{u^2} \cdot u'(x) = -e^{x^6} (3x^2)$$

המשפט היסודי השני של החדו"א

אם $f(x)$ רציפה ב $[a, b]$ ו $F(x)$ פונקציה קדומה כלשהיא (ז"א $F'(x) = f(x)$) אז

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

הוכחה: נגדיר $G(x) = \int_a^x f(t) \, dt$. מהמשפט היסודי הראשון נובע ש $\frac{d}{dx} G(x) = f(x)$.

לכן $G(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

לפי הנתון גם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$. על כן, $F'(x) = G'(x) = f(x)$. לכן קיים

$$c \in \mathbb{R} \quad \text{כך ש } F(x) = G(x) + c$$

$$.F(b) - F(a) = (G(b) + C) - \left(\underbrace{G(a)}_{=0} + c \right) = G(b) \text{ - ולכן}$$

תרגיל:

$$. \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ חשבו את } f(x) = \begin{cases} x+3, x \geq 0 \\ 2, x < 0 \end{cases}$$

נאליץ לחלק את האינטגרל לשני אינטגרלים

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2 dx + \int_0^1 (x+3) dx =$$

$$[2x]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_0^1 = (0 - (-2)) + \left(\frac{1}{2} + 3 - 0 \right) = 2 + 3\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$$

חישוב אינטגרל מסוים בשיטת ההצבה

דוגמא:

$$\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx = \underset{\substack{u=x^3+1 \\ du=3x^2 dx \\ dx=\frac{du}{3x^2}}}{\int_0^2} \sqrt{u} du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^2 =$$

$$\frac{2}{3} \left(\underbrace{2^{3/2}}_{=\frac{4\sqrt{2}}{3}} - 0^{3/2} \right)$$

אלטרנטיבה (לא מומלצת):

$$\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx = F(1) - F(-1)$$

$$\text{נמצא } F(x) \text{ ע"י } \int 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx = \underset{u=x^3+1}{\frac{2}{3}} (x^3+1)^{3/2} + c$$

$$.F(1) = \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2}, F(-1) = 0 \text{ ואז } c = 0 \text{ אפשר להציב}$$

חישוב אינטגרל מסוים ע"י אינטגרציה בחלקים

לדוגמא:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \underset{\substack{u=x \\ v'=\cos x \\ u'=1 \\ v=\sin x}}{[x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x dx}$$

15.1.2007

ציטוט השיעור: 'אינטגרל ששווה לאינסוף, זה כמו שיר חנוכה - כל אחד הוא אור קטן, וכולנו אור איתן'
תזכורת: אם $f(x)$ אינטגרבלית בקטע $[a, b]$ (ז"א $\int_a^b f(x) dx$ קיים) אז $f(x)$ חסומה.

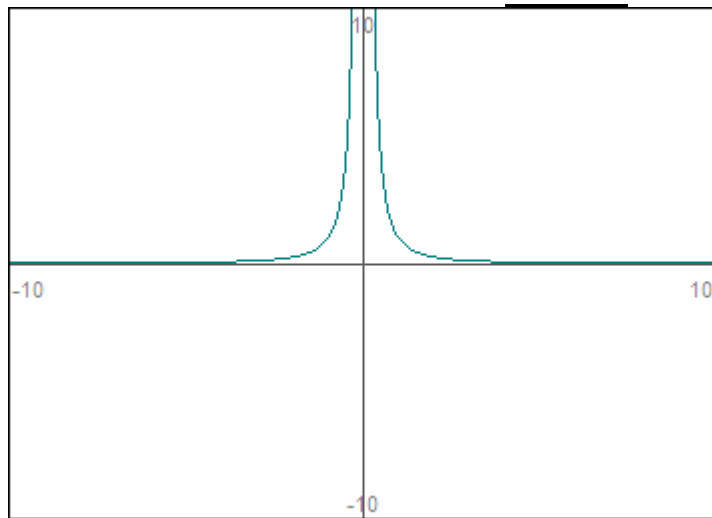
אנו נרחיב את ההגדרה של אינטגרל מסוים גם למקרים בהם הפונקציה לא חסומה או הקטע לא חסום.

אינטגרל לא אמיתי

מסוג I: (כאשר הקטע לא חסום)

הגדרה: $\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{l \rightarrow \infty} \int_a^l f(x) dx$. אם קיים הגבול המדובר אז אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי (האינטגרל המוכלל) קיים.

דוגמא: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$



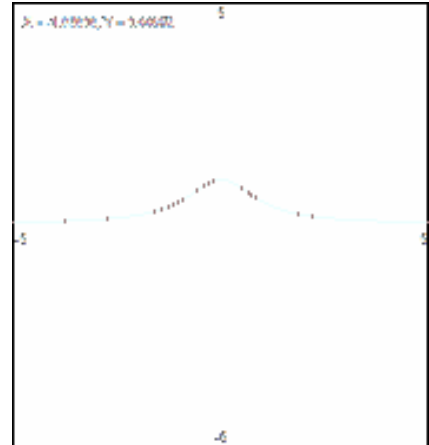
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_1^l \frac{1}{x^2} dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^l = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{l} + 1 \right] = 1$$

כעת ננסה לבדוק את $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_1^l \frac{1}{x} dx = \lim_{l \rightarrow \infty} (\ln l - \ln 1) = \infty$. במקרה זה נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי לא קיים (או קיים במובן המוכלל).

הגדרה: באופן דומה למקודם, $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{l \rightarrow -\infty} \int_l^b f(x) dx$.

הגדרה: $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$ עבור $c \in \mathbb{R}$.

דוגמא:



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\underbrace{\lim_{l \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg l)}_{[\arctg x]_0^l} + \underbrace{\lim_{l \rightarrow \infty} (\arctg l - \arctg 0)}_{[\arctg x]_0^l} = \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

סוג II של אינטגרלים לא אמיתיים - כאשר הפונקציה לא חסומה

הגדרה: אם $f(x)$ רציפה ב $[a, b]$ אך $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$ אז מגדירים

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{l \rightarrow b^-} \int_a^l f(x) dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{l \rightarrow 1^-} \int_0^l (1-x)^{-1/2} dx = \lim_{l \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{\frac{1}{2}} (1-x)^{1/2} \right]_0^l = \underline{\underline{\text{דוגמא:}}}$$

$$\lim_{l \rightarrow 1^-} -2 \left[\sqrt{1-l} - \sqrt{1} \right] = 2$$

הערה: באופן דומה מגדירים $\int_a^b f(x) dx$ כאשר $f(x)$ רציפה ב $(a, b]$ ו $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{l \rightarrow a^+} \int_l^b f(x) dx \text{ כלומר -}$$

הגדרה: אם f רציפה ב $[a, b]$ פרט לנקודה $c \in [a, b]$ שעבורה $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$ אזי :

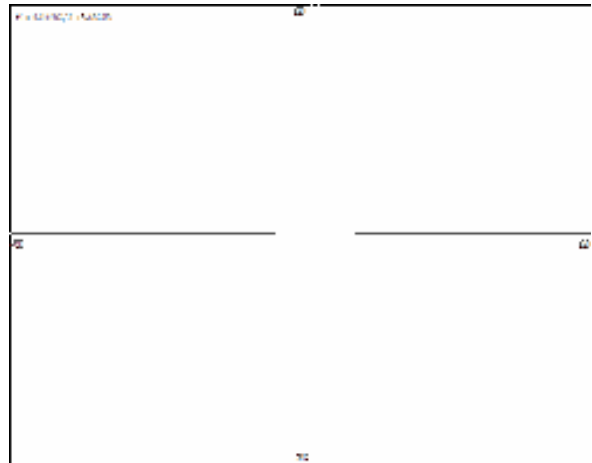
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\underline{\underline{\text{תרגיל:}}} \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = - \left[\frac{1}{x-1} \right]_0^2 = -(1 - (-1)) = -2 \text{ טעינו, כי לא פירקנו לחלקים.}$$

עצם העובדה שמדובר בכו' חיובית, צריך ללמד אותנו שלא יתכן שהשטח יהיה שלילי.

תזכורת: המשפט היסודי של החדו"א: אם $f(x)$ רציפה ב $[a, b]$ אז

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ בדוגמא זו } f \text{ איננה רציפה בכל נקודה בקטע.}$$



פתרון נכון הוא:

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$\lim_{l \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{x-1} \right]_0^l + \lim_{l \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x-1} \right]_l^2 = \lim_{l \rightarrow 1^-} \overbrace{\left[\underbrace{\frac{1}{l-1}}_{\rightarrow -\infty} + 1 \right]}^{\rightarrow \infty} + \lim_{l \rightarrow 1^+} \overbrace{\left[1 - \frac{1}{l-1} \right]}^{\rightarrow \infty} = \infty$$

התשובה היא שהאינטגרל המוכלל לא קיים (או קיים במובן המוכלל).

אינטגרלים כפולים

הי $f(x, y)$ פונקציה רציפה. R תחום סגור וחסום במישור. "נפח נטו" שבין המשטח

$z = f(x, y)$ לבין R הוא הנפח שמעל R פחות הנפח שמתחת ל- R .

קירוב ל"נפח נטו" שבין $z = f(x, y)$ לבין R – נבנה כאן סכומי רימן. נחלק את המישור ע"י עקומות שוות קוארדינטה, ז"א עקומות מהצורה: $x = a, y = b$. כלומר, מתבצעת חלוקה של R למלבנים ששטחם הוא $\Delta A_1, \dots, \Delta A_n$.

נבחר נקודה בכל מלבן, $(x_1^*, y_1^*), \dots, (x_n^*, y_n^*)$. קירוב לגודל המבוקש הוא סכום רימן

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta A_k$$

אם קיים הגבול $\lim_{\max \Delta A_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$, אזי כך נגדיר את $\iint_R f(x, y) dA$ (A מגיע מהמלבן A_k).

נשים לב כי $\Delta A_k = \Delta x \Delta y$. לכן, לעיתים מסמנים זאת כ $\iint_R f(x, y) dx dy$.

אינטגרל חוזר

המשמעות היא $\int_c^d \left(\int_a^b F(x, y) dx \right) dy$ (קודם מחשב אינטגרל dx , ואחרי זה dy).

מה המשמעות של חישוב אינטגרל dx לפונקציה בשני משתנים? מתייחסים ל y כקבוע. לדוגמא:

$$\int_0^1 xy^2 dx = \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2} y^2$$

$$\int_1^2 \int_0^1 xy^2 dx dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} y^2 \right) dy = \left[\frac{1}{6} y^3 \right]_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

כעת ננסה לחשב את זה הפוך:

$$\int_0^1 \int_1^2 xy^2 dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=1}^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} x - \frac{1}{3} x \right) dx = \int_0^1 \frac{7}{3} x dx = \frac{7}{6}$$

היאח! יצא אותו דבר. האם זה מקרה? לא!

משפט פוביני למלבן: יהי R המלבן $\begin{matrix} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{matrix}$. אם $f(x, y)$ רציפה ב- R אז

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

אינטגרל כפול בתחום לא מלבני

תחום מסוג ראשון: $R: \left\{ \begin{matrix} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{matrix} \right\}$ כאשר $g_1(x), g_2(x)$ הן עקומות רציפות.

מה אומר פוביני בנוגע לתחום מסוג זה?

משפט פוביני לתחום מסוג ראשון

אם R הוא תחום מסוג ראשון, כלומר $R: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$ כאשר g_1, g_2 הן עקומות

רציפות, אזי $\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$.

18.1.2007

הודעה: בשבוע הבא יש בוחן על שיטות אינטגרציה (אינטגרל לא מסוים בלבד) בזמן הרצאת יום ה' שעה שניה.

משפטי פוביני לאינטגרלים כפולים

תחום מסוג I: $D = \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{array} \right\}$

אזי $\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$

תחום מסוג II:

אם $D = \left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \end{array} \right\}$ כאשר $h_1(y), h_2(y)$ עקומות רציפות, ו $f(x, y)$ רציפה,

אזי $\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$

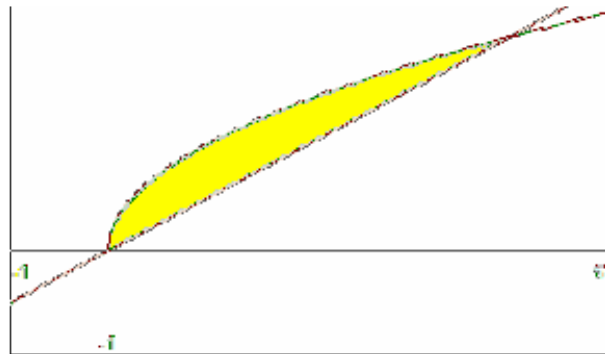
דוגמאות:

$x = 4$

$x = 2$

חשבו בשתי דרכים את $\iint_R xy dA$ כאשר R הוא התחום החסום ע"י $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$

$y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2y$



הדרך המסובכת: - מתייחסים לתחום כאל תחום מסוג II -

$\iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA = \int_1^{\sqrt{2}} \int_2^{2y} xy dx dy + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{y^2}^{2y} xy dx dy$

$= \frac{11}{6}$ מכאן ממשיכים לחשב ומגיעים ל

לדוגמא - נחשב אחד מהם -

$\int_1^{\sqrt{2}} \int_2^{2y} xy dx dy = \int_1^{\sqrt{2}} y \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^{2y} dy = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{y}{2} (4y^2 - 4) dy = \dots$

דרך קלה יותר: נתייחס ל R כאל תחום מסוג I - לא צריך לחלק את התחום במקרה זה.

$$\int_2^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} xy dy dx = \dots = \frac{11}{6}$$

תרגיל: חשב את $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$.

מה הבעיה? אנו לא יודעים לחשב את e^{x^2} .

מה **לא עושים**? לא אומרים שזה שווה ל $\int_{y/2}^1 \int_0^2 e^{x^2} dy dx$.

מה כן עושים?

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy = \iint_D e^{x^2} dA =$$

השאלה היא מהו D ? $D = \begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$. נשרטט אותו, ואז נכתוב אותו כך:

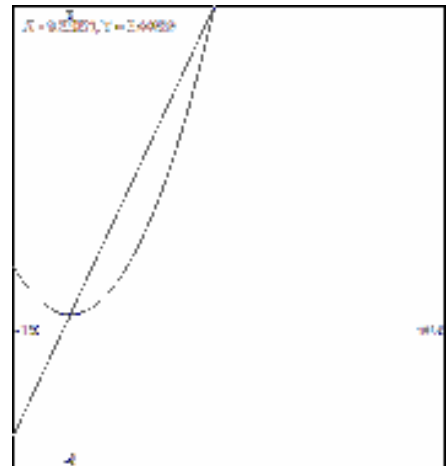
$$\int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 e^{x^2} [y]_0^{2x} dx = \int_0^1 e^{x^2} \cdot 2x dx = \int_{u=x^2}^{u=4x^2} e^u du = [e^u]_0^4 = e - 1$$

חישוב שטח באמצעות אינטגרל כפול

טענה: יהי R תחום חסום וסגור במישור, אז שטחו S_R הוא: $S_R = \iint_R 1 dA = \iint_R dA$.

למה? השטח נטו שבין המשטח $z = 1$ לבין התחום R במישור $z = 0$. $\iint_R 1 dA = S_R$. זה גם $1 \cdot S_R$.

דוגמא: חשבו את השטח שכלוא בין $y = \frac{1}{2}x^2$ לבין $y = 2x$.



דרך רגילה: - נחפש את נקודת החיתוך $2x = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = 4$

$$S = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{16}{3}$$

דרך שנייה - **באמצעות אינטגרל כפול:** $S = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x^2}^{2x} dy dx = \frac{16}{3}$

מערכת קורדינטות קוטביות

במערכת רגילה, אנו רושמים לכל נקודה (x, y) . אפשר לרשום אותה גם כ (ϑ, r) , כאשר ϑ היא הזווית שהנקודה (x, y) יוצרת, ו r הרדיוס.

מהו היחס:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \vartheta \text{ נקבעת על סמך הרביע של } (x, y).$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta \quad \text{בכיוון ההפוך:}$$

עקומות במערכת קוטבית

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 \\ r &= r_0 \end{aligned} \quad \text{עקומות שוות קורדינאטה -}$$

עבור $\vartheta = \vartheta_0$ - מדובר בקרן שיוצאת מראשית הצירים ויוצרת זווית ϑ .

עבור $r = r_0$ - מדובר במעגל ברדיוס r_0 .

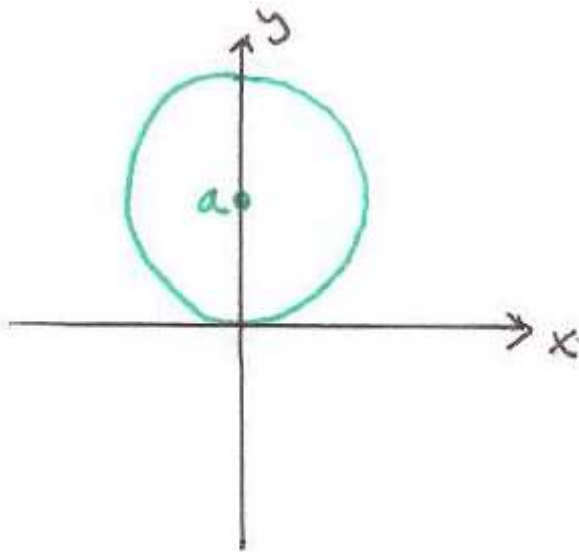
דוגמא נוספת: $r = 2a \sin \vartheta$ (ביטוי מהצורה $f(r, \vartheta) = 0$). איך נראית עקומה כזו?

$$\vartheta = 0 \Rightarrow r = 0$$

כאשר ϑ גדל מ 0 ל $\frac{\pi}{2}$, אזי r הולך וגדל, ומגיע ל $2a$.

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2a$$

זה יראה כך:



(זוהי פונקציה של ϑ). זה נראה כמו מעגל, וזה באמת מעגל.

$$r = 2a \sin \vartheta$$

$$r^2 = 2ar \sin \vartheta$$

$$x^2 + y^2 = 2ay$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$$

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

- כלומר, מעגל שמרכזו $(0, a)$ ורדיוסו a .

אינטגרל כפול במערכת קוטבית

יהי R תחום סגור וחסום במישור.

הגדרה: נאמר ש R הוא תחום קוטבי פשוט אם

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1 \\ r_1(\vartheta) \leq r \leq r_2(\vartheta) \end{array} \right.$$

כאשר

$r_1(\vartheta), r_2(\vartheta)$ הן עקומות רציפות.

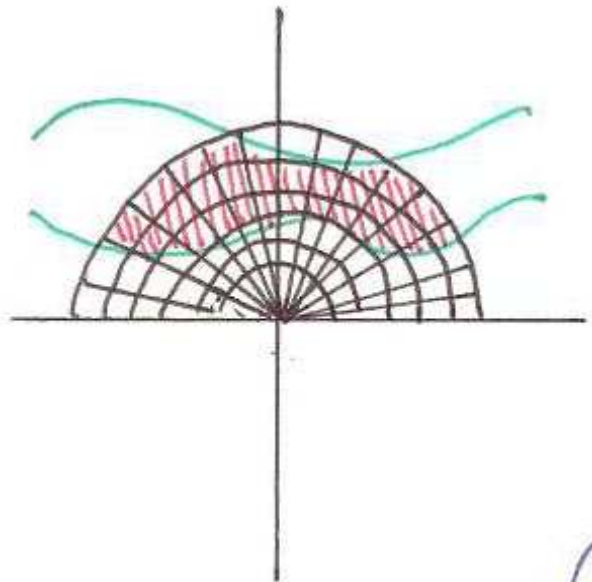
משפט: יהי R תחום קוטבי פשוט אז

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) dA = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \int_{r_1(\vartheta)}^{r_2(\vartheta)} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r dr d\vartheta$$

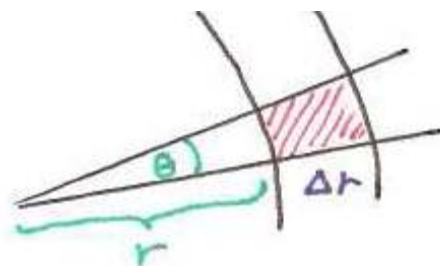
(הערה: $dA = dx dy \rightarrow r dr d\vartheta$)

הסבר למשפט: $\iint_A f(x, y) dA =$

מחלקים את המישור למשבצות קוטביות קטנות ע"י עקומות שוות קוארדינטה, כלומר עקומות מהצורה $\vartheta = \vartheta_0, r = r_0$. נקבל רשת של עיגולים, ורשת של קרניים. מדובר במשהו כזה:



כל משבצת נראית בערך כך:



והשטח הוא $r\Delta\theta$.

22.1.2007

תזכורות / הודעות:

- בוחן ביום ה' בשעה השניה של ההרצאה
- יש תרגול השלמה, מועדים ומיקום – באתר
- באתר הקורס יש את דפי הנוסחאות שנקבל בבחינה

חשוב חשוב חשוב

'החומר הבא כן
למבחן. תהיה שאלה
על הנושא במבחן'
ח.ל.

אינטגרלים כפולים במערכת קוטבית
תזכורת:

$$\iint_R f(r, \vartheta) dA = \iint_{\text{lims of } r, \vartheta} f(r, \vartheta) r dr d\vartheta$$

תרגיל:

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA, \text{ כאשר } R \text{ חסום ע"י } x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

נבצע רישום קוטבי של התחום:

$$0 \leq r \leq 1$$

$$\tan \vartheta_1 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \vartheta_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dA = \int_0^{\pi/6} \int_0^1 e^{-r^2} r dr d\vartheta = \int_0^{\pi/6} \int_0^1 e^{-u} \frac{1}{2} du d\vartheta =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} \left[e^{-u} \right]_{u=0}^1 d\vartheta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \int_0^{\pi/6} d\vartheta = \frac{\pi}{12} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

תרגיל: $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

(נשים לב – מותר לעשות את המעבר * רק בגלל שמדובר במשתני אינטגרציה שונים.)

נעבור לקוטביות

$$0 \leq r < \infty$$

מדובר ב

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\vartheta = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

* - חישובי עזר:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l e^{-t} dt = \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^l =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 - \underbrace{e^{-l}}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ ולכן}$$

אינטגרלים משולשים במרחב קרטזי

$$\iiint_G f(x, y, z) dv$$

G גוף חסום וסגור במרחב. אנו נחתוך רשת של משטחים שווי קוארדינטה (בשני משתנים – זה היה

$$x = x_0$$

עקומות שוות קוארדינטה) מהצורה $y = y_0$. נחלק את הגוף לאלמנטי נפח (תיבות) שנפחם:

$$z = z_0$$

$$\Delta v_1, \dots, \Delta v_n$$

נבחר נקודה בכל אלמנט נפח

$$(x_1^*, y_1^*, z_1^*), \dots, (x_n^*, y_n^*, z_n^*)$$

$$\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z \text{ - נפח של אלמנט נפח}$$

מגדירים:

$$\iiint_G f(x, y, z) dv = \lim_{\max \Delta v_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta v_k \stackrel{\text{theorem}}{=} \iiint_{\text{proper limits}} f(x, y, z) dx dy dz$$

מה המשמעות הפיזיקלית:

$$\text{I. אם } f(x, y, z) = 1 \text{ אז } \iiint_G dV = \text{נפח הגוף.}$$

$$\text{II. באופן כללי, אם } f(x, y, z) \text{ מבטאת צפיפות מסה (ז"א מסה ליח' נפח), ואז}$$

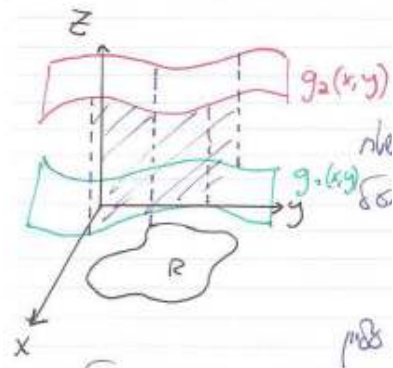
$$\text{מסה של הגוף } G = \iiint_G f(x, y, z) dv$$

גוף פשוט במרחב

(מקביל שלו באינטגרלים כפולים – תחום נורמלי (I, II))

הגדרה: יהי R תחום חסום (במישור xy). משטחים במרחב. הגוף המורכב

מכל הנקודות שנמצאות בין המשטח העליון למשטח התחתון מתחת / מעל התחום R, נקרא גוף פשוט.



משפט: יהי G גוף פשוט שיש משטח עליון $z = g_2(x, y)$ ומשטח תחתון $z = g_1(x, y)$ ויהי R ההיטל של G על המישור xy, אז

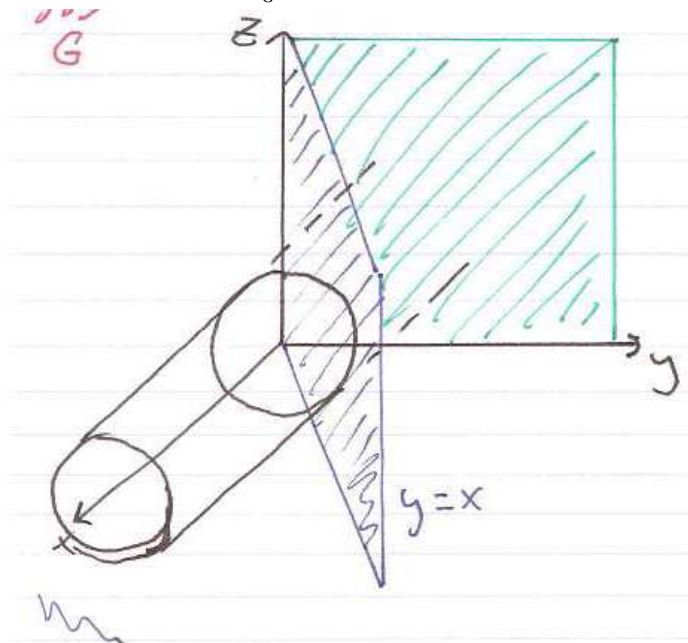
$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

$$x \geq 0$$

תרגיל: המישורים $x=0$, $y=x$, חותכים פלח מהגוף $y^2 + z^2 \leq 1$ באוקטנט החיובי ($y \geq 0$)

$$z \geq 0$$

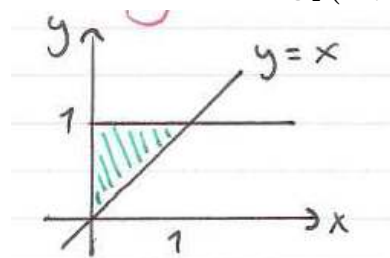
נקרא לגוף היוצר G . חשבו את $\iiint_G z dv$



זהו גוף פשוט במרחב.

המשטח התחתון - $z = g_1(x, y) = 0$

משטח עליון $z = g_2(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$



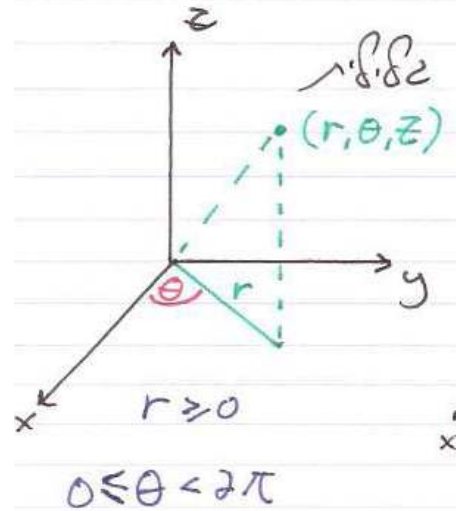
הטל הגוף על המישור xy : $R =$

$$\iiint_G z dv = \iint_R \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz \right) dA = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz dy dx = \frac{1}{8}$$

to be completed by the student

מערכות קורדינאטות גליליות וכדוריות

מערכת גלילית:



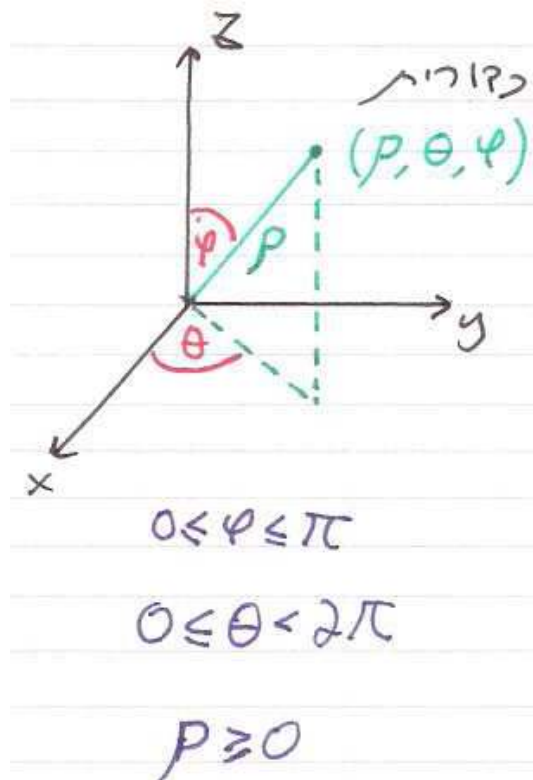
$$r \geq 0$$

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

r, θ הן הקורדינאטות הקוטביות המתאימות ל (x, y) במישור xy .

עבור הנקודה (r, θ, z) מתקיים $r =$ המרחק של הנק' מציר z .

מערכת כדורית:



$\rho =$ המרחק מהראשית - $\rho \geq 0$

$\phi =$ זווית שנוצרת עם הכיוון החיובי של ציר z . $(0 \leq \phi \leq \pi)$

$\theta =$ הזווית שנוצרת בין היטל הנקודה על המישור xy לבין הכיוון החיובי של ציר x . $(0 \leq \theta < 2\pi)$

נוסחאות מעבר

קואורדינטות כדוריות לקרטזיות (וההפך)

$$z = \rho \cos \phi$$

$$x = \underbrace{\rho \sin \phi}_r \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גלילות או כדוריות

גלילות:

נחלק את התחום G עם רשת של משטחים שווי קואורדינטה, מהצורה

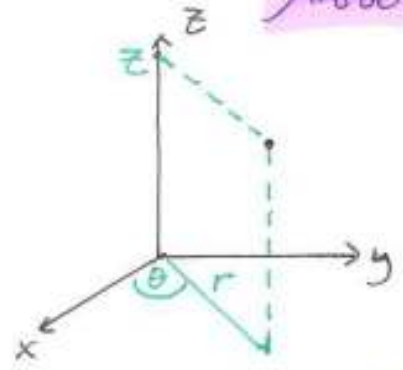
$$z = z_0 \text{ (מישור)}$$

$$r = r_0 \text{ (גליל)}$$

$$\theta = \theta_0 \text{ (חצאי מישור)}$$

25.1.2007

אינטגרל משולש בקורדינאטות גליליות



נקודה (x, y, z) נהפכת ל (r, θ, z) .

משטחים שווי קוארדינטה:

1. $z = z_0$ מישור מקביל למישור xy

2. $\theta = \theta_0$ חצי מישור

3. $r = r_0$ מעטפת של גליל אינסופי שצירו ציר z

יהי G גוף סגור וחסום במרחב.

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dv = \lim_{\max(\Delta v_k) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(r_i^*, \theta_i^*, z_i^*) \Delta v_i$$

נותר כמובן להבין איך לחשב נפח אלמנט נפחי במערכת גלילית, כלומר את Δv .

$$\Delta v = r \Delta r \Delta \theta \Delta z$$

אלמנט נפח הוא בקירוב תיבה שמימדיה הם $\Delta z, \Delta r, r \Delta \theta$.

נוסחת אינטגרל משולש במערכת גלילית

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dv = \iiint_{\text{appropriate limits of } r, \theta, z} r dz dr d\theta$$

(נשים לב שזה מאוד דומה ל $dx dy dz$, אבל חשוב לשים לב ל r).

דוגמאות:

חשבו באמצעות קורדינאטות גליליות את האינטגרל

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx$$

פתרון: נרשום את תחום האינטגרציה (זהו גוף במרחב).

$$G = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$$

נשים לב שהגוף שלנו חסום על ידי 6 משטחים...

$z = 0$ - מלמד אותנו שהתחום שלנו הוא מעל המישור.

$z = 9 - x^2 - y^2$ - פרבולואיד אליפטי - $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (אפשר להסתכל בדף משטחים). המינוס הופך אותו על פניו, וה 9 מעלה אותו 9 יחידות מעלה.

כדי לדעת את חיתוך עם המישור $z = 0$, (xy) , אזי נציב, ונקבל כי החיתוך הוא $9 = x^2 + y^2$, עיגול שרדיוסו 3.

כעת, כשנותרו לנו רק x ו y , הכי פשוט לשרטט שרטוט בדו מימד.

$y = \sqrt{1 - x^2}$ מקביל ל $y^2 + x^2 = 1$, עבור $y \geq 0$ (החצי החיובי של מעגל היחידה). עבור

$y = -\sqrt{1 - x^2}$ נקבל באופן דומה את החצי השלילי של מעגל היחידה.

אם נשרטט כאן את התחום של x , נראה שמדובר בכל מעגל היחידה.

בקצרה, זה נראה כמו קליע.

כעת, נבצע רישום גלילי של התחום G.

נזכור כי $r = x^2 + y^2$ ולכן

$$0 \leq z \leq 9 - r^2$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

כעת נרשום רישום גלילי של האינטגרל

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{9-r^2} r^2 \cos^2 \theta (rdz d\theta dr) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{9-r^2} r^3 \cos^2 \theta (dz d\theta dr) = \\ &\int_0^1 \int_0^{2\pi} (9 - r^2) r^3 \cos^2 \theta d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (9 - r^2) r^3 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta dr = \dots = \frac{50}{24} \pi \end{aligned}$$