

25.10.2006

פונקציות טריגונומטריות

במחשבון בד"כ יש 3 אופציות:

1. deg – מעלות – מניח חלוקת המעגל ל-360 חלקים, כל אחד מעלה. למה עשו 360? זה מספר עם הרבה מחלקים. וזה גם קרוב ל-365.

$$360^\circ = 2\pi$$

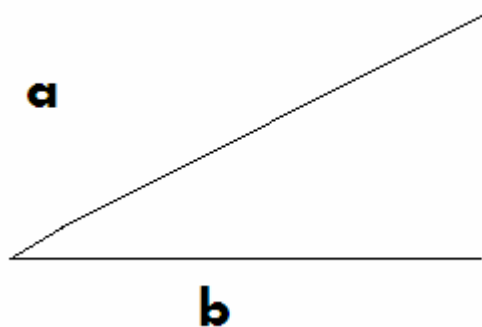
$$1^\circ = \frac{2\pi}{360}$$

$$\alpha^\circ = \frac{2\pi}{360} \alpha = \frac{\pi}{180} \alpha$$

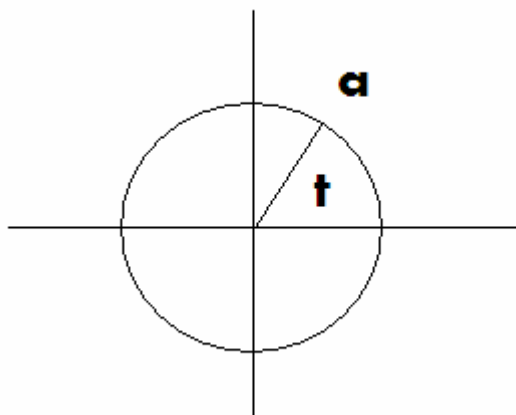
2. gra – לא שימושי

3. rad – רדיאנים. רדיין $\sim 57^\circ$. $2\pi = 360$ (כשמדברים ב π - זה רדיאנים). אנחנו נתעסק רק ברדיאנים.

נניח שיש לנו משולש ישר זווית. היחס בין שתי הצלעות שמול הזווית הישרה, נקבע ע"י הזווית.



אם θ היא הזווית בין a לב, אזי היחס $\frac{b}{a}$ נקבע על ידי.



נתבונן במעגל היחידה (הרדיוס הוא 1). מתקיים:

$$a = (\cos t, \sin t) \quad (t \text{ יקרא גם } \theta).$$

מתקיים, ממשפט פיתגורס:

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

לפעמים רושמים גם $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. (זה זהה למה שרשמנו קודם).

ננסה לחשב כל מיני זוויות, ואת הערכים.

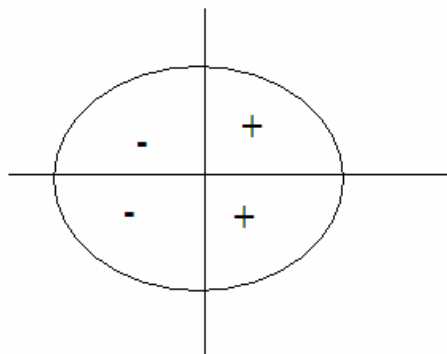
בזווית של $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$. מדובר במשולש הזהב (30,60,90). מדובר במשולש הזהב – ולכן היתר

הוא $\frac{1}{2}$ - ועל כן $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. נתון כי

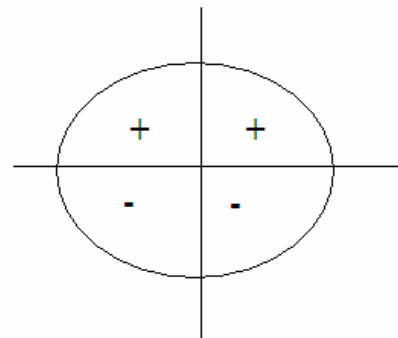
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(*) – אנחנו פוסלים את האופציה השלילית, כי אנו נמצאים ברביע הראשון.
נשים לב:



cos



sin

	0	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$0 \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta := \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



tan

נשים לב :

נתבונן בהזזת הזווית $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ שמאלה מהרביע הראשון לשני. אם הנקודה המקורית היתה

$(\cos \theta, \sin \theta)$, אזי המוזזת תהיה $\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. נשים לב שהמשולש שנוצר חופף למשולש המקורי. כלומר - $\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

נתבונן בהפיכת θ ל $-\theta$ (מהרביע הראשון לרביעי) - מה שנקבל זה שאם הנקודה המקורית היתה $(\cos \theta, \sin \theta)$, אזי המוזזת תהיה $(\cos \theta, -\sin \theta)$.

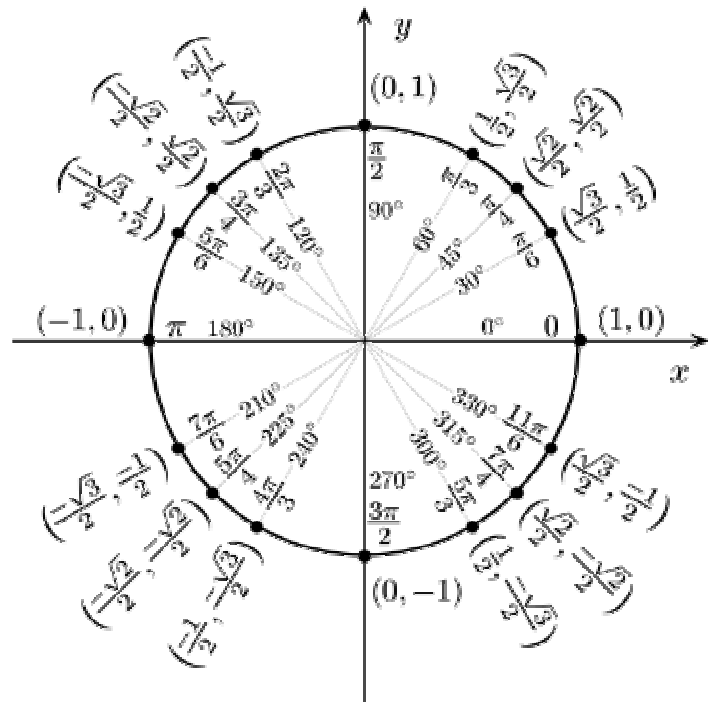
נתבונן בהפיכת θ ל $\theta + 180^\circ = \theta + \pi$ (מהרביע הראשון לשלישי) - אז אם הנקודה המקורית היתה $(\cos \theta, \sin \theta)$, אזי המוזזת תהיה $(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) = (-\cos \theta, -\sin \theta)$.

נשים לב למסקנה - $\tan(\theta + \pi) = \frac{\sin(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$.

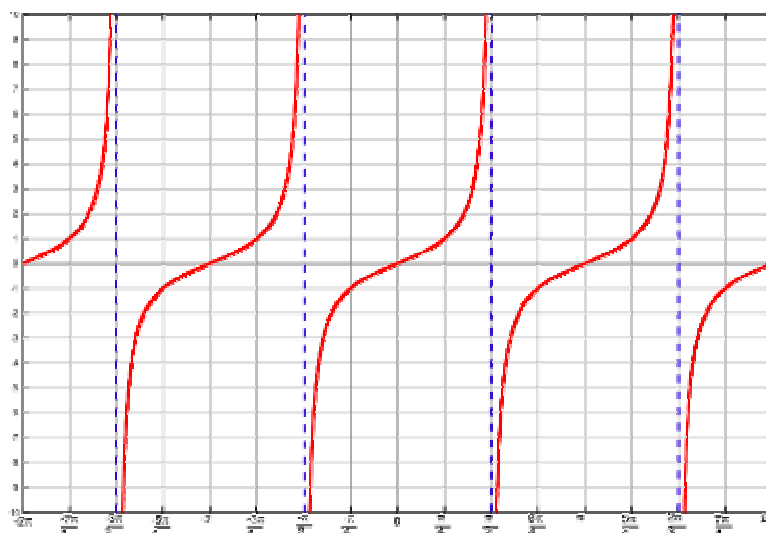
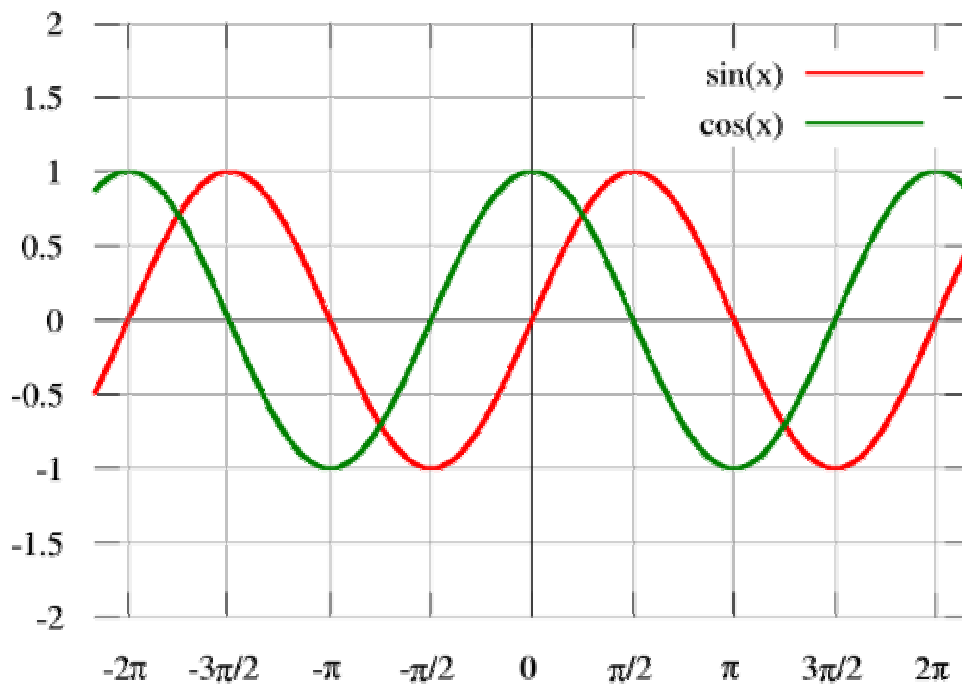
עוד קצת נוסחאות: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$.

כמובן, עקב המחזוריות של המעגל - אם $k \in \mathbb{N}$, אז $\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos \theta$ ו $\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = \sin \theta$. כמובן שזה

יתקיים גם ל $\tan$ (אבל שם זה קורה כבר בחצי סיבוב).



בואו נחשוב קצת על הגרפים של הפונקציות הטריגונומטריות:



זהויות טריגונומטריות:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

מסקנות:

$$\alpha = \beta : \cos(\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\alpha = \beta : \sin(\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

אבל מתקיים גם:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

ועל כן:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \beta}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \beta}{2}$$

נוסחאות שימושיות:

$$t := \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{נסמן}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$$

נוכיח את השיויון הראשון:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1} = \\ &= \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

נניח שידוע כי $\sin \theta = \frac{1}{2}$. לכמה שווה θ ? קודם כל, ברור כי יש שתי אופציות (רק בטווח $(0..2\pi)$).

$$\theta = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{כי נזכר ונראה,}$$

תהי α זווית **נתונה**. מחפשים זווית θ כך ש $\sin \theta = \sin \alpha$, אזי נובע, כי $\theta = \alpha + k \cdot 2\pi$, או $\theta = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$.

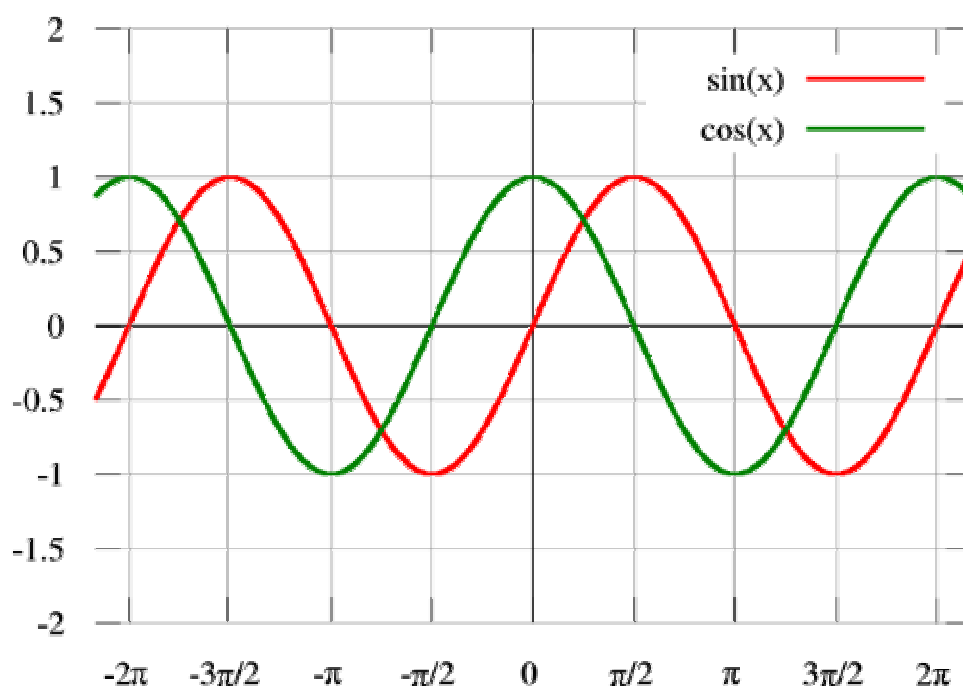
באופן דומה, אם α נתונה, ומחפשים θ כך ש $\cos \theta = \cos \alpha$, אזי נובע $\theta = \alpha + k \cdot 2\pi$ או $\theta = -\alpha + k \cdot 2\pi$.

נניח ואומרים לך - $\sin \theta = A$. תביא θ . קודם כל - אם $A > 1$ או $A < -1$ - עונים לו - אין כאלה.

נניח ש $\sin \theta = \frac{1}{3}$. אבל אין $\frac{1}{3}$ בטבלא. מה עושים? מדליקים מחשבון, ולוחצים - $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ או

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. כמובן שנקבל רק תשובות בין $[-2\pi, 2\pi]$.

תזכורת:



המלצה: כאשר רוצים לדעת משהו אינטלגנטי לדוגמא על $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, עדיף להסתכל על מעגל היחידה, ולא על הגרף.

שאלה: בהינתן ערך בטוח $[-1, 1]$, איך אפשר לאתר את התשובה לשאלה – איזה θ ות מתאימות ל $\cos \theta = \frac{2}{5}$. ברור לחלוטין כי יש ∞ פתרונות. הבעיה היא שאין לנו אף פתרון בטבלא בצורה מדויקת, וגם אין לנו מחשבון. אנו נרצה להפוך את הפונקציה $\cos$. כמו שעשינו $x^2 = 5$, אזי $x = \pm\sqrt{5}$, גם כאן נרצה להפוך את הפונקציה. אבל גם כאן יש לנו את אותה בעיה – למשוואה $x^2 = 5$ יש שני פתרונות (פונקצית החזקה ופונקצית $\cos$ הם לא חח"ע). לכן הגדרנו את $\sqrt{\cdot}$ כפונקציה $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.

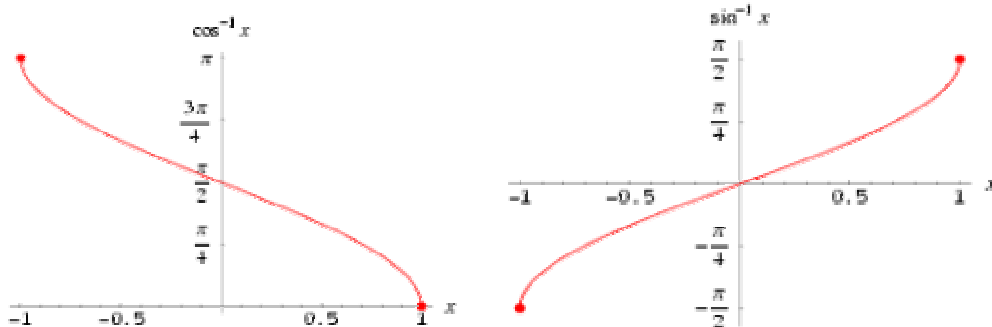
נגדיר מעכשיו את $\sin, \cos$ כך, כדי שהן יהיו חח"ע ועל:

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

נשים לב שבהגדרה זו $\sin$ אי-זוגית.

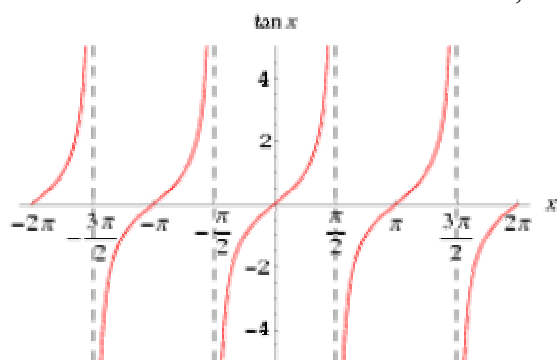
עכשיו נתבונן בגרפים של $\arcsin$ ו $\arccos$:



$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

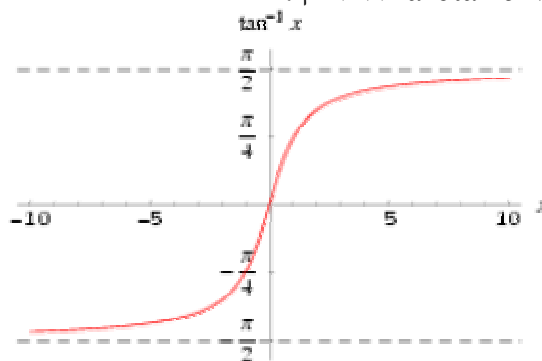
כנ"ל, נזכר ב $\tan \theta$:



$$\tan \theta : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

הפעם נגדיר את

ואז $\arctan \theta$ נראית כך:



$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

עכשיו – ננסה לענות על השאלות –

כמה שווה $\arcsin(-1)$? נשאל – כמה פעמים נצטרך לעבור כדי שנגיע ל $(0, -1)$? ונגיע למסקנה
 אבל אני מחפש ערך בטווח $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. לכן נבחר $k = -1$, ונקבל

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

כעת, ננסה לחשב את $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. נזכר כי $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, ועל כן

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$
 ועל כן $\theta = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

כעת, ננסה לחשב את $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. נזכר כי $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ועל כן $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

כעת ננסה לחשב את $\arcsin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. אבל $\frac{\pi}{3} > 1$ ו $\arcsin : [-1, 1]$ אז עבדו עלינו בעיניים –
 ויהיה דבר כזה במבחן.

שאלה: מה יש להגיד על $\arcsin\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$

מה נגיד על $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$? לכאורה $\frac{7\pi}{6}$. אבל לא! כי $\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ועל כן

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$$

טוב, מה יש לנו להגיד על $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$? מכיוון ש $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ מוגדר, אזי התשובה
 בהכרח תהיה $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$

וכעת $\arctan(\tan \pi)$? זה מוגדר. אבל $\tan \pi = 0$, ו $\arctan(0) = 0$

לעומת זאת, $\tan(\arctan(u)) = u$

מה נגיד על $\cos(\arcsin(x))$?

$$\cos^2 \theta + x^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - x^2 \quad \text{ידוע כי}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{ידוע כי } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ ועל כן } 0 \leq \cos(\arcsin x) \text{ ועל כן:}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

לתלמיד החרוץ:

$$\sin(\arccos(x)) = ?$$

$$\tan(\arccos(x)) = ?$$

$$\cos(\arctan(x)) = ?$$

$$\sin(2 \arcsin x) = ?$$

משוואת ישרים

'כשאני כותב את המשוואה $y = mx + n$, למה אני מתכוון?'

איב גדין, ד"ר למתמטיקה ופילוסוף.

'בא לי חד משמעית לחנוק את המורים שלכם מהתיכון'

איב גדין, ד"ר למתמטיקה ורוצח סדרתי (a_n)

$$y = mx + n \Leftrightarrow \{x, mx + n \mid x \in \mathbb{R}\}$$

m – השיפוע. הנקודה $(0, n)$ נמצאת על הקו (עבור $x = 0$)

אי אפשר לקבל כל ישר – לדוגמא, אי אפשר לקבל ישר מקביל לציר y (כי אז צריך מקדם 0 ל y , ויש לנו 1).

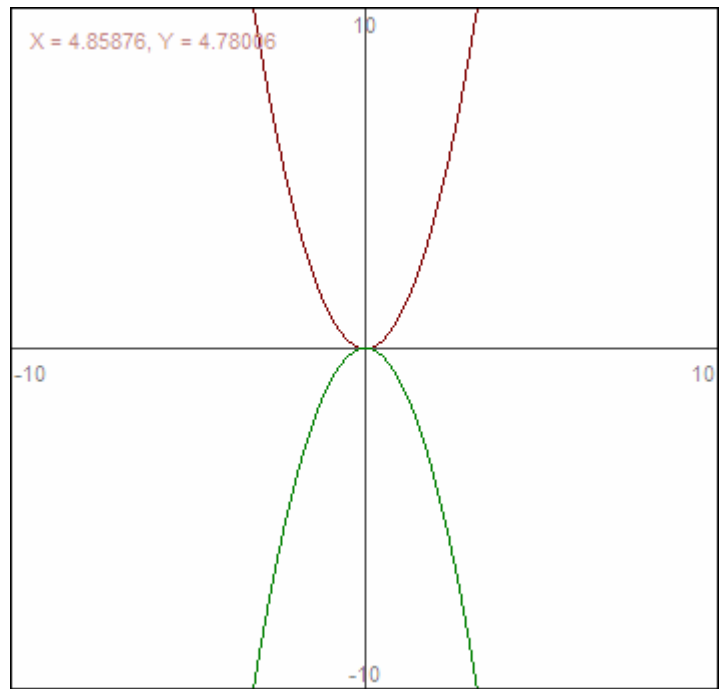
אם רוצים משוואה כללית של כל קו ישר במישור, נשתמש ב $ax + by = c \Leftrightarrow \{(x, y) \mid ax + by = c\}$ $((a, b) \neq (0, 0))$.

מתי שני ישרים מקבילים? כאשר יש להם אותו שיפוע (m).

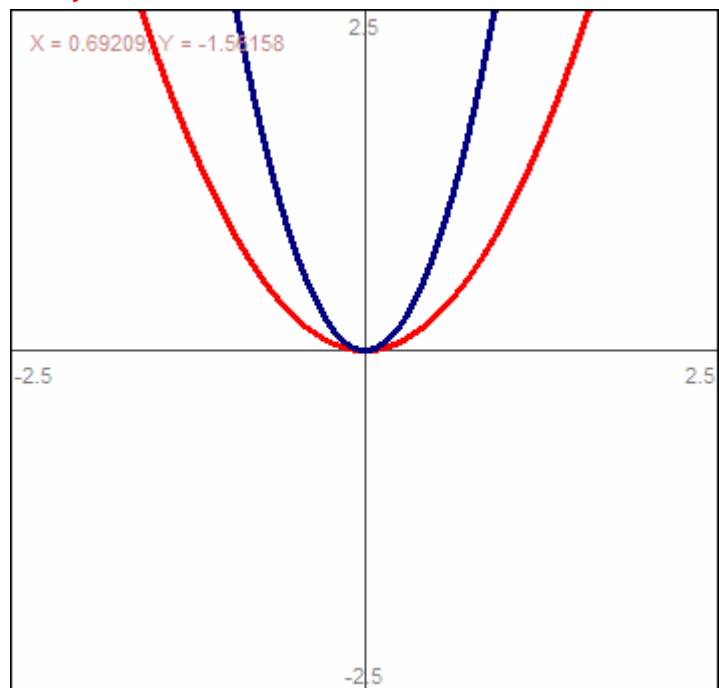
הערה: לא כל סמיילי הוא פרבולה. תשאלו את חברת החשמל.

אם נתבונן ב $y = ax^2, a \neq 0$, אזי $\{(x, ax^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ זו פרבולה. אם $a > 0$, אזי הפרבולה

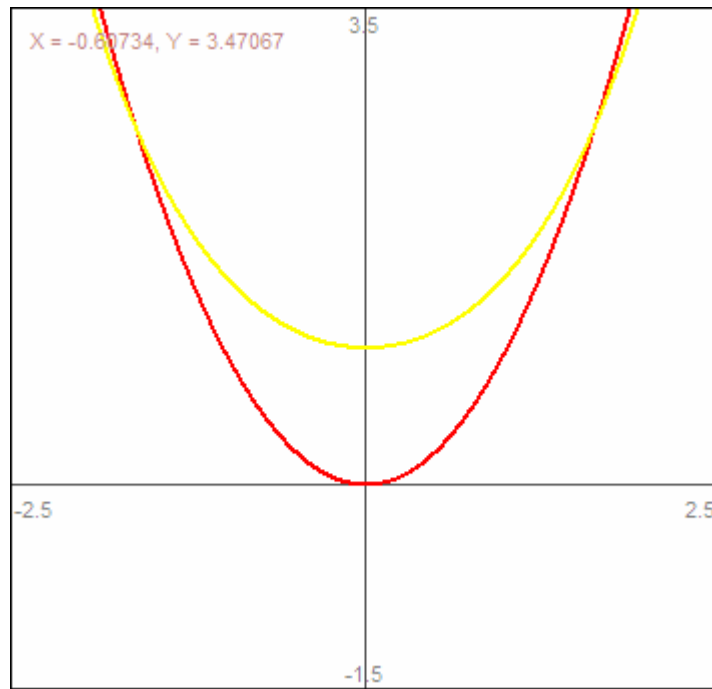
מחייכת. אם $a < 0$, אזי הפרבולה בוכה. לדוגמא: $y = x^2$ לעומת $y = -x^2$



ככל ש a גדול יותר, הפרבולה יותר צרה. לדוגמא - $y = x^2$ לעומת $y = 3x^2$



נראה מה ההבדל בין משוואה של חוט $y = \left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right)$ עבור $a = 1$ מול $y = x^2$?



נשים לב שהמשוואה הכללית של פרבולה היא $y = a(x + k)^2 + c_1 = ax^2 + (2ak)x + (ak^2 + c_1)$ כדי להזיז אותה מטה ומעלה.

$$b := (2ak), c := ak^2 + c_1$$

ואז: $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ היא נוסחת הפרבולה הכללית במישור, לאו דווקא עם קודקוד בראשית הצירים.

נזכור:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right), \Delta := b^2 - 4ac \end{aligned}$$

$$\Delta := \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

נבחין בין 3 מקרים:

$\Delta < 0$, אז $-\Delta > 0$, ל y ול a יש אותו הסימן בלי תלות ב x .

$\Delta = 0$, אז $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$, ל y ול a יש אותו סימן, מלבד עבור $x = -\frac{b}{2a}$, ואז $y = 0$.

$$\Delta > 0, \Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2, \text{ ואז } \\ = ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_u - \underbrace{\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}_v\right)$$

$$\left. \begin{aligned} &^2 - v^2 = (u - v)(u + v) \right] \\ &\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

ואז הפרבולה חותכת את ציר ה x ב x_1, x_2 .
בנוסף, כאשר $x \in (x_1, x_2)$, אזי y ו a בעלי סימן הפוך, ולהפך.

8.11.2006

נושאים:

1. וקטורים, מכפלה סקלרית, מכפלה וקטורית
2. מערכות קורדינאטות
- a. קרטיזיות
- b. גליליות
- c. כדוריות

מרחק בין שתי נקודות במרחב - $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ הוא:

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x_1 - x_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y_1 - y_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z_1 - z_2}\right)^2}$$

משוואת מעגל במישור:

מעגל - אוסף כל הנקודות שמרחקן מנקודה נתונה (x_0, y_0) הוא קבוע (r) , כלומר:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

כדור במרחב - אוסף כל הנקודות (x, y, z) שמרחקן מנקודה נתונה (x_0, y_0, z_0) הוא קבוע (r)

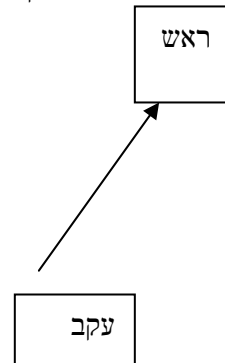
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

דוגמא: $\{(x, y, z) \mid 2(x)^2 + 2(y + 3) + 2z^2 = 1\}$. מה זה? כדור שמרכזו $(0, -3, 0)$ ורדיוסו

$$\text{הוא } \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ כי זה שווה ל } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. (x - 0)^2 + (y - (-3))^2 + (z - 0)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

וקטורים במישור ובמרחב

וקטור זה קטע מכוון. קטעים מכוונים בעלי אותו גודל וכיוון מייצגים את אותו הוקטור. נשים לב שאפשר לצייר את אותו הוקטור המון פעמים, וזה יהיה עדיין אותו וקטור. נסמן וקטור כך:



מסמנים וקטור כך $\vec{v}$.

נורמה של וקטור היא $\|\vec{v}\|$ - והיא המרחק בין העקב לראש.

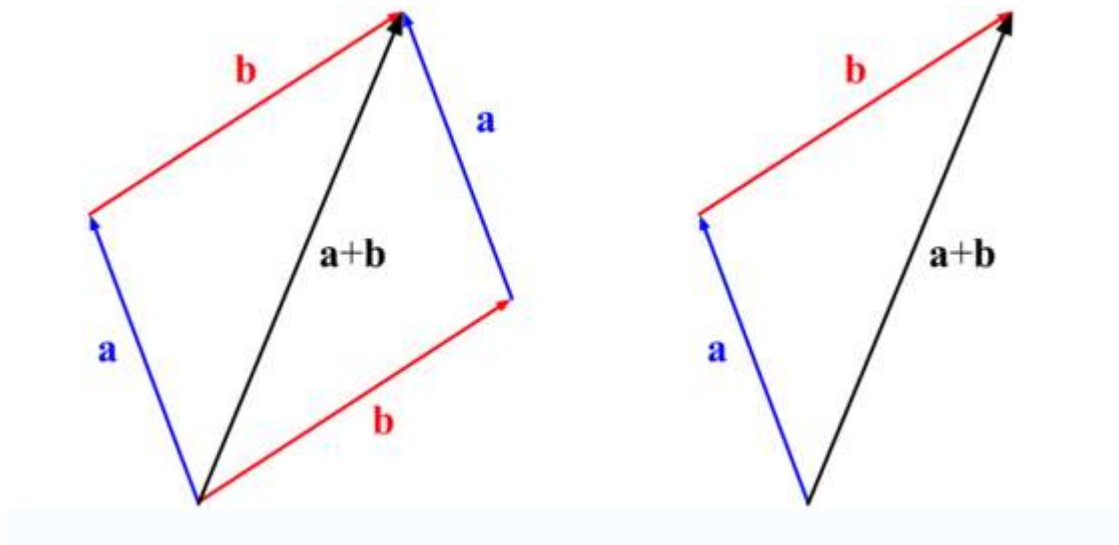
לדוגמא $\|\vec{w}\| = 2\|\vec{v}\|$ הדבר אומר שהאורך של w כפול משל v .

ברור כי $\|\vec{v}\| \geq 0$ תמיד.

בנוסף, אם $\|\vec{v}\| = 0$ אז $\vec{v} = \vec{0}$ (הוא הוקטור שעקבו וראשו מתלכדים)

פעולות בסיסיות של וקטורים:

1. חיבור וקטורים
 2. הכפלה בסקלר (סקלר זה מספר)
- איך מחברים וקטורים? באמצעות כלל המקבילית:

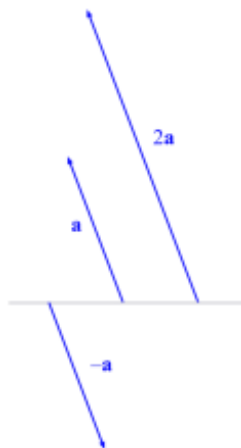


ומי שמעדיף אלגברה, אז מחברים אותם קוארדינטה קוארדינטה.

איך מבצעים חיבור?

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$$

כאשר $-\vec{w}$ הוא אותו וקטור בכיוון ההפוך, כמו שאנו רואים משמאל:



נשים אותם עקב לעקב, ואז הוקטור שעקבו הוא הראש של w וראשו הוא הראש של v הוא $\vec{v} - \vec{w}$.

כפל של וקטור בסקלר:

מה זה $k\vec{v}$?

1. $k > 0$ אז מדובר בוקטור מקביל לוקטור $\vec{v}$ וגודלו k פעמים הגודל של $\vec{v}$

2. $k < 0$ אז מדובר בוקטור שכיוונו הפוך לכיוון $\vec{v}$ וגודלו $|k|$ פעמים גודלו של $\vec{v}$.

תכונות:

$$\|k\vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\| \quad \bullet$$

וקטור שעקבו בראשית

$$\left\langle x, y, z \right\rangle \text{ זהו סימון לוקטור שעקבו בראשית וראשו בנקודה } (x, y, z). \text{ לעיתים נסמן } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

משפט: $\vec{v} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ ו $\vec{u} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ וקטורים שעקבם בראשית אז:

$$\vec{v} + \vec{u} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \rangle$$

$$k\vec{v} = \langle kx_1, ky_1, kz_1 \rangle$$

וקטור שעקבו איננו בראשית

נניח שיש לנו וקטור שעקבו בנקודה $A = (x_1, y_1, z_1)$ וראשו בנקודה $B = (x_2, y_2, z_2)$, אז כותבים את זה ככה $\vec{AB}$ (עם חץ מחובר ביניהם).
איך נרשום את AB הנ"ל בצורה של וקטור שעקבו בראשית?
 $AB = OB - OA = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle - \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ (כאשר OB הוא הוקטור שעקבו בראשית וראשו בעקב B), ובסיום, זה יוצא כמובן $AB = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$.

לדוגמא, נניח ויש לנו את $A(1, 2), B(3, -5)$. מהו הוקטור AB (ברישום כוקטור שעקבו בראשית)?
 $AB = \langle 3 - 1, -5 - 2 \rangle = \langle 2, -7 \rangle$

תרגילון: מצאו את הקודקוד הרביעי של המקבילית $ABCD$ שקודקודיה $A(1, 1), B(2, 3), C(0, 5)$. נסמן $D(x, y)$.

$$\text{ידוע כי } \vec{AB} = \langle 1, 2 \rangle. \vec{AB} = \vec{DC} \\ \langle 1, 2 \rangle = DC = \langle 0 - x, 5 - y \rangle = \langle -1, 3 \rangle \text{ ומכאן } x = -1, y = 3.$$

נורמה של וקטור שעקבו בראשית:

$$\|\langle x, y, z \rangle\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

וקטור יחידה

וקטור יחידה הוא וקטור שהנורמה שלו הוא 1. בהנתן וקטור $\vec{v} \neq 0$, נמצא וקטור יחידה בכיוון של $\vec{v}$ ע"י:

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

הוכחה – טריוואלית.

תרגיל: מצאו וקטור יחידה בכיוון הוקטור $\langle 1, -1, 0 \rangle$.

$$\text{פתרון: } \frac{1}{\sqrt{1+1+0}} \langle 1, -1, 0 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle$$

נגדיר את וקטורי היחידה הבאים:

$$\hat{x} = \vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{y} = \vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{z} = \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

נשים לב שלכל וקטור מתקיים:

$$\vec{v} = \langle x, y, z \rangle = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

זווית בין וקטורים (שאינם 0)

הגדרה: יהיו $\vec{v}, \vec{w}$ וקטורים שונים מ $\vec{0}$, הזווית בין $\vec{v}$ ל $\vec{w}$ היא הזווית θ שנקבעת על ידם ומקיימת $0 \leq \theta \leq \pi$.

הגדרה - מכפלה סקלרית: יהו $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ אז נגדיר $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ כאשר θ היא הזווית ביניהם.

למה קוראים למכפלה סקלרית כמכפלה סקלרית? כי היא מחזירה סקלר. אפשר להסתכל עליה גם כמכונה. (אבל עדיף שלא. א.ש.)

לדוגמא: נתבונן $\vec{v} = \langle 1, 1 \rangle, \vec{u} = \langle 0, 2 \rangle$ אזי

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

משפט:

אם $\vec{v} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle, \vec{w} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ אז $\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
למשל בדוגמא הקודמת: $\langle 0, 2 \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle = 2$.

23.10.2006

zivg@math.huji.ac.il

מנהלה: אין חובת נוכחות. אין חובת הגשה (כי אין בודקים). 2 בחנים.

פונקציות:

דוגמא: מבחן בקורס מת"פ – פונקציה מתלמיד לציון.

דוגמא 2: $A = \{a\}$. $B = \{b_1, b_2\}$. נגדיר $f(a) = b_2$.

הגדרה: תהינה A, B קבוצות. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא העתקה המתאימה לכל איבר $a \in A$

איבר יחיד $b \in B$. נסמן $f(a) = b$. A נקרא תחום ההגדרה של f , B נקרא תחום התמונה של f .

פונקציה ממשית הינה $f: R \rightarrow R$.

דוגמא: תהי $f: R \rightarrow R$ המוגדרת ע"י $f(x) = 1$.

דוגמא: $\text{sgn}: R \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} x > 0, 1 \\ x < 0, -1 \end{cases}$$

הגדרה: פונקציה $f: A \rightarrow B$ כך שלכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש $f(a) = b$ נקראת פונקציה על.

הגדרה: פונקציה $f: A \rightarrow B$ כך שלכל $a_1 \neq a_2$ מתקיים $f(a_1) \neq f(a_2)$ תקרא פונקציה חד-חד ערכית.

פונקציות אלמנטריות

$$1. \text{ פולינום - } p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

2. פונקציות ראציונלית – פונקציה רציונלית R היא מנה של שני פולינומים – כלומר

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ עבור פולינומים } p, q. \text{ כמובן שנדרוש } q(x) \neq 0 \text{ לכל } x. \text{ דוגמאות:}$$

$$a. R(x) = \frac{1}{x}$$

$$b. R(x) = x^m \text{ עבור } m \neq 0$$

$$c. R(x) = \frac{1-x^4}{1+x} \text{ הפונקציה מוגדרת } x \neq -1. \text{ אבל עבור } x \neq -1 \text{ מתקיים}$$

$$R(x) = 1 - x + x^2 - x^3$$

שורשים:

$y = \sqrt[n]{x}$ עבור n טבעי – y הוא המספר האי שלילי (היחיד!) המקיים $y^n = x$.

איך מחלקים פולינומים?

$$\begin{array}{r}
 x^2 \\
 \hline
 x^3 + x^2 - x + 2 \quad | \quad x + 2 \\
 \\
 x^2 - x + 1 \\
 \hline
 - \left\{ \begin{array}{r} x^3 + x^2 - x + 2 \\ x^3 + 2x^2 \end{array} \right. \quad | \quad x + 2 \\
 \\
 - \left\{ \begin{array}{r} -x^2 - x + 2 \\ -x^2 - 2x \end{array} \right. \\
 \\
 - \left\{ \begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \\ \hline 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

שלב 1: מחלקים את הביטוי עם החזקה הגדולה ביותר בפולינום המחולק (X^3) ב- X שהוא הביטוי עם החזקה הגדולה ביותר בפולינום $x+2$ (המחלק). את המנה (X^2) נרשום מעל לתרגיל (בדיוק מעל X^3).

שלב 2: מכפילים את המנה X^2 בפולינום $x+2$ ואת המכפלה שקיבלנו מחסרים מהפולינום הראשון (המחולק).

שלב 3: בהפרש שקיבלנו ($-X^2 - X + 2$) נחלק את $-X^2$ ב- X (שהוא הביטוי עם החזקה הגדולה ביותר של $x+2$). את המנה ($-X$) נרשום מעל התרגיל. כמו מקודם, מכפילים את המנה בפולינום $x+2$ ואת המכפלה שקיבלנו מחסרים מהפולינום $-X^2 - X + 2$.

שלב 4: בשלב זה עושים את אותן פעולות כמו בשלבים הקודמים - אני מקווה שאתה מבין אותם על פי מה שעשינו קודם.

3. פונקציות טריגונומטריות ופונקציות טריגונומטריות הפוכות.
4. הפונקציה המעריכית (חזקה) - יהי $a > 0$. הפונקציה $f(x) = a^x$ היא פונקציה מעריכית. תחום ההגדרה של f כל הישר.
5. הפונקציה הלוגריתמית - יהי $a > 0, 1 \neq a$ נגדיר $y = \log_a(x)$ אם $a^y = x$. עבור $a = e$ נסמן $\log_a(x) = \ln(x)$.
- דוגמא: $2^3 = 8$. $\log_2 8 = 3$. $10^2 = 100$. $\log_{10} 100 = 2$. לכל $a > 0, a^0 = 1$. $\log_a 1 = 0$.
- $\log_4 2 = \frac{1}{2}, 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

חוקי חזקות:

1. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$
2. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2} \quad 3.$$

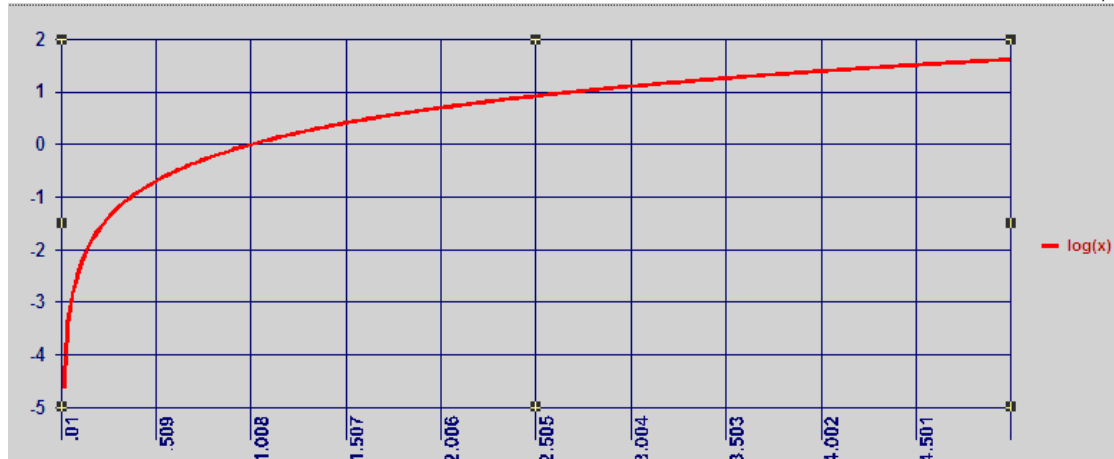
חוקי log

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad 1.$$

$$\log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a x \quad 2.$$

$$\log_a(x) = \log_a b \cdot \log_b(x) \quad 3.$$

קצת גרפים:



הגדרה: תהיינה A ו- B קבוצות, $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ פונקציות. f ו- g הן הפוכות אם לכל $a \in A$ ו- $b \in B$ מתקיים $f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$. ונסמן $g = f^{-1}$.

דוגמא: $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ המוגדרות: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, אזי f, g הפוכות.

דוגמא 2: e^x ו- $\ln x$ הפוכות.

הגדרה: תהיינה A, B, C קבוצות, $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ פונקציות, אזי פונקציית ההרכבה $g \circ f$ היא פונקציה מ- A ל- C המוגדרת ע"י $g \circ f(a) = g(f(a))$.

דוגמא: $f: [0,1] \rightarrow [1,2]$ המוגדרת $f(x) = x + 1$. $g: [1,2] \rightarrow [1,4]$ מוגדרת ע"י $g(x) = x^2$.

$$g \circ f(x): [0,1] \rightarrow [1,4] = (x+1)^2 = x^2 + 1 + 2x$$

מסקנה: e^x ו- $\ln(x)$ הפוכות, ועל כן $\ln(e^x) = x$ וגם $e^{\ln(x)} = x$.

טענה: לפונקציה f על A קיימת פונקציה הפוכה אם "מ" f חח"ע.

30.10.2006

הזזות של פונקציות

הזזה של פונקציה זו בעצם הרכבה של פונקציה עם פונקציה מאוד פשוטה.

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר $g_\alpha(x) = x + \alpha$, $h_\alpha(x) = \alpha x$.

תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה ממשית, ונתסתכל על הפונקציות:

$$g_\alpha \circ f = f(x) + \alpha$$

$$h_\alpha \circ f = \alpha f(x)$$

תחום ההגדרה: לא השתנה, עדיין $\mathbb{R}$.

התמונה: התמונה של $f: A \rightarrow B$ היא $\{f(a) | a \in A\}$

$$\text{Im}(g_\alpha \circ f) = \{g_\alpha \circ f = f(a) + \alpha | a \in A\}$$

$$\text{Im}(h_\alpha \circ f) = \{\alpha f(a) | a \in A\}$$

דוגמא:

תהי $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x) = x^2$.

התמונה של f היא $[0, 4]$. התמונה של $g_\alpha \circ f$ היא, ע"פ ההגדרה לעיל $[\alpha, 4 + \alpha]$. התמונה

של $h_\alpha \circ f$, ע"פ הגדרה, היא $\begin{cases} [0, 4\alpha], \alpha \geq 0 \\ [4\alpha, 0], \alpha < 0 \end{cases}$ (נהוג פשוט שבכתיבה $[a, b]$ אזי $a \leq b$).

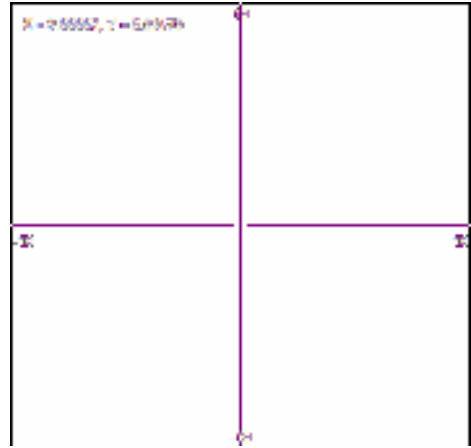
הגדרה: הגרף של פונקציה $f: A \rightarrow B$ הוא קבוצת כל הנקודות $\{(x, f(x)) | x \in A\}$.

איך מציירים את הגרף? בהזזה מהסוג g_α , פשוט מסיטים ב α את ציר ה x . בהזזה מסוג h_α , פשוט 'מכווצים' או 'מרחיבים' את הגרף.

לדוגמא: $y = x^2$, לעומת $g_\alpha \circ f$, עבור $\alpha = 3$



ועכשיו עבור $h_\alpha \circ f$, עבור $\alpha = 0.5$:



סוג נוסף של הזזות:

תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה ממשית, ונסתכל על הפונקציות $f \circ g_\alpha(x) = f(x + \alpha)$ ועל $f \circ h_\alpha(x) = f(\alpha x)$.

תחום ההגדרה של $f \circ g_\alpha$: $x: f \circ g_\alpha$ שייך לתחום ההגדרה של $f \circ g_\alpha = f(x + \alpha)$ אם $x + \alpha \in A$. כלומר, f שייך לתחום ההגדרה של f , $x + \alpha \in A$ שזה שקול ל $x \in A - \alpha \{a - \alpha \mid a \in A\}$. דוגמא: עבור $f = x^2$ בקטע $[-1, 2]$, אזי תחום ההגדרה של $f \circ g_\alpha$ הוא $[-1 - \alpha, 2 - \alpha]$.

תחום ההגדרה של $f \circ h_\alpha$: נחלק לשני מקרים:

$$1. \alpha = 0$$

a. אם $0 \in A$ אזי לכל $x \in R$ מתקיים $\alpha x = 0 \in A$ ולכן תחום ההגדרה הוא כל הישר.

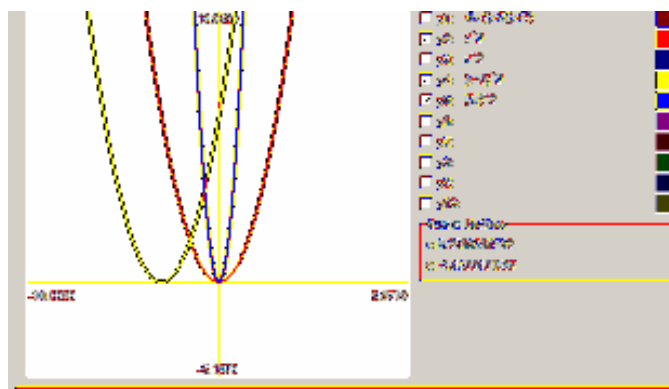
b. אם $0 \notin A$ אזי $f \circ h_0$ לא מוגדר באף נקודה.

$$2. \alpha \neq 0 \quad x - \alpha \neq 0 \quad \text{בתחום ההגדרה אם } \alpha x \in A \text{ אם } x \in \frac{A}{\alpha} = \left\{ \frac{a}{\alpha} \mid a \in A \right\}$$

נחזור לדוגמא של $f = x^2$, תחום ההגדרה של $f \circ h_0 = f(0)$ הוא כל R .

$$\text{עבור } \alpha \neq 0 \text{ הוא } \begin{cases} \left[\frac{-1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha} \right), \alpha > 0 \\ \left[\frac{2}{\alpha}, \frac{-1}{\alpha} \right], \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{כזכור - התחום של } f \text{ היה רק } [-1, 2].$$

נתבונן על הגרפים:



$$f \circ g_3 = (x+3)^2$$

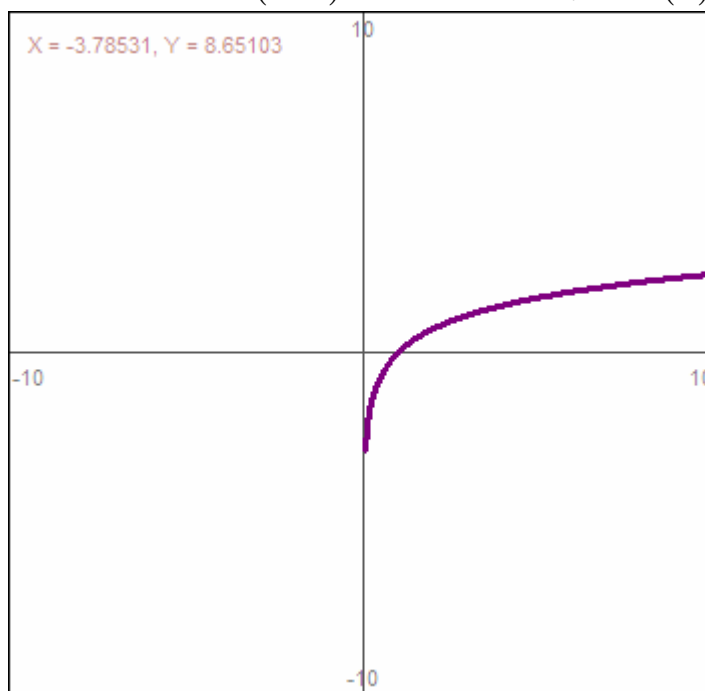
כמובן ש

$$f \circ h_3 = (3x)^2$$

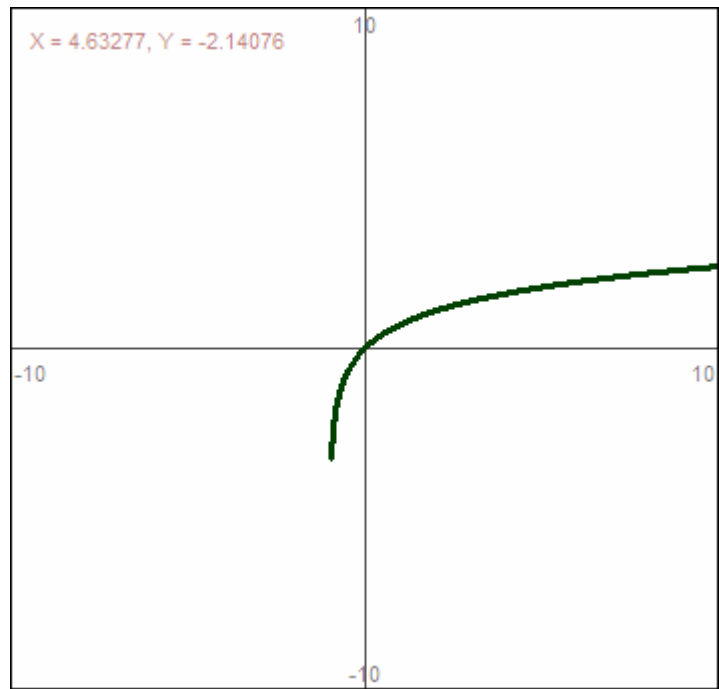
עוד דוגמא: $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x+1) - 1$ (יש כאן אוסף של הזזות).

נגדיר $f_0(x) = \ln(x)$ ונבצע 3 הזזות:

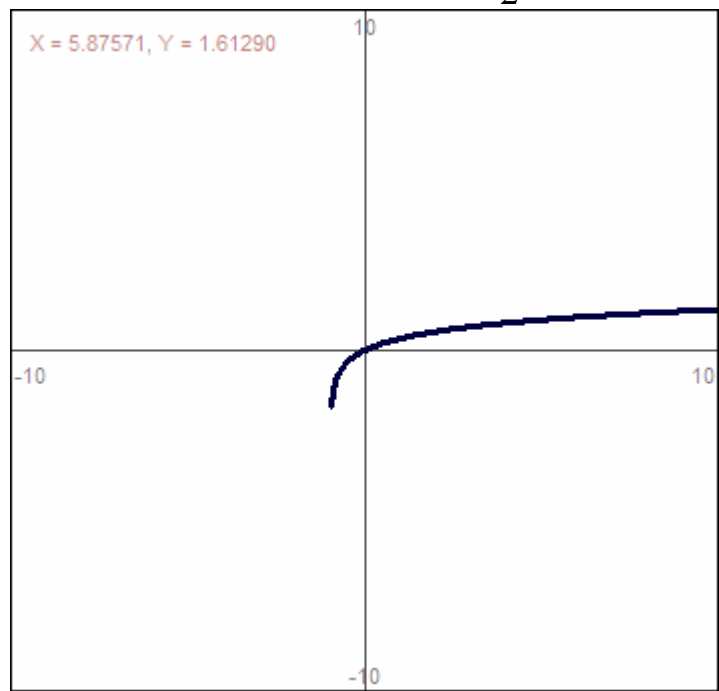
$y = \ln(x)$ תחום ההגדרה הוא $(0, \infty)$



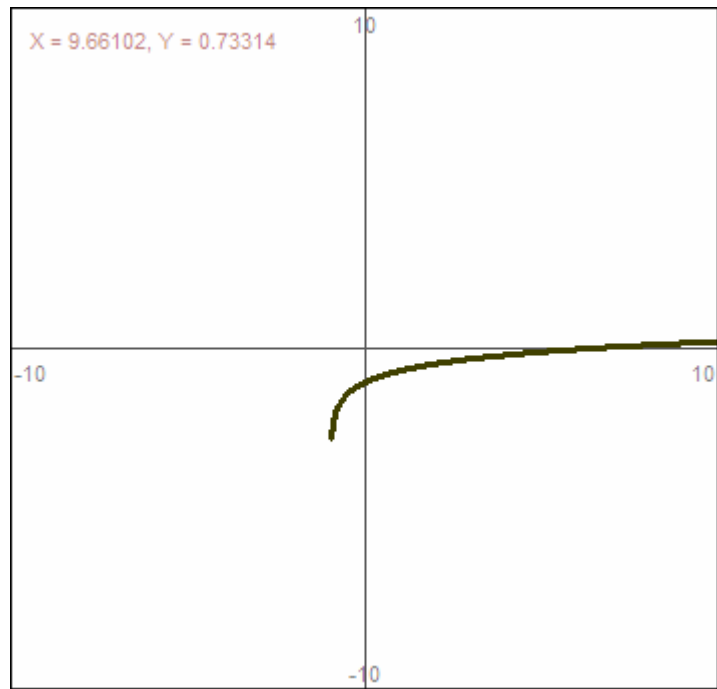
$f_1 = f_0 \circ g_1 = \ln(x+1)$ - תחום ההגדרה $(-1, \infty)$



כעת, $f_3 = h_{1/2} f_2 = \frac{1}{2} \ln(x+1)$ - תחום ההגדרה לא משתנה - $(-1, \infty)$



וכעת - $f = g_{-1} \circ f_3 = \frac{1}{2} \ln(x+1) - 1$



חתכים קוניים:

פתרונות במישור של המשוואה:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

לדוגמא:

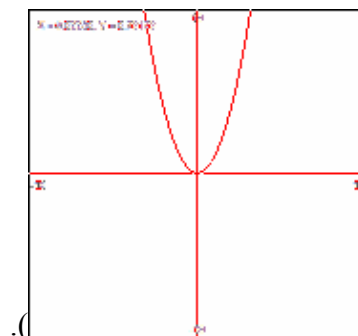
$$x - 1 = 0$$

אנחנו נתעניין ב:

פרבולה



$$y^2 = 4px$$

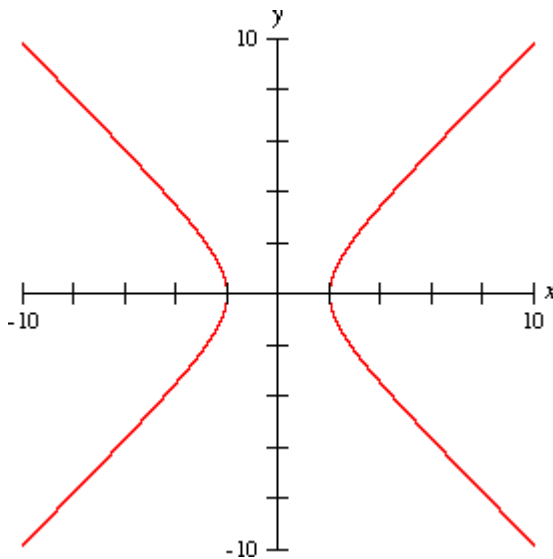
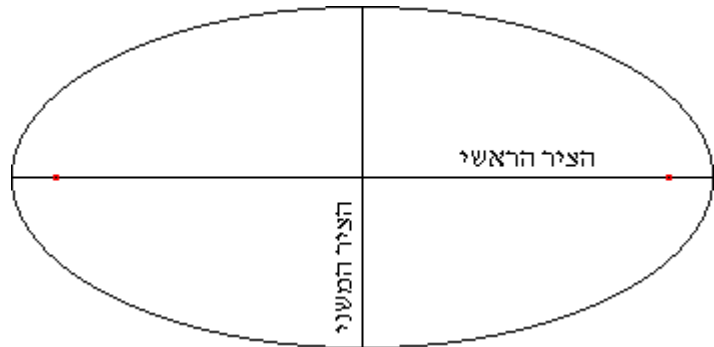


או $x^2 = 4py$ (שנראית כזכור לנו -

מעגל

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{אליפסה}$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{או} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה}$$

מעגל היחידה עם מרכז $(0,0)$ מוגדר כ $x^2 + y^2 = 1$

אזי $(x+1)^2 + y^2 = 1$, יתן לנו מעגל ברדיוס 1 עם מרכז $(-1,0)$.

ועל כן, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ יתן לנו מעגל עם מרכז $(1,0)$.

$x^2 + (y+1)^2 = 1$ יתן לנו מעגל עם מרכז $(0,-1)$.

על כן, מעגל עם מרכז (h,k) נקבל על ידי $(x-h)^2 + (y-k)^2 = 1$.

כמו שהזכרנו מעגל, אפשר להזיז היפרבולה, אליפסה, וכל משוואה אחרת. לדוגמא, היפרבולה, עם מרכז

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{נקבל ע"י } (h,k)$$

$$\text{או } \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 \quad \text{(בהתאם לסוג ההיפרבולה שנרצה לקבל).}$$

מה הצורה של הפתרונות של המשוואה $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$? לא תמיד מתקבלים פרבולה / מעגל / אליפסה / היפרבולה.

לדוגמא, יש משוואות שאין להן פתרון - $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

לדוגמא (2), $y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$, כלומר - קיבלנו שני קווים מקבילים.

איך נדע מה קיבלנו באופן אלגברי?

נשים לב, שבמעגל / אליפסה / היפרבולה מופיעים רק x^2 ו y^2 (ולא xy , x , y).

ולכן משוואה מהצורה $Ax^2 + By^2 + F = 0$ יכולה לייצג מעגל / אליפסה / היפרבולה.

$$2x^2 + 4y^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 4y^2 = 8 \Leftrightarrow \text{דוגמא:}$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

מה שאמרנו עובד באמת כשמדובר בראשית הצירים. מה קורה אם לא מדובר על זה? לדוגמא,

$$(x-h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$$

ועל כן ביטוי מהצורה $x^2 - 2hx + h^2$ ניתן לשנות ל $(x-h)^2$ ולהפטר מהגורם של x ($-2hx$).

$$x^2 - 10x - 4y^2 + 24y - 15 = 0 \text{ דוגמא:}$$

$$x^2 - 10x = x^2 - 10x + 25 - 25 = (x-5)^2 - 25$$

ואז, עם התובנה הזו:

$$x^2 - 10x - 4y^2 + 24y - 15 =$$

$$(x-5)^2 - 25 - 4y^2 + 24y - 15$$

$$\text{כעת, נשים לב כי } -4y^2 + 24y = -4(y^2 - 6y) = -4[(y-3)^2 - 9] \text{ (שכן)}$$

$$y^2 - 6y = y^2 - 6y + 9 - 9 = (y-3)^2 - 9, \text{ ועל כן:}$$

$$x^2 - 10x + 4y^2 - 24y - 15 = (x-5)^2 - 25 - 4(y-3)^2 + 36 - 15 =$$

$$(x-5)^2 - 4(y-3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-5)^2 - 4(y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

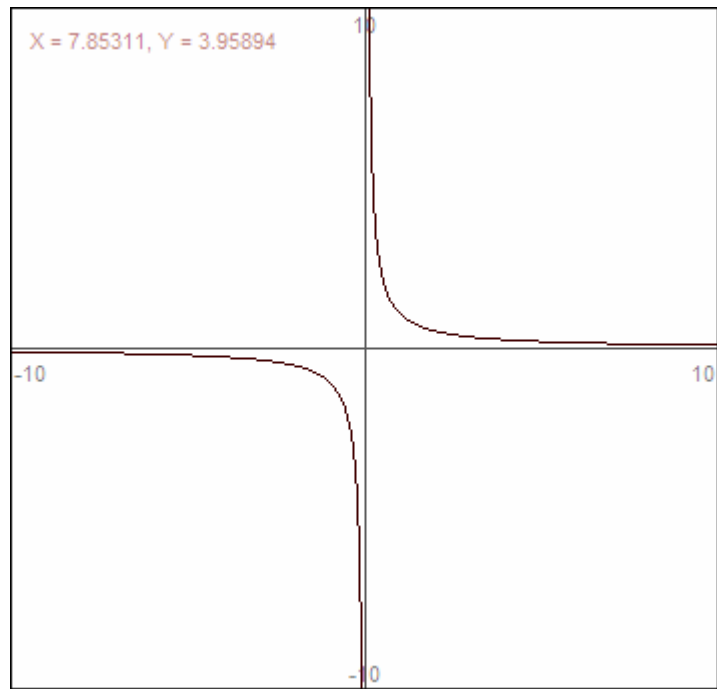
$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{1} = 1$$

עוד חתך:

$$xy - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

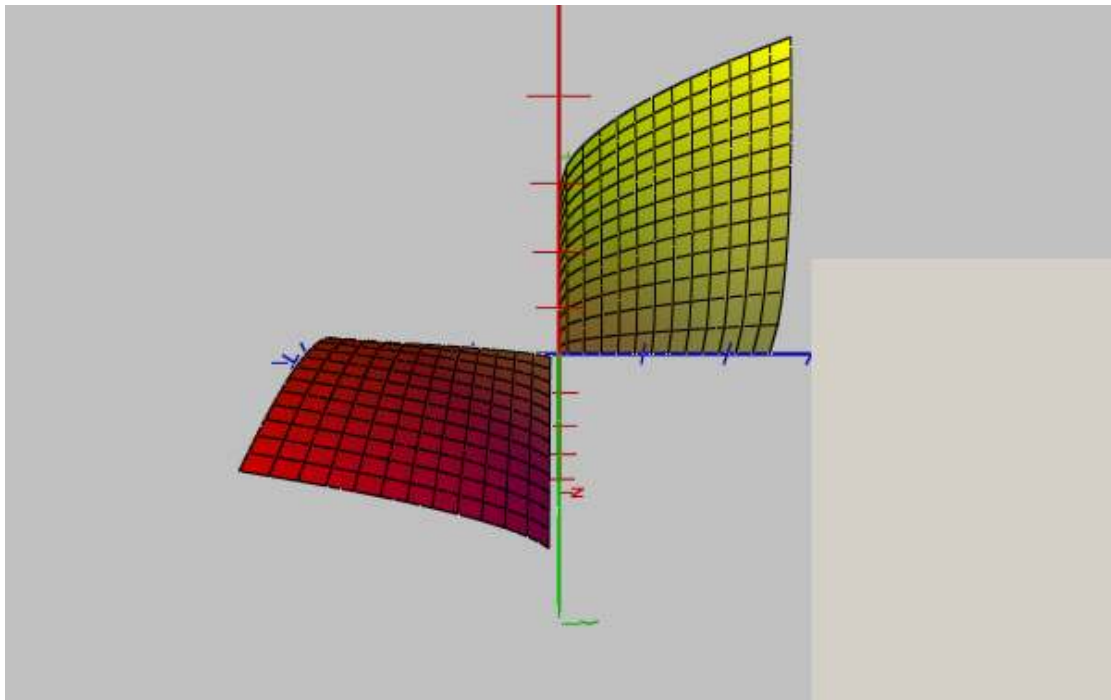
$$xy = 1 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{x}$$



פונקציה ממשית בשני משתנים

היא $f: A \rightarrow B$, כאשר $A \subseteq \mathbb{R}^2, B \subseteq \mathbb{R}$. לדוגמא: $f(x, y) = \sqrt{xy}$.
 (לתלמידי לינארית לשעבר – לא מדובר בהכרח בטרל"נ, למרות הסימונים הדומים).
 f נראית כך:



היא מוגדרת כאשר $xy \geq 0$, כלומר - $x \geq 0 \wedge y \geq 0$ או $x \leq 0, y \leq 0$

6.11.2006

פונקציות בשני משתנים

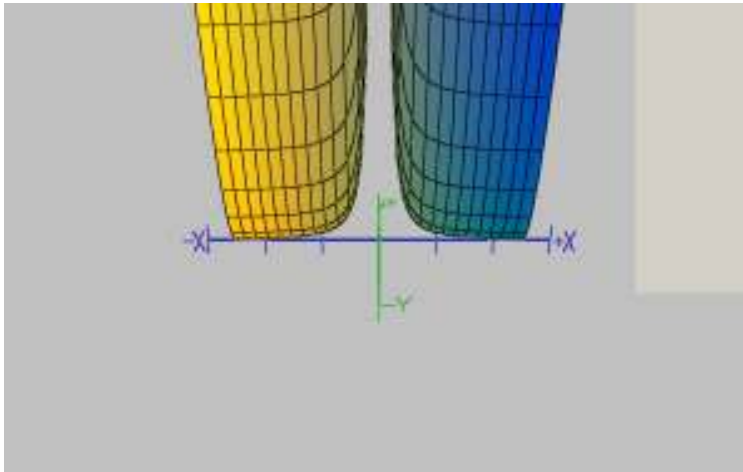
הגדרה: פונקציה ממשית בשני משתנים היא פונקציה $f: A \rightarrow B$ כך ש $A \subset \mathbb{R}^2$ ו $B \subset \mathbb{R}$.
לדוגמא:

1. $f(x, y) = x$

2. $f(x, y) = x + y$

3. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

"תיאור פונקציה"



1. ציור גרף. לדוגמא -

אבל קשה לצייר בלי מחשב.

2. הבנת תחום ההגדרה – לדוגמא :

a. $f(xy) = \sqrt{xy}$, ואז $f(x, y)$ מוגדר אמ"מ

$$xy \geq 0 \Leftrightarrow x, y \geq 0 \vee x, y \leq 0$$

b. $g[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (פונקציה במשתנה 1). נגדיר $h(x, y) = \sqrt{y - g(x)}$.

מוגדרת על (x, y) אמ"מ

i. $x \in [0, 1] \Leftrightarrow g$ בתחום ההגדרה של

ii. $y - g(x) \geq 0 \Rightarrow y \geq g(x)$

c. תהיינה $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ונגדיר $f(x, y) = \ln[(y - g(x))(h(x) - y)]$.

(x, y) בתחום ההגדרה של f אמ"מ

i. $\text{sgn}(y - g(x)) = \text{sgn}(h(x) - y)$ (נשים לב כי לא מוגדר $\ln 0$).

כלומר y נמצא בין $g(x)$ ל $h(x)$.

3. הבנת התמונה

a. קווי גובה – תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה ממשית, ויהי $\alpha \in R$, אז קו הגובה המתאים

ל α הוא כל הנקודות בתחום ההגדרה של f עבורם α מתקבל, כלומר

$$\{a \in A \mid f(a) = \alpha\}$$

i. עבור $f(x) = x$, לכל α , קו הגובה המתאים הוא $x = \alpha$.

ii. עבור $f(x, y) = x$, לכל α , קו הגובה המתאים הוא $x = \alpha$.

iii. עבור $f(x) = x^2$.

1. עבור $\alpha < 0$ קו הגובה ריק.

2. עבור $\alpha \geq 0$ קו הגובה הוא $\pm\sqrt{\alpha}$.

iv. עבור $f(x, y) = (x + y)^2$.

1. עבור $\alpha < 0$ קו הגובה ריק.

2. עבור $\alpha \geq 0$ קו הגובה הוא

$$y + x = \pm\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow y = -x \pm \sqrt{\alpha}$$

v. עבור $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

1. עבור $\alpha < 0$ קו הגובה ריק.

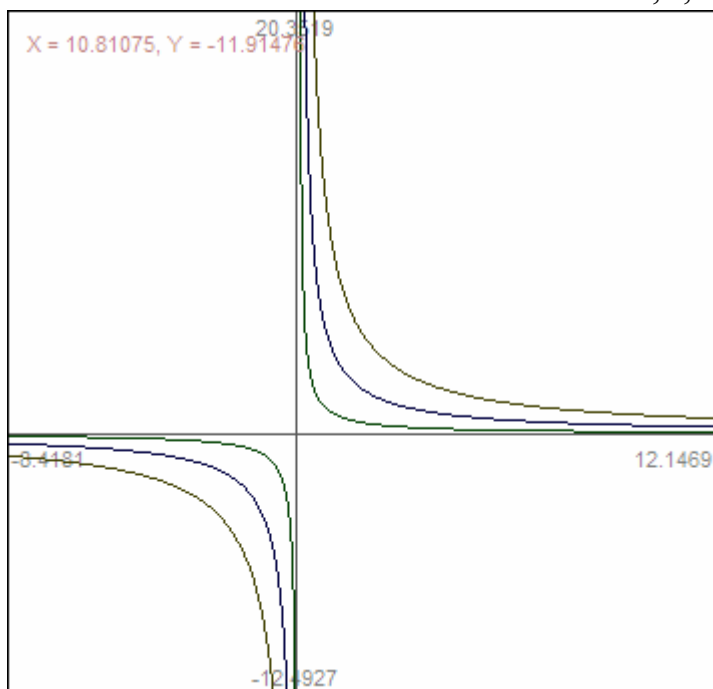
a. נחשב עבור $\alpha = 0$ $f(x, y) = \sqrt{xy} = 0$ אם"מ

$x = 0$ או $y = 0$.

b. עבור $\alpha > 0$ $\sqrt{xy} = \alpha \Leftrightarrow xy = \alpha^2 \Leftrightarrow y = \frac{\alpha^2}{x}$.

נשרטט את קווי הגובה עבור

$$\alpha = 1, 2, 3$$



vi. $f(x, y) = y - x^2 + 2x$.

1. ננסה לשרטט את קו הגובה $f(x, y) = \alpha$. זה שקול

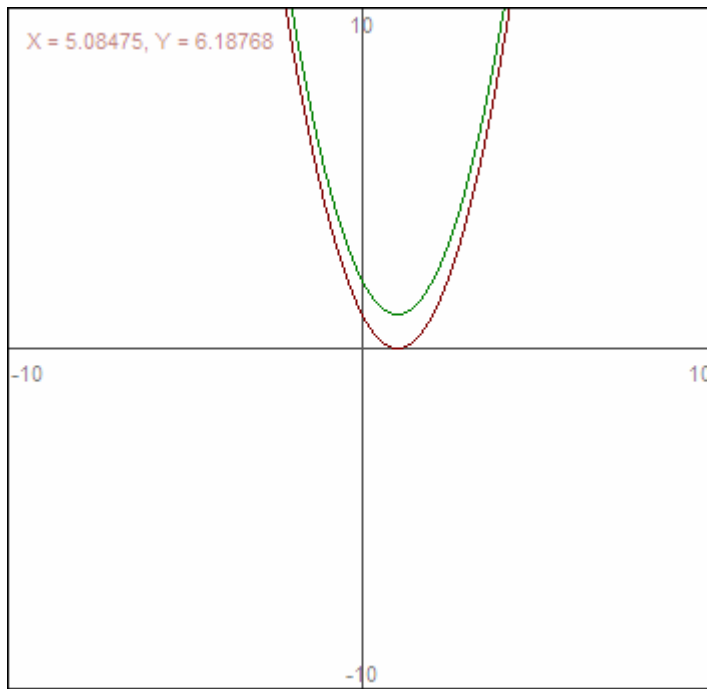
ל

$$y - x^2 - 2x = \alpha \Leftrightarrow$$

$$y = x^2 - 2x + \alpha = x^2 - 2x + 1 - 1 + \alpha = (x - 1)^2 + (\alpha - 1) \Leftrightarrow$$

$$y - (\alpha - 1) = (x - 1)^2$$

עבור $\alpha = 1$ ו $\alpha = 2$ זה יראה:

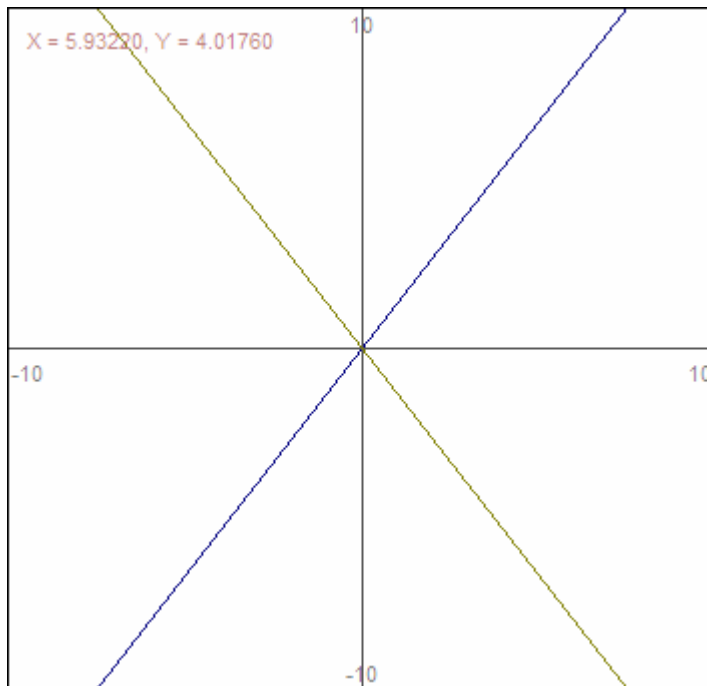


כמו שלמדנו שבוע שעבר, פרבולה שמרכזת 0. עבור $\alpha = 1$, ועל כל α למעלה זה מעלה אותה ב 1.

vii. עבור $f(x, y) = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$

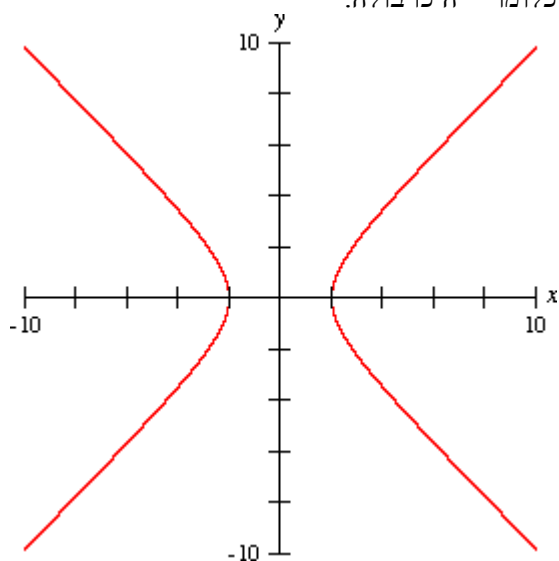
1. עבור $\alpha = 0$

כלומר: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{16}{9}x^2 \Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{3}x$



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = \alpha \Leftrightarrow \frac{x^2}{(3\sqrt{\alpha})^2} - \frac{y^2}{(4\sqrt{\alpha})^2} = 1 \quad \alpha > 0$$

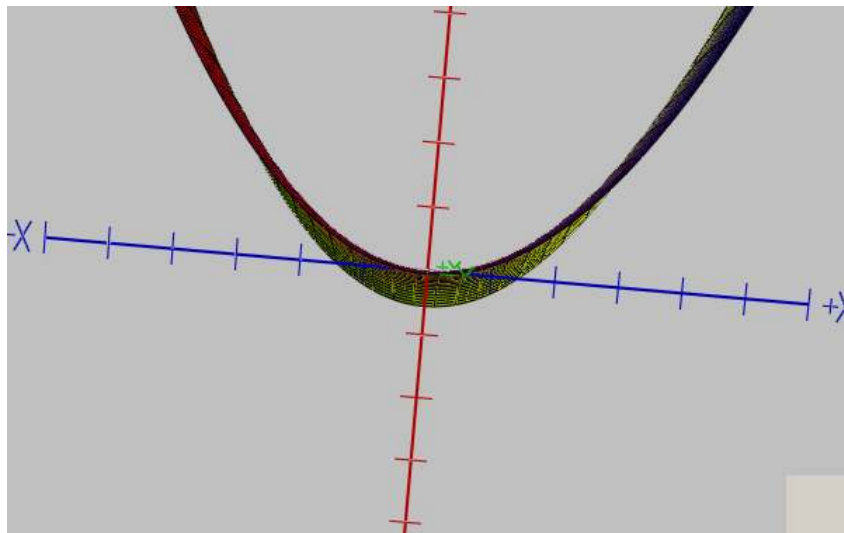
עבור $\alpha > 0$ – היפרבולה.



עבור $\alpha < 0$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = \alpha \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = -\alpha \Leftrightarrow \frac{y^2}{(4\sqrt{-\alpha})^2} - \frac{x^2}{(3\sqrt{-\alpha})^2} = 1$$

וזה נראה כמו אוסף. אם רוצים לראות את הפונקציה כולה, אז היא נראית:



פונקציות היפרבוליות

למי שמכיר מרוכבים: ידוע כי $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, ואז כמובן $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

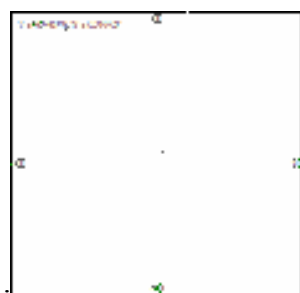
הגדרה: נגדיר פונקציות ממשיות $\cosh(x)$ ו $\sinh(x)$ ע"י

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

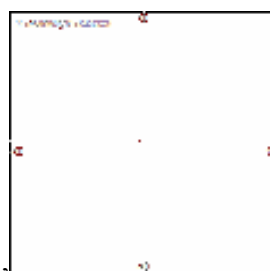
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\coth = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}, \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

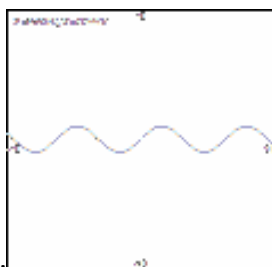
הגדרה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת **זוגית** אם $f(-x) = f(x)$ (הפונקציה סימטרית סביב ציר y)
נקראת **אי זוגית** אם $f(-x) = -f(x)$ (שיקוף).



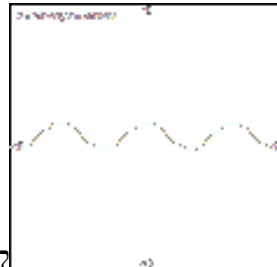
, לעומת x^3 שהיא אי זוגית



דוגמאות: x^2 זוגית



לעומת $\sin(x)$ שהיא אי זוגית



$\cos(x)$ זוגית,

באותו אופן, $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)$, ועל כן $\cosh$ זוגית, ואם נחשב באותו אופן עבור $\sinh(x)$ נקבל כי היא פונקציה אי זוגית.

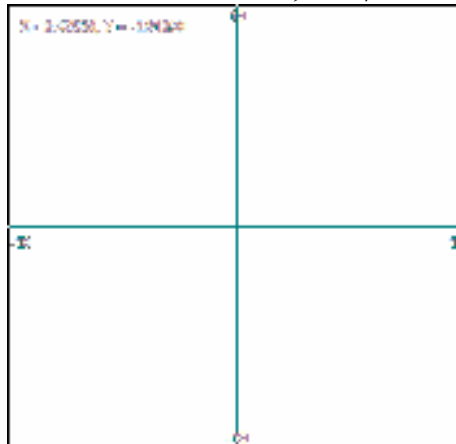
הערות: לגבי $\cosh(x)$:

- $\cosh(0) = 1$
- לכל $x \neq 0$ מתקיים $\cosh(x) > 1$
- זוגית

- עבור x ים גדולים, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2}$, ובאותו אופן כמובן עבור

$$\cosh(-x) \sim \frac{e^x}{2}$$

- כדי לחסוך מתח, היא נראית ככה:



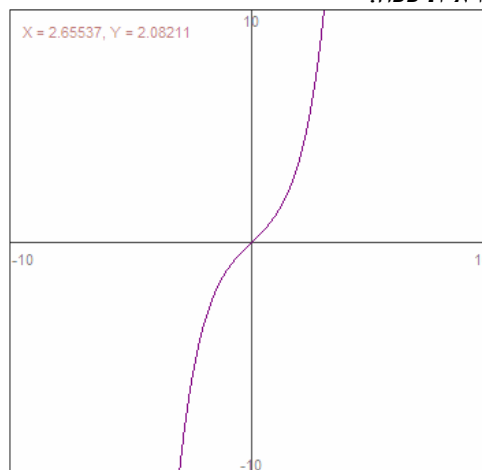
כמה הערות על $\sinh(x)$:

- $\sinh(0) = 0$

- אי זוגית

- עבור x ים גדולים, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \frac{e^x}{2}$

- נראית ככה:



כמה מילים על הפונקציות הטריגונומטריות

ידוע כי $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, ולכן אם חלקיק במישור נמצא בזמן t בנקודה

$(\cos(t), \sin(t))$ כאשר $0 \leq t \leq 2\pi$, אזי החלקיק נע על מעגל עם רדיוס 1 $x^2 + y^2 = 1$.

טענה: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

הוכחה:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

מסקנה (ישירות מהטענה לעיל): אם נתבונן בחלקיק הנמצא בזמן t בנקודה $(\cosh(t), \sinh(t))$, $t \in \mathbb{R}$ אזי הוא נע על ההיפרבולה $x^2 - y^2 = 1$ (כאשר x תמיד חיובי, מהגדרת $\cosh$). לדוגמא, בזמן $t = 0$ אזי החלקיק נמצא ב $(\cosh(0), \sinh(0))$. אפשר להציב t אחרים. כמובן. איך מגיעים לזמן $t < 0$, לדוגמא $t = -1$? הכוונה היא איפה הוא היה 'שניה' לפני שהוא היה ב t .

זהויות הפונקציות ההיפרבוליות:

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x+y)$$

למה?

$$\begin{aligned} \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} = \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x+y}}{4} + \frac{(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-(x+y)})}{4} = \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4} = \\ &= \cosh(x+y) \end{aligned}$$

פונקציות היפרבוליות הפוכות

$\sinh$ חז"ע לכל תחום הגדרתה, וגם כאן, אפשר להגדיר $\operatorname{arcsinh} h$ בלי לצמצם תחום. למה היא שווה?

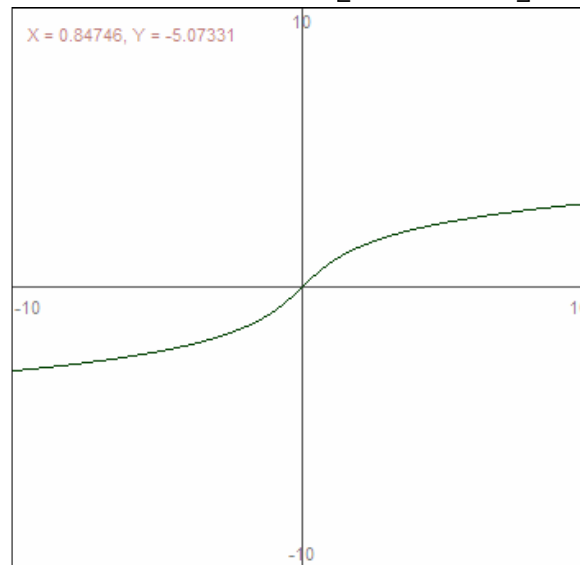
$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow 2ye^x = e^x(e^x - e^{-x}) = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x 2y - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

זוהי משוואה ריבועית.

$$e^x > 0 \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln[y + \sqrt{y^2 + 1}]$$

ולכן $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]$, ותיראה:



$\cosh(x)$ חז"ע עבור $x \geq 0$, קיימת פונקציה הפוכה $\operatorname{arccosh}(x) : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

יתגלה בחישוב כי $\operatorname{arccosh}(x) = \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right]$

13.11.2006

תרגיל 4 – יהיה באתר.

גבולות

יהי חלקיק לנמצא בזמן t בנקודה $s(t) = 2t$. בזמן בזמן $t = 1$ החלקיק נמצא בזמן $s(1) = 2$. אם t קרוב ל-1, אז החלקיק יהיה קרוב לנקודה 2.

[חזרה על הגדרת הגבול, אריתמטיקה של גבולות. יש בשיעור של חגית].
דוגמאות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^m - 1}{x}$$

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$\frac{(x+1)^m - 1}{x} = \frac{\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k - 1}{x} = \frac{\binom{m}{0} x^0 + \binom{m}{1} x + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} x^k - 1}{x} =$$

$$\frac{1 + mx + x^2 \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} x^{k-2} - 1}{x} = m + x \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} x^{k-2} \rightarrow_{x \rightarrow 0} m$$

החלפות משתנים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\alpha x) = \lim_{x \rightarrow \alpha x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{x_0}{\alpha}} f(\alpha x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ מתקיים } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \quad \text{דוגמא:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

נבצע הצבה $y = x^2$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

עוד דוגמא:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}, \alpha \neq 0$$

נציב $y = \alpha x$ ונקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

מסקנה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}, \alpha, \beta \neq 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\beta x \frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}}{\beta \frac{\sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

טענה: אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ אז $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^2 = l^2$.

הערה:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 23} - 5}{(x - 1)} = \frac{x^2 + x + 23 - 5^2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 23} + 5)} =$$

דוגמא:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 23} + 5)}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

עוד עובדה:

דוגמא:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}}{x^3}$$

$$a:=\sqrt[3]{x^3+8}$$

$$b:=2$$

$$\sqrt[3]{x^3+8}-2=a-b$$

$$\frac{a^3-b^2}{a^2+ab+b^3}=\frac{(x^3+8)-2^3}{(x^3+8)^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{x^3+8}+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}}{x^3} = \frac{x^3}{x^3 \underbrace{[\dots]}_{\rightarrow 12}} = \frac{1}{12}$$

22.11.2006

הגדרה: $\vec{v} \parallel \vec{u}$ (מקבילים) אם $\vec{u} = k\vec{v}$ או $\vec{v} = c\vec{u}$.

דוגמא: $\langle 1, 2, 3 \rangle = -\frac{1}{2} \langle -2, -4, -6 \rangle$ כי $\langle 1, 2, 3 \rangle \parallel \langle -2, -4, -6 \rangle$

שאלת הבנה: האם $\vec{u} = k\vec{v} \Leftarrow \vec{v} = c\vec{u}$ קיים c כך ש $\vec{v} = c\vec{u}$? לא!
לדוגמא:

$\vec{0} = 0 \langle 1, 2 \rangle$ אבל אין סקלר c כך ש $\vec{0} = c \langle 1, 2 \rangle$.

תיקון: אם $\vec{u} = k\vec{v}$ ו $k \neq 0$ אז $\vec{v} = k^{-1}\vec{u}$.

תזכורת – מכפלה סקלרית: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ כאשר θ היא הזווית בין $\vec{u}$ ל $\vec{v}$ (תמיד בוחרים את הזווית הקטנה).

תזכורת: $\vec{u} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$

עוד נוסחה נחמדה: $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \langle y_1, y_2, y_3 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

תזכורת: מכפלה סקלרית היא פונקציה $f: V^2 \rightarrow F$.

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \langle 2, -1, 1 \rangle$$

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = \langle 1, 1, 2 \rangle$$

תרגיל: חשבו את הזווית בין הוקטורים

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

נשתמש בנוסחה $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ - ונקבל

משפט: אם $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$ אזי $\vec{u} \perp \vec{v}$ (ניצבים - הזווית ביניהם היא $\frac{\pi}{2}$) $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

הוכחה: מ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ נובע כי $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ (מותר לחלק כי $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$).

תרגיל: מצאו וקטור יחידה ל $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = \langle 1, 3, 1 \rangle$.

נסמן $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$. מתקיים $\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. כלומר - $a + 3b + c = 0$.

משימה: מצאו a, b, c המקיימים אותה. לדוגמא - $a = 0, b = 1, c = -3$.

$$\vec{v} = \langle 0, 1, -3 \rangle$$

ננרמל אותו - $\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ $\vec{w}$ הוא וקטור יחידה בכיוון של $\vec{v}$ ולכן $\vec{w}$ הוא וקטור יחידה הניצב ל $(\vec{u})$.

$$\vec{w} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}} \langle 0, 1, -3 \rangle$$

תכונות המכפלה הסקלרית:

- קומטיביות - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- דיסטריבוטיות - $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = k(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

דטרמיננטות

הגדרה: מטריצה היא מערך מלבני (m שורות, n עמודות).
מטריצה ריבועית היא מטריצה בה מספר השורות = מספר העמודות.

דטרמיננטה – מוגדרת עבור מטריצה ריבועית בלבד.

הגדרה רקורסיבית:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

לדוגמא: -2

איך מחשבים דטרמיננטה –

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(מסמנים את ה $\pm$ למעלה בשביל נוחות):

$$\det A = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

(זה בעצם פיתוח דטרמיננטה ע"פ שורה / עמודה, למי שעשה אלגברה ליניארית 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-1 - 2 + 2 - 2(-2) = -3$$

מכפלה וקטורית

מכפלה וקטורית מוגדרת עבור וקטורים **במרחב בלבד** (לא מוגדרת עבור וקטורים דו מימדיים):

יהיו $\vec{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ ו $\vec{v} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$. המכפלה הוקטורית, $\vec{u} \times \vec{v}$ היא וקטור, המוגדר כ:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

הערה: הדטרמיננטה באמצע היא סימן זכרון, ולא מהווה מטריצה חוקית.

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = \langle 1, 2, -2 \rangle$$

$$\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{k} = \langle 3, 0, 1 \rangle$$

תרגיל: חשבו את $\vec{u} \times \vec{v}$ כאשר

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k} = \langle 2, -7, -6 \rangle$$

תכונות המכפלה הוקטורית:

- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ (ז"א $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ וגם $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$)
- $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ (כאשר θ היא הזווית בין $\vec{u}$ ל $\vec{v}$)
- **מסקנה:** $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ אם $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ או $\vec{v} = \vec{0}$ או $\vec{u} = \vec{0}$ או $\sin \theta = 0$ - $\theta = 0$ או $\theta = \pi$, כלומר $\vec{u} \parallel \vec{v}$
- אם $\vec{u} = \vec{0}$ או $\vec{v} = \vec{0}$ אז $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

מה המשמעות של $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ (נורמה של מכפלה וקטורית)? שטח המקבילית שנוצרת ע"י $\vec{u}, \vec{v}$.

סיכום מכפלה וקטורית:

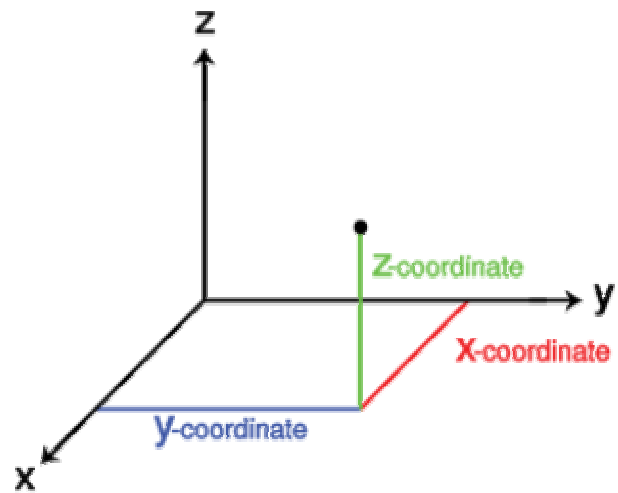
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

אם $\vec{u}, \vec{v}$ אינם וקטורים מקבילים, אז $\vec{u} \times \vec{v}$ הוא הוקטור שניצב למישור שמכיל את $\vec{u}, \vec{v}$ ואשר גודלו הוא שטח המקבילית שנוצרת ע"י $\vec{u}, \vec{v}$. כיוונו נקבע לפי כלל היד הימנית.

מערכות קואורדינטות קרטזיות, גליליות, כדוריות

הקרטזית:



לכל נקודה במרחב יש 3 קואורדינטות - (x, y, z)

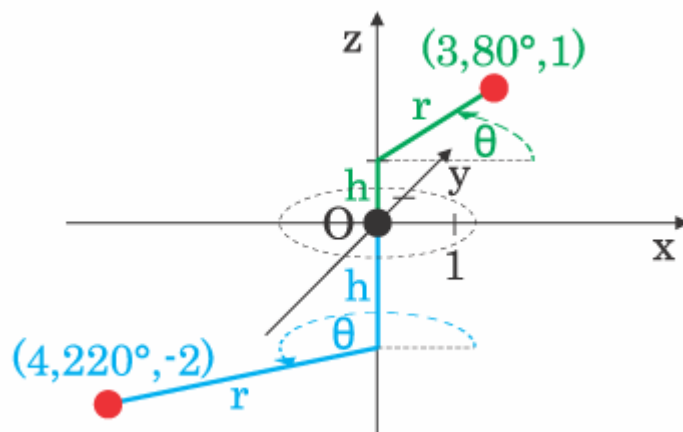
מערכת גלילית

גם כאן יש לנו 3 קואורדינטות:

z – כמו קודם

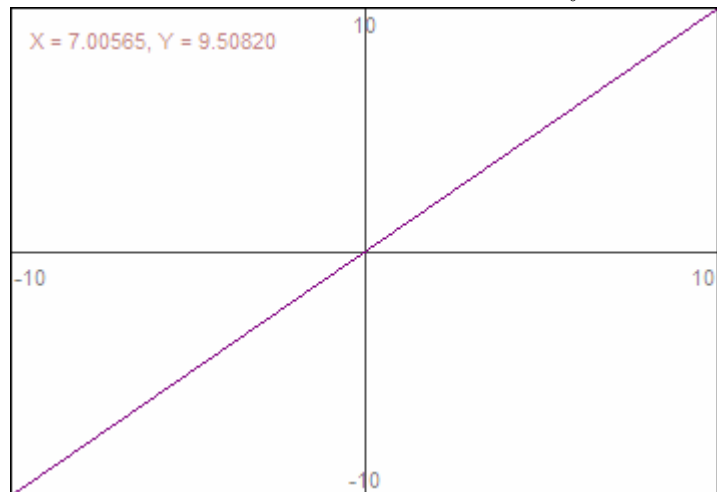
r – מרחק מהראשית לנקודה המבוקשת

θ – הזווית שיוצרת r .



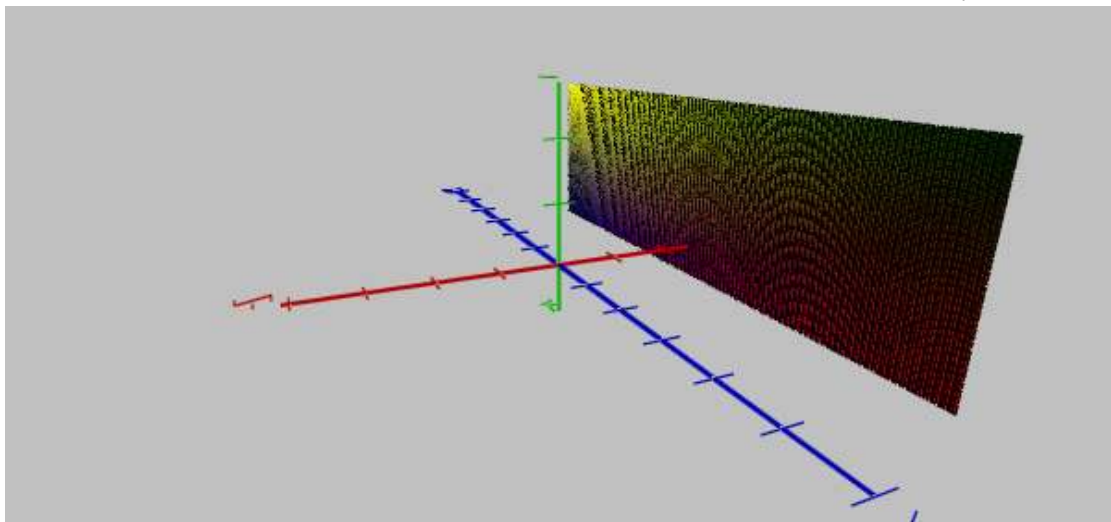
לדוגמא – מה משמעות המשטח $r = 8$ – אוסף כל הנקודות, המקיימות $\{(r, \theta, z) | r = 8\}$ – זהו גליל אינסופי – כל מה שמתחת ומעל המעגל ברדיוס 8 – סביב הראשית במישור x, y .

מהו המשטח $\theta = \theta_0$? זהו חצי מישור – לדוגמא, כל מה שנמצא מתחת / מעל ל



לקו שנוצר ע"י θ_0 .

מהו המישור $z = z_0$? כמו בקרטזית, מישור מקביל למישור x, y . לדוגמא:



המרה ממערכת צירים קרטזית לגלילית

תהי $p = (r, \theta, z)$, נחפש את (x, y, z) .

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

בכיוון השני – נתון (x, y, z) , נחפש (r, θ, z) .

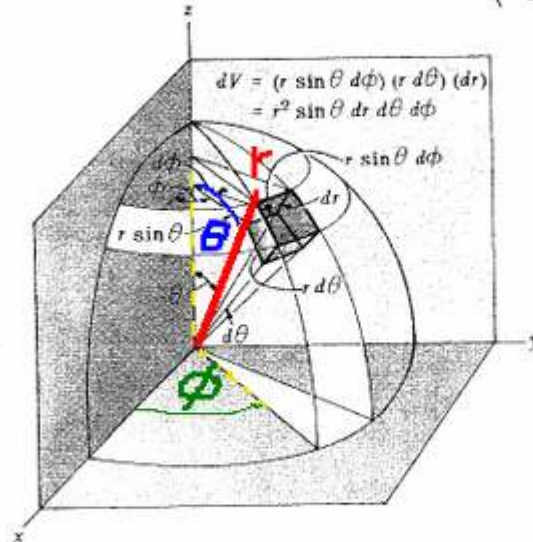
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$z = z$$

Transformations:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\y &= r \sin \theta \sin \varphi & \varphi &= \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \\z &= r \cos \theta & \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)\end{aligned}$$



(b) Volume element in spherical coordinates.

$$\begin{aligned}0 &\leq r < \infty \\0 &\leq \theta < \pi \\0 &\leq \varphi < 2\pi\end{aligned}$$

$$J \left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \varphi} \right) = r^2 \sin \theta$$

תהי $p = (\rho, \theta, \varphi)$

אזי ρ היא המרחק בין הנקודה לראשית.

φ - זווית על ציר z . $0 \leq \varphi \leq \pi$

θ - כמו בגלילית. $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

משטחים במערכת כדורית:

$\theta = \theta_0$ - חצי מישור - כמו קודם.

$\varphi = 0$ - החלק החיובי של ציר z .

$\varphi = \pi$ - החלק השלילי של ציר z .

$\varphi = \varphi_0$.

• אם $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ - חרוט פתוח כלפי מעלה.

• $\varphi = \frac{\pi}{2}$ - מישור x, y

• $\varphi = \varphi_0$ $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \pi$ - חרוט פתוח כלפי מעלה.

$\rho = \rho_0$ - כדור ברדיוס ρ_0 .

$$x = r \cos \theta = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\cos \varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

20.11.2006

ציטוטי השיעור: 'אין שום ישר שמתנהג כמו $y = x^2$ '?
'לבדוק פעמיים מתוך אינסוף, זה לא מספיק?'

סדרי גודל

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 23} - 5}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y^2 + 3y + 25} - 5}{y} = \frac{3}{10}$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{y: x=2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4y}}$$

הגדרה: תהינה f, g פונקציות. נאמר ש

• $f = o(g)$ (ב x_0 קטן) אם $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. כלומר, f 'הרבה יותר קטנה' מ g .

למשל: $x = o(\sqrt{x^2 + 4x})$.

1. $1 - \cos x = o(x)$, שכן

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\sin \frac{x}{2}}_{\rightarrow 0} = 1 \cdot 0 = 0$$

• $f = O(g)$ אם $-\infty < \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ (קיים במובן הצר). כלומר, f 'קטנה'

(אסימפטוטית) מ g (גם שיוויון אפשרי).

1. למשל - $x = O(\sqrt{x^2 + 4x})$

2. $\sqrt{x^2 + 3x + 25} - 5 = O(x)$

3. $x = O(\sqrt{x^2 + 3x + 25} - 5)$

• נאמר $f = \Theta(g)$ אם $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ סופי ושווה מ-0. כלומר f, g מאותו סדר גודל.

1. הערה: אם $f = \Theta(g)$ אזי $g = \Theta(f)$

• נאמר $f \sim g$ (אקווילנטית) אם $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ ועל כן ב } 0 \sim \sin x.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{0.5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)-1^2}{0.5x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+1}+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1}-1 \sim \frac{x}{2}$$

$$\text{דוגמא: } f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x$$

$$\text{ב } 0 - 3, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x} = 3, \text{ ועל כן } f = O(x) \text{ ב } 0. \text{ (בגורם הדומיננטי בפולינום הוא זה עם החזקה הקטנה ביותר).}$$

$$\text{ב } \infty - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow f(x) = O(x^3) \text{ (בגורם הדומיננטי בפולינום הוא זה עם החזקה הגדולה ביותר).}$$

$$\text{ב } 0 - O(x^2) = o(x)$$

$$O(f) = \max\{O(x), O(x^2), O(x^3)\} = O(x^3)$$

$$\begin{aligned} O(x) &= o(x^2) \\ O(x^2) &= o(x^3) \end{aligned} \text{ ב } \infty$$

$$\text{ועל כן, } O(f) = \max\{O(x), O(x^2), O(x^3)\} = O(x^3)$$

$$\text{באופן כללי: } O(f+g) = O(\max\{f, g\})$$

$$\text{דוגמא: } f(x) = 10\log(x) + 2(\log(x))^3 + 2x + 4x^3 =_\infty O(x^3)$$

$$10\log(x) = o\left([\log(x)]^3\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10\log(x)}{(\log(x))^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{\log(x)^2} = 0$$

$$\log(x)^3 = o(x)$$

$$\text{ולכן בסה"כ } f(x) = O(x^3)$$

$$\text{מיון סדרי גודל ב } \infty:$$

$$\begin{aligned}
&O(1) \\
&O(\log x) \\
&O((\log x)^c), c > 1 \\
&O(x) \\
&O(x \log x) \\
&O(x^2) \\
&O(x^c), c > 2 \\
&O(c^x), c > 1
\end{aligned}$$

כמה הערות (גם כאן באינסוף)

$$\begin{aligned}
x^c &= o(c^x) \\
\log(x) &= \Theta(\log(x^c)) \\
\log_a(x) &= \Theta(\log_b(x))
\end{aligned}$$

$$\text{אם } 1 \leq a < b \text{ אז } a^x = o(b^x).$$

$$\text{הערה: } e^x = 1 + o(x).$$

גבולות של פונקציות בשני משתנים

נניח שיש לנו חלקיק, שבזמן t נמצא ב $s(t) = 2t$.

$$S(t, m) = \frac{2t}{m} \text{ כיום, נגיד שיש לנו חלקיק } t \text{ עם מסה } m, \text{ ונמצא בזמן } t \text{ בנקודה}$$

$$\text{חלקיק עם מסה } m = 2, \text{ נמצא בזמן } t = 1, \text{ בנק' } s(1, 2) = 1.$$

בזמן 'קרוב' ל 1 חלקיק עם מסה 'קרובה' ל 2 ימצא בנק' 'קרובה' ל 1. נסמן $\lim_{(t,m) \rightarrow (1,2)} s(t, m) = 1$ (או,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ m \rightarrow 2}} s(t, m)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ y \rightarrow 1}} (x-3)y^2 = 1 \quad \text{דוגמאות:}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) = 1 \text{ אזי עדיין } f(x, y) = \begin{cases} (x-3)y^2, & (x, y) \neq (4, 1) \\ 0, & (x, y) = (4, 1) \end{cases} \text{ נשים לב - מתקיים גם}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x^2 - y^2 = 0 \text{ נתבונן ב}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$$

ניזכר ב $f(x) = \frac{1}{x}$. אין גבול ב-0, כי מימין מקבלים ∞ , משמאל $-\infty$.

הערה: ל f קיים גבול בנקודה אם קיימים הגבולות מכל הכיוונים ושווים זה לזה. בפונקציה במשתנה יחיד – יש 2 כיוונים. בפונקציה בשני משתנים – יש ∞ כיוונים.

דוגמא: $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$. הפונ' אינה מוגדרת על כל הישר $y = -x$.

נחשב את הגבול מהכיוון $(1, 0)$, כלומר $y = 0, x > 0$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0 \\ y = 0}} \frac{1}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

כעת, נחשב את הגבול מהכיוון $(0, -1)$. $\lim_{\substack{y \rightarrow 0^- \\ x = 0}} \frac{1}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} = -\infty$. לא קיים הגבול ב $(0, 0)$.

עוד דוגמא: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. נבדוק את הגבול ב $(0, 0)$. נחשב את הגבול לאורך ציר x (כלומר $y = 0$)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

כעת נחשב את הגבול את הגבול לאורך ציר y . מסিমטריה, זה יצא אותו דבר.

נחשב את הגבול לאורך הישר $y = x$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ x = y}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

יצאו גבולות שונים $\Leftarrow$ לא קיים הגבול.

עוד דוגמא: $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$. נחשב את הגבול לאורך הישר $y = mx$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m^2 x^2}{x^4 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2}{1 + m^4}$$

(כמובן שזה יתן תשובה שונה לכל m).

27.11.2006

הגדרה: תהי $y = f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0 . לכל $\Delta x \neq 0$ נסמן $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

f גזירה ב x_0 אם קיים הגבול $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

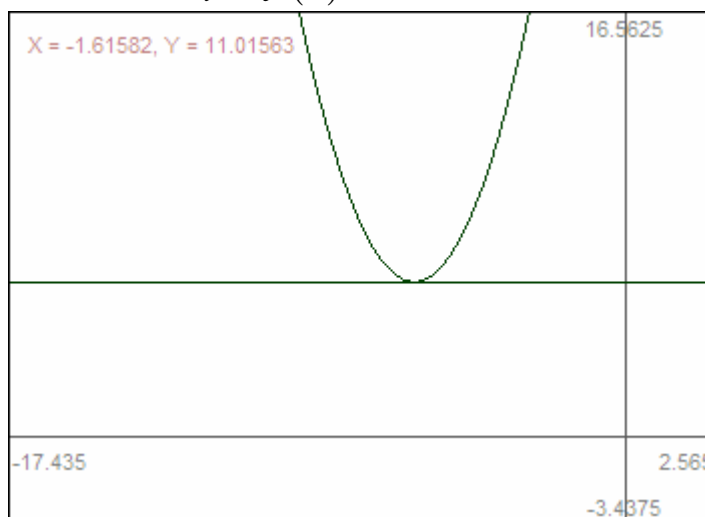
הנגזרת של f ב x_0 שווה לגבול הזה ומסומן $f'(x_0)$ או $\frac{dy}{dx}(x_0)$.

פירוש פיסיקלי: אם $s = f(t)$ המיקום של חלקיק בזמן t , אזי בזמן Δt החלקיק עושה דרך של $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

המהירות הממוצעת בין $s(t_0)$ לבין $s(t_0 + \Delta t)$ היא $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. המהירות של החלקיק בזמן t_0 היא

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t_0)$$

פירוש גאומטרי: אם נתבונן בגרף $y = f(x)$, אפשר להתבונן בישר המשיק לגרף בנקודה x_0 :



מדובר בישר העובר דרך הנקודות $(x, f(x))$, $(x_0, f(x_0))$. השיפוע של הישר הוא

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

הישר המשיק לגרף בנקודה $(x_0, f(x_0))$ הוא הישר העובר דרך הנקודה עם שיפוע

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} m(x) \text{ והישר נתון ע"י } y - f(x_0) = m(x - x_0).$$

השיפוע של הישר הוא

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

דוגמאות

1. $f(x) = x^n$. אנו רוצים לחשב את

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h}$$

$$(x_0 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} \quad \text{נזכור כי}$$

ועל כן נמשיך לחשב את הגבול מלמעלה עם התובנה הזו:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} - x_0^n}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^n + nhx_0^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} - x_0^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} nx_0^{n-1} \frac{h^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} nx_0^{n-1} + \underbrace{h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k}}_{\rightarrow 0} = nx_0^{n-1}$$

$$. f'(x_0) = nx_0^{n-1} \quad \text{ועל כן -}$$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$. נחשב את

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{x_0 - (x_0 + h)}{x_0(x_0 + h)} = \frac{-h}{hx_0(x_0 + h)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0^2}$$

ועל כן, $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

3. $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} =$$

$$\frac{x_0 + h - x_0}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

כללי גזירה

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

מסקנה: פולינום גזיר בכל נקודה. ועבור $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ מתקיים
 $p'(x_0) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$.

המשך כללי גזירה:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1'f - 1f'}{f^2} = \frac{-f'}{f^2} \quad \text{דוגמא:}$$

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \quad \text{דוגמא:}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 3} \quad \text{דוגמא:}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'(x^2 - x + 3) - \sqrt{x}(x^2 - x + 3)'}{(x^2 - x + 3)^2} = \frac{\frac{x^2 - x + 3}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}(2x - 1)}{(x^2 - x + 3)^2} =$$

$$\frac{-\frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{(x^2 - x + 3)^2}$$

כעת, נתבונן בפונקציה $y = x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$. המשיק לגרף של הפונקציה בנק' $(x_0, f(x_0))$ הוא הישר

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

נחפש את כל המשיקים של הגרף המקבילים לישר $x + y = 0$.

השיפוע של הישר $y + x = 0$ הוא -1 ועל כן נחפש את כל המשיקים עם שיפוע -1 , כלומר - $f' = -1$.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}} = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = -2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$. t = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} \quad \text{עבור } t = \sqrt{x} \text{ קיבלנו כי}$$

$$\sqrt{x} = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

כלל השרשרת

אם $y = f(x)$ גזירה ב x_0 ו $z = g(y)$ גזירה ב $y_0 = f(x_0)$ אזי $g(f(x))$ גזירה ב x_0

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{או} \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$$
 ומתקיים

$$. z = (1 + x^2)^{50} \quad \text{דוגמאות:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - y = 1 + x^2 \quad \text{נסמן:}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = 50y^{49} \cdot 2x = 100x(1 + x^2)^{49} \quad \text{ועל כן} \quad \frac{dz}{dy} = 50y^{49} - z = y^{50} \quad \text{נסמן}$$

$$. z = \cos(5x) \quad \text{דוגמא נוספת:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \quad , y = 5x \quad \text{נסמן} \quad z = \cos y$$

$$\frac{dz}{dy} = -\sin(x) = -\sin 5x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = -5 \sin(5x)$$

$$. y = x^2 - \frac{2}{x^3} \quad \text{נסמן} , z = \ln\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right) \quad \text{עבור}$$

$$z = \ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{6}{x^4}$$

$$y = x^2 - \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \left(2x + \frac{6}{x^4}\right) \left(\frac{1}{x^2 - \frac{2}{x^3}}\right) \quad \text{ועל כן} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2 - \frac{2}{x^3}} \quad \text{אזי} , z = \ln(y)$$

$$. x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln x} \quad \text{נשים לב כי} \quad f(x) = x^a , a \in \mathbb{R} \quad \text{עבור}$$

נסמן $z = e^{a \ln x}$. עבור $y = a \ln x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$. עבור $z = e^y$, אזי

$$\frac{dz}{dy} = e^y = e^{a \ln(x)} = e^{\ln x^a} = x^a$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

הדיפרנציאל

פונקציה לינארית $y = ax$. פונקציה $y = f(x)$ דיפרנציאבילית בנק' x_0 אם אפשר לקרב את y בסביבת x_0 ע"י פונקציה לינארית, כלומר, קיים a כך
 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a \cdot \Delta x + o(\Delta x)$

דוגמא: הפונקציה $y = 2x + x^2$ דיפרנציאבילית ב $x_0 = 0$.

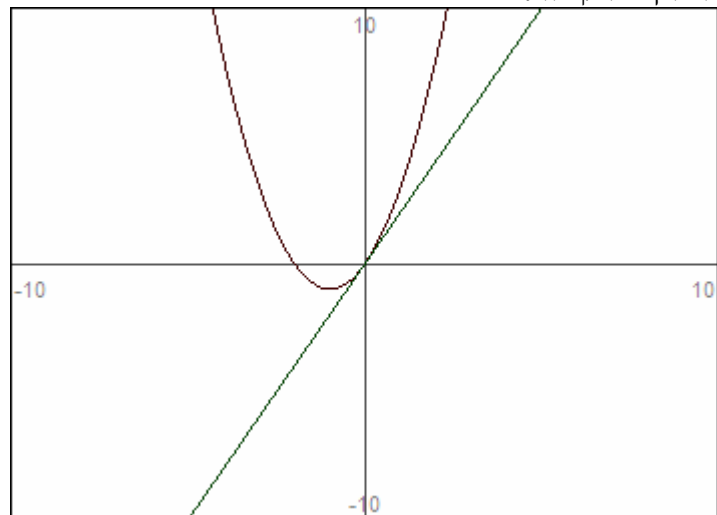
$$\Delta y = y(0 + \Delta x) - y(0) = 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 0 =$$

$$2\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow \Delta x^2 = o(\Delta x) \quad ? o(\Delta x) \text{ מה זה}$$

תזכורת: מה זה $o(\Delta x)$?

נתבונן בפונקציות:



כמו שאנו רואים, בסביבת 0, אפשר לקרב את y ע"י הפונקציה הלינארית $l(\Delta x) = 2\Delta x$.

טענה: דיפרנציאבילית ב x_0 אמם ב f גזירה ב x_0 , ובמקרה זה - $a = f'(x_0)$ (השיפוע).

דוגמא: $y = 2x + x^2$ דיפרנציאבילית בכל נקודה x_0 , ומתקיים

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = \\ &= (2 + 2x_0)\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow \\ f(x) &= f(x_0) + (2 + 2x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \Rightarrow \\ f(x) &\approx f(x_0) + (2 + 2x_0)(x - x_0)\end{aligned}$$

הגדרה: תהי f דיפרנציאבילית ב x_0 . הדיפרנציאל של f ב x_0 היא הפונקציה הלינארית (ב Δx) שתסומן dy ומוגדרת ע"י $dy(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$. נסמן $dx = \Delta x$ ונקבל $dy = f'(x_0)dx$, או $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$.

מתקיים $f(x) = f(x_0) + dy + o(x - x_0)$, ועבור x קרוב ל x_0
 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

דוגמאות:

1. נעריך את $\sqrt{9.2}$. תהי $f(x) = \sqrt{x}$ ו $x_0 = 9$.

$$\begin{aligned}f(x_0) &= \sqrt{9} = 3 \\ f'(x_0) &= \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \\ \sqrt{9.2} &= f(9.2) \approx f(x_0) + f'(x_0)(9.2 - 9) = \\ &= 3 + \frac{1}{6}0.2 = 3.03333\end{aligned}$$

נחשב במחשבון, ונקבל $3.033150\dots$. לא רע.

$$\begin{aligned}f(64) &= 4 \\ f'(64) &= \frac{1}{3} \cdot 64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{48} \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \sqrt[3]{65} \text{ נרצה לחשב את } \sqrt[3]{65} \text{ דוגמא נוספת:} \\ \sqrt[3]{65} &= f(64) + f'(64)(65 - 64) \approx 4 + \frac{1}{48} \text{ ע"כ,}\end{aligned}$$

4.12.2006

כלל לופיטל

משפט: תהינה f, g גזירות בסביבה של x_0 כך שמתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{א.}$$

ב. $g'(x) \neq 0$ לכל $x \neq x_0$ בסביבה של x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad \text{ג. קיים}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \text{אזי קיים}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a(x-x_0)}{b(x-x_0)} = \frac{a}{b} \Leftarrow \begin{cases} f(x) = a(x-x_0) \\ g(x) = b(x-x_0) \end{cases} \quad \text{נשים לב כי אם } f, g \text{ לינאריות, אז}$$
$$= \frac{a}{b} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{a}{b} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

אם f, g גזירות ב x_0 אז הן דיפרנציאביליות שם, ולכן

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f'(x_0)(x-x_0) \\ g(x) &\approx g'(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

דוגמאות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =_{Lupital} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{2} = 1.5 \quad 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \quad 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(x))^2}{(x-1)^2} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} =_{Lupital} \quad 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1} = 1$$

לא תמיד לופיטל עוזר לנו – לדוגמא:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

$= \text{Non existant}$

נשים לב, שזה לא אומר שאין גבול לפונקציה המקורית.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \left(\sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

הערה: לופיטל נכון גם עבור $x_0 = \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sin \frac{3}{x}} =_{Lupital} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^2} \cos \left(\frac{3}{x} \right)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos \frac{3}{x}} = \frac{1}{3}$$

הערה: לופיטל נכון גם עבור גבולות מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0 \text{ אזי } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{1}{f(x)}$$

לא חייבים אבל את המעבר המגעיל הזה.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \text{ עבור } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ כלומר,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{3x^3 - 2x} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{9x^2 - 2} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{18x} = \frac{1}{3}$$

לדוגמא:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} =_{Lupital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

דוגמא נוספת: לא מצאנו פתרון. ננסה לשנות את

זה קצת:

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{1/x^2}}} = \frac{x}{e^{1/x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2} \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0$$

צריך לבדוק ולמצוא גם כי $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{1/x^2}} = 0$, באותה דרך.

שימושים בלופיטל

1. חישוב גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ או $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

2. חישוב גבול מהצורה $0 \cdot \infty$. $0 \cdot \infty = \frac{1}{1/0} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$ או $0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{1/\infty} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

דוגמאות: $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

(נשים לב שאפשר לחשב זאת באמצעות הצבה $y := \frac{1}{x}$).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

3. גבולות מהצורה 1^∞ - על ידי שימוש ב $\ln$ - $\ln^\infty = \infty \ln^1 = \infty \cdot 0$

4. גבולות מהצורה 0^0 - $0^0 = 0 \cdot \ln(0) = 0 \cdot (-\infty)$

דוגמא: נחשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. נחשב את

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

(עשינו לפני כמה שורות)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{\sin(x-1)}}: \text{דוגמא נוספת:}$$

נחשב את

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(x^{\frac{1}{\sin(x-1)}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sin(x-1)} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)} = \text{Lupital } \frac{0}{0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{x \cos(x-1)} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{\sin(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln \left(x^{\frac{1}{\sin(x-1)}} \right)} = e$$

נגזרות חלקיות

תהי $z = f(x, y)$ פונקציה בשני משתנים המוגדרת בסביבת (x_0, y_0) . אם נשאיר את $y = y_0$ קבוע נקבל פונקציה במשתנה 1 (ב x) $\varphi(x) = f(x, y_0)$. אם $\varphi(x)$ גזירה ב x_0 נאמר של f קיימת נגזרת חלקית בא (x_0, y_0) . את הנגזרת החלקית נסמן $f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

באופן זהה לחלוטין, וכמו שהגדרנו בשיעור, ניתן להגדיר נגזרת חלקית ב y .

דוגמאות: $f(x, y) = 3x + 1 + y^2$. עבור $(x_0, y_0) = (1, 2)$ אם נקבע את $y = y_0 = 2$, אזי $\varphi(x) = f(x, 2) = 3x + 1 + 4 = 3x + 5$. $\varphi'(x) = (3x + 5)' = 3$. כעת נקבע את $x = x_0 = 1$. $\psi(y) := f(1, y) = (3 + 1 + y^2) = y^2 + 4$. $\psi'(y) = 2y$. $f'_y(1, 2) = \psi'(2) = 2 \cdot 2 = 4$.

עבור (x_0, y_0) כלשהוא, אם נקבע את $y = y_0$, אז קיבלנו $\varphi(x) = f(x, y_0) = 3x + 1 + y_0^2 \Rightarrow f'_x(x_0, y_0) = 3$.

אם נקבע את $x = x_0$, אזי $\psi(y) = f(x_0, y) = (3x_0 + 1) + y^2 \Rightarrow f'_y(x_0, y_0) = 2y_0$.

קיבלנו שתי פונקציות - $g(x, y) = f'_x(x, y) = 3$ ו- $h(x, y) = f'_y(x, y) = 2y$.

$$f'_x(x, y) = \frac{d(x^2 y^3)}{dx} = 2xy^3$$

$$f'_y(x, y) = \frac{d(x^2 y^3)}{dy} = x^2 \cdot 3y^2$$

דוגמא נוספת: $f(x, y) = x^2 y^3$. אם מקבעים את y , אזי

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$f'_x(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x$$

$$f'_y(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y$$

$$g(x, y) = f'_x(x, y)$$

$$h(x, y) = f'_y(x, y)$$

קיבלנו שתי פונקציות

אם יימות ל g ול h הנ"ל נגזרות חלקיות, אזי נאמר שקיימות ל f נגזרות חלקיות מסדר שני, ונסמנם באחת מ-85! האופציות בערך שחגית הראתה היום בבוקר...

$$\sin(x^2 + y^2)$$

$$f''_{xx}(x, y) = \cos(x^2 + y^2)2 + (-\sin(x^2 + y^2)2x)2x =$$

$$2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2)$$

$$f''_{xy}(x, y) = -4xy \sin(x^2 + y^2)$$

$$f''_{yx}(x, y) = -4xy \sin(x^2 + y^2)$$

12.11.2006

תרגול 8

$$z = f(x, y)$$

$$f'_x(x, y) - \text{נגזרת החלקית לפי } x \text{ של } f \text{ בנקודה } (x, y).$$

$$f'_y(x, y) - \text{הנגזרת החלקית לפי } y \text{ של } f \text{ בנקודה } (x, y)$$

$$f''_{xx}(x, y) - \text{הנגזרת החלקית לפי } x \text{ של } f' \text{ בנקודה } (x, y)$$

$$f''_{xy}(x, y) - \text{הנגזרת החלקית לפי } y \text{ של } f' \text{ בנקודה } (x, y).$$

וכך הלאה....

לדוגמא:

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

נחשב את

$$f'_x(x, y) = 2xy^3.$$

$$f'_y(x, y) = 3x^2 y^2$$

$$f''_{xx}(x, y) = 2y^3$$

$$f''_{yx}(x, y) = 6xy^2$$

$$f''_{xy}(x, y) = 6xy^2$$

$$f''_{yy}(x, y) = 6x^2 y$$

עוד דוגמא:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$$

$$f'_x(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)^{\alpha-1} \cdot 2x$$

$$f'_y(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)^{\alpha-1} \cdot 2y$$

$$f''_{xy}(x, y) = \alpha 2x(\alpha-1)(x^2 + y^2)^{\alpha-2} \cdot 2y$$

$$f''_{yx}(x, y) = 2\alpha y(\alpha-1)(x^2 + y^2)^{\alpha-2} \cdot 2x$$

משפט: אם קיימות ל $f(x, y)$ הנגזרות החלקיות f''_{yx} ו f''_{xy} והן רציפות ב (x_0, y_0) אזי הן שוות שם.

הערה: רואים זאת בדוגמא לעיל.

דוגמא:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

לכל $(x, y) \neq (0, 0)$ הפונקציה רציפה והנגזרות החלקיות מסדר שני קיימות ורציפות.

$$f'_x(x, y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 3x^2 y^2 + x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

עבור כל נקודה $(0,0) \neq 0$.

$$f'_y = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

נראה כי הפונקציה המקורית רציפה ב $(0,0)$. $(x,y) = (0,0)$:

$$-1 \leq \frac{-y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

כעת, נזכר כי יש לנו הכפלה ב xy , ולכן, $0 \leftarrow -|xy| \leq xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \leq |xy| \rightarrow 0$

מסנדיבין, $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} f(x,y) = 0$ ועל כן f רציפה בכל נקודה.

כעת, נחשב את הנגזרות בנקודה $(0,0)$. חייבים לגזור ע"פ הגדרה – מאחר ומדובר בפונקציה מוטלאת שאין לנו כללים לגביה:

$$f'_x(0,0) = \frac{df(x,0)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

נסכם, ונראה כי

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y + 3x^2y^2 + x^3y^3 - y^5}{(y^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(y^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,h)}{h} = \frac{-h^5}{h^4} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h,0)}{h} = 1$$

דיפרנציאביליות

תזכורת: פונקציה $y = f(x)$ היא דיפרנציאבילית בנקודה x_0 אם קיים לה קירוב לינארי ב x_0 , כלומר:

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$$

הגדרה:

פונקציה $z = f(x,y)$ היא דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) אם קיים לה קירוב לינארי ב x_0, y_0 .

דיפרנציאביליות

הגדרה: $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנק' (x_0, y_0) אם מתקיים

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = a\Delta x + b\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|)$$

טענה: אם f דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) אזי:

1. קיימות ל f נגזרות חלקיות ב (x_0, y_0) ומתקיים $a = f'_x(x_0, y_0)$ ו $b = f'_y(x_0, y_0)$
2. f רציפה ב (x_0, y_0) .

טענה: אם קיימות ל f נגזרות חלקיות בסביבה של (x_0, y_0) והן רציפות ב (x_0, y_0) אזי f דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) .

דוגמא: $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ מתקיים

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}, f'_y(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

מרציפות הנגזרות החלקיות בכל נקודה $(0, 0) \neq$ נובע כי הפונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה $(0, 0) \neq$ מתקיים

$$\ln((x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2) - \ln(x_0^2 + y_0^2) = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2} \Delta x + \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2} \Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|)$$

מכך נגיע לקירוב לינארי של פונקציה משתנים:

הגדרה: אם $z = f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) אזי הביטוי:

$$df = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y$$

או

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

נקרא הדיפרנציאל השלם של f ב (x_0, y_0) ו dz משמש קירוב לינארי ל Δz .

אם נחזור לדוגמא של $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ אזי $\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2} \Delta x + \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2} \Delta y$ מהווה קירוב לינארי ל Δz .

דוגמא: נקרב ע"י קירוב לינארי את $\ln(1.22)$.

דרך 1: נבצע קירוב לינארי לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = 1$.

$$\ln(1.22) = f(1.22) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$0 + 1 \cdot 0.22 = 0.22$$

דרך 2: מתקיים $\ln(1.22) = \ln(1.11 + 0.11)$. נמצא קירוב לינארי לפונקציה

$$f(x, y) = \ln(x + y) \text{ בנקודה } (x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} f(1,0) &= \ln(1+0) = \ln(1) = 0 \\ f'_x(1,0) &= \frac{1}{x_0 + y_0} = 1 \\ f'_y(1,0) &= \frac{1}{x_0 + y_0} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ln(1.22) = f(1.11, 0.11)$$

$$f(1.11, 0.11) \approx f(1,0) + f'_x(1,0)\Delta x + f'_y(1,0)\Delta y = 0 + 1 \cdot 0.11 + 1 \cdot 0.11 = 0.22$$

קיבלנו את אותה טעות... וגם כאן – היא $o(|\Delta x| + |\Delta y|)$.

זרז 3:

$$\ln(1.22) = \ln\left((1.1)^2 + (0.1)^2\right)$$

נבצע קירוב לינארי לפונקציה $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ בנק' $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$\ln(1.22) = f(1.1, 0.1) \approx f(1, 0) + f'_x(1, 0) \cdot \Delta x + f'_y(1, 0) \Delta y =$$

$$0 + \frac{2}{1^2 + 0^2} \cdot 0.1 + \frac{2 \cdot 0}{1 + 0} \cdot 0.1 = 0.2$$

קיבלנו קירוב טוב יותר, בגלל ש $|\Delta x| + |\Delta y|$ קטן יותר כעת.

עוד דוגמא: נחשב את $1.01 \cdot e^{0.2}$.

נגדיר $f(x, y) = xe^y$. נחשב קירוב לינארי בנק' $(x_0, y_0) = (1, 0)$

$$f'_x = e^y \Rightarrow f'_x(1, 0) = 1$$

$$f'_y = xe^y \Rightarrow f'_y(1, 0) = 1$$

ועל

$$f(1.01, 0.2) \approx f(1, 0) + f'_x(1, 0) \cdot 0.01 + f'_y(1, 0) \cdot 0.2 = 1 + 0.01 + 0.2 = 1.21$$

גזירת פונקציות מורכבות

תזכורת (במשתנה בודד): אם $y = f(x)$ גזירה ב x_0 ו $z = g(y)$ גזירה ב $y_0 = f(x_0)$ אזי

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) \text{ ומתקיים } g(f(x))$$

או:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

בשני משתנים: הפונקציה $w = h(x, y) = g(f(x, y))$ היא פונקציה של שני משתנים. מתקיים

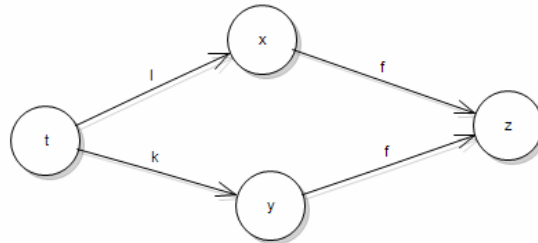
$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dx}$$

משפט: אם קיימות ל f נגזרות חלקיות בנק' (x_0, y_0) ו g גזירה ב $z_0 = f(x_0, y_0)$ אזי קיימות

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dx}$$

ל h נגזרות חלקיות ב (x_0, y_0) ומתקיים

אפשר להרחיב :

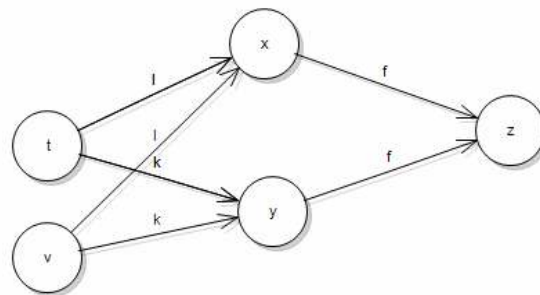


נתבונן על הפונקציה $z = h(t) = f(l(t), k(t))$. כש t משתנה קצת, x, y משתנים, ו z משתנה בגלל שניהם.

משפט: אם l גזירה ב t_0 ו k גזירה ב t_0 ול f קיימות הנגזרות החלקיות בסביבה של $(x_0, y_0) = (l(t_0), k(t_0))$ והן רציפות ב (x_0, y_0) אזי h גזירה ב t_0 ומתקיים ומתקיים:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

אפשר לסבך את החיים עוד יותר:



נתבונן על $z = h(u, v) = f(l(t, v), k(t, v))$. זוהי פו' של שני משתנים, ועל כן יש לנו נגזרות חלקיות (ע"פ t או ע"פ v).

משפט: אם קיימות ל l, k נגזרות חלקיות ב t_0, v_0 וקיימות ל f נגזרות חלקיות ב $(x_0, y_0) = (k(t_0, v_0), l(t_0, v_0))$ והן רציפות ב (x_0, y_0) אזי קיימות ל h נגזרות חלקיות

$$z'_t = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt}$$

ב (t_0, v_0) ומתקיים

$$z'_v = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dv}$$

דוגמא: $z = xe^{xy}, x = t^2, y = \frac{1}{t}$. נחשב את $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt} = (e^{xy} + xye^{xy})2t + x^2 e^{xy} \left(\frac{-1}{t^2} \right) =$$

$$(e^t + te^t)2t = \frac{t^4}{t^2} \cdot e^t = 2te^t + t^2 e^t$$

משוואות סתומות

ניקח לדוגמא את $25x^2 + y^2 = 109$. נבחר את הנקודה $(2,3)$ - היא על המשוואה. נרצה לחשב את המשיק לה.

דרך 1: בסביבה של $(2,3)$, y היא פונ' של x הנתונה $y = \sqrt{109 - 25x^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-50x}{2\sqrt{109 - 25x^2}}$$

$$y'(2) = \frac{-50}{3}$$

על כן משוואת המשיק היא

$$(y-3) = -\frac{50}{3}(x-2)$$

דרך 2: גזירה סתומה. נחשוב על $y = f(x)$ כפונקציה של x .

$$25x^2 + (f(x))^2 = 109$$

ונגזור את שני האגפים לפי x . נקבל באגף ימין 0 כמובן.
באגף שמאל:

$$\frac{d(25x^2 + f(x)^2)}{dx} = 50x + 2f(x)f'(x)$$

נקבל:

$$50x + 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$50x + 2yy' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-50x}{2y}$$

$$y' = \frac{-50 \cdot 2}{2 \cdot 3} = -\frac{50}{3} \text{ מתקיים } (x,y) = (2,3) \text{ בנקודה}$$

עוד דוגמא:

נתון כי המשוואה $y^4 + 4y - 3x^2 \sin(y) = 2x + 1$ מגדירה את $y = f(x)$ בתור פונקציה סתומה.

נמצא את y' ע"י גזירה של המשוואה:

$$(2x+1)' = 2$$

$$\left(y^4 + 4y - 3x^2 \sin(y)\right)'_x = 4y^3 y' + 4y' - 6x^2 \sin y - 3x^2 \cos y \cdot y' \Rightarrow$$

$$4y^3 y' + 4y' - 6x^2 \sin y - 3x^2 \cos y \cdot y' = 2$$

$$y'(4y^3 + 4 - 3x^2 \cos y) = 2 + 6x \sin y$$

$$y' = \frac{2 + 6x \sin y}{4y^3 + 4 - 3x^2 \cos y}$$

דוגמא: תהי f פונקציה במשתנה אחד כך שהמשוואה $yf\left(\frac{z}{y}\right) = x^2 + y^2 + z^2$ מגדירה את z

כפונקציה סתומה של (x, y) .

נחשב את הנגזרות החלקיות של z :
נגזור את שני האגפים לפי x :

$$\frac{d\left(yf\left(\frac{z}{y}\right)\right)}{dx} = y \frac{d\left(f\left(\frac{z}{y}\right)\right)}{dx} = yf'\left(\frac{z}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} z'_x = f'\left(\frac{z}{y}\right) \cdot z'_x$$

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{dx} = 2x + 0 + 2z \cdot z'_x$$

ועל כן:

$$f'\left(\frac{z}{y}\right) z'_x = 2x + 2zz'_x \Rightarrow$$

$$z'_x = \frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right) - 2z}$$

25.12.2006

נגזרת כיוונית

(לא הכל מועתק, יש בהרצאות בדיוק את אותן הגדרות. מועתקות דוגמאות מסוף השיעור הראשון).

דוגמא: $f(x, y) = xe^{xy} + y$ בנק' $(x_0, y_0) = (2, 0)$ בכיוון

$$\vec{v} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

הערה: לכל זווית θ הוקטור $(\cos \theta, \sin \theta)$ הוא וקטור יחידה בכיוון θ .

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = 1$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, ולכן f דיפרנציאבילית בכל נקודה.
 $f'_x(x, y) = xye^{xy} + e^{xy}$
 $f'_y(x, y) = x^2e^{xy} + 1$

$$\nabla f(2, 0) = (f'_x(2, 0), f'_y(2, 0)) = (1, 5)$$

$$\Rightarrow D_{\vec{v}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \vec{v} = (1, 5) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

תזכורת: $\vec{v} = (a, b), \vec{u} = (c, d)$ אזי $\vec{v} \cdot \vec{u} = ac + bd$,

טענה: אם $f(x, y, z)$ דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0, z_0) אזי הנגזרת הכיוונית בכיוון $\vec{v} = (a, b, c)$ (וקטור יחידה) שווה ל $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{v}$.

דוגמא: $f(x, y, z) = \sin(yz) + \ln(x^2)$ בנק' $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, \pi)$ בכיוון הוקטור $\vec{v} = (1, 1, -1)$.

ראשית, ננרמל את $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$$

ועל כן נתבונן ב $(1, 1, -1)$

$$f'_x(x, y, z) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$f'_y(x, y, z) = z \cos(yz)$$

$$f'_z(x, y, z) = y \cos(yz)$$

הנגזרות החלקיות רציפות, ועל כן f דיפרנציאבילית, ולכן

$$D_{\vec{u}} f(1, 1, \pi) = \nabla f(1, 1, \pi) \vec{u} = (2, -\pi, -1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3 - \pi}{\sqrt{3}}$$

תכונות הגרדיאנט

משפט: הכיוון $\vec{u}^*$ הממקסם את הנגזרת הכיוונית בנקודה (x_0, y_0) הוא הנגזרת הכיוונית בנק' (x_0, y_0) , $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ הוא הכיוון של הגרדיאנט של f בנקודה (x_0, y_0) (צריך לנרמל אותו כמובן).

הערה: הכל נכון גם ביותר מ-2 משתנים.

הערה: מעכשיו f תמיד דיפרנציאבילית.

דוגמא: גובה של הר נתון ע"י המשוואה $z = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$. אדם נמצא בנק' $(50, 100)$. באיזה כיוון העליה היא הכי תלולה?

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= -0.02x \\ f'_y &= -0.04y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla f(50, 100) = (-1, -4)$$

ועל כן, הכיוון $(-1, -4)$ הוא בעל העליה הגבוהה ביותר.

$$\vec{v} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad ? \text{למה שווה הנגזרת הכיוונית באותו כיוון?}$$

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

ועל כן

ועל כן, באופן כללי, השיפוע של העליה המקסימלית בנק' $(50, 100)$ הוא

$$\|\nabla f(50, 100)\| = \|(-1, -4)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

טענה: ווקטור הגרדיאנט ∇f בנק' (x_0, y_0) ניצב לקו הגובה $f(x, y) = k = f(x_0, y_0)$ בנק' (x_0, y_0) .

דוגמא: תהי $f(x, y) = xy$ ו $(x_0, y_0) = (1, 1)$. נסתכל על קו הגובה $f(x, y) = f(x_0, y_0) = 1$.

$$\nabla f(x, y) = (y, x)$$

ולכן הווקטור $(1, 1)$ ניצב לקו הגובה $xy = 1$ בנקודה $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

$$\nabla f(1, 1) = (1, 1)$$

מישורים משיקים

תהי $y = f(x)$ דיפרנציאבילית ב x_0 , אזי לגרף של f קיים ישר משיק בנק' $(x_0, f(x_0))$, הנתון על ידי $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

תהי $z = f(x_0, y_0)$ דיפרנציאבילית ב (x_0, y_0) . נחפש מישור משיק לגרף הפו' בנקודה

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$$

טענה: המישור המשיק לגרף הפונקציה בנק' (x_0, y_0, z_0) נתון ע"י:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$f(x, y) = z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \text{ או}$$

כלומר: המישור המשיק הוא אותו גרף של קירוב לינארי!!!

דוגמא: נמצא את המישור המשיק לגרף הפונקציה $z = \ln(2x + y)$ בנק' $(-1, 3)$

$$z_0 = f(-1, 3) = \ln(1) = 0$$

$$f'_x = \frac{2}{2x + y}, f'_y = \frac{1}{2x + y} \Rightarrow$$

$$f'_x(-1, 3) = \frac{2}{1}, f'_y(-1, 3) = 1$$

$$z - 0 = 2(x - (-1)) + 1(y - 3) \Leftrightarrow z = 2x + y - 1 \text{ ע"י נתון המישור המשיק}$$

עקום במישור נתון לנו ע"י פתרון משוואה $F(x, y) = k$

ישר במישור העובר דרך נק' (x_0, y_0) וניצב לוקטור $\vec{v} = (a, b)$ נתון ע"י

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

ווקטור הגרדיאנט $\nabla F(x_0, y_0)$ ניצב לעקום $F(x, y) = k$

מסקנה: הישר המשיק לעקום $F(x, y) = k$ בנק' (x_0, y_0) נתון ע"י

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

טענה: המישור המשיק למשטח $F(x, y, z) = k$ בנק' (x_0, y_0, z_0) נתון ע"י

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

דוגמא: נחשב את המישור המשיק למשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ בנק' $(1, -2, 5)$

נמצא את הגרדיאנט:

$$F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = 2z \Rightarrow \nabla f(1, -2, 5) = (2, -4, 10)$$

$$\underline{\underline{2(x - 1) - 4(y + 2) + 10(z - 5) = 0}}$$

1.1.2007

טענה:

1. ישר משיק לעקום במרחב $F(x, y) = k$ בנק' (x_0, y_0) נתון ע"י
 $\nabla F(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$.
 (x_0, y_0) ניצב לישר המשיק ב
2. מישור משיק למשטח במרחב $F(x, y, z) = k$ בנק' (x_0, y_0, z_0) נתון ע"י
 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$.
 (x_0, y_0, z_0) ניצב למישור המשיק ב

דוגמא: נמצא מישור משיק לגרף של פונקציה $z = f(x, y)$ בנקודה $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$
 $z = f(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) - z = 0$
הגרף של f הוא המשטח $F(x, y, z) = 0$ עבור $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ המישור
המשיק בנק' $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ נתון ע"י

$$\begin{aligned} \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= \\ (f'_x, f'_y, -1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= \\ f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ z = z_0 + f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) \end{aligned}$$

דוגמא: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (עבור $r > 0$) מתאר ספירה במרחב עם רדיוס r .
נחפש מישורים משיקים לספירה המקבילים למישור $xy \Leftrightarrow$ הגרדיאנט בנקודה שניצב למישור יהיה
מקביל לציר $z - \nabla f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, F'_z)$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

כלומר - $x_0 = y_0 = 0$ ו $z_0 = \pm r$. הנקודות בספירה בהן המישור המשיק מקביל לציר xy הן
 $(0, 0, \pm r)$.

אינטגרלים

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \Leftrightarrow \int \frac{x^2}{2} dx = X + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

פירוק:

$$\int a f'(x) dx = a \int f'(x)$$

$$\int f + g dx = \int f + \int g$$

חלקים:

$$\underline{\int (fg') dx = fg - \int (f'g) dx}$$

(נובע מ' $(fg)' = f'g + fg'$)

הצבה: עבור $t = \varphi(x)$ מתקיים $dt = \varphi'(x) dx$ ולכן $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$

בואו ונעשה קצת אינטגרלים:

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} dx = \int (1 - \sin x) dx =$$

$$\int 1 - \sin x = x + \cos x + C$$

$$\int x \sin x dx = \underset{g' = \sin x, g = -\cos x}{f = x, f' = 1} -x \cos x - \int 1(-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int (6x - 2) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \underset{g' = \cos\left(\frac{x}{2}\right), g = 2 \sin \frac{x}{2}}{f = 6x - 2, f' = 6} 2(6x - 2) \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 12 \int \sin \frac{x}{2} dx =$$

$$2(6x - 2) \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 24 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int x e^x dx = \underset{g = e^x, g' = e^x}{f = x, f' = 1} x e^x - \int 1 \cdot e^x = x e^x - e^x + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \underset{\substack{f=e^x, f'=e^x \\ g=\cos x, g'=\sin x}}{e^x \sin x} - \int e^x \sin x = \underset{\substack{f=e^x, f'=e^x \\ g'=\sin x, g=-\cos x}}{e^x \sin x} - \int e^x \sin x$$

$$e^x \sin x - \left[e^x \cos x + \int e^x \cos x \right] = e^x \sin x (\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x dx \Rightarrow$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) + C \Rightarrow$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C$$

$$\int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan(x) = \underset{\substack{f=\arctan x \\ f'=\frac{1}{1+x^2} \\ g'=1 \\ g=x}}{x \arctan x} - \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

שיטת ההצבה

$$\int f(h(x)) h'(x) dx = \int_{t=h(x)} f(t) dt$$

דוגמא - עבור $a \neq 0$

$$\int \cos(ax+b) dx = \underset{\substack{t=ax+b \\ dt=adx \Rightarrow \\ dx=\frac{dt}{a}}}{\int \cos(t) \frac{dt}{a}} = \frac{1}{a} \int \cos(t) dt = \frac{1}{a} \sin t + C =$$

$$\frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \underset{\substack{t=1+x^2 \\ dt=2x dx \Rightarrow \\ dx=\frac{dt}{2x}}}{\int \frac{x}{t} \frac{dt}{2x}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

$$\int \sin x \cos^2(x) dx = \underset{\substack{t=\cos x \\ dt=-\sin(x) dx \\ \Rightarrow dx=-\frac{dt}{\sin x}}}{-\int \sin x \cdot t^2 \cdot \frac{dt}{\sin x}} = -\int t^2 dt = \frac{-t^3}{3} + C = \frac{-\cos^3 x}{3} + C$$

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \underset{\substack{t=\cos x \\ dt=-\frac{dt}{\sin x}}}{\frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dt}{\sin x}} = \int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{5x dx}{(2x^2+1)^3} = \underset{\substack{t=2x^2+1 \\ dt=4x dx \\ dx=\frac{dt}{4x}}}{\int \frac{5x}{t^3} \cdot \frac{dt}{4x}} = \frac{5}{4} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{5}{4} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{t^2} = -\frac{5}{8(2x^2+1)^2}$$

$$\int 3x^2 e^{-x^3} dx = \int_{t=-x^3}^{t=-x^3} -3x^2 e^t \cdot \frac{dt}{-3x^2} = -\int e^t dt = -e^t + c$$

$$\int \frac{\cos 5x}{1 + \sin(5x)} dx = \int_{t=1+\sin 5x}^{t=1+\sin 5x} \frac{\cos 5x}{t} \frac{dt}{5 \cos(5x)} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \ln|t| + c =$$

$$\frac{1}{5} \ln|1 + \cos 5x| + c$$

$$\int 3x\sqrt{2x-1} dx = \int_{t=2x-1}^{t=2x-1} 3x\sqrt{t} \frac{dt}{2} = \int_{x=\frac{t+1}{2}}^{x=\frac{t+1}{2}} \frac{\frac{3}{2}(t+1)\sqrt{t} dt}{2} =$$

$$\frac{3}{4} \int (t\sqrt{t} + \sqrt{t}) dt = \frac{3}{4} \left(\int t^{3/2} + \int t^{1/2} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} + C =$$

$$\frac{3}{10} (2x-1)^{5/2} + \frac{1}{2} (2x-1)^{3/2} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \int_{t=\sqrt{x}}^{t=\sqrt{x}} \frac{t}{t^2+1} 2t dt = \int \frac{2t^2}{t^2+1} = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt =$$

$$2 \int 1 dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$2t - 2 \arctan(t) + c =$$

$$2\sqrt{x} - 2 \arctan(\sqrt{x}) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_{x=a \sin t}^{x=a \sin t} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = \int \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)} a \cos t dt =$$

$$\int a^2 \cos^2 t dt = \int_{\cos^2(t)=\frac{\cos 2t+1}{2}}^{ \cos^2(t)=\frac{\cos 2t+1}{2}} a^2 \frac{\cos(2t)+1}{2} = \frac{a^2}{2} \int \cos(2t) dt + \frac{a^2}{2} \int dt =$$

$$\frac{a^2}{4} \sin(2t) + \frac{a^2}{2} t + C$$

כעת, נזכור כי $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t) = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$. נחזור

לאינטגרל המקורי, ונקבל:

$$= \frac{a^2}{4} 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin(x) + C$$

8.1.2007

תרגיל 12

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+1| - \ln|x+2| - c$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= \int \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x+2)} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{2} \ln|x| + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+2| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{x(x^3 + x^2 + 1)}{x^2 + x + 1} dx = \int (x^2 - 1) dx + \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx$$

משפט: לכל פונקציה רציונלית $R(x)$ קיימת הצגה $R(x) = H(x) + \sum_{i=1}^k R_i(x)$ כאשר $H(x)$

פולינום ו $R_i(x) = \frac{A}{x - \lambda}$ או $R_i(x) = \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}$ כאשר $x^2 + bx + c$ אי פריק.

ומה האינטגרלים שלהם?

$$\int \underbrace{\frac{A}{(x-\lambda)^n}}_{\substack{= A(x-\lambda)^{-n} \\ = \frac{A}{-n+1} (x-\lambda)^{-n+1}}} dx = \begin{cases} A \ln|x-\lambda|, n=1 \\ \frac{-A}{n-1} \frac{1}{(x-\lambda)^{n-1}}, n \neq 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx + C}{(\lambda^2 + bx + c)^m} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^m} dx + \left(C - \frac{bB}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^m}$$

$$\cdot \int \frac{dx}{(x^2 + bx + c)^m} = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^m} \quad t = \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \quad \text{ע"י הצבה מקבלים}$$

ע"י אינטגרציה בחלקים, מקבלים את נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \frac{t}{2(m-1)(t^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$$

מתקיים:

$$x^2 + bx + c = \left(c - \frac{b^2}{2}\right) \left[\left(\frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{2}}} \right)^2 + 1 \right]$$

$$\cdot \left(c - \frac{b^2}{2}\right) \left[\frac{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}{c - \frac{b^2}{2}} + 1 \right] = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{2} = b^2 + bx + c + 0$$

שכן -

התבלבנו, לכן מחדש -

$$x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b}{2} - \frac{b}{2} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} =$$

$$\left(c - \frac{b^2}{4}\right) \left[\frac{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}{c - \frac{b^2}{4}} + 1 \right]$$

$$t = \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}}$$

עבור זה שווה ל-

$$= \left(c - \frac{b^2}{4}\right) [t^2 + 1]$$

ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל את נוסחת הנסיגה -

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \frac{t}{2(m-1)(t^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + c$$

כעת יש לנו את האינטרגלים של כל הפונקציות הבסיסיות. אם $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ודרגת P גדולה או

שווה לדרגת Q אזי ע"י חלוקת פולינומים נקבל פונקציה רציונלית עם דרגת מונה קטנה יותר.

דוגמא: עבור $\frac{x^2}{x+1}$. נבצע חילוק פולינומים (אין לי כוח להעתיק), ונקבל -

$$x^2 = (x+1)(x-1) + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = (x-1) + \frac{1}{x+1}$$

דוגמא נוספת - $\frac{4x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x}$. ע"י חלוקת פולינומים נקבל

$$4x^3 - 3x + 5 = (x^2 - 2x)(4x + 8) + (13x + 5), \text{ ואז:}$$

$$\frac{4x^3 - 3x + 5}{x^2 - 2x} = (4x + 8) + \frac{13x + 5}{x^2 - 2x}$$

ולזה אנחנו אמורים לדעת כבר לעשות אינטגרל.

טענה: אם דרגת P קטנה מדרגת Q , ו $Q = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ כאשר $\lambda_1 \neq \lambda_2$ אזי קיימים

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \lambda_1} + \frac{A_2}{x - \lambda_2} + \dots \text{ כך ש } A_1, A_2$$

$$\int \frac{6}{x^2 - 1} = \int \frac{6}{(x-1)(x+1)} \quad \text{דוגמא:}$$

$$\frac{6}{x^2 - 1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} \text{ כך ש } A_1, A_2 \text{ קיימים}$$

איך מוצאים את זה? גורם משותף

$$\frac{6}{x^2 - 1} = \frac{A_1(x+1) + A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow 6 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

$$\text{עבור } x = -1 \text{ מתקבל } 6 = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot (-2) \Rightarrow A_2 = -3$$

$$\text{עבור } x = 1 \text{ מתקבל } 6 = 2A_1 \Rightarrow A_1 = 3 \text{ ועל כן } \frac{6}{x^2 - 1} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1}$$

דוגמא אחרת - $\frac{5x^2 - 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$. אם λ מאפס את הפולינום אזי $(x - \lambda)$ מחלק את הפולינום.

$$x = 1 \text{ שורש של } Q. \text{ ולכן נחלק את } Q \text{ ב } (x-1)$$

$$\text{מתקיים } x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x^2 + 3x + 2)(x-1) \text{ ולכן קיימים } A_1, A_2, A_3 \text{ כך}$$

$$\frac{5x^2 - 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+1} \text{ ועל כן -}$$

$$5x^2 - 3 = A_1(x+2)(x+1) + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)(x+2)$$

נשים לב שזה הפירוק עבור פולינומים שמתפרקים לגורמים לינאריים. עבור פולינומים שלא מתפרקים, לדוגמא עבור $x^2 + 1$, נעבוד כך:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{x - \lambda} + \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} \quad \text{אם } Q = (x - \lambda)(x^2 + bx + c) \text{ אזי קיימים } A, B, C \text{ כך ש}$$

$$\text{לדוגמא: עבור } \frac{2x-3}{x(x^2+1)} \text{ קיימים } A, B, C \text{ כך ש} \frac{2x-3}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \text{ כלומר -}$$

$$2x - 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

נבדוק - עבור $x = 0$ נקבל כי $-3 = A$. כעת נציב, ונקבל

$$2x - 3 = -3x^2 - 3 + Bx^2 + Cx = x^2(B - 3) + Cx - 3 \Rightarrow B - 3 = 0 \Rightarrow B = 3$$

ונראה כי $C = 2$.

$$\int \frac{2x+3}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{3x+2}{x^2+1} \right) dx = -3 \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{\ln|x|} + \underbrace{\int \frac{3x+2}{x^2+1} dx}_*$$

$$-3 \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x^2+1| + 2 \arctan(x) + C$$

$$* = \int \frac{3x+2}{x^2+1} dx = \int_{3x+2=\frac{3}{2}2x+2} \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int \underbrace{\frac{dx}{x^2+1}}_{\arctan x} = \frac{3}{2} \ln|x^2+1| + 2 \arctg(x)$$

עוד דוגמא - אם $Q(x) = x^2(x^2+1)^2$, אזי אפשר לפרק

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x^3+3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} \quad \text{כעת נחשב את}$$

$$\frac{x^3+3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^3+3x^2 = A(x^2+1)^2 + (B_1x+C_1)(x^2+1)(x-1) + (B_2x+C_2)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$A=1, B_1=-1, C_1=0, B_2=2, C_2=1$$

ועל כן:

$$\frac{x^3 + 3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} dx = \underbrace{\int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx}_{= -\frac{1}{x^2+1}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_{f=\frac{1}{x^2+1}, f'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}} \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \left(\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) dx = \frac{x}{x^2+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C$$

עם כל התובנות הללו, נחזור לאינטגרל המקורי –

$$\int \frac{x^3 + 3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx =$$

$$\ln|x-1| - \ln|x^2+1| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

15.1.2007

הודעות:

- הבוחן יהיה ביום חמישי, בשעת ההרצאה, ולא בתרגול.
- יהיה תרגול חזרה בשבוע הראשון של ה'חופש', שיעור חזרה בשבוע האחרון.

בתרגול שעבר ראינו אלגוריתם לאינטגרציה של פונקציות רציונליות. אמרנו שאפשר להשתמש באלגוריתם גם בפונקציות רציונליות של $\cos x, \sin x$, ע"י הצבות. לדוגמא:

$$\int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x + 2 \cos(x)} dx$$

אם נציב $t = \cos x$, אזי $dx = \frac{-dt}{\sin x}$, ואז נקבל:

$$= \int \frac{t^3 - 1}{t^2 + 2t} \frac{dt}{\sin x}$$

וזה לא עוזר לנו.

$$\cos x = \frac{1 - \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2}{1 + \left(\tan\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(\tan\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{תמיד אפשר להציב } t = \tan \frac{x}{2} \text{ מתקיים. ועל כן, כל}$$

$$x = 2 \arctan(t)$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}$$

פונקציה רציונלית ב $\sin x, \cos x$ ניתן להעביר לפונקציות רציונלית ב t ע"י ההצבה $t = \tan \frac{x}{2}$.

עוד כללי הצבה חשובים

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \text{הצבה} - R(\cos x, \sin x)$$

$$x = a \sin t \quad \text{הצבה} - R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$$

$$x = a \tan(t) \quad \text{הצבה מהצורה} - R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$$

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{הצבה מהצורה} - R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

הצבות אוילר

במקרה של $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ -

$$1. \quad ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)^2$$

a. f היא רציונלית, ועל כן אין צורך בהצבה - אם לוקחים $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

$$2. \quad ax^2 + bx + c = a(x - \lambda_1)^2 - a(x - \lambda_2)^2$$

$$a. \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$$

$$3. \quad \text{במקרה של שני שורשים - } ax^2 + bx + c = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

$$a. \quad \text{נציב } \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda_1) \text{ (כן, אפשר להציב } \lambda_2 \text{)}$$

דוגמא:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{(x+1)(x-2)}}$$

נציב

$$(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} = t(x+1)$$

$$(x+1)(x-2) = t^2(x+1)^2 \Rightarrow (x-2) = t^2(x+1) \Rightarrow x = \frac{t^2 + 2}{1 - t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2) + 2t(t^2+2)}{(1-t^2)^2} = \frac{6t}{(1-t^2)^2}$$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} = t(x+1) = t\left(\frac{t^2+2}{1-t^2} + 1\right) = \frac{3t}{1-t^2}$$

קיבלנו הרבה ביטויים של t . נציב, ונקבל כי האינטגרל המקורי שווה ל:

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{\frac{t^2+2}{1-t^2} + \frac{3t}{1-t^2}} \cdot \frac{6t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{6tdt}{(1-t^2)(t^2+3t+2)} = \\ &= -\int \frac{6tdt}{(t-1)(t+1)^2(t+2)} \end{aligned}$$

מכאן אפשר להמשיך עצמאית.

האינטגרל המסוים

עבור $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, האינטגרל $\int_a^b f(x) dx$ (אם קיים) הוא השטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע $[a, b]$.

$$\text{דוגמאות: } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \int_0^1 1 dx = 1$$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{דוגמא לפי לא אינטגרבילית:}$$

נשים לב, כי הפונ' הבאה אינטגרבילית (חסומה ומונוטונית $\Leftarrow$ אינטגרבילית):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

הערות: (כל ההערות – בקטע)

a. אם f אינטגרבילית, אזי f חסומה

b. אם f רציפה, אזי f אינטגרבילית.

i. אם f חסומה ובעלת מספר סופי של נקודות בהן היא לא רציפה אזי f אינטגרבילית.

c. אם f מונוטונית וחסומה, אזי f אינטגרבילית.

איך מחשבים אינטגרל מסוים? בעזרת אינטגרל לא מסוים, כמובן!

המשפט היסודי: תהי f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ותהי $F(x)$ פונקציה קדומה של f בקטע (פרט למספר סופי של נקודות). והיא רציפה ב $[a, b]$ אזי

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

דוגמא:

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \sqrt{8} - \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

f חסומה, ובעלת מספר סופי של נק' אי רציפות ($x=1$). ולכן אינטגרבילית ב $[0, 2]$.

$$\int_0^2 f(x) dx = \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{f_1} + \underbrace{\int_1^2 f(x) dx}_{f_2}$$

$$F_1(x) = x \quad \text{היא פונ' קדומה רציפה ב } (0, 1)$$

$$F_2(x) = 2x \quad \text{היא פונ' קדומה רציפה ב } (1, 2)$$

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = F_1(x)|_0^1 + F_2(x)|_1^2 = 3$$

נשים לב שאם נסתכל על $F(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, 1 < x \leq 2 \end{cases}$ היא פונקציה קדומה של f בקטע $(0, 2)$.

מלבד הנקודה $x = 1$ $\int_0^2 f(x) dx = 4 \neq F(x)|_0^2 = 4 - 0 = 4$ - אנו רואים כי היא לא עוזרת לנו לחשב את האינטגרל, כי היא לא רציפה (ב1).

נתבונן ב $G(x) = \begin{cases} x+1, 0 \leq x \leq 1 \\ 2x, 1 < x \leq 2 \end{cases}$. G היא פונקציה קדומה של f בקטע $(0, 2)$, מלבד

הנקודה $x = 1$. אבל היא רציפה על פני כל הקטע, ועל כן $G(x)|_0^2 = 4 - 1 = 3$

עוד קצת אינטגרלים:

ראשית נמצא פונקציה קדומה : $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \stackrel{t=\sqrt{x}}{=} \dots = 2t - 2 \arctan t + c = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + c$$

ועל כן

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \left(2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

נשים לב, שאחרי ההצבה של t , החזרנו את זה לפונקציה של x . לא חייבים לעשות את זה.

אינטגרציה ע"י פירוק: $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
אינטגרציה בחלקים: אם f, g, f', g' רציפות ב $[a, b]$ אזי $\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$

זה עובד גם עבור הצבה. דוגמא: $\int_0^\pi \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx$ עבור $m, n \in \mathbb{N}$ שונים מ0.

$$\int_0^\pi \cos^2(nx) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2nx) dx =$$

אם $m = n$ אז

$$\frac{1}{2} x \Big|_0^\pi - \frac{1}{4n} \sin(2nx) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

, $m \neq n$

אחרת,

$$\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = \underbrace{\frac{1}{m} \cos(nx) \sin mx \Big|_0^\pi}_{=0} + \frac{n}{m} \int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx =$$

$$\frac{n}{m} \left[\frac{-1}{m} \sin(nx) \cos(mx) \right]_0^\pi + \frac{n}{m} \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{n^2}{m^2} \int_0^\pi \cos(nx) \sin mx dx$$

קיבלנו כי האינטגרל המקורי שווה לכפולה $1 \neq$ שלו, ולכן הוא שווה לאפס.

אינטגרציה ע"י הצבה

אם f רציפה ב $[a, b]$ ו $\varphi(t) \in [a, b]$ גזירה ברציפות ומקיימת לכל $t \in [\alpha, \beta]$ ו $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ אזי $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ (זוהי הצבה $x = \varphi(t)$ ואז $dx = \varphi'(t) dt$).

דוגמאות:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{1+t} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$a > 0, \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} =$$

נשתמש בהצבה $x = \varphi(t) = a \sin t$. היא גזירה ברציפות ומקיימת $\varphi(0) = 0, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$.

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2(t))} = a |\cos t| \quad \text{מתקיים } \frac{\pi}{2} \text{ ל } 0 \text{ .}$$

$$dx = a \cos t dt$$

ועל כן

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 |\cos t| \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{4}$$

דוגמא נוספת:

$$\int_0^\pi f(\sin x) \cos x dx = \int_0^0 f(t) dt = 0$$

נכון תמיד עבור f רציפה.

המשפט היסודי השני: אם f רציפה ב $[a, b]$ אזי קיימת לה פונקציה קדומה ב (a, b) והפונקציה

$$F: [a, b] \rightarrow R \quad \text{המוגדרת ע"י } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ היא פונקציה קדומה של } f \text{ ב } (a, b).$$

דוגמא: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ רציפה, ולכן קיימת לה פונקציה קדומה בכל קטע $[a, b]$ (שלא מכיל

את 0). הפונקציה $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ היא כזו.

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{\sin t}{t} dt \right) = f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

נחבון ב $\int_1^{3x} \frac{\sin t}{t} dt$. נסמן $h(x) = 3x$, אז $G(x) = F(h(x))$. נקבל

$$G'(x) = F'(h(x))h'(x) = \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = \frac{\sin 3x}{x}$$

עוד דוגמא:

$$F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = \int_{2x}^0 \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt - \int_0^{2x} \sqrt{1+t^2} dt = \sqrt{1+(x^2)^2} 2x - \sqrt{1+(2x)^2} \cdot 2$$

אזי $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$, כללי באופן $F'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

22.1.2007

תרגול 14

האינטגרל הלא מסוים

הגדרות

I. קטעים לא חסומים: אם f אינטגרבילית ב $[a, b]$ לכל $b > a$, ואז

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

II. פונקציות לא חסומות: אם f אינטגרבילית בקטע $[a + \varepsilon, b]$ לכל $\varepsilon > 0$, אזי

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

דוגמאות:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{b} - 1) = \infty$$

(במקרה זה נאמר שהאינטגרל מתבדר)

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin x = \lim_{b \rightarrow \infty} \cos b - 1$$

(במקרה זה הגבול אינו קיים)

הערה: אפשר להגדיר באופן דומה $\int_{-\infty}^a$, וכיד הדמיון הטובה עליך.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{(1+x^2)} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^\infty \frac{2x dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{2x dx}{(1+x^2)^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{2x dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{1+a^2} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{1+b^2} \right) = -1 + 1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty 2x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 2x dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (a^2) + \lim_{b \rightarrow \infty} b^2 = -\infty + \infty$$

במקרה זה נאמר כי לא קיים האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty 2x dx$

חשוב לשים לב: $\int_{-\infty}^\infty 2x dx \neq \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c 2x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} 0 = 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \infty$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \text{function not declared at 1} \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 6$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} 3(x-1)^{1/3} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left(3(b-1)^{1/3} + 3 \right) = 3$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{a \rightarrow 1^+} 3(x-1)^{1/3} \Big|_a^2 = \lim_{a \rightarrow 1^+} \left(3 - 3(a-1)^{1/3} \right) = 3$$

אינטגרלים כפולים

השטח של $[0,1] \times [0,1]$ במלבן $f(x,y) = 2$

$$\int_0^1 \int_0^1 2 dx dy = 2$$

תהי $f : D[a,b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה לכל x_0 מתקיים $f(x,y)$ פונקציה רציפה של y ולכן אינטגרבילית.

$$A(x_0) = \int_a^b f(x_0, y) dy$$

$A(x)$ פונקציה רציפה של x ולכן קיים האינטגרל

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,y) dy dx$$

באופן זה נגדיר אותו כ:

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

מה אומר פוביני?

משפט: אם $f : D = [a,b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אזי

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,y) dy dx$$

דוגמא: נחשב את נפח הגוף הנוצר ע"י $f(x,y) = x^2 + y^3$ מעל המלבן $[0,1] \times [1,2]$

$$\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^3) dy dx = \int_0^1 \left(\left(x^2 y + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_1^2 \right) dx = \int_0^1 \left((2x^2 + 4) - \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^2 + 3\frac{3}{4} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + 3\frac{3}{4} x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3\frac{3}{4}$$

פוביני

$$D = \left\{ a \leq x \leq b \right\}, g_1, g_2 : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ אם}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad \text{אזי } D = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq y \leq \beta \\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \end{array} \right\} \text{ באופן דומה אם}$$

תרגיל:

יהי D התחום החסום ע"י ציר ה x , ציר y והישר $x + y = 1$.

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 1 - x \end{array} \quad \text{אפשר להציג זאת -}$$

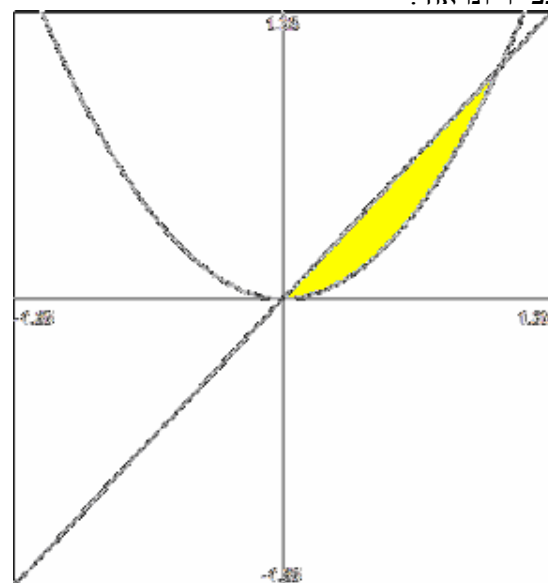
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx \quad \text{ועל כן}$$

אפשר להציג זאת גם כך

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - y \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_D f(x, y) = \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x, y) dx dy$$

דוגמא: נחשב את האינטגרל של $f(x, y) = 30xy$ בתחום D החסום ע"י הפונקציות $y = x$ ו- $y = x^2$.

נצייר ונראה :



ועל כן אפשר להציג זאת כך:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{array} \right\}$$

ועל כן

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x 30xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(15xy^3 \Big|_{x^2}^x \right) dx = \int_0^1 (15x^3 - 15x^2) dx = \left(\frac{15}{4} x^4 - \frac{15}{6} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{4} - \frac{15}{6} = \frac{5}{4}$$

אפשר כמובן לעשות זאת בצורה אחרת:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq \sqrt{y} \end{array} \right\}$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} 30xy dx \right) dy = \int_0^1 \left(15x^2 y \Big|_y^{\sqrt{y}} \right) dy = \int_0^1 (15y^2 - 15y^3) dy = \left(\frac{15}{3} y^3 - \frac{15}{4} y^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{4}$$

קואורדינטות פולריות

כל נקודה (x, y) בהצגה קרטזית אפשר להציג בהצגה פולרית כ (r, θ) כאשר r זה המרחק מהראשית, ו θ זה הזווית שנוצרת.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

עבור $D = \{(x, y) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$ אזי

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr$$

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{e-x^2} \end{array} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq \sqrt{e-x^2} \end{array} \right\}$$

על $\iint_D \frac{\ln(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} dA$ דוגמא:

מתקיים כי $D_1 + D_2 = D = \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq e \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$ (ולכן כדאי לעבור לקואורדינטות פולריות). ואז

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_1^e \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln r}{r^2} r d\theta dr = \int_1^e \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln r}{r} d\theta dr = \frac{\pi}{4} \ln(r)^2 \Big|_1^e = \frac{\pi}{4}$$